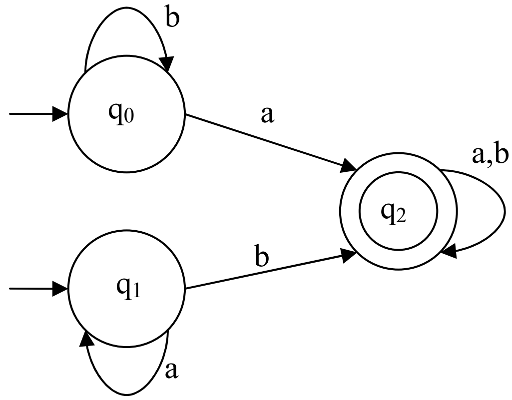
1. בשאלה זו נגדיר אוטומט מסוג חדש – אוטומט כולל. לאוטומט כולל A מבנה זהה לאוטומט אי-דטרמיניסטי. כלומר, $A=\langle Q,\Sigma,Q_0,\delta,F\rangle$ ו- $\delta: Q\times\Sigma\rightarrow 2^Q$.

השפה של אוטומט כולל מכילה בדיוק את כל המילים w כך ש**כל הריצות** של A על w הן מקבלות.

נתבונן באוטומט הכולל A הבא:



שימו לב ש- $bbb\notin L(A)$ (הריצה $q_1q_2q_2q_2$ של A על w מקבלת, אבל הריצה $q_0q_0q_0q_0$ דוחה).

א. מהי $L(A)$? אין צורך להוכיח.
ניתן לכתוב תיאור מילולי או ביטוי רגולרי המתאר את השפה.
<u>תשובה</u>:
כל המילים מעל{a,b} המכילות גם a וגם b.
הביטוי הרגולרי: $(a+b)^* a (a+b)^* b (a+b)^* + (a+b)^* b (a+b)^* a (a+b)^*$.

ב. הוכיחו או הפריכו:
לכל שפה $L\subseteq\Sigma^*$ מתקיים: L רגולרית אמ"מ L ניתנת לזיהוי על ידי אוטומט כולל.
<u>תשובה</u>:
נוכיח את שני הכיוונים:
i) אם L רגולרית אז קיים DFA שמזהה אותה, וכיון שכל DFA הוא גם אוטומט כולל, יש אוטומט כולל שמזהה אותה.
ii) בהינתן אוטומט כולל, ניתן לבנות לו DFA שקול בדרך דומה למה שראינו עבור NFA. נבנה את אוטומט החזקה, שבו כל מצב הוא קבוצת מצבים של האוטומט המקורי, המצב התחילי והמעברים מוגדרים כמו בבניה עבור NFA, והמצבים המקבלים הם כל הקבוצות שבהן **כל המצבים** הם מקבלים (בניגוד לבניה עבור NFA שבה קבוצה היא מקבלת אם **קיים** בה מצב מקבל).
לכן, אם שפה ניתנת לזיהוי על ידי אוטומט כולל אז היא רגולרית.

2. עבור שפה $L\subseteq\{0,1\}^*$ ושתי שפות $L_0,L_1\subseteq\Sigma^*$ מעל א"ב Σ כלשהו, השפה $SELECT(L_0,L_1,L)$ מכילה בדיוק את כל המילים $w\in\Sigma^*$ כך שיש ב- L מילה $b_1b_2...b_k$ באורך $0\le k$ וניתן לחלק את w ל- k מילים $w=w_1w_2...w_k$, כך שלכל $1\le i\le k$ מתקיים $w_i\in L_{b_i}$.

לדוגמה, עבור $L=01^*0$, ו- $L_0=(bb)^*, L_1=\{a^nb^n: n\ge 0\}$ מעל $\Sigma=\{a,b\}$, המילה $w=bbaabbbbbb$ שייכת ל- $SELECT(L_0,L_1,L)$ כי $010\in L$ ו- $w=w_1w_2w_3$ עבור $w_1=bb\in L_0$, $w_2=aabb\in L_1$ ו- $w_3=bbbb\in L_0$.

הוכיחו או הפריכו:
לכל L_0, L_1, Σ, L, אם L, L_0 ו-L_1 חסרות הקשר אז גם $SELECT(L_0, L_1, L)$ חסרת הקשר.

<u>תשובה:</u>
הטענה נכונה.
בהינתן דקדוקים חסרי-הקשר G, G_0 ו-G_1 עבור L, L_0 ו-L_1, בהתאמה, ניתן לבנות בקלות דקדוק חסר-הקשר G' עבור $SELECT(L_0, L_1, L)$.
נניח בה"כ שקבוצות המשתנים של הדקדוקים הן זרות, ויהיו S_0 ו-S_1 המשתנים התחיליים של L_0 ו-L_1, בהתאמה, אז $G' = \langle \Sigma, V', S, R' \rangle$ כאשר:

- V' היא איחוד כל המשתנים של שלושת הדקדוקים.
- R' היא איחוד כל כללי הגזירה של שלושת הדקדוקים, כאשר בכללים שמקורם ב-G, מחליפים את הטרמינל 0 ב-S_0 ואת הטרמינל 1 ב-S_1.

למעשה, ניתן לראות זאת כחלוקה של תהליך גזירת המילים ב-G' לשני שלבים. תחילה גוזרים ע"י G מילה ב-L מעל $\{0,1\}$, ואז מחליפים במילה זו כל 0 ב-S_0 וכל 1 ב-S_1, וממשיכים לגזור ע"י G_0 ו-G_1, בהתאמה.
זו בדיוק הדרך שבה מוגדרת השפה $SELECT(L_0, L_1, L)$.

3. עבור קבוצה סופית של שפות $C = \{L_1, L_2, L_3, ..., L_n\}$, נגדיר $L_C = \{\langle M \rangle : L(M) \in C\}$.
קבעו אם הטענות הבאות נכונות ונמקו קביעתכם.

א. אם כל השפות ב-C כריעות אז גם L_C כריעה.
ב. אם $\Sigma^* \notin C$ אז L_C ניתנת לזיהוי.
ג. קיימת שפה $L \subseteq \Sigma^*$ כך שאם $C = \{L\}$ אז L_C אינה ניתנת לזיהוי.

<u>תשובה:</u>
L_C היא תכונה סמנטית של מכונות טיורינג. לכן, נשתמש במשפט Rice ובהוכחה שלו:

א. **לא נכון**. על פי משפט Rice, אם C לא טריויאלית (למשל, היא מכילה שפה יחידה כריעה) אז L_C אינה כריעה.
ב. **לא נכון**. בהוכחה של משפט Rice ראינו שאם C לא טריויאלית ומכילה את השפה הריקה (וכיון ש-$\Sigma^* \notin C$, אם C מכילה את השפה הריקה אז היא לא טריויאלית) אז L_C אינה ניתנת לזיהוי. ניתן להראות זאת ע"י שנראה $\overline{A_{TM}} \le L_C$.
לכל קלט $\langle M, w \rangle$ ל-$\overline{A_{TM}}$, הרדוקציה תחזיר את המכונה M' הפועלת באופן הבא.
בהינתן קלט x, M' מריצה את M על w, ומקבלת אמ"מ M מקבלת.
לכן, אם M לא מקבלת את w $(\langle M, w \rangle \in \overline{A_{TM}})$ אז M' דוחה כל קלט, כלומר היא מקבלת את השפה הריקה, ולכן שייכת ל-L_C. מצד שני, אם M מקבלת את w $(\langle M, w \rangle \notin \overline{A_{TM}})$ אז M' מקבלת כל קלט, כלומר היא מקבלת את Σ^*, ולכן לא שייכת ל-L_C.
דרך נוספת – אם C מכילה את השפה הריקה בלבד, אז $L_C = E_{TM}$, וראינו ש-$E_{TM} \notin RE$.

ג. **נכון**. L היא השפה הריקה. עיינו בסעיף הקודם.

4. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה/לא נכונה/לא ידוע בשלב זה, ונמקו.

א. קיימת שפה $L \in R$ כך ש- $R \not\ni \overline{L}$, כלומר $\overline{L} \notin R$.
לא נכון. R סגורה להשלמה.

ב. קיימת שפה $L \in RE$ כך ש- $\overline{L} \notin RE$.
נכון. A_{TM}.

ג. קיימת שפה $L \in PSPACE$ כך ש- $3SAT \leq_P L$.
נכון. $3SAT$ עצמה (וכן כל שפה ב- NP) היא ב- $PSPACE$, והרדוקציה היא הזהות.

ד. קיימת שפה $L \in NL$ כך ש- $L \notin P$.
לא נכון. $NL \subseteq P$ ($PATH$ שפה NL-שלמה, והיא ב- P).

ה. קיימת שפה $L \in P$ כך ש- $L \notin coNP$.
לא נכון. $P = coP \subseteq coNP$.

ו. קיימת שפה ב- $PSPACE$ שאינה $PSPACE$-שלמה.
נכון. השפה הריקה ב- $PSPACE$ ומאף שפה אחרת אין רדוקציה אליה (שכן אין לאן להעביר מילים שהן בשפה). לכן היא אינה $PSPACE$-שלמה.

5. בגרף מכוון $G = \langle V, E \rangle$, קבוצת קדקדים $D \subseteq V$ נקראת **קבוצה שולטת** בגרף אם לכל קדקד $v \in V$ מתקיים לפחות אחד מהבאים:
i) $v \in D$.
ii) קיים קדקד $u \in D$ כך ש- $(u,v) \in E$ (כלומר, יש צלע מ- u ל- v).

נגדיר $DOM = \{\langle G,k \rangle : k$ גרף מכוון עם קבוצה שולטת בגודל לכל היותר $G\}$.
הוכיחו כי DOM NP-שלמה.

<u>תשובה:</u>

- $DOM \in NP$ - בהינתן עד - קבוצת קדקדים D, נחשב את קבוצת השכנים שלה, ונבדוק ששתי הקבוצות יחד מכסות את V, כל זה בזמן פולינומי.
- נראה רדוקציה $VC \leq_P DOM$ (Vertex Cover), וראינו ש- VC היא NP-קשה.
בהינתן קלט $\langle G,k \rangle$ ל- VC, כאשר $G = \langle V,E \rangle$, הרדוקציה תחזיר את $\langle G',k \rangle$ כאשר $G' = \langle U,F \rangle$ כדלהלן:
  - $U = \{u_v : v \in V\} \cup \{u_e : e \in E\}$ (יש קדקד עבור כל קדקד וכל צלע ב- G - קדקדי v וקדקדי e).
  - $(u_v, u_e) \in F$ (יש צלע מ- u_v ל- u_e) אם הקדקד v נוגע בצלע e ב- G.

  בנוסף, לכל $v, v' \in V$, יש צלע מ- u_v ל- $u_{v'}$.

טענה: $\langle G',k\rangle \in DOM \leftrightarrow \langle G,k\rangle \in VC$.

רעיון ההוכחה:

($\rightarrow$) תהי $S \subseteq V$ כיסוי בגודל לכל היותר k ב-G, אז הקבוצה $D=\{u_v : v\in S\}$, שגודלה כגודל הכיסוי, שולטת ב-G'. D שולטת בכל קדקדי ה-v, כי הם קליקה ולפחות אחד מהם ב-D, והיא שולטת בכל קדקדי ה-e כי S כיסוי, ולכן לכל צלע e יש קדקד מ-S שנוגע בה.

($\leftarrow$) תהי $D \subseteq U$ קבוצה שולטת ב-G' בגודל לכל היותר k, נגדיר את הקבוצה $S \subseteq V$ כקבוצת [1]כל הקדקדים v כך ש-$u_v \in D$, ובנוסף, [2]לכל $u_e \in D$, נוסיף ל-S אחד מהקדקדים שנוגעים ב-e (אם אין ב-S אחד מהם), ברור שגודל S לכל היותר כגודל D, כלומר k.

כעת נוכיח ש-S היא כיסוי. כיון ש-D שולטת ב-G', לכל קדקד $u \in U$, ובפרט, לכל קדקד u_e המתאים לצלע e, מתקיים לפחות אחד מהבאים:

- $u_e \in D$, ואז לפי (2) יש ב-S קדקד שנוגע בצלע e.
- יש $u_v \in D$ כך שיש ב-G' צלע מ-u_v ל-u_e, אבל זה אומר שב-G, הקדקד v נוגע בצלע e, וכיון שלפי (1) $v \in S$, יש ב-S קדקד שנוגע בצלע e.

6. נגדיר:

$$E_{NFA}=\{\langle A\rangle : \text{ריקה } L(A) \text{ ו- } NFA \text{ הוא } A\}$$

$$E_{DFA}=\{\langle A\rangle : \text{ריקה } L(A) \text{ ו- } DFA \text{ הוא } A\}$$

$$ALL_{NFA}=\{\langle A\rangle : \ L(A)=\Sigma^* \text{ ו- } NFA \text{ הוא } A\}$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה/לא נכונה/לא ידוע בשלב זה, ונמקו. במקרה שמצב נכונות הטענה לא ידוע, פרטו את ההשלכות של נכונות הטענה על תורת החישוביות.

א. $E_{NFA} \le_P E_{DFA}$.

<u>תשובה:</u>

נכון. שימו לב שמדובר ברדוקציה פולינומית. כיון ש-$E_{NFA} \in NL$ (יוכח להלן), ו-$NL \subseteq P$, הרדוקציה יכולה להכריע את הקלט ל-E_{NFA}, ולייצר DFA מתאים.

כדי להוכיח ש-$E_{NFA} \in NL$, נשים לב תחילה, ש-$\overline{E_{NFA}} \in NL$ כיון ש-$A \in \overline{E_{NFA}}$ אמ"מ ב-A יש מצב מקבל ישיג מהמצב התחילי, וכיון ש-$NL = co-NL$, גם $E_{NFA} \in NL$.

ב. $ALL_{NFA} \le_L E_{NFA}$.

<u>תשובה:</u>

לא נכון. ALL_{NFA} היא שפה $PSPACE$-שלמה. יותר מכך, מכל שפה ב-$PSPACE$ יש רדוקציה במקום לוגריתמי לשפה זו. הרדוקציה היא אותה רדוקציה שלמדנו בכיתה (בכיתה ציינו רק שהיא פולינומית אך למעשה ניתן לממשה במקום לוגריתמי). לכן ALL_{NFA} היא $PSPACE$-שלמה גם תחת רדוקציות לוגריתמיות (בבדיקה נתחשב גם במי שלא עמד על נקודה עדינה זו). בנוסף, $E_{NFA} \in NL$. ולכן, לו היתה רדוקציה $ALL_{NFA} \le_L E_{NFA}$ אז היינו מקבלים $PSPACE \subseteq NL$. כיון שעפ"י משפט סאביץ' מתקיים $NL \subseteq SPACE(\log^2 n)$, מנכונות הטענה ינבע $PSPACE \subseteq SPACE(\log^2 n)$, בסתירה למשפט ההירככיה.