
מספר תעודת זהות

לא לבדוק שאלה מספר 1 2 3 4 5 6

מבחן בחישוביות מכונות ושפות פורמליות
תשס"ז מועד ב'

מרצה: פרופ' אורנה קופרמן
מספר קורס: 67521

- זמן הבחינה שלוש שעות.
- יש לענות על **חמש מתוך שש** השאלות במבחן. לכל שאלה 20 נקודות.
- לבחינה שני חלקים. ודאו שקיבלתם את שניהם ורשמו על שניהם את מספר תעודת הזהות שלכם. בנוסף, הקיפו בעיגול את מספר השאלה שבחרתם לא לענות עליה.
- כתבו את תשובותיכם על טופס המבחן.
- בשאלות בחירה **נכון/לא נכון** <u>רשמו את התשובה שבחרתם בכתב</u>.
- אלא אם מצוין אחרת, עליכם להסביר בקצרה (בתוך התחום המוקצה לכל שאלה) את תשובותיכם. תשובות ללא הסבר לא ינוקדו. ההסבר צריך לכלול את הנקודות העיקריות בהוכחה מבלי להיכנס לפרטים טכניים, סימונים וכיוצא באלה. אם ההסבר שלכם ניתן ע"י דוגמא נגדית, עליכם לציין במפורש מהי הדוגמא ובקווים כלליים כיצד היא סותרת את הטענה.

בהצלחה

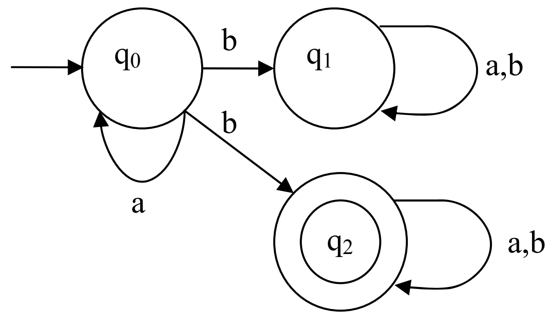
הטבלה לשימוש הבודקים

3א	3ב	3ג	4א	4ב	4ג	4ד	4ה	4ו	5	6א	6ב	סה"כ

1. עבור אוטומט סופי לא דטרמיניסטי A, השפה המטורפת של A, המסומנת CL(A), היא קבוצת המילים $w\in\Sigma^*$ עבורן יש ל A ריצה מקבלת על w, וכן יש ל A ריצה שאינה מקבלת על w.
בפרט נשים לב, כי לכל אוטומט סופי דטרמיניסטי A מתקיים כי $CL(A)=\emptyset$.

לשם פשטות, נניח שהאוטומט שלם, כלומר $|\delta(q,\sigma)|\geq 1$ לכל מצב q ואות σ, כך שריצות אינן "נתקעות".

א. עבור האוטומט A המצוייר משמאל



מהי השפה CL(A)? (אין צורך לנמק).

השפה היא $a^*b(a+b)^*$, כלומר שפת כל המילים הכוללות את האות b.

ב. נסמן ב CREG את מחלקת השפות הבאה $CREG = \{ L \mid L=CL(A)$ קיים אוטומט סופי A כך ש $\}$
האם $CREG \subseteq REG$? כלומר, האם כל שפה ב CREG היא שפה רגולרית? נמקו בקצרה

התשובה היא כן, כל שפה ב CREG היא שפה רגולרית.
בהנתן אוטומט סופי לא דטרמיניסטי A, ניתן לבנות אוטומט סופי דרמיניסטי B כך ש $L(B)=CL(A)$.

הבניה דומה מאוד לבניית הדטרמיניזציה אותה למדנו בכיתה. למעשה, הבנייה זהה מלבד הגדרה שונה של קבוצת המצבים המקבלים של B. על מנת לקבל את השפה CL(A) נגדיר את קבוצת המצבים המקבלים של B להיות כל תתי הקבוצות של מצבי A שמכילות הן מצב מקבל והן מצב שאינו מקבל.

פורמלית, עבור $A = < Q, \Sigma, Q_0, \delta, F >$ נגדיר $B = < 2^Q, \Sigma, Q_0, \delta_B, F_B >$ כאשר
$\delta_B(S,\sigma) = \{ q\in Q \mid \exists s\in S\ q \in\delta(s,\sigma) \}$ ו $F_B = \{ S\subseteq Q \mid S\cap F\neq\emptyset, S\cap(Q\setminus F)\neq\emptyset\}$.

מהוכחת נכונות בניית הדטרמיניזציה נובע כי המצב בו האוטומט B נמצא לאחר קריאת מילה w, הוא בדיוק קבוצת המצבים $\{ q\in Q \mid$ יש ריצה של A על w המסתיימת ב q $\}$.
על כן, מילה w היא ב CL(A) אם ורק אם ריצת B על w מסתיימת במצב מ F_B.

2. נגדיר "דקדוק חסר הקשר עם גזירות ε" להיות דקדוק חסר הקשר שבו בנוסף לכללי גזירה רגילים, ייתכנו כללי גזירה מהסוג $\alpha \rightarrow \varepsilon$ כאשר α היא מחרוזת של משתנים וטרמינלים.

הגזירות הרגילות מופעלות כרגיל, בנוסף ניתן להפעיל גזירת $\alpha \rightarrow \varepsilon$ באופן הבאה:
אם נגזרה מחרוזת משתנים ו\או טרמינלים $\beta = \beta_1\beta_2\ldots\beta n$ אז ניתן לגזור את המחרוזות $\alpha\beta$, את המחרוזת $\beta\alpha$, ולכל i המקיים $1 \leq i \leq n-1$, ניתן לגזור את המחרוזות $\beta_1\beta_2\ldots\beta_{i-1}\alpha\beta_i\beta_{i+1}\ldots,\beta_n$.
שימו לב שאין מגבלה על מספר ההפעלות של כללי גזירה מהסוג $\alpha \rightarrow \varepsilon$.

לדוגמא, השפה הנגזרת מהדקדוק $S \rightarrow ab$, $c \rightarrow \varepsilon$ היא $c^*ac^*bc^*$.

א. מבין השפות הבאות, מהי השפה L הנגזרת מהדקדוק $S \rightarrow \varepsilon$, $ab \rightarrow \varepsilon$? יש לציין את השפה, אין צורך לנמק.

1. $(ab)^*$.
2. שפת הסוגריים המקוננים חוקית (כש a סוגר שמאלי ו b סוגר ימני).
3. כל המילים בהן מספר ההופעות של האות a שווה ההופעות של האות b.
4. השפה $\{ a^nb^n \mid n\geq 0\}$.

השפה היא 2 - שפת הסוגריים המקוננים חוקית (כש a סוגר שמאלי ו b סוגר ימני).

ב. נסמן ב $CFL\varepsilon$ את קבוצת השפות הניתנות לגזירה מדקדוק חסר הקשר עם גזירות ε,
האם $CFL = CFL\varepsilon$? (כלומר האם קבוצת השפות הניתנות לגזירה ע"י דקדוקים חסרי הקשר עם גזירות ε היא בדיוק קבוצת השפות הניתנות לגזירה באמצעות דקדוקים חסרי הקשר ללא גזירות ε).

התשובה היא חיובית, $CFL = CFL\varepsilon$.
בהנתן G_ε דקדוק חסר הקשר עם גזירות ε, נבנה דקדוק חסר הקשר G (ללא גזירות ε) עם אותה שפה.
נוסיף משתנה חדש S_ε ונבצע מספר שינויים בכללי הגזירה של G_ε.
ראשית, נחליף כל כלל גזירה מהצורה $\alpha \rightarrow \varepsilon$ בכלל גזירה $S_\varepsilon \rightarrow \alpha$.
שנית נחליף כל כלל גזירה מהצורה $A \rightarrow \beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ בכלל גזירה $A \rightarrow S_\varepsilon\beta_1S_\varepsilon\beta_2S_\varepsilon\ldots S_\varepsilon\beta_nS_\varepsilon$.
(שימו לב כי העשב זאת לכל משתנה A כולל המשתנה התחילי S ו המשתנה S_ε.
לבסוף, נוסיף כלל גזירה חדש $S_\varepsilon \rightarrow \varepsilon$.

כל מילה הנגזרת בG_ε ניתן לגזור ע"י הדקדוק G פשוט ע"י מעקב אחרי כללי הגזירה בG_ε (כאשר במקום גזירות ε משתמשים בגזירות מ S_ε), ובסופו של דבר שימוש בכלל $S_\varepsilon \rightarrow \varepsilon$ על מנת להפטר ממשתני ה S_ε המיותרים.

ההכלה בכיוון השני ברורה משום שדקדוק חסר הקשר רגיל הינו גם דקדוק חסר הקשר עם גזירות ε.

ג. עבור $n\geq 0$ ומילה $w = w_1w_2...w_n \in\Sigma^*$ באורך n, נגדיר $rev(w) = w_nw_{n-1}\ldots w_1$.
(לדוגמה $rev(abc) = cba$, ואילו $rev(\varepsilon) = \varepsilon$.)
עבור שפה $L\subseteq\Sigma^*$, נגדיר $rev(L) = \{ rev(w) \mid w\in L \}$.

האם נכון כי לכל שפה חסרת הקשר L מתקיים כי גם $rev(L)$ חסרת הקשר?

התשובה חיובית.
סמן ב G דקדוק חסר הקשר ששפתו L. נבנה דקדוק חסר הקשר ל $rev(L)$ באופן הבאה:
עבור $n\geq 0$ ומחרוזות משתנים וטרמינלים $\beta=\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ נסמן $rev(\beta)=\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_1$.
נסמן ב $rev(G)$ את הדקדוק בו לכל כלל גזירה $S\rightarrow\beta$ המופיע ב G מופיע הכלל $S\rightarrow rev(\beta)$.

עבור כל מחרוזת משתנים וטרמינלים β הניגזרת ב G מהמצב התחילי של G, (ובכלל זה כל המילים $w\in L(G)$), לא קשה להוכיח באינדוקציה על אורך הגזירה של β כי ניתן לגזור ב $rev(G)$ את $rev(\beta)$
מהמצב התחילי של $rev(G)$. על כן $rev(L)\subseteq L(rev(G))$. משום ש

$rev(rev(G))=G$ ו $rev(rev(L))=L$, נובע ש $L(rev(G))=rev(L)$, ומשום כך $rev(L)$

3. נביט בשפה $L = \{ <M> \mid L(M) = (\Sigma\,\Sigma)^*$ ו M היא מכונת טיורינג $\}$ (כלומר אוסף הקידודים של מ"ט ששפתן כל המילים באורך זוגי). האם השפה ב R, RE\R, co-RE\R, או באף אחת מהמחלקות הללו?

השפה אינה באף אחת מהמחלקות הללו.
הוכחה ברדוקציה מ $ALL_{TM} = \{ <M> \mid L(M) = \Sigma^* \}$ אשר ראינו בתרגיל שאינה ב RE ואינה ב co-RE.

בהנתן (קלט ל ALL_{TM}) $<M>$, נבנה קלט $<N>$ ל L באופן הבאה:

1. בהנתן קלט w המכונה N בודקת אם אורך w זוגי.
   a. אם אורך w אי זוגי, N דוחה.
   b. אם אורך w זוגי, נסמן $w = w_1w_2\ldots w_{2k}$ ו $u = w_1w_2\ldots w_k$ (כלומר u היא הרישא של w שאורכה חצי מאורך w).
2. N מריצה את M על u.
   a. אם M מקבלת את u אז N מקבלת את w.
   b. אם M דוחה את u אז N דוחה את w.
   (כמובן שאם M רצה לעד כך גם N).

לא קשה לראות כי ניתן לחשב את N בהנתן M, ועל כן הרדוקציה חשיבה.

נראה כי $L(M) = \Sigma^*$ אמם $L(N) = (\Sigma\,\Sigma)^*$.
ברור, על פי שלב 1, כי $L(N) \subseteq (\Sigma\,\Sigma)^*$. נראה כי $L(N)=(\Sigma\,\Sigma)^*$ אמם $L(M)=\Sigma^*$.

אם $L(M)=\Sigma^*$ אז לכל מילה w באורך זוגי, המכונה M תקבל את u (כלומר הרישא של w שאורכה חצי מאורך w) ועל כן גם N תקבל אותה.
אם, לעומת זאת, $L(M)\neq\Sigma^*$ אז קיימת מילה x שאינה ב $L(M)$. המילה xx היה מילה באורך זוגי, אך לא תתקבל ע"י N בשלב 2 (משום ש x לא מתקבלת ע"י M).

4. נביט בשתי שפות $L_1,L_2 \subseteq \Sigma^*$, כך ש $L_1 \in R$ ואילו $L_2 \in RE \setminus R$.

עבור ההמחלקות הבאות, מה היא המחלקה הקטנה ביותר אשר ניתן להגיד בוודאות כי המחלקה מכילה את השפה (לכל L_1 ו L_2 כנ"ל) כלומר, האם השפה ב R, $RE \setminus R$, $co\text{-}RE \setminus R$, או באף אחת מאלה?

א. $L_1L_2 = \{ w = uv \mid u \in L_1, v \in L_2 \}$.

השפה ב $RE \setminus R$.

ראשית נראה כי השפה ב RE . לצורך כך נבנה מכונת טיורינג המזהה אותה:

נסמן ב M_1 מכונת טיורינג המכריעה את L_1 וב M_2 מכונת טיורינג המזהה את L_2 .

לכל חלוקה אפשרית של w לרישא u וסיפא v כך ש w=uv, נריץ מבמקביל (בשיטות שלמדנו בכיתה) את הבדיקה הבאה:.

בהנתן חלוקה w=uv לרישא u וסיפא v, ראשית נריץ את M_1 על u. אם u אינה ב L_1, נדחה חלוקה זו. אחרת, כלומר אם $u \in L_1$, נריץ את M_2 על v. אם M_2 מקבלת את v נקבל את החלוקה.

אם אחת החלוקות (הנבדקות במקביל) מתקבלת, נקבל את המילה w (מייד כשמקבלת החלוקה).

אם כל החלוקות נדחות, נדחה את החלוקה (כמובן, ייתכן גם שהריצה תמשך לעד).

לא קשה לראות שזו פרוצדורת זיהוי ל L_1L_2.

השפה אינה ב RE על פי $L_1 = \{ \varepsilon \}$ ו $L_2 = A_{TM}$.

ב. $L_1 \setminus L_2$.

השפה ב $co\text{-}RE \setminus R$.

נביט בשפה המשלימה שהיא $(\Sigma^* \setminus L_1) \cup L_2$ (שימו לב ש $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap (\Sigma^* \setminus L_2)$).

משום ש $L_1 \in R$ כך גם $(\Sigma^* \setminus L_1)$ (שכן R סגור להשלמה).

השפה המשלימה אינה בהכרח בR על פי הדוגמא $L_1 = \Sigma^*$ ו $L_2 = A_{TM}$.

על מנת לראות שהשפה המשלימה ב RE, נסמן ב M_1 מכונה המכריעה את $(\Sigma^* \setminus L_1)$ וב M_2 מכונה המזהה את L_2.

המכונה הבאה מזהה את השפה המשלימה:

בהנתן קלט x נריץ את M_1 על x. M_1 תמיד עוצרת, אם M_1 מקבלת נקבל.

אם M_1 דוחה נריץ את M_2 על x ונענה כמוה (או אם M_2 תרוץ לעד גם אנו נרוץ לעד).

ברור כי אם x ב $(\Sigma^* \setminus L_1)$ המכונה תקבל בשלב ראשון, ואם x ב L_2 המכונה תקבל בשלב שני.

כמוכן ברור שאם x מתקבל, אז x ב $(\Sigma^* \setminus L_1)$ או ב L_2, ולכן בשפה המשלימה.

לכן השפה המשלימה לשפה $L_1 \setminus L_2$ נמצאת ב $RE \setminus R$. מכאן $L_1 \setminus L_2$ ב $co\text{-}RE \setminus R$.

5. תפריט מסעדה מורכב מ $n>0$ מנות $d_1,d_2,\dots,d_n$, לכל $i\in\{1,\dots,n\}$ מפורטים המחיר p_i וכמות הסידן c_i של המנה d_i.

א.בהנתן תפריט מסעדה, וכן מחיר p וכמות סידן c, מטרתנו היא לברר האם ניתן להרכיב ארוחה $M\subseteq\{1,\dots,n\}$ כך שמחיר הארוחה $P(M)=\Sigma_{i\in M}\,p_i$ קטן או שווה p בעוד כמות הסידן בארוחה

$C(M)=\Sigma_{i\in M}\,c_i$ גדולה או שווה c.

האם הבעיה ב P או שהבעיה NP שלמה? נמקו בקצרה.

(פורמלית, נגדיר שפה

$L = \{ <(d_1,p_1,c_1),(d_2,p_2,c_2),\dots,(d_n,p_n,c_n), p, c > \mid$ קיימת $M\subseteq\{1\dots n\}$ כך ש $P(M)\le p$ וכ $C(M)\ge c\}$

מהי סיבוכיות L ?)

L היא שפה NP שלמה.

על מנת לראות שהשפה ב NP, די להשתנע כי ניתן לנחש קבוצה M ולוודא כי אכן $P(M)\le p$ ו $C(M)\ge c$ (דבר שקל לעשות בזמן פולינומי).

על מנת להוכיח NP קשיות, נראה רדוקציה מהבעיה SUBSET-SUM (אשר ראינו בתרגול כי היא NP-קשה).

בהנתן קלט ל SUBSET-SUM כלומר קבוצה בת $n>0$ מספרים $<s_1,\dots,s_n>$ מספר מטרה t,

ניצור קלט L באופן הבאה: לכל $i\in\{1,\dots,n\}$ נגדיר מנה d_i שמחירה s_i וכמות הסידן בה s_i. בנוסף נגדיר $p=c=t$.

לא קשה לראות כי הרדורציה פולינומית. בנוסף, לא קשה לראות כי לכל קבוצה $M\subseteq\{1,\dots,n\}$, מתקיים

$C(M)=P(M)=\Sigma_{i\in M}\,s_i$ ועל כן קיימת קבוצה M כך ש $\Sigma_{i\in M}\,s_i=t$ אםם קיימת קבוצה $M\subseteq\{1,\dots,n\}$

עבורה

$P(M)\le p$ וכן $C(M)\ge c$ (זכרו כי $p=c=t$).

ב. בהנתן תפריט מסעדה מטרתנו היא לברר האם ניתן להרכיב ארוחה $M\subseteq\{1,\dots,n\}$ כך שמחיר הארוחה

$P(M)=\Sigma_{i\in M}\,p_i$ קטן או שווה לכמות הסידן בארוחה $C(M)=\Sigma_{i\in M}\,c_i$.

האם הבעיה ב P או שהבעיה NP שלמה? נמקו בקצרה.

(פורמלית, נגדיר שפה

$L_2 = \{ <(d_1,p_1,c_1),(d_2,p_2,c_2),\dots,(d_n,p_n,c_n), > \mid$ קיימת $M\subseteq\{1\dots n\}$ כך ש $P(M)\le C(M)\}$

מהי סיבוכיות L_2 ?)

הבעיה ב P (למעשה ניתן לפתור את הבעיה בזמן ליניארי).

נשים לב, כי אם קיימת מנה d_i עבורה $p_i\le c_i$ אזי $M=\{i\}$ מקיימת $P(M)\le C(M)$, אילו אם לכל $i\in\{1,\dots,n\}$ מתקיים $p_i>c_i$ אז לכל $M\subseteq\{1,\dots,n\}$ מתקיים $P(M)\le C(M)$.

על כן כל שיש לעשות על מנת להכריע את הבעיה הוא לעבור על כל המנות ולבדוק האם קיימת מנה עבורה $p_i\le c_i$, ולא קשה לראות כי ניתן לעשות זאת בזמן ליניארי.

6.

א. יהיו $A,B,C\subseteq\Sigma^*$ שפות עליהן ידוע כי:

1. $A\leq_p B \cup (\Sigma^*\setminus C)$
2. $B\in NP$
3. $C\in P$

על אילו מבין המחלקות הבאות P, NP, co-NP ניתן לומר בוודאות כי A במחלקה ? נמקו בקצרה.

ניתן לומר בוודאות כי $A\in NP$, שכן משום ש $C\in P$ כך גם $(\Sigma^*\setminus C)$ ולכן $B,(\Sigma^*\setminus C)\in NP$ ומשום ש NP סגורה לאיחוד (יש לנחש האם הקלט מהשפה B או C ועד לכך, ולבדוק נכונות), ניתן להסיק כי $B \cup (\Sigma^*\setminus C)\in NP$ ועל כן $A\in NP$.

מצד שני אם נקבע את B ו A להיות 3SAT ואת C להיות Σ^*, אזי כל התנאים מתקיימים, ואילו לא ידוע כי $3SAT\in P$ או $3SAT\in co\text{-}NP$.

ב. תהי $L_1\in PSPACE$ שפה הניתנת להכרעה במקום פולינומיאלי, ותהי $L_2\subseteq\Sigma^*$ שפה כלשהי.

נניח כי $L_1\leq_p L_2$, האם נובע מכך כי $L_2\in PSPACE$? נמקו בקצרה.

לא.

נראה רדוקציה פולינומית מ L_1 ל A_{TM} (אשר כלל אינה ב R קל וחומר אינה ב PSPACE).

משום ש L_1 ב PSPACE, בפרט יש מכונת טיורינג M_1 ששפתה L_1.
נביט בפונקציה $f:\Sigma^*\rightarrow\Sigma^*$ אשר בהנתן קלט $w\in\Sigma^*$ מחזירה את הפלט $\langle M_1,w\rangle$ (משום ש M_1 מכונה נתונה ברור כי ניתן לחשב את f בזמן פולינומי).
על פי הגדרת A_{TM}, ברור כי $w\in L_1$ אםם $f(w) = \langle M_1,w\rangle\in L_2$, ועל כן f מהווה רדוקציה פולינומית מ L_1 ל L_2.