מבחן בחישוביות, סמסטר ב׳, מועד א׳, תשס״ד

תאריך הבחינה: 28.6.04

הנחיות כלליות:

1. כיתבו כאן ________________ את מספר תעודת הזהות שלכם.

2. בבחינה 6 שאלות, ענו על 5 מתוכן. ערך כל שאלה 20 נקודות. הקיפו בעיגול את 5 השאלות שבחרתם:

שאלה	1	2	3	4	5	6	סה״כ
ציון							

3. ענו בגוף הבחינה, בשטח המוקצה לכל שאלה. מחברת הבחינה לא תילקח ולא תיבדק. במידה והשטח המוקצה אינו מספיק, ודאו שאינכם כותבים דברים מיותרים, ורק אז השתמשו בדפים הריקים בסוף.

4. בשאלות בהן הנכם מתבקשים לנמק בקצרה, ניתן ורצוי להשתמש בעובדות שנלמדו בהרצאות, תרגולים, ותרגילי הבית. שימו לב שגם נימוק קצר צריך להתי-יחס לכל הכיוונים הדרושים.

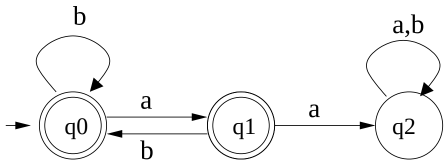
6. משך הבחינה שעתיים וחצי.

בהצלחה!

שאלה מס' 1

חלק א. (10 נקודות)

יהי A ה- DFA הבא :



1. האם $abab \in L(A)$? כן
2. האם $abbaab \in L(A)$? לא
3. מהי $L(A)$? נמקו בקצרה.

<u>תשובה:</u> אוסף כל המילים ב- $\{a,b\}^*$ אשר אינן מכילות את הרצף aa.
כוון ראשון: אם קיבלנו, כלומר הריצה הסתיימה באחד מהמצבים q_0, q_1 אזי בטח לא היה רצף של aa כי הוא היה מעביר אותנו ל q_2 שממנו כבר לא נוכל לצאת.
כוון שני: אם לא קיבלנו הריצה הסתיימה ב- q_2. למצב זה נגיע אך ורק על ידי רצף של שני a-ים.

חלק ב. (10 נקודות)

נתבונן בשפה $\{ \ L = \{w \in (a+b+c)^* : \#a(w) + \#b(w) = \#c(w)$,
כאשר עבור מילה $w \in \Sigma^*$ ואות $\sigma \in \Sigma$, נסמן ב- $\#\sigma(w)$ את מספר המופעים של האות σ במילה w.

1. כתבו דקדוק חסר הקשר עם משתנה יחיד עבור L. מלוא הנקודות ינתנו לדקדוק בעל מספר מינימלי של חוקי גזירה. אין צורך להוכיח את נכונות הדקדוק.

<u>תשובה:</u> $S \rightarrow SaScS|ScSaS|SbScS|ScSbS|\epsilon$

1. האם הדקדוד שהצעתם רב-משמעי $(ambiguous)$? נמקו בקצרה. (הסעיף בוטל)

שאלה מס׳ 2

עבור שפות L_1 ו- L_2 נגדיר את השפה

$$glue(L_1, L_2) = \{y_1 \cdot y_2 \;\; : \;\; |y_1| = |y_2|, \;\; y_1 \in L_1, \;\; y_2 \in L_2\}$$

א. (6 נקודות) נתון ש- L_1 ו- L_2 רגולריות. האם $glue(L_1, L_2)$ רגולרית? נמקו בקצרה.

<u>תשובה:</u> לא. נראה דוגמא נגדית. תהי $L_1 = a^*$ ו- $L_2 = b^*$. אזי לפי הגדרה $glue(L_1, L_2) = \{a^n b^n | n \geq 0\}$, אך ראינו בכיתה כי שפה זו אינה רגולרית בעוד ש- L_1 ו- L_2 הן כן רגולריות.

ב. (7 נקודות) נתון ש- L_1 ו- L_2 חסרות הקשר. האם $glue(L_1, L_2)$ חסרת הקשר? נמקו בקצרה.

<u>תשובה:</u> לא. נראה דוגמא נגדית. תהי $L_1 = \{a^{2n} b^n | n \geq 0\}$ ו- $L_2 = \{b^n a^{2n} | n \geq 0\}$. קל להראות שהשפות הנ"ל חסרות הקשר, למשל עבור L_1 הדקדוק $S \to aaSb | \epsilon$ גוזר אותה. אולם, ע"פ הגדרה $glue(L_1, L_2) = \{a^{2n} b^{2n} a^{2n} | n \geq 0\}$. בדומה לשפה $a^n b^n c^n$ שפה זו אינה חסרת הקשר (ע"פ למת הניפוח).

ג. (7 נקודות) נתון ש- L_1 ו- L_2 ב- $coRE$. האם $glue(L_1, L_2) \in coRE$? נמקו בקצרה.

<u>תשובה:</u> כן. יהיו M_1 ו-M_2 המכונות המזהות את $\overline{L_1}$ ו- $\overline{L_2}$ בהתאמה. נבנה מכונה M המזהה את $\overline{glue(L_1, L_2)}$: על קלט x, אם אורכו אי-זוגי M מקבלת ($glue(L_1, L_2)$ מכילה רק קלטים באורך זוגי). אחרת, M מריצה במקביל את M_1 על החצי הראשון של x ואת M_2 על החצי השני. אם לפחות אחת מהן מקבלת אז גם M מקבלת. קל לראות ש $x \in \overline{glue(L_1, L_2)}$ אמ"מ $M(x) = accept$.

שאלה מס' 3

חלק א. (12 נקודות)

נגדיר מחלקת סיבוכיות חדשה $EXAM$: עבור $L \subseteq \Sigma^*$, $L \in EXAM$ אם קיימת מכונת טיורינג דטרמיניסטית M כך שלכל $w \in \Sigma^*$:

- אם $w \in L$ אז M מגיעה למצב מקבל או לא עוצרת.
- אם $w \notin L$ אז M דוחה.

סמנו מי מהטענות הבאות נכונה. נמקו בקצרה. שימו לב, יש לנמק גם אי נכונות.

1. $EXAM \subseteq RE$
2. $RE \subseteq EXAM$
3. $EXAM \subseteq coRE$
4. $coRE \subseteq EXAM$
5. $EXAM \subseteq R$

<u>תשובה:</u> נוכיח ראשית כי $EXAM = coRE$.

תהא $L \in EXAM$. אזי יש מ"ט דטרמיניסטית M כבהגדרה. נתבונן במ"ט M^{inv} אשר זהה לM רק כאשר מגיעה למצב מקבל של M היא דוחה, וכאשר מגיעה למצב דוחה של M היא מקבלת. נבחין כי M^{inv} מקבלת את $\overline{L}$: אם $w \in \overline{L}$ אזי ב-M ריצתה הגיעה למצב דוחה ולכן תתקבל על

ידי M^{inv}. אם $w \in L$ אזי ריצתה על M הגיעה למצב מקבל , ואז תידחה ב- M^{inv}, או שלא נעצרה וגם אז לא תתקבל על ידי M^{inv}.

תהא $L \in coRE$. אזי ישנה מ"ט M המקבלת את $\overline{L}$. נראה כי $L \in EXAM$. נבנה מכונה M' הזהה ל- M פרט לכך שמחליפה את מצבי הדחייה והקבלה (כמו למעלה). אם $w \in L$ אזי w לא התקבלה ב- M ולכן ב-M' היא תתקבל או לא תעצור. אם $w \in \overline{L}$ אזי w התקבלה ב- Mלכן עתה היא תידחה, כנדרש מהגדרת $EXAM$.

טענות 3 ו-4 הוכחו למעשה לעיל.

מאחר והוכח בכיתה כי $coRE$ אינה מכילה ואינה מוכלת ב- RE נובעת אי הנכונות של $1, 2$ ומאחר והוכח בכיתה כי R מוכלת ממש ב-$coRE$ נובעת אי הנכונות של טענה 5.

חלק ב. (8 נקודות)

הוכיחו או תנו דוגמא נגדית:

$NL \subseteq CFL$, כאשר CFL הוא אוסף כל השפות חסרות ההקשר.

הטענה אינה נכונה: הוכח בכיתה כי $L = \{0^n1^n2^n | n \geq 0\}$ אינה חסרת הקשר. נראה ש $L \in NL$: נספור על ידי מונה בינארי את מספר האפסים, עד שיגמרו, ולשם כך נצטרך $\log n$ ביטים. לאחר מכן נספור באופן דומה את מספר ה-1ים ולאחר מכן את מספר ה-2 ים. אם במהלך המעבר גילינו כי הקלט אינו מהצורה 0*1*2* (אין צורך בזיכרון לשם כך) אזי נדחה. בנוסף, נקבל אם ורק אם שלושת המונים הבינאריים מורים על אותו המספר. סה"כ השתמשנו ב- $3\log n$ ביטים.

שאלה מס' 4

עבור כל אחת מהשפות הבאות ציינו באיזו מחלקה היא נמצאת מתוך: R , $RE \setminus R$, $coRE \setminus R$ או לא ב-$RE \cup coRE$. נמקו בקצרה.

א. (10 נקודות) L_1=**{**$< M_1$,$M_2 >$: $L(M_1) \subseteq L(M_2)$ **ו-** M_1 **ו-** M_2 **מ"ט דטרמיניסטיות}.**

<u>תשובה:</u> ראינו בתרגיל בית ש: ALL_{TM} אינה ב- $RE \cup coRE$. כעת נראה רדוקציה: $ALL_{TM} \leq_m L_1$ ונסיק שגם L_1 אינה ב $RE \cup coRE$. הרדוקציה: בהינתן קלט $< M >$ לבעיית ALL_{TM} הרדוקציה תוציא כפלט זוג מכונות $< M_1, M_2 >$ כאשר M_2 היא מכונה קבועה המקיימת $L(M_2) = \Sigma^*$ ו- $M_1 = M$. מתקיים:

$$L_1 \in < M_1, M_2 > \leftrightarrow L(M_1) \subseteq L(M_2) \leftrightarrow L(M) = L(M_1) = \Sigma^* \leftrightarrow < M > \in ALL_{TM}$$

ב.(10 נקודות) **L_2={ $<M>$: M מ"ט דטרמיניסטית שלא מקבלת מילים באורך גדול מ-100}.**

<u>תשובה:</u> $L_2 \in coRE$. קל לראות ש- L_2 מקיימת את תנאי משפט רייס ולכן L_2 אינה ב- R.

כעת נראה ש- $L_2 \in coRE$ ע"י כך שנראה אלגוריתם זיהוי עבור

$\overline{L_2} = \{$ M מ"ט המקבלת לפחות מילה אחת באורך > 100 $\}$

האלגוריתם: בהינתן $< M >$, נריץ את M על הקלטים שאורכם גדול מ- 100, לפי הסדר הלקסיקוגרפי ובאלכסון, כלומר בשלב ה-i נרוץ על כל הקלטים $1, ..., i$ כל אחד ל-i צעדים. אם בשלב כלשהו נראה קלט אותו M מקבלת, אזי נקבל. ברור שאם יש כזה נגיע אליו בסופו של דבר. אם אין כזה, הריצה תהיה אינסופית.

שאלה מס' 5

בתאור רדוקציות, נמקו את נכונותן בקצרה.

חלק א. (10 נקודות)

הוכיחו שהשפה הבאה היא NL-שלמה:

$2PATH = \{<G, s, t>:$ G גרף מכוון, ויש בו לפחות שני מסלולים שונים מ-s ל-t $\}$

<u>תשובה:</u> תחילה נוכיח כי $2PATH \in NL$. ההוכחה דומה להוכחה שניתנה בכיתה לגבי $PATH$, פרט לכך שכאן ננחש במקביל שני מסלולים. בכל פעם נשמור רק את הקדקדים הנוכחי (על ידי מונה בינארי - $2log|V|$ ביטים). בנוסף, נשמור ביט שיאותחל לאפס, ויהפוך לאחד אם ניחשנו בשלב כלשהוא שני קדקדים שונים. נקבל אם שני המסלולים שניחשנו הגיעו ל-t, והמסלולים שונים לפחות באחד הקדקדים (כלומר, הביט דלוק). אחרת, נדחה. הריצה הלא דטרמיניסטית אכן משתמשת בזיכרון לוגריתמי בגודל הקלט (שני מונים בינאריים + ביט).

עתה נוכיח כי $2PATH$ היא NP-קשה על ידי רדוקציה $PATH \leq_L 2PATH$ (לפי הנלמד בכיתה $PATH$ הינה NP-קשה).

בהינתן גרף G נבנה גרף G' על ידי הוספת קדקד v וקשתות $(s, v), (v, t)$. צריך להוכיח כי $G \in PATH$ אמ"מ $G' \in 2PATH$. ואכן, אם ב-G היה מסלול מ- s ל- t אזי כיוון שהוספנו מסלול שלא היה קיים נקבל כי ב-G' יש שני מסלולים. אם ב-G לא היה אף מסלול, הרי שב- G' יהיה מסלול יחיד.

הרדוקציה הינה $logspace$ כי השטח הנדרש להוספת הקדקד הינו קבוע.

חלק ב. (10 נקודות)

הוכיחו שהשפה הבאה היא NP- שלמה:

$\frac{1}{2}$-$CLIQUE$ = $\{< G >$: גרף לא מכוון בעל קליקה בגודל $\frac{|V|}{2}$ לפחות $G = (V, E)\}$.

<u>תשובה:</u> נראה תחילה שייכות ל- NP - ואכן, מ"ט לא דטרמיניסטית תוכל לנחש קבוצה של $\frac{|V|}{2}$ ולבדוק בזמן פולינומי שכל הקדקדים מחוברים בקשת.

עתה נראה כי השפה הנתונה הינה NP-קשה: ידוע כי השפה $CLIQUE$ הינה NP קשה, לכן די להראות רדוקציה $CLIQUE \leq_p \frac{1}{2}$-$CLIQUE$.

יהא $< G, k >$ קלט עבור $CLIQUE$. ניצור גרף G' בצורה הבאה: אם $k \leq \frac{|V|}{2}$ נוסיף ל-G קליקה בגודל $|V| - 2k$ ונחבר את כל קדקדיה לכל אחד מקדקדי G. אחרת, נוסיף אנטי-קליקה (כלומר קדקדים ללא קשתות ביניהם) בגודל $2k - |V|$ ל-G. קל לראות כי הרדוקציה פולינומית, שכן אנו מוסיפים מספר קדקדים שאינו גדול מגודל הגרף המקורי וגם מספר הצלעות מוגבל בהתאם.

נבחין עתה כי $< G, k > \in CLIQUE$ אמ"מ $G' \in \frac{1}{2} - CLIQUE$.

אם $< G, k > \in CLIQUE$ אזי יש בו קליקה בגודל k: אם $k \leq \frac{V}{2}$ אזי עתה תהיה בו קליקה בגודל $k + |V| - 2k = |V|$ שזה בדיוק מחצית ממספר הקדקדים ב-G'. אחרת, תהיה ב- G' קליקה בגודל k שגם שווה למחצית ממספר הקדקדים ב- G'.

אם $< G, k >$ אינו בשפה $CLIQUE$, אזי באופן דומה בשני המקרים יהיו קליקות הקטנות ממחצית ממספר הקדקדים ולכן G' אינו ב- $\frac{1}{2} - CLIQUE$.

שאלה מס' 6

נתבונן בהשערות הבאות:

1. $P = NP$.
2. $P \neq NP$.
3. $NP = PSPACE$.
4. $NP \neq PSPACE$.
5. $NP = coNP$.
6. $NL \neq P$.
7. $NP \neq EXPTIME$.

עבור כל אחת מהטענות הבאות ציינו את כל ההשערות לעיל שינבעו מהוספת הטענה לתמונת העולם המוכרת לנו היום. נמקו בקצרה את הגרירות. אין צורך לנמק אי גרירות.

א. (**5 נקודות**) $SAT \leq_p UNARY\text{-}SUBSETSUM$ **, כאשר**

$UNARY\text{-}SUBSETSUM$=$\{a_1, ..., a_k, 1^t$: $\sum_{i \in S} a_i = t$ **כך ש-** $S \subseteq \{1, .., k\}$ קיימת תת קבוצה$\}$
(**כל המספרים שלמים ואי-שליליים**)

<u>תשובה:</u> ראינו בתרגיל ש- $UNARY-SUBSET-SUM \in P$. כמו כן, SAT **הינה** NP **שלמה**, ולכן מהרדוקציה ינבע $P = NP$ (1). היות ו- P **סגורה תחת משלים נקבל גם** $NP = coNP$ (5). ממשפט ההיררכיה למחלקות זמן ידוע ש: $P \neq EXPTIME$ ולכן נקבל ש:
$P = NP \neq EXPTIME$(7).

ב. (5 נקודות) $\exists TQBF$ היא $PSPACE$ שלמה, כאשר:

$\exists QBF$ הוא אוסף נוסחאות ה-QBF שבהן כל המשתנים מכומתים על ידי הכמת $\exists$ (כלומר, הכמת $\forall$ לא מופיע) ו-$\exists TQBF = \{<\psi> \mid true$ היא נוסחת $\exists QBF$ בעלת ערך אמת $\psi\}$
(הסעיף בוטל)

ג. (5 נקודות) $\overline{SAT} \leq_{np} SAT$ כאשר:

$\overline{SAT} = \{<\psi>:$אין ל- ψ השמה מספקת$\}$
ובהינתן שפות L_1 ו- L_2 מעל א"ב Σ, היחס $L_1 \leq_{np} L_2$ מוגדר כך:
פונקציה ניתנת לחישוב אי-דטרמיניסטי מ- L_1 ל-L_2 היא $f: \Sigma^* \rightarrow 2^{(\Sigma^*)}$ כך שלכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים ש- $w \in L_1$ אמ"מ קיים $w' \in f(w)$ כך ש $w' \in L_2$. במידה וקיימת פונקציה כזו נסמן $L_1 \leq_{np} L_2$.

<u>תשובה:</u> הראינו ש $SAT \in NP$ ו- $\overline{SAT}$ היא $coNP$ שלמה. לכן, אם נראה ש- $\overline{SAT} \in NP$ אזי נקבל $coNP \subseteq NP$ וממנו נובע כי $NP = coNP$ (5).
נתאר אלגוריתם לא-דטרמיניסטי פולינומי עבור $\overline{SAT}$: עבור נוסחא ϕנריץ עליה את הרדוקציה f ונקבל רשימה של נוסחאות $\psi_1, ..., \psi_k$ ($k = poly(\phi)$). נבחר באופן לא דטרמיניסטי $1 \leq i \leq k$ וננחש השמה עבור ψ_i. אם אכן ההשמה מספקת, נקבל את ϕ אחרת נדחה. ע"פ הגדרת הרדוקציה, $\phi \in \overline{SAT}$ אמ"מ קיים i כך ש ψ_iספיקה.

ד. (5 נקודות) $PATH \leq_p TQBF$

<u>תשובה:</u> ראינו כי $PATH \in NL \in P$ ולכן רדוקציה שרצה בזמן פולינומי יכולה לפתור את $PATH$ ולהוציא כפלט נוסחא קבועה שהיא או נוסחת אמת או לא בהתאם לעובדה אם הקלט לרדוקציה שייך ל- $PATH$ או לא. ולכן ידוע כבר ש $PATH \leq_p TQBF$. כלומר עובדה זו אינה משנה את תמונת העולם המוכרת לנו כיום, ובפרט אינה גוררת אף אחת מהטענות.

(דפים נוספים)

(דפים נוספים)