1א	1ב	2א	2ב	2ג	2ד	סה"כ

טבלה לשימוש הבודקים:

מספר תעודת זהות

מבחן בחישוביות
תשס"ז מועד א'

לא לבדוק שאלה מספר 1 2 3 4 5 6

1. בשאלה זו אין צורך בהוכחה.
עבור א"ב Σ, השפה L מעל Σ מוגדרת באופן הבא:
$L = \{w = w_1 w_2 ... w_n \in \Sigma^* : w_i \neq w_{i+1}$ מתקיים $1 \leq i < n$ ולכל, $n \geq 1\}$.

א. מהו מספר מחלקות השקילות לפי מייהיל-נרוד (Myhill-Nerode) של השפה L מעל האב $\Sigma_2 = \{1,2\}$?
כתבו נציג מכל מחלקת שקילות.

<u>תשובה:</u>
יש 4 מחלקות:

- הקבוצה המכילה את ε (נציג: ε).
- קבוצת כל המילים המסתיימות ב-1 ואינן מכילות שני מופעים רצופים של אותה אות (נציג: 1).
- קבוצת כל המילים המסתיימות ב-2 ואינן מכילות שני מופעים רצופים של אותה אות (נציג: 2).
- קבוצת כל המילים המכילות שני מופעים רצופים של אותה אות (נציג: 11).

ב. מהו מספר מחלקות השקילות לפי מייהיל-נרוד (Myhill-Nerode) של השפה L מעל האב $\Sigma_m = \{1,2,...,m\}$?
כתבו נציג מכל מחלקת שקילות.

<u>תשובה:</u>
יש $m+2$ מחלקות:

- הקבוצה המכילה את ε (נציג: ε).
- לכל $1 \leq i \leq m$, קבוצת כל המילים המסתיימות ב-i ואינן מכילות שני מופעים רצופים של אותה אות (סה"כ m מחלקות שקילות) (נציג: i).
- קבוצת כל המילים המכילות שני מופעים רצופים של אותה אות (נציג: 11).

2. עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל הא"ב $\Sigma=\{1,2,3,4\}$, קבעו אם היא חסרת הקשר או לא.

א. $L_1=\{1^a2^b3^c4^d : a,b,c,d\geq 0, a=b, c=d\}$.

<u>תשובה:</u>
השפה חסרת הקשר.
נראה דקדוק חסר הקשר היוצר את השפה:

$S\rightarrow XY$

$X\rightarrow 1X2\,|\,\varepsilon$

$Y\rightarrow 3Y4\,|\,\varepsilon$

ב. $L_2=\{1^a2^b3^c4^d : a,b,c,d\geq 0, a=c, b=d\}$.

<u>תשובה:</u>
השפה אינה חסרת הקשר.
נוכיח שלמת הניפוח לא מתקיימת. נניח בשלילה ש-L_2 חסרת הקשר, ויהי p קבוע הניפוח של L_2. נתבונן במילה $1^p2^p3^p4^p$. לפי למת הניפוח קיימת חלוקה של המילה ל-$uvxyz$ כך ש-$|vy|>0$, $|vxy|\leq p$ ולכל $i\geq 0$ מתקיים $uv^ixy^iz\in L_2$. כיון ש-$|vxy|\leq p$, ברור שהחלק שעובר ניפוח יכלול סוג אחד של אותיות או שני סוגים סמוכים, ולכן הוא לא יכול לכלול '1' ו-'3' יחד, וכן לא '2' ו-'4' יחד. מכאן נובע שכל ניפוח לא טריויאלי ($i\neq 1$) ייתן מילה שאינה בשפה, בסתירה ללמת הניפוח.

ג. $L_3=\{1^a2^b3^c4^d : a,b,c,d\geq 0, a=d, b=c\}$.

<u>תשובה:</u>
השפה חסרת הקשר.
נראה דקדוק חסר הקשר היוצר את השפה:

$S\rightarrow 1S4\,|\,X$

$X\rightarrow 2X3\,|\,\varepsilon$

ד. $L_4=\{w\in\Sigma^* : \#_1(w)=\#_3(w),\ \#_2(w)=\#_4(w)\}$.
עבור $\sigma\in\Sigma$, $\#_\sigma(w)$ מציין את מספר ההופעות של האות σ במילה w.

<u>תשובה:</u>
השפה אינה חסרת הקשר.
נשים לב שעבור השפה הרגולרית $L_5=\{1^*2^*3^*4^*\}$ מתקיים $L_2=L_4\cap L_5$. לכן, אם L_4 היתה חסרת הקשר אז L_2 גם היתה חסרת הקשר (ראינו שמחלקת השפות חסרות ההקשר סגורה תחת חיתוך עם שפות רגולריות), בסתירה לסעיף ב.

3. תהי $f:\Sigma^* \to \Sigma^*$ פונקציה ניתנת לחישוב, ותהי $B \subseteq \Sigma^*$ שפה מעל Σ. נתון ש - $B \in \mathrm{RE}$.
עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, הוכיחו את הטענה או הציגו דוגמה נגדית.

א. $f(B) = \{f(x) : x \in B\} \in \mathrm{RE}$.

<u>תשובה:</u>
הטענה נכונה.
תהי M_B מכונת טיורינג המזהה את B. נתאר מכונת טיורינג M_1 שמזהה את $f(B)$.
בהינתן קלט w, M_1 תעבור על כל $x \in \Sigma^*$ במקביל, ותבדוק אם קיימת $x \in B$ שעבורה $f(x) = w$, ואם כן – תקבל.
כלומר, בשלב i, M_1 תריץ את M_B על כל אחת מ-i המילים הראשונות ב-Σ^* למשך i צעדים, ועבור כל המילים x ש-M_B קיבלה (כלומר $x \in B$), M_1 תחשב את $f(x)$. אם עבור אחת מהמילים האלו מתקיים $f(x) = w$ אז M_1 תקבל, ואחרת, תעבור לשלב $i+1$.
אכן, אם $w \in f(B)$ אז קיימת $x \in B$ כך ש-$f(x) = w$, וכיון שכל שלב הוא סופי, מתישהו M_1 תגיע לשלב שבו היא תריץ את M_B על x מספיק צעדים כדי ש-M_B תקבל את x, ואז M_1 תחשב ש-$f(x) = w$, ותקבל.

ב. $f^{-1}(B) = \{y : f(y) \in B\} \in \mathrm{RE}$.

<u>תשובה:</u>
הטענה נכונה.
תהי M_B מכונת טיורינג המזהה את B. נתאר מכונת טיורינג M_2 שמזהה את $f^{-1}(B)$.
בהינתן קלט z, M_2 תחשב את $f(z)$, תריץ את M_B על $f(z)$ ותקבל אם M_B מקבלת.
אכן, אם $z \in f^{-1}(B)$, אז $f(z) \in B$, לכן M_B תקבל בשלב כלשהו את $f(z)$, ואז גם M_2 תקבל את z.

4. עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו מהי המחלקה הקטנה ביותר המכילה אותה, מבין המחלקות: R, RE, coRE, או שהשפה אינה נמצאת באף אחת מהמחלקות הללו.

א. $L_{\exists even}=\{\langle M\rangle : M$ מכונת טיורינג, ו- $L(M)$ מכילה לפחות מילה אחת באורך זוגי$\}$.

<u>תשובה:</u>

$L_{\exists even}\in \mathrm{RE}\setminus \mathrm{R}$.

ראשית, כיון שהתכונה עליה מתבססת השייכות לשפה היא תכונה סמנטית לא טריויאלית של מכונות טיורינג, עפ״י משפט רייס השפה לא כריעה.

השפה ב-RE כיון שניתן לזהות אותה על ידי הרצה במקביל של M על כל המילים הזוגיות. כלומר, בשלב i נריץ את M על כל אחת מ-i המילים באורך זוגי הראשונות ב- Σ^* למשך i צעדים, ונקבל אם M מקבלת.

אכן, אם $\langle M\rangle\in L_{\exists even}$ אז קיימת מילה באורך זוגי ש- M מקבלת. כיון שכל שלב הוא סופי, מתישהו נגיע לשלב שבו נריץ את M על מילה זו מספיק צעדים כדי ש- M תקבל, ואז נקבל.

ב. $L_{no-trans}=\{\langle M,q_1,q_2,w\rangle : M$ אינה עוברת מ- q_1 ל- q_2 במהלך ריצתה על $w\}$.

<u>תשובה:</u>

$L_{no-trans}\in \mathrm{coRE}\setminus \mathrm{R}$.

ראשית, כדי להוכיח ש- $L_{no-trans}\in \mathrm{coRE}$, נתאר מכונה שמזהה את השפה המשלימה:

$\overline{L_{no-trans}}=\{\langle M,q_1,q_2,w\rangle : M$ **עוברת** מ- q_1 ל- q_2 במהלך ריצתה על $w\}$.

המכונה פשוט תריץ את M על w ותקבל אם M עוברת מ- q_1 ל- q_2 במהלך הריצה.

כדי להוכיח ש- $L_{no-trans}\notin \mathrm{R}$ נראה $\overline{A_{TM}}\le_m L_{no-trans}$ (זה מוכיח אפילו ש- $L_{no-trans}\notin \mathrm{RE}$).

בהינתן קלט $\langle M,w\rangle$ נבנה M' ונגדיר זוג מצבים q_1 ו- q_2 כך ש- M לא מקבלת את w אמ״מ M' לא עוברת מ- q_1 ל- q_2 בריצתה על w.

M' תהיה זהה ל- M מלבד שינוי קל: את q_{acc} המקורי של M נחליף במצב חדש q_1 (כלומר כל המעברים שעוברים ב- M ל- q_{acc} עוברים ב-M' ל- q_1), נוסיף מצב חדש q_2 שיהיה המצב המקבל של M', ולכל אות $a\in\Gamma$ נוסיף מעבר $\delta(q_1,a)=\langle q_2,a,R\rangle$.

(כלומר, אם הגענו ל- q_1, תמיד עוברים מיד ל- q_2).

כעת נוכיח את נכונות הרדוקציה.

M לא מקבלת את w $\leftrightarrow$ אף ריצה של M על w לא מגיעה ל- q_{acc} $\leftrightarrow$ אף ריצה של M' על w לא מגיעה ל- q_1 $\leftrightarrow$ אף ריצה של M' על w לא עוברת מ- q_1 ל- q_2.

5. נתונה קבוצה S של שחקני דמקה.
ארקדי מעוניין בקיום משחקים בין שחקנים ב- S.
נתונה פונקציה סימטרית $f:S\times S\rightarrow\{0,1,\ldots,99\}$ המציינת את עלות המפגש בין השחקנים. כלומר, לכל $x,y\in S$, המספר $f(x,y)$ שווה ל- $f(y,x)$ ומתאר כמה שקלים ישלם ארקדי כדי לקיים את המפגש בין x ל- y.
אין הגבלה על מספר המשחקים שבהם יכול להשתתף שחקן.

עבור כל אחת מהבעיות הבאות קבעו אם היא ב-P או שהיא NP-שלמה.

א. בהינתן שני מספרים שלמים $k,t\geq 0$, האם יכול ארקדי לקיים k משחקים בעלות כוללת של לכל היותר t שקלים?

<u>תשובה:</u>
הבעיה ב-P.
הפתרון הוא למצוא את מחיריהם של k המשחקים הזולים ביותר מבין $|S|(|S|-1)/2$ המשחקים האפשריים (אלגוריתם נאיבי עושה זאת ב-$O(k\cdot|S|^2)$), ולבדוק אם סכומם קטן מ-t או שווה לו.

ב. בהינתן שני מספרים שלמים $k,t\geq 0$, האם יכול ארקדי לבחור k שחקנים מתוך S כך שהעלות של טורניר שבו כל k השחקנים משחקים ביניהם (כלומר, בטורניר יתקיימו $k(k-1)/2$ משחקים, כך שכל שחקן שנבחר משחק משחק אחד נגד כל אחד משאר השחקנים שנבחרו) היא לכל היותר t שקלים?
רמז: שימו לב שייתכן ש- $f(x,y)=0$.

<u>תשובה:</u>
הבעיה NP-שלמה.
ראשית, בהינתן k השחקנים (עד קצר), קל לבדוק שעלות הטורניר ביניהם אינה חורגת מ-t. לכן הבעיה ב- NP.
כדי להראות שהבעיה NP-קשה, נראה רדוקציה מ-CLIQUE.
בהינתן גרף לא מכוון $G=\langle V,E\rangle$ ומספר k, קבוצת השחקנים S תהיה קבוצת הקדקדים V, ועלות מפגש בין $u,v\in V$ תהיה 0 אם $(u,v)\in E$ ו-1 אחרת.
כעת לא קשה לראות שיש ב- G k-קליק אמ"מ אפשר לבחור k שחקנים שעלות הטורניר ביניהם היא לכל היותר 0.

6. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה/לא נכונה/לא ידוע בשלב זה. במקרה שמצב נכונות הטענה לא ידוע, פרטו את ההשלכות של נכונות הטענה על תורת החישוביות.

א. קיימת שפה $L \in coNP$ כך שאם $L \in P$ אז $3SAT \in P$.

<u>תשובה:</u>
נכון.
תהי L שפה $coNP$-שלמה כלשהי. אם $L \in P$ אז $P = coNP$. כיוון ש-P סגורה תחת השלמה, $P = coNP$ גורר $P = NP$ (כי אז $NP = co-coNP = co-P = P$), ולכן $3SAT \in P$.

ב. קיימת שפה $L \in coPSPACE$ כך ש-$L \leq_P 3SAT$.

<u>תשובה:</u>
נכון.
ראשית, $PSPACE$ סגורה תחת השלמה, לכן $coPSPACE = PSPACE$.
שנית, $NP \subseteq NPSPACE = PSPACE$. וכיון שלכל $L \in NP$ מתקיים $L \leq_P 3SAT$, נובע שכל $L \in NP$ מקיימת את תנאי הטענה.

ג. קיימות שפות $L_1 \in EXPTIME-complete$ ו-$L_2 \in P$ כך שיש שפה שלישית L_3 המקיימת $L_1 \leq_P L_3$ וגם $L_3 \leq_P L_2$.
תזכורת: שפה L היא $EXPTIME-complete$ אמ"מ (1) $L \in EXPTIME$ ו-(2) לכל שפה $L' \in EXPTIME$ מתקיים $L' \leq_P L$.

<u>תשובה:</u>
לא נכון.
ראינו שרדוקציה פולינומיאלית מקיימת טרנזיטיביות. לכן, אם קיימות שפות כנ"ל אז $L_1 \leq_P L_2$.
מכך ש-$L_2 \in P$ נובע $L_1 \in P$. ואז $L_1 \in EXPTIME-complete$ גורר $EXPTIME \subseteq P$, בסתירה למשפט ההירככיה.