① 18/10/09
כלכלה וחישוב

נושאים בגבול כלכלה וחישוב

מרצים: נעם ניסן, מירה פלדמן

אתר: http://huji econcs.wordpress.com

הקדמה-

האינטרנט שינה המון דברים בחיים שלנו - עבודה, תקשורת, חיים אישיים. כולם מנסים להבין את האינטרנט - כל אחד מהזווית שלו. אנשי המחשבים שינו את התפיסה שלהם. פעם הגישה הייתה לחקור את המחשב הבודד. היום מדובר על חקירה של רשת מחשבים - אינטראקציה בין מחשבים מרובים. האינטרנט הוא תופעה שאנחנו לא שולטים בה. זה מין משהו מבוזר שהתהווה מעצמו. אין מישהו ששולט בכל האינטרנט. אין עדיין כלים שמאפשרים להבין את האינטרנט באופן מלא, אבל יש כיוונים שמתחילים לחקור בהם ובקורס הזה ננקוט באחת הכוונות. בקורס הזה נראה מצב שבו אין מקבל החלטות בודד. לכל גורם יש מטרות משלו ויש מקבלי החלטות שונים. כל אחד מהם עומד בנפרד ואז נשאלת השאלה איך אפשר להבין מערכת כזאת. כל פעולה של גורם אחד משפיעה על המשתתפים האחרים.

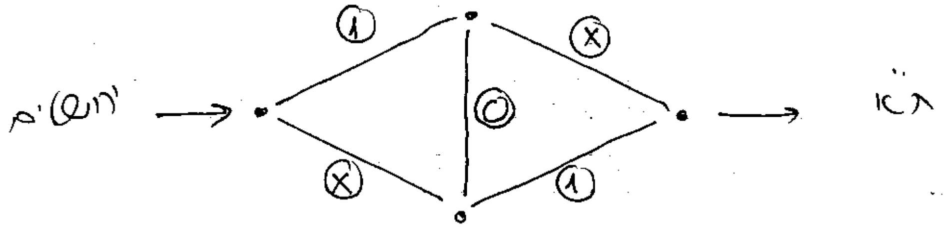
התורה שמתעסקת במצבים כאלה היא תורת המשחקים וכלכלה - ניסיון לנתח רצונות של צדדים שונים והאינטראקציה ביניהם. רק צמח לו תחום שהוא על גבול כלכלה ותורת המשחקים ומדעי המחשב. זה עדיין תחום בהתפתחות. בעוד 10 שנים כנראה ילמדו את הקורס אחרת אבל ללא ספק ילמדו אותו...

הגישה הקלאסית הייתה מונחת אופטימיזציה - יש אילוצים ורוצים לבצע את המשימה בצורה הטובה ביותר. כשיש הרבה גופים מעורבים ללא ספק כל אחד מונע ע"י הרצון לעשות אופטימיזציה מהצד שלו. אבל זה משפיע על הצדדים האחרים ובסופו של דבר המערכת מגיעה לשיווי משקל. לשיווי משקל אפשר להגיע בהרבה דרכים משונות ומסובכות. זה פחות מעניין אותנו. השאלה היא אם אנחנו יכולים להבין את השיווי משקל...

- שיווי משקל זה מה שמתמקדים בו בטבע, מתורת המשחקים.

הפרדוקס של :

יש מערכת של חמישה כבישים:



1 - כביש ארוך ורחב. מכוניות נוספות לא משפיעות על זמן הנסיעה (שעה)

x - כביש קצר אך צר - זמן הנסיעה פרופורציוני לעומס x (מקס' שעה)

0 - מנהרה חדשה שעוברים בזמן 0. (טלפורטציה)

המטרה שלנו - לתכנן את התנועה רק שכולם יגיעו בזמן אופטימלי.
אפשרות אחת היא לנסוע רק על 1. אבל זה לוקח שעתיים. אם חצי יסעו בחלק העליון וחלק בתחתון זה ייקח לכולם שעה וחצי.
אפשר להוכיח שאי אפשר יותר טוב. אבל אם ניתן לכל אחד לעשות את מה שאופטימלי בשבילו (לכולם יש דיווחי תנועה וכו') אז ברגע שיש אפילו אוטו אחד על 1 עדיף ללכת ל-x כי זה מקצר מעט.
ואז כולם יסעו רק על x ואז לכולם זה ייקח שעתיים. זה שיווי המשקל והוא לא אופטימלי. מתור מתכנני הכבישים כדאי לבטל את המנהרה. אז חצי מהאנשים ילכו למסלול העליון וחצי לתחתון ולכולם זה ייקח שעה וחצי...

מה הולכים ללמוד בקורס?

I - השוואה בין איזון שיווי המשקל לבין אופטימיזציה

II - איך מגיעים לשיווי משקל? אם זה בכלל אפשרי...
(אם כי לרוב נניח שיש שיווי משקל ואת הדיון הזה נשאיר למתמטיקאים מבטלנים...)

מנהלות:

- אופי הקורס הוא מתמטי תיאורטי (למות, משפטים וכו'...)
- דרישות: - אין מבחן
  - צריך לבוא לשיעורים!
  - רוב הציון מורכב של 3-4 תרגילי בית קשים ותיאורטיים
  אין בעיה לדבר על התרגילים עם מישהו (אבל) לכתוב לבד!
  - הגשת תרגילים
  - כל שיעור צריך להיות מסוכם ע"י אחד התלמידים ב- LaTeX
  זה יעלה לאתר של הקורס (להירשם באתר)
  - להוסיף ערך ל- Wikipedia על נושא שקשור לקורס

נתחיל...

נכנס לבסיס בתורת המשחקים.

משחקים בצורה נורמלית/אסטרטגית

<u>דוגמה 1</u> אבן-נייר-מספריים

יש שחקן שורה ושחקן עמודה. לכל אחד מהם שלוש אסטרטגיות.
בטבלה נכתוב את התועלות של כל שחקן בפרופיל האסטרטגיות.

I \ II	אבן	נייר	מספריים
אבן	0,0	-1,1	1,-1
נייר	1,-1	0,0	-1,1
מספריים	-1,1	1,-1	0,0

<u>דוגמה 2</u> דילמת האסיר - יש שני עצורים שאין די ראיות כדי להרשיע אותם. מושיבים אותם בשני חדרים נפרדים ושואלים אם הם מודים או לא. אם שניהם מודים מורידים להם קצת מהעונש. אם אף אחד לא מודה שניהם יוצאים לחופש ואם אחד מודה והשני לא אז זה שמודה הוא עד מדינה ויוצא לחופשי והשני מקבל עונש מלא.
את זה אפשר לייצג כך:

		II: מודה	II: לא מודה
I	מודה	-4,-4	0,-5
	לא מודה	-5,0	-1,-1

<u>דוגמה 3</u>: chicken – שתי מכוניות נוסעות זו לעבר זו- או שיש התנגשות וכולם מפסידים, או ששתיהן סוטות ואף אחד לא מנצח או שאחת סוטה ואחת לא ויש מנצחת.

	c	d
chicken	0,0	-1,10
dare	10,-1	-10,10

עד עכשיו ראינו משחקים סימטריים.

<u>דוגמה 4</u>: נעם ומירב מחליטים אם להציג את פרדוקס ברס או לא...

		מירב: ✓	מירב: x
נעם	✓	10,-10	10,0
	x	0,10	0,0

<u>הגדרה</u>: משחק לא-שיתופי, במידע מלא, בצורה אסטרטגית בין n שחקנים מוגדר ע"י

① $S_1,\dots,S_n$ - הפעולות האפשריות של כל שחקן

② $u_i: S_1\times\dots\times S_n \to \mathbb{R}$ התועלת של כל שחקן i (כל שחקן i רוצה למקסם את התועלת שלו u_i).

נוטציה: $s_i\in S_i$ הפעולה של שחקן i

$$s_{-i} = (s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_n)$$

$$s = (s_i, s_{-i})$$

הגדרה: אסטרטגיה s_i שולטת על אסטרטגיה s_i' אם לכל s_{-i} מתקיים $u_i(s_i, s_{-i}) \ge u_i(s_i', s_{-i})$ וקיים s_{-i} שבו האי-שוויון חזק.

הגדרה: אסטרטגיה s_i שלטת (דומיננטית) אם היא שולטת על כל $s_i' \in S_i$.

אז אם משחק היתה אסטרטגיה שלטת החיים לא היו מעניינים כל כך... באבן-נייר-מספריים אין אסטרטגיה שלטת. אבל בדילמת האסיר דווקא יש - עדיף להתוודות. וזה מוזר כי יש אסטרטגיה ששניהם יכולים להרוויח בה וזה יהיה עדיף לשניהם. הבעיה היא שזה לא שיווי משקל ידוע כי ברגע שאסיר מתחיל לחשוב לא להתוודות הוא יחשוב שגם השני חושב את זה וזה יוביל את הדילמה...

ב- chicken אין אסטרטגיה דומיננטית ואילו במשחק בין מיר לנעם יש אסטרטגיה דומיננטית והוא אכן נקט בה...

הגדרה: אסטרטגיה s_i נשלטת אם קיימת אסטרטגיה s_i' ששולטת עליה.

הגדרה: אסטרטגיה s_i היא תגובה טובה ביותר (best response) ל- s_{-i} אם $u_i(s_i, s_{-i}) \ge u_i(s_i', s_i)$ לכל s_i'.

הגדרה: הפרופיל s נקרא בשיווי משקל נאש (NE) אם לכל i, s_i היא תגובה טובה ביותר ל- s_{-i}.

דוגמאות: - אבן-נייר-מספריים - אין שיווי משקל נאש טהור

- דילמת האסיר - יש שיווי משקל נאש טהור - הבחירה להתוודות עבור שני האסירים.
- chicken - יש שני פרופילים של שיווי משקל נאש טהור - כשאחד מהצדדים משתפן והשני לא.
- במשחק בין מיר לנועם יש נקודת שיווי משקל - כשנועם מדביק ומיר לא...

דוגמה: מכרז מחיר שני

יש מוצר שרוצים למכור במכרז. לכל המשתתפים במכרז יש ערך v_i שהוא מעריך את המוצר. כל אחד מכניס למעטפה סכום את v_i ומגיש. מי שהגיש את הערך הכי גבוה מנצח אבל משלם רק את הערך השני מאחוריו. רווח

$u_i = v_i - p_i$ מנצח

$u_i = 0$ מפסיד

במשחק הזה תמיד כדאי לכל אחד פשוט להגיד את האמת - בלי להסתמך בחשבון של אסטרטגיות של אחרים.

טענה: במכרז מחיר שני, אסטרטגיה שלטת היא להגיד את האמת.

הוכחה: נסתכל במנצח - האם כדאי לו לשקר?
כל עוד הוא אומר ערך גבוה מהערך השני, הוא עדיין מנצח ומשלם את אותו המחיר אז אין תועלת בשקר. אם הוא אומר ערך נמוך מהערך השני הוא מפסיד את המוצר.
כעת נתבונן במישהו שלא ניצח, כל עוד הוא אומר ערך נמוך מהערך הכי גבוה הוא עדיין מפסיד את המוצר אז תועלתו לא השתנתה. ואילו אם הוא אומר ערך גבוה מהערך הכי גבוה הוא אמנם מקבל את המוצר אבל הוא נאלץ לשלם יותר וזה ממש תועלת שלילית. ☺

בדוגמאות האלו ראינו שיש פער בין הפתרון האופטימלי לבין התועלת של כל המשתתפים בש"נ נאש.

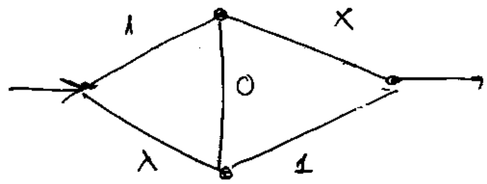
$$PoA - \text{Price of Anarchy} = \frac{\text{תועלת בש"נ נאש הגרוע ביותר}}{\text{תועלת בפתרון האופטימלי}}$$

אם $PoA=1$ אז אנחנו במצב מעולה - כל אחד עושה מה שטוב לו וזה גם טוב לחברה כולה. אבל זה לא קורה בד"כ. היינו רוצים לחסום את זה איכשהו. אבל זה לא חסום באופן כללי כי זה תלוי במחיר שאנחנו נותנים לכל אסטרטגיה.

(4)

נראה לדוגמא משפחת בעיות של משחקים שבהן מחיר האנרכיה חסום.

דוגמה:



פלו אופטימלית: $OPT = \frac{3}{2}$

פלו ש״מ נאש: 2

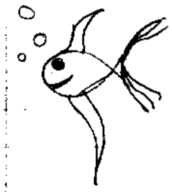
$$\Rightarrow PoA = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$$

בהמשך נראה שברשת תחבורה עם מחירים לינאריים זה חסם שנכון תמיד.

5

25.10.09

כלכלה וחישוב.



בשבוע שעבר ראינו ששיווי משקל נאש הוא לא בהכרח אופטימלי.

נתבונן על המשחק הבא:

	L	R
U	3,3	0,7
D	7,0	1,1

שיווי המשקל היחיד כאן הוא (D,R) כי שם אף שחקן לא יכול לשפר את המצב שלו ע"י שינוי ההחלטה שלו בלבד.
המצב הזה הוא כמובן לא יעיל. ברור שעדיף לשניהם לקבל (3,3) ואילו במצב (0,7) זה שיפור משמעותי לשחקן העמודות אבל הרעה לשחקן השורות. האם זה יעיל חברתית? תלוי איך אנחנו מגדירים את זה...

הגדרה: פרופיל הוא יעיל פארטו (Pareto) אם לא קיים פרופיל אחר שבו לפחות שחקן אחד טוב יותר, בעוד אף שחקן אינו גרוע.

זו הגדרה טובה למקרה שאין משמעות למספרים אלא מה שמעניין אותנו יותר הוא יחס הסדר ביניהם.

נניח כעת שלמספרים שלנו כן יש משמעות. האם המצב (0,7) הוא יעיל חברתית? עדיין לא ברור. צריך להגדיר פונקציית מטרה חברתית.
אילו מדדים יכולים לעניין אותנו?

- הוגנות (איך מגדירים מתמטית?)
- סכום התועלות של השחקנים ("רווחה חברתית" - Social welfare)
- מקסימין maximin - רוצים שהתועלת המינימלית תהיה מקסימלית

אז נניח שיש לנו מטרה חברתית. ורוצים דרך שבה נוכל למדוד כמה מצב מסוים הוא לא יעיל. בשנים האחרונות מקובל להשתמש ביחס.
נגדיר חוסר יעילות של פרופיל כיחס בין פונקציית המטרה במצב האופטימלי לבין ערך פונקציית המטרה בפרופיל שלנו.

עכשיו אנחנו יכולים להגיד כמה שיווי משקל נאש פחות יעיל מהאופטימום.
אבל נזכור שיכולים להיות כמה שיווי נאש.

$$PoA = \text{Price of Anarchy} = \frac{\text{עלות בש"מ נאש הגרוע ביותר}}{\text{עלות באופטימום}}$$

מה הכי גרוע שיכול להיות - ה... worst case - זה משהו שנהוג להסתכל עליו במדעי המחשב, כפי לרמת יעילות.
מחיר האנרכיה מנסה לכמת כמה המצב מתקרב לאופטימום החברתי.
ככל ש- PoA מתקרב ל-1 אנחנו במצב טוב יותר.

<u>הערה</u>: ש"מ נאש מדבר רק על סטיות שבהן השחקן משנה את דעתו לבדו והשחקנים לא מתאמים ביניהם. לכן בטבלה שלנו לאף שחקן אין רצון לעבור לעמדה אחרת. הם לא יכולים לתאם עמדות ולעבור יחד ל- (3,3).

<u>עוד הערה</u>: מחיר האנרכיה רלוונטי רק אם שיווי משקל נאש קיים. יתר על כן, אפילו אם הוא קיים לא בטוח קיימת דינאמיקה טבעית שתביא את המערכת לשיווי משקל הזה. ייתכן שהמצב למעשה הרבה יותר גרוע מהמדד הנ"ל.

אפשרות אחרת היא להסתכל דווקא על המקרה הטוב ביותר - מחיר היציבות

$$PoS = \text{Price of Stability} = \frac{\text{עלות בש"מ נאש הטוב ביותר}}{\text{עלות באופטימום}}$$

(גם זה כמובן רלוונטי רק אם יש ש"מ נאש)

דווקא במדעי המחשב יותר פעמים מדברים על מחיר היציבות. * את הפרוטוקול כדאי לתכנן כך שהשחקנים יגיעו לשיווי משקל, אבל בוודאי רוצים להביא אותם לשיווי משקל הטוב ביותר.

(Rosenthal 73) משחקי גודש (Congestion Games)

יש קבוצת משאבים E

קבוצת n שחקנים. אוסף האסטרטגיות של שחקן i הוא $S_i \subseteq 2^E$ (אוסף של תתי קבוצות של E).

למשאב e נגדיר פונקציית עלות $C_e : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$x_e \mapsto C_e(x_e)$

כאשר x_e = מספר השחקנים שמשתמשים במשאב.

כעת נוכל להגדיר פונקציית עלות לשחקן i - $\underset{\text{פרופיל}}{C_i(S)} = \sum_{e \in S_i} C_e(x_e)$

העלות של שחקן מושפעת משחקנים אחרים -
מכמות האנשים שבחרו להשתמש במשאבים שלו.

למשל, ברשת תחבורה כל צלע (של G) היא משאב ואסטרטגיה של שחקן היא מסלול שהוא בוחר לנסוע בו. כמו שראינו בשיעור הקודם הזמנים של המסלולים תלויים גם בהחלטות של שחקנים אחרים. פונקציית המטרה יכולה להיות הזמן שלוקח להגיע מההתחלה לסוף - סכום העלויות של המשאבים באסטרטגיה של השחקן.

משחקי פוטנציאל (Monderer & Shapley, 96)

<u>הגדרה</u>: משחק G הינו משחק פוטנציאל <u>מדויק</u> אם קיימת פונקציה $\phi : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}$ כך שלכל s_i, s_i', s_{-i} מתקיים

$$C_i(s_i, s_{-i}) - C_i(s_i', s_{-i}) = \phi(s_i, s_{-i}) - \phi(s_i', s_{-i})$$

(שימו לב! העניין פה הוא ש- ϕ גלובלית ולא מוגדרת לכל שחקן)

<u>הגדרה</u>: משחק G הינו משחק פוטנציאל <u>אורדינלי</u> אם קיימת פונקציה $\phi : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}$ כך שלכל s_i, s_i', s_{-i} מתקיים

$$C_i(s_i, s_{-i}) - C_i(s_i', s_{-i}) > 0 \iff \phi(s_i, s_{-i}) - \phi(s_i', s_{-i}) > 0$$

כלומר זו דרישה חלשה יותר - רק רוצים ש- ϕ תשמר סדר.

<u>דוגמה</u>: דילמת האסיר. האם זה משחק פוטנציאל?

	L	R
U	3,3	0,5
D	5,0	1,1

חץ מסמן שיפור של שחקן. אין מעגל, שזה נחמד. ובעצם כל החיצים הולכים לאותו כיוון יש תחושה שאפשר לבנות פונקציית פוטנציאל.
ננסה.

$X = \Phi(U,L) = 2$ // התחלה שרירותית

$X+2 = \Phi(D,L) = 4$ // כי צריך לעלות ב-2

$X+2 = \Phi(U,R) = 4$

$X+3 = \Phi(D,R) = 5$ // כי יש עלייה ב-1 מ-(U,R) //

יופי! הצלחנו לבנות פונקציית פוטנציאל מדויקת!

הערה: אם הטבלה הייתה

(1) 3,3	(2) 0,5
(3) 5,0	(4) 2,1

אז אי אפשר היה לעשות פוטנציאל מדויק כי שיקולים כמו קודם היו מביאים אותנו ל-

$\Phi(1) = X$

$\Phi(3) = X+2$

$\Phi(2) = X+2$

$\Phi(4) = X+3$

אבל במעבר מ-(2) ל-(4) יש שיפור של 2 ולכן היה צריך $\Phi(4) = X+4$. אז קיבלנו סתירה. אי אפשר פוטנציאל מדויק אבל קיבלנו פוטנציאל אורדינלי.

משפט: בכל משחק פוטנציאל קיים ש"מ נאש.

הוכחה: יהי S הפרופיל שמביא למינימום את פונקציית הפוטנציאל.
אזי S הוא ש"מ נאש.

נניח בשלילה ש-S אינו בש"מ. אזי קיים שחקן i וגם s' ש-

$$c_i(s_i', s_{-i}) < c_i(s_i, s_{-i})$$

$\Leftarrow$ $\Phi(s_i', s_{-i}) < \Phi(s_i, s_{-i})$ בסתירה למינימליות של $\Phi(S)$.

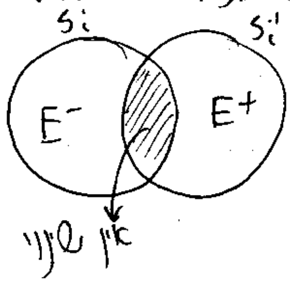
(פה אנחנו בגרסה שבה שחקן רוצה להביא למינימום את העלות שלו)

משפט: כל משחק עומס הינו משחק פוטנציאל מדויק.

הוכחה: צריך למצוא פונקציה ϕ שמקיימת את התכונה

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s_i', s_{-i}) = \phi(s_i, s_{-i}) - \phi(s_i', s_{-i})$$

נתבונן בציור שמאל. מה קורה כששחקן עובר מ-s_i ל-s_i'? קבוצת המשאבים שלו משתנה. נסמן ב-E^+ את קבוצת המשאבים החדשים, וב-E^- את המשאבים שהוא כבר לא משתמש בהם.



המחיר של החיתוך לא השתנה.

נוספה עלות של E^+ - $\sum_{e\in E^+} c_e(x_e+1)$

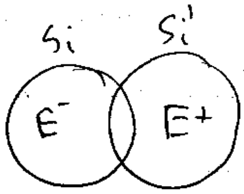
כי עכשיו גם הוא משתמש

ירדה עלות של E^- - $\sum_{e\in E^-} c_e(x_e)$ אז

$$c_i(s_i, s_{-i}) - c_i(s_i', s_{-i}) = \sum_{e\in E^+} c_e(x_e+1) - \sum_{e\in E^-} c_e(x_e)$$

ואנחנו רוצים שזה יהיה שווה להפרש ב-ϕ. אז נגדיר

$$\phi(S) = \sum_{e\in E} \sum_{j=1}^{x_e} c_e(j)$$



מה קורה במעבר מ-s_i ל-s_i'? שוב יש לנו

נוסף $\sum_{e\in E^+} c_e(x_e+1)$ וירד $\sum_{e\in E^-} c_e(x_e)$

וזה בדיוק מה שרצינו! ☺

מסקנה: לכל משחק עומס יש שיווי משקל נאש וכל המסקנות שדיברנו עליהם קודם הם רלוונטיים.

נראה מקרה פרטי שבו קל לחשב ש"נ במשחק עומס. קל פירושו שיש אלגוריתם פולינומיאלי לחישוב.

יש גרף $G=(V,E)$ מכוון. לכל שחקן יש קודקוד מקור וקודקוד יעד. (o_i, t_i)

לכל קשת יש מחיר שתלוי בעומס - $c_e(x_e)$ וזו פונק' מונוטונית.

נניח עוד שהמשחק סימטרי, כלומר $s_i = s_j$ לכל i,j. כלומר האסטרטגיות של כל השחקנים זהות.

בעיית min-cost flow - יש גרף $G=(V,E)$
לכל קשת יש שני מאפיינים:

e: α_e - capacity

p_e - מחיר לכל יח' תעבורה

יש n יחידות תעבורה שצריכות לעבור מ-s ל-t ואנחנו רוצים להביא למינימום את סכום העלויות של n המסלולים שנבחרו.
ידוע שאת הבעיה הזאת אפשר לפתור בזמן פולינומיאלי.
נשתמש בזה, כדי לפתור את הבעיה שלנו.

בבעיה המקורית שלנו לכל צלע שהמחיר שלה $c_e(x_e)$ נשכפל n פעמים לכל שכפול j ניתן מחיר $c_e(j)$ ו-capacity 1.
אז פרופיל חוקי של אסטרטגיות בבעיה המקורית מתורגם לפלוו $\sum_{e\in E}\sum_{j=1}^{x_e} c_e(j)$ (כי אם עוברים x_e בצלע מסוימת במקור אז אחרי השכפול בכל צלע משוכפלת יכול לעבור רק שחקן אחד. אז הם עוברים במחיר $c_e(1)+\dots+c_e(x_e)$. ואז עושים סכום לכל הצלעות).
אבל הביטוי הזה הוא בדיוק פונקציית הפוטנציאל. ומהמשפט קודם ראינו ששיווי משקל נאש מתקבל באסטרטגיה שממזערת את הפוטנציאל.
ומבעיית min-cost flow אפשר למצוא אותה בזמן פולינומיאלי.

בשיעור הבא נראה איך אפשר לנצל תכונה מסוימת של פרופיל שהוא מינימום לוקאלי של Φ כדי להגיד משהו על המדדים שלנו.

8 1/11/09
טבלה
וחישוב

בשבוע שעבר הגדרנו משחקי עומס ומשחקי פוטנציאל. ראינו שמשחק עומס הוא משחק פוטנציאל מדויק ולכן קיימים שו"מ נאש. לכן ניתן להשתמש במדדים שלנו - מחיר האנרכיה ומחיר היציבות.

PoA מחיר האנרכיה $= \dfrac{\text{עלות בשו"מ נאש הגרוע ביותר}}{\text{עלות בפתרון האופטימלי}}$

אפשר לדבר על מחיר האנרכיה של משפחת משחקים (למשל נאות) ואז הכוונה היא למחיר האנרכיה הכי גבוה באופן מסוים של המשחק. החסם של מחיר האנרכיה הוא הדוק אם יש גם מופע ספציפי שזה מחיר האנרכיה שלו.

PoS מחיר היציבות $= \dfrac{\text{עלות בשו"מ נאש הטוב ביותר}}{\text{עלות בפתרון האופטימלי}}$

שתי ההגדרות האלה הן רלוונטיות ביחס לעלות של פונקציית מטרה מוגדרת היטב מראש.

Selfish Routing ניתוב אנוכי

ניתוב אטומי - יחידות התעבורה הן יחידות אטומיות. יש להן גודל מסוים והן לא ניתנות לפירוק. יש שתי אפשרויות: או שהגדלים של כל יחידות התעבורה שווים (ואז ננרמל את כל היחידות להיות בגודל 1) או שיחידות תעבורה שונות יכולות להיות בגודל שונה.

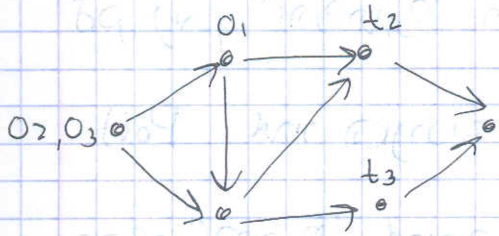
דוגמה: $G=(V,E)$ גרף מכוון.
שחקן i מוגדר ע"י זוג קודקודים (o_i, t_i) - המקור והמטרה.

אם הגדלים שווים אז כל שחקן בגודל 1 (ואז זה משחק עומס).
אם הגדלים שונים אז לכל שחקן יש גודל r_i.
לכל קשת יש פונקציית עלות $c_e(x)$ אפינית. $c_e(x) = a_e x + b_e$
כאשר x גודל יחידות התעבורה שעל הקשת e.

היום נראה את מחיר האנרכיה בשני המשחקים האלה.

נתחיל במקרה שהגדלים שונים. נסתכל על המקרה הספציפי שבו
$c_e(x) = x$ (מומלץ בבית לראות מה קורה במקרה הכללי).

אז יש לנו גרף מכוון



יש קבוצת שחקנים עם קודקודי מקור ומטרה.
לכל שחקן i יש גודל r_i - כמה יחידות תעבורה הוא רוצה להעביר.

אסטרטגיה של שחקן i היא המסלול p_i של השחקן.
יהי S שיווי משקל נאש. p_i יהיה המסלול של השחקן ב-S.
נגדיר את S^* להיות פתרון אופטימלי. מה זה אופטימלי? צריך להגדיר את פונקציית המטרה. באופן טבעי פונקציית המטרה תהיה פה סכום העלויות של כל השחקנים. כלומר, נרצה להביא למינימום את

$$\sum_i \sum_{e\in P_i} c_e(x)\cdot r_i$$

(אנחנו מסתכלים במקרה ה- unsplittable - שחקן לא יכול לפצל את יחידות התעבורה שלו. הן כולן חייבות לעבור על אותו המסלול).

* אפשר להוכיח (ואולי נעשה זאת בבית) שבמקרה של גדלים שונים קיים ש"מ נאש.

נסמן את המסלולים ב-S^* ע"י $p_1^*, \dots, p_n^*$.

$I(e)$ - קבו' השחקנים שמשתמשים בקשת e ב-S.

$I^*(e)$ - קבו' השחקנים שמשתמשים בקשת e ב-S^*.

f_e - כמות הזרימה על הקשת e ב-S, כלומר $f_e = \sum_{i\in I(e)} r_i$

f^*_e - כמות הזרימה על הקשת e ב-S^*, כלומר $f^*_e = \sum_{i\in I^*(e)} r_i$

אם אנחנו בש"מ לכל שחקן יש מסלול ולא כדאי לו לעבור למסלול אחר.
בפרט לשחקן i לא כדאי לבחור את p_i^* על פני p_i.

לכל שחקן i התשלום שלו ב-Z היא $\sum_{e\in p_i} c_e(f_e)=\sum_{e\in p_i} f_e$

$c_e(x)=x$

אבל לשחקן לא כדאי לעבור למסלול p_i^* ולכן

$$\sum_{e\in p_i} f_e \le \sum_{e\in p_i^*}(f_e+r_i)$$

שאר השחקנים נשארו במקומות שהם
ולכן יש את f_e אבל עכשיו שחקן i עבר
ל-p_i^* ולכן צריך להוסיף r_i.
זה לא בהכרח התשלום ב-Z^* כי יכול להיות שהוספנו r_i
יותר בצלעות שלא צריך להוסיף להן, אבל בכל מקרה זה
חסם מלעיל.

נעשה קצת מניפולציות אלגבריות על שני האגפים.

$$\sum_{e\in p_i} f_e \le \sum_{e\in p_i^*}(f_e+r_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{e\in p_i} f_e r_i \le \sum_{e\in p_i^*}(f_e+r_i)r_i$$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_{e\in p_i} f_e r_i \le \sum_i \sum_{e\in p_i^*}(f_e+r_i)r_i$$

$$\Rightarrow \sum_{e\in E} \sum_{i\in I(e)} f_e r_i \le \sum_{e\in E} \sum_{i\in I^*(e)}(f_e+r_i)r_i$$

זה פשוט סדר סכימה אחר

אבל

$$(1) \quad \sum_{i\in I(e)} r_i = f_e$$

$$(2) \quad \sum_{i\in I^*(e)} r_i = f_e^*$$

$$(3) \quad \sum_{i\in I^*(e)} r_i^d \le f_e^{*d} \quad , d\ge 1$$

$$\Rightarrow \sum_{e\in E}\sum_{i\in I(e)} f_e r_i = \sum_{e\in E} f_e \sum_{i\in I(e)} r_i = \sum_{e\in E} f_e^2$$

$$\sum_{e\in E}\sum_{i\in I^*(e)}(f_e+r_i)r_i = \sum_{e\in E}\sum_{i\in I^*(e)} f_e r_i + r_i^2 =$$

$$= \sum_{e\in E} \sum_{i \in I^*(e)} f_e r_i + \sum_{e\in E} \sum_{i\in I^*(e)} r_i^2 \le \sum_{e\in E} f_e f_e^* + \sum_{e\in E} f_e^{*2}$$

$$\Rightarrow \sum_e f_e^2 \le \sum_e f_e f_e^* + \sum_e f_e^{*2}$$

אי שוויון קושי שוורץ

$$\Rightarrow \sum_e f_e^2 \le \sqrt{\sum_e f_e^2}\sqrt{\sum_e f_e^{*2}} + \sum_e f_e^{*2} \qquad (*)$$

למה זה טוב?

אמרנו שמה שרוצים למזער הוא $\sum_i \sum_{e\in P_i} c_e(x) \cdot r_i$. אבל

זה מדויק $\sum_{e\in E} \sum_{i\in I(e)} f_e = \sum_{e\in E} f_e^2$

ובאותו אופן ב- Z^* השלוו היא $\sum_{e\in E} f_e^{*2}$.

עכשיו נעביר אגפים ב- $(*)$ ונקבל

$$\frac{\sum_e f_e^2}{\sum_e f_e^{*2}} \le \frac{\sqrt{\sum_e f_e^2}}{\sqrt{\sum_e f_e^{*2}}} + 1$$

נסמן $z = \frac{\sqrt{\sum_e f_e^2}}{\sqrt{\sum_e f_e^{*2}}}$. אז קיבלנו $z^2 \le z+1$.

אבל z^2 זה מדויק מחיר האנרכיה. אפשר לפתור את האי שוויון

ונקבל $PoA = z^2 \le \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$

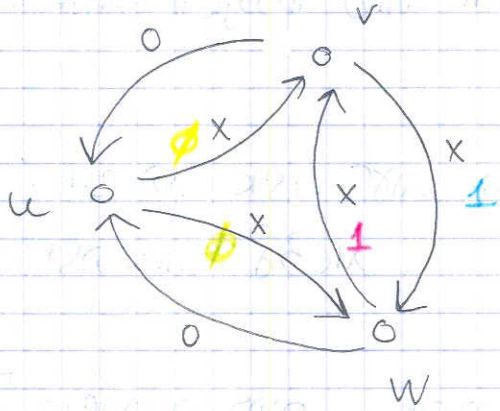
זה נחמד! זה מספר קבוע שלא תלוי במספר השחקנים, לא תלוי בגרפים ולא תלוי בגרף. בקיצור לא תלוי בכלום! שיווי משקל נאש תמיד לא יהיה יותר גרוע מהאופטימום מאשר פי 2.618.

ומתוך מדעני מחשב, מאחר שהמים הלה קבוע אנחנו נסתפק בזה כבשורה טובה.

אז מצאנו חסם למחיר האנרכיה. אבל האם הוא הדוק? האם אפשר למצוא חסם יותר טוב?

יש דוגמא למופע מסוים של המשחק שבו מחיר האנרכיה הוא $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

דוגמא ה:



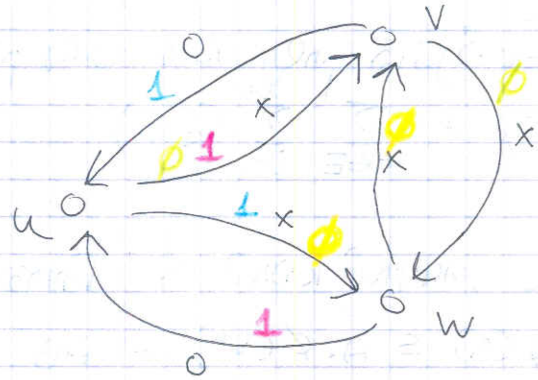
יש 4 שחקנים:

גודל	מטרה	מקור	שחקן
ϕ	v	u	1
ϕ	w	u	2
1	w	v	3
1	v	w	4

(ϕ = חתך הזהב)

בפתרון האופטימלי כל שחקן הולך על הקשת הישירה למטרה שלו והמחיר הוא $1+1+\phi^2+\phi^2 = 2+2\phi^2$.
קל לראות שזה שיווי משקל נאש. (לכן $PoS = 1$)

נסתכל על הפרופיל שבו במקום ללכת באופן ישיר כל שחקן הולך באופן עקיף



קל להשתכנע שזה שיווי משקל נאש - אף שחקן לא יוכל לשפר את מצבו ע"י שינוי מסלול כאשר האחרים נשארים במקומם.

המחיר כאן הוא $\phi^2+\phi^2+(1+\phi)^2+(1+\phi)^2 = 4\phi^2+2+4\phi$

כלומר, $\frac{4\phi^2+4\phi+2}{2\phi^2+2} = 1+\phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

אז אנחנו מופע שבו מחיר האנרכיה שווה לחסם שמצאנו. לכן החסם הדוק!

<u>הערה</u>: יש פה איזו טעות חשובה איפשהו, אבל זו הדוגמה הנכונה וזה אמור לצאת.

במקרה שהגדלים של השחקנים לא זהים אפשר לקבל באופן דומה ש- $PoA \le 2.5$ וגם זה חסם הדוק (כאשר הדוגמה למופע שיש בו שוויון היא אותה דוגמה כמו קודם אלא שבמקום ϕ יש 1.
(מאמר מ-2005 של Azar, Epstein)

<u>משפט</u>: לכל משחק עומס עם פונקציות עלות אפיניות מתקיים $PoS \le 2$.
כדי להוכיח את המשפט נסתכל בעיה של טענה יותר כללית.

<u>טענה</u>: יהי G משחק פוטנציאל שעבורו קיימים $A,B \ge 1$ כך שלכל פרופיל S

עלות פונקציית המטרה

$$\frac{cost(S)}{A} \le \phi(S) \le B \cdot cost(S)$$

אז $PoS \le A \cdot B$

<u>תזכורת</u>: פונקציית פוטנציאל $\phi : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ מקיימת

$$\phi(S_i, S_{-i}) - \phi(S_i', S_{-i}) = c_i(S_i, S_{-i}) - c_i(S_i', S_{-i})$$

<u>תזכורת</u>: כל משחק עומס הוא משחק פוטנציאל מדויק ואשר

$$\phi(S) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{x_e} c_e(i)$$

<u>הוכחת הטענה</u>: ניקח פרופיל S שמביא למינימום את ϕ. אזי

$$cost(S) \le A \cdot \phi(S) \le A \cdot \phi(S^*) \le AB \cdot cost(S^*)$$

S חייב להיות ש"נ כי הוא מינימום של ϕ. לכן

$$PoA \le \frac{cost(S)}{cost(S^*)} \le AB$$

כי

$$cost(S_{worst}) \le cost(S)$$

☺

<u>הוכחת המשפט</u>: עבור פרופיל מסוים S מתקיים

$$cost(S) = \sum_{e\in E} \underbrace{x_e}_{\text{כמה עברו}} \underbrace{C_e(x_e)}_{\text{עלות הקשת}}$$

$$\phi(S) = \sum_{e\in E} \sum_{i=1}^{x_e} C_e(i)$$

⇐ $\phi(S) \le cost(S)$ (כלומר $\phi(S)\le B\cdot cost(S)$, $B=1$).

כי C_e מונוטונית עולה.

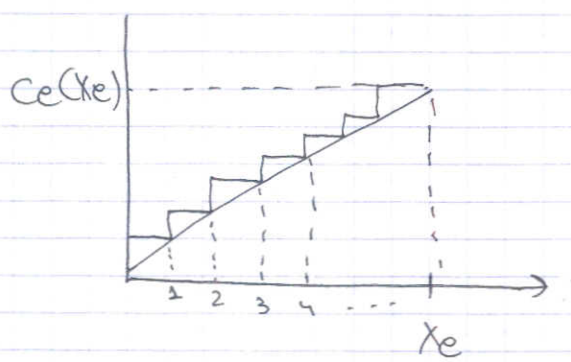
עכשיו נראה ש- $\frac{cost(S)}{2} \le \phi(S)$. אך

$$cost(S) = \sum_{e\in E} x_e(a_e x_e + b_e)$$

$$\phi(S) = \sum_{e\in E} \sum_{i=1}^{x_e} a_e i + b_e)$$

אפשר לעשות את החישוב ולראות שזה יוצא.

דרך אחרת להסתכל על זה היא באמצעות גרף



השטח של המלבן הוא המחיר של כל x מסוים.

הפוטנציאל הוא השטח שמתחת למדרגות וזה גדול מחצי המלבן!

בכל מקרה $\frac{cost(S)}{A} \le \phi(S)$ עבור $A=2$.

⇐ לפי הטענה $PoS \le 2\cdot 1 = 2$.

<u>סיכום</u>: הסתכלנו על משחק ניתוב אנוכי ברשת עם גרפים שונים ופונקציות עלות אפיניות לקשתות. ראינו חסמים על הנאש הכי גרוע והנאש הכי טוב.

12

8/11/09

כלכלה וחישוב

היום או מחר יפורסם תרגיל ראשון. שאלה כזו היא טוב, אבל בסוף כל אחד כותב את הפתרון בעצמו. כל שאלה תוגש בדף נפרד ובראשו יכתוב במי ובמה נעזרנו.

מציאת שיווי משקל

נותנים לנו קלט משחק והמטרה שלנו היא למצוא ש"מ נאש שלו. בעיקרון זו בעיה פשוטה. אבל יש שני סיבוכים-

- איך מחשבים את הפתרון? האם הכוונה היא לכתיבת תכנית? אפילו אם כן היינו רוצים אלגוריתם פשוט, אינטואיטיבי. היה נחמד גם אם האלגוריתם היה מבוזר במידה מסוימת - הרי יש הרבה שחקנים וכל אחד מהם מוצא כזה. היה גם נחמד אם היה קשר בין האלגוריתם לתמריצים של השחקנים
- איך נותן הקלט למשחק? סביר שהקלט לא פשוט יושב לו שם ומחכה לנו. הרבה פעמים הוא יכול להיות נתון בצורה עקיפה וצריך למצוא ולחשב אותו איכשהו.

נתחיל מהמקרים הפשוטים:

<u>קלט</u>: פונקציות תועלת $u_1,\dots,u_n$. כל פונקציה נתונה כטבלה בגודל $m_1\times\dots\times m_n$ כאשר $m_i=|S_i|$ מספר האסטרטגיות של שחקן i. לפעמים נתעצל ונסמן $m=m_1=\dots=m_n$. אז הקלט הוא בגודל $n\cdot m^n$.

<u>פלט</u>: ש"מ נאש טהור (כלשהו) או להגיד שאין כזה.

<u>פתרון פולינומיאלי פשוט</u>: נעבור על כל משבצת ונבדוק אם מישהו יכול לשפר. כמה זמן זה לוקח?

$$\underbrace{m^n}_{\text{מספר המשבצות}}\cdot\underbrace{n}_{\text{מספר השחקנים}}\cdot\underbrace{m}_{\text{מספר האסטרטגיות}}$$

אז זה אכן פולינומיאלי.

האמת היא שאפשר לקצר את זה לזמן לינארי ע"י עיבוד מקדים- כל שחקן מוצא את המקסימום בכל שורה אצלו.

אבל היה נחמד אם יכולנו לעשות משהו שמבוסס על best reply dynamics - נתחיל מנקודה מסוימת ואם מישהו לא מרוצה נעבור לנקודה אחרת.
זה נשמע נחמד אבל הבעיה העיקרית של זה היא שאם אין שיווי משקל אז נכנסים ללולאה אינסופית. אז נניח שלא אכפת לנו מזיכרון ונזכור את כל המקומות שהיינו בהם ולא נכנס ללולאה אינסופית. עדיין יש בעיה חמורה - יכול להיות שיש ש"מ נאש טהור אבל השיטה הזאת לא תמצא אותו. למשל,

-1,1	1,-1	0,0
1,-1	-1,1	0,0
0,0	0,0	3,3

ש"מ שלא נמצא אותו לעולם.

בתרגול נראה שבמשחקי פוטנציאל זה תמיד עובד (אם כי לא מהר) ואלה המשחקים היחידים שבהם זה עובד.

<u>שינוי גישה</u> u_i לא נתון כטבלה אלא באופן מקודד - למשל אולי ע"י פרוצדורה שמשתמשת ב-poly(n,m) נתונים. איך זה יכול לעזור לנו?
למשל נסתכל ב-congestion games - יש רשת זרימה ושחקנים שרוצים להעביר הודעה מנקודה כלשהי לנקודה אחר. לכל צלע יש פונקציית delay. אז בהינתן פרופיל אסטרטגיות אפשר בקלות לחשב את u_i. והאם זה יעזור לנו?

<u>קלט:</u> פונקציות תועלת $u_1, \dots, u_n$ הנתונות ע"י קופסה שחורה אשר מסוגלת לענות על שאילתות מהסוג
- שאילתת ערך. $u_i(s_1, \dots, s_n)$
- תגובה טובה ביותר - $\arg\max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$ (נתון s_{-i})
- כל שאלה לגבי u_i בודד

נשים לב שבמשחק לחשב את התגובה הטובה ביותר אפשר להשתמש m פעמים בשאילתת ערך. לפעמים זה מחיר שנהיה מוכנים לשלם ולפעמים לא.

<u>אלגוריתם</u>

$s_1,\dots,s_n \leftarrow$ כלשהו

```
repeat m·n times
    for i = 1 .. n
        s_i ← best_reply_i(s_-i)
```

[אנחנו מניחים שאין שוויונות והתגובה הטובה ביותר מוגדרת היטב].

```
output (s_1, ..., s_n)
```

זמן הריצה $O(mn^2)$ (אם best-reply עובד ב-$O(1)$)

dominance solvable games - משחקים פתירים בשליטה.

~~4,9~~	~~2,8~~	~~7,10~~
~~5,7~~	3,8	~~8,7~~
~~4,9~~	~~2,6~~	~~9,5~~

תזכורת:
- s_i נשלטת ממש ע"י s_i' אם לכל s_{-i} $u_i(s_i) < u_i(s_i')$

נניח שהשחקנים רציונלים.

⇐ שחקן השורות לא ישתמש בשורה הראשונה.

⇐ שחקן 2 יודע זאת ולכן לא ישתמש בעמודה השלישית.

⇐ שחקן 1 לא ישתמש בשורה השלישית.

⇐ שחקן 2 לא ישתמש בעמודה הראשונה.

⇐ מה שנשאר זה ש"מ נאש כי מחקנו רק דברים שנשלטו.

זה נקרא iterated elimination of strictly dominated strategies

<u>הגדרה</u>: משחק נקרא פתיר בשליטה ממש אם סדרה חוזרת של אסטרטגיות נשלטות מובילה לפרופיל אסטרטגיות יחיד.

<u>הערה</u>: השליטה ממש (בניגוד לחלשה ש- $u_i(s_i) \le u_i(s_i')$)

זה מה שיוצר אי תלות בסדר.

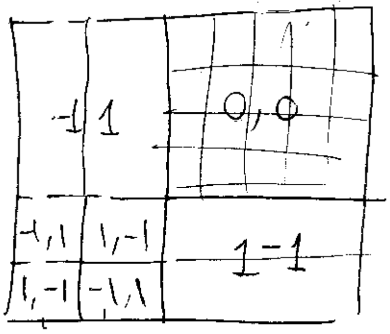
משפט: האלגוריתם הנ"ל מוצא ש"מ טהור בכל
משחק פתיר בשליטה.

הוכחה: נטען שאסטרטגיה ש"הורדה" בשלב ה-t (מהסרת
האסטרטגיות לפי ההגדרה) לא תופיע לאחר t סיבובים של
האלגוריתם. מכיוון שבסוף כל האסטרטגיות ירדו חוץ
מש"מ נאש זה מה שנשאר לנו באלגוריתם.
האסטרטגיה ה-t שירדה אינה יכולה להיות תגובה טובה
ביותר לכל קומבינציה של אסטרטגיות שנותרו אחריה.
(אחרי שהוסר מה שהורד לפניה היא נשלטת ולכן לא יכולה
להיות תגובה טובה ביותר).

הערה: אפשר לבדוק אם משחק הוא פתיר בשליטה -
ננסה לפתור אותו ע"י הורדת אסטרטגיות
ונראה אם אנחנו מצליחים. הבעיה היא שזה תהליך יקר.
הפלא הוא שאם אנחנו יודעים מראש שאנחנו יכולים
לפתור ככה אז אפשר לקצר את זמן הריצה ממש!

משפט: כל אלגוריתם שמוצא תמיד ש"מ במידה שקיים
דורש לפחות (m^n) שאילתות לקופסה השחורה
של שנותנת ערך במקרה הגרוע ביותר.

הוכחה: נמנה יריב. היריב יענה לכל שאילתה לפי הטבלה



כל עוד לא נשאלו כל המשבצות ב"חלק העליון" (שונה מ- (0,0))
של הטבלה לא ניתן לענות "לא" (וכן "תן" דוגמא).
שכן עבורנו שם יש $\boxed{1,1}$. לכן חייבים לעבור על הכל. והאלג'
דורש $(m-2)^2$ שאילתות. הכללה מרחיבה ל-n שח'.

מסקנה: כל אלגוריתם שמוצא נ"ש של משחק פוטנציאל
מדויק דורש לפחות $2^{\Omega(n)}$ שאילתות לקופסה השחורה
(שאילתות ערך) במקרה הגרוע ביותר.

הוכחה: כמו קודם, נתאר את האסטרטגיה של היריב.
נניח ש- $u=u_1=\dots=u_n$, כלומר יש לשחקנים אותה מטרה.
זה משחק פוטנציאל עם $\phi=u$. נראה שאפילו במקרה
הזה דרוש זמן אקספוננציאלי במקרה הגרוע ביותר.
היריב עונה i לשאילתא ה-i, אך אם התנתקה קבוצת
קודקודים S מקבוצת מרוב הקודקודים, נותן ערכים שליליים
שם. (התנתק = שאלנו את כל השכנים כבר)

~~המשך שבוע הבא~~
המשך אח"כ.

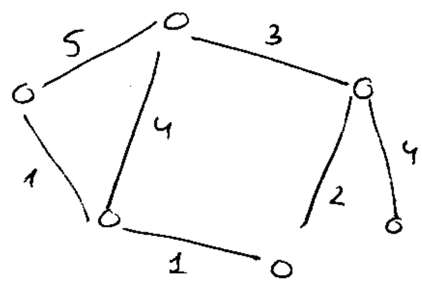
15

15/11/09

טבע וחישוב

משחקי בניית רשת

אופן: נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ לכל קשת יש עלות קבועה C_e.
(בבעיית הניתוב העלות הייתה פונקציה של הנוסעים בקשת. כאן זה קבוע).



יש n שחקנים. לכל שחקן i יש קודקוד מקור O_i ויעד t_i וכל שחקן צריך למצוא מסלול שמחבר את המקור שלו עם היעד ושהמסלול יהיה מחיר מינימלי. מרחב האסטרטגיות של כל שחקן הוא כל המסלולים ממקור ליעד. ו- P_i - האסטרטגיה של שחקן i היא מסלול מ-O_i ל-t_i.
אבל מה קורה אם שני שחקנים רוצים להשתמש באותה קשת?
העלות צריכה להתחלק איכשהו בין השחקנים. אנחנו נשתמש **במודל החלוקה** שעלות כל קשת מתחלקת שווה בשווה בין השחקנים שמשתמשים בה. כלומר

$$c_i(e) = \frac{C_e}{X_e}$$

e - קשת

X_e - מספר השחקנים בה.

$$\Rightarrow cost_i(s) = \sum_{e \in P_i} \frac{C_e}{X_e}$$

זה משחק עומס. יש קבוצת משאבים - הקשתות, ועלות השימוש במשאב עבור משתמש כלשהו תלויה אך ורק במספר המשתמשים בקשת.
אבל בניגוד לניתוב ברשתות, כאן ככל ש-X_e גדול יותר מחיר השימוש בקשת קטן יותר. בניתוב ברשת העלות דווקא עלתה במספר השחקנים. כלומר במשחק ניתוב העלות הייתה מונוטונית עולה ובמשחקי בניה העלות מונוטונית יורדת.

מכל מקרה, בגלל שזה משחק עומס יש לו ש"מ נאש. אבל גם,

אפשר לדבר על

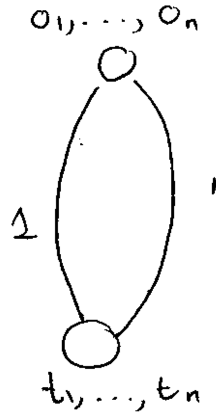
מחיר האנרכיה $PoA = \frac{\text{עלות נאש גרוע}}{OPT}$

מחיר היציבות $PoS = \frac{\text{עלות נאש טוב}}{OPT}$

וזה ביחס לפונקציית המטרה. של עלות כוללת של בניית הגרף, כלומר עלות כוללת של השחקנים.

מחיר האנרכיה

דוגמא:



יש פה שני שיווי משקל:

- אם כולם הולכים דרך 1, כולם משלמים $\frac{1}{n}$
- אם כולם הולכים דרך n כולם משלמים 1.

OPT כאן הוא 1. ולכן $PoA = \frac{n}{1} = n$

זה מאוד גרוע. היינו רוצים שזה יהיה תלוי אולי במאפיינים של הגרף ולא ~~במשחק~~ה במספר המשחקים, שהרי מספר השחקנים יכול להיות ממש ממש גדול.

משפט: במשחקי בניית רשתות $PoA \le n$.

הוכחה: נניח בשלילה שעלות (סכום העלויות של השחקנים) בש"מ נאש גדולה ממש מ- $n \cdot OPT$. $\Leftarrow$ חייב להיות שחקן שמשלם יותר מ- OPT (סה"כ על המסלול שלו). אותו שחקן יסטה ל- OPT וירוויח. לכן זה לא יכול להיות.

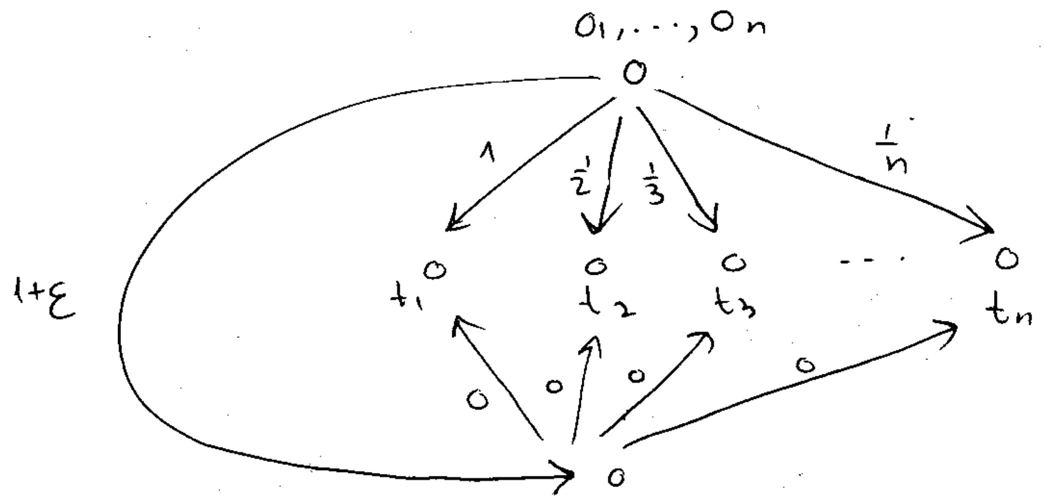
☺

זה חסם הדוק. כי הראנו משחק שבו מחיר האנרכיה אכן שווה ל n.

מחיר היציבות

מאחר ש- $PoS \le PoA$ ברור ש- $PoS \le n$. האם הוא יכול להיות יותר טוב? למשל בדוגמה למעלה $PoS = 1$. אבל לחשוב שתמיד יש ש"מ ממש טוב זה אופטימי מדי...

<u>דוגמה:</u>



כאן $OPT = 1+\varepsilon$ אבל זה לא ש"מ נאש כי לשחקן n עדיף ללכת ל- $\frac{1}{n}$. ואחריו לשחקן n-1 עדיף ללכת לו $\frac{1}{n-1}$ וכך הלאה יוצא שש"מ נאש <u>היחיד</u> במשחק (ובפרט הכי טוב) הוא רשת שכל אחד קונה את הקשת שלו $\frac{1}{i}$. סך

$$PoS = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}^{=H(n)}}{1+\varepsilon} \approx \frac{\log n}{1+\varepsilon} = \Theta(\log n)$$

<u>מסקנה:</u> $PoS \geq H(n)$, כלומר קיים משחק שבו זה מתקיים.

אז בינתיים אנחנו יכולים להגיד שהחסם על PoS נמצא איפשהו כאן

$H(n)$ ... n

<u>משפט:</u> $PoS \leq H(n)$ (ואחרי שנוכיח את זה אז מכלל הדוגמה למעלה אנחנו גם נדע שהחסם הדוק.)

<u>תזכורת:</u> פונק' הפוטנציאל של משחק עלות

$$\phi(S) = \sum_e \sum_{i=1}^{x_e} c_e(i) = \sum_e \sum_{i=1}^{x_e} \frac{c_e}{i} =$$

במקרה שלנו

$$= \sum_e c_e \sum_{i=1}^{x_e} \frac{1}{i} = \sum_e c_e H(x_e) \leq \sum_e c_e H(n)$$

$$= H(n) \sum_e c_e$$

תזכורת: למה שראינו לפני שבועיים - אם לכל פרופיל S

$$\frac{cost(S)}{A} \le \Phi(S) \le B\cdot cost(S)$$

אז $PoS \le AB$.

הוכחה: ברור ש- $\frac{cost(S)}{1} \le \Phi(S)$, שהרי כל קשת תורמת לפונקציית הפוטנציאל $\frac{c_e}{1}+\frac{c_e}{2}+\dots+\frac{c_e}{x_e}$ ואילו לפונקציית הפוטנציאל רק c_e.

מאידך, מהתזכורת קודם ברור ש- $\Phi(S) \le H(n)\, cost(S)$

$\Rightarrow PoS \le H(n)$ ☺

סיכום: $PoA \le n$! - $PoS \le H(n)$ והחסמים האלה הדוקים!

ש"נ נאש חזק (Strong Equilibrium)

דוגמת האסיר

(תועלות)

3,3	0,5
5,0	1,1

ש"נ נאש.

אבל יש לנו הסבר על השיווי הזה. כי אם הם יכולים לשתף פעולה ולסטות ביחד (ולא רק לוקאלית לחוד) אז הם יכולים לשפר את מצבם ל- (3,3)

נוטציות: תת קבוצה של שחקנים $T \subseteq S$ היא קואליציה.
האסטרטגיה של הקואליציה - $S_T \in \times_{i\in T} S_i$. לשאר השחקנים $S_{-T} \in \times_{i\notin T} S_i$. וכך פרופיל הוא $s=(s_T, s_{-T})$.

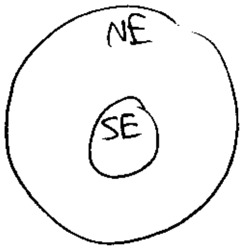
הגדרה: פרופיל $s=(s_T, s_{-T})$ לא יציב בפני סטייה של קואליציה T אם קיים פרופיל s'_T כך שלכל $i\in T$ $c_i(s')<c_i(s)$

(14)

הגדרה: פרופיל S נקרא ש"מ חזק (SE) אם לא קיימת קואליציה T שבפניה S לא יציב.

ברור שש"מ חזק הוא גם ש"מ נאש כי אם הוא עמיד בפני סטייה של כל קואליציה אז בפרט הוא עמיד לסטייה של שחקן יחיד.

ברור ש- $PoA_{SE} \le PoA_{NE}$ ואילו $PoS_{SE} \ge PoS_{SE}$



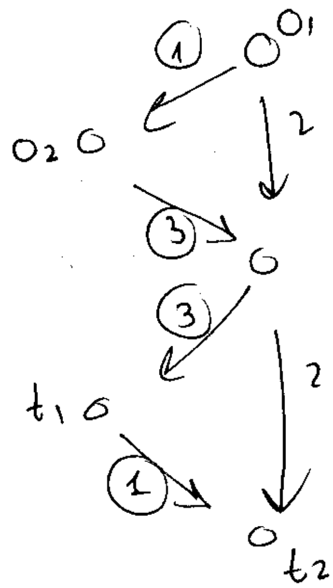
אבל האם קיים בכלל ש"מ חזק? למשל בדילמת האסיר אין ש"מ כזה... המצב $(3,3)$ הוא אמנם טוב לשניהם אבל הוא בכלל לא ש"מ נאש.

נסתכל על משחק בניית רשת מסוים - זה משחק בניית רשת אבל הוא סימטרי - כלומר לכל השחקנים אותם קודקודי מקור ויעד.

משפט: במשחק כזה תמיד קיים ש"מ חזק.

הוכחה: אם כולם בוחרים במסלול הזול ביותר. אז זה גם ש"מ חזק. הרי אם קואליציה עוברת מסלול אז אם הם עברו לא במסלול הזול הרי זול ואם הם לא משתתפים במחיר עם כולם. אז זה בטח לא כדאי.

דוגמה:



כאן $OPT = 8$

אבל בש"מ נאש 6 שבו משלם 5 $(=2+3)$.

וזה הש"מ נאש היחיד.

אבל זה לא ש"מ חזק כי אם שני השחקנים יעברו בקואליציה ל- OPT כל אחד ישלם 4.

כאן לא קיים ש"מ חזק כלל כי המועמדים היחידים לש"מ חזק הוא ש"מ נאש והיחיד שיש כאן הוא לא חזק.

את המשחק הזה אפשר להציג בטבלה כך:

	ימין	שמאל
ימין	5,5	3.5,5.5
שמאל	5.5,3.5	4,4

זה מזכיר את דילמת האסיר. יש רק ש"מ נאש אחד והוא לא חזק.

<u>מסקנה:</u> במשחקי בניית רשת לא סימטריים לא תמיד קיימים ש"מ חזק.

<u>משפט:</u> בכל משחק בניית רשת, אם קיים ש"מ חזק אז
$$PoA_{SE} \le H(n)$$

<u>הערה:</u> זה מעניין כי ראינו ש- $PoS_{NE} \le H(n)$. PoA מדבר על עולם שבו כל אחד פועל לטובת עצמו בלבד. אבל מה אם נגיד לשחקנים יש יכולת לעשות קואורדינציה מסויימת? אז לפי המשפט $PoA_{SE} \le H(n)$.
ואילו אם יש גורם חיצוני שיכול להביא אותם למצב התחלתי כלשהו (ש"מ נאש הכי טוב) אז גם $PoS_{NE} \le H(n)$.

PoA_{NE}

קואליציה — PoA_{SE}

גורם חיצוני — PoS_{NE}

(18) 22/11/09
טפה
וחישוב

הערה לבודקים: יש 6 שאלות נותנים 0, 1 או 2. 2 זה אומר שבגדול זה נכון והבנו את העיקר אבל אולי יש פרטים קטנים לא מדויקים. 1 זה אם הבנו חלק משמעותי אבל יש גם חלק שלא הובן.
איך לבדוק? עושים סריקה של התשובות והערכה של איך לבדוק ואז לחזור לניירות ומיד להתייחס אותם.
אז נותנים את הניקוד ומחזירים לנועם. הם יכולים לשנות אבל לא סביר.

הערה למסכמים: נא להקפיד בשליחת הסיכומים.

כמה זמן לוקח למצוא ש"מ טהור?
ראינו הוכחה שבאופן כללי כדי להראות שאין שיווי משקל צריך לעבור כמעט על כל התאים במטריצה. אז עברנו לדבר על משחקי פוטנציאל.

<u>משפט</u>: כל אלגוריתם שמוצא ש"מ טהור במשחק פוטנציאל, תוך שימוש "בקופסה שחורה", דורש זמן מעריכי. בפרט, עבור $m=2$ נראה חסם תחתון של $2^n/\sqrt{n}$.
[כלומר אנחנו נמצאים בעולם שבו לכל n השחקנים יש שתי אסטרטגיות.]
<u>הוכחה</u>: היריב תמיד יבחר $u_1=u_2=\dots=u_n=u$ וזו גם פונק' פוטנציאל לפי ההגדרה. אז כל האלגוריתם למצוא מקסימום לוקאלי של u. אז הלוגיקה היא שהיריב יענה שהערכים הם פשוט ערכים עולים ואז אי אפשר להכריז שמצאנו מקסימום כי כל פעם שעוברים לשכן מקבלים ערך גבוה יותר.
אז נתאים האלגוריתם שלנו ירוץ לנסות לבודד קודקודים.
<u>הגדרה</u>: יהי Q אוסף השאילתות עד כה. נגיד שקודקוד <u>מוסגר</u> (compromised) ע"י Q אם רכיב הקשירות של הקודקוד

מהיפר-קוביה לאחר שהורדנו כל קודקודי Q הוא בגודל קטן א- $\frac{2^n}{2}$.

היריב הפשוט "יתן תשובות (יזכור לעצמו "בראש") ערכי תשובה שווים לכל הקודקודים שהוסרו בשאילתא מסוימת מאחר מכן ערך שווה לשאילתא עצמה.

איך נותנים לאלה שהוסרו ערכים כך שלא יווצר מקסימום לוקאלי?
נותנים את הערכים בסדר מהרחוק ביותר (מקודקוד השאילתא) לקרוב ואז לא יכול להיווצר מקסימום לוקאלי.

<u>טענה</u>: האלגוריתם לא יכול לתת תשובה לפני שכל הקודקודים נשאלו או הוסרו.
זה ברור מהבנייה - תמיד השכנים שעד עכשיו אין להם מקסימום לוקאלי כי הערכים הלכו וגדלו ולקודקודים שהולכים להגיע אנחנו ממשיכים לתת ערכים גבוהים יותר.

כמה זמן זה נמשך?
אם Q קבוצת השאילתות ו- C קודקודים שהוסרו אז כל שכני C חייבים להיות ב- Q (או ב- C עצמה).
אנחנו רוצים ש- C יהיה כמה שיותר גדול ו- Q כמה שיותר קטן. נניח שזה קורה כשב- C יש את כל הקודקודים שיש בהם לכל היותר k 1-ים וב- Q יש את הקודקודים שיש בהם k+1 1-ים. כלומר

$$|C| = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}, \quad |Q| = \binom{n}{k+1}$$

<u>למה</u>: לכל קבוצה C בגודל $\leq \frac{2^n}{2}$, קבוצת שכניה גדולה או שווה ל- $|C|/\sqrt{n}$.

אז יש לנו

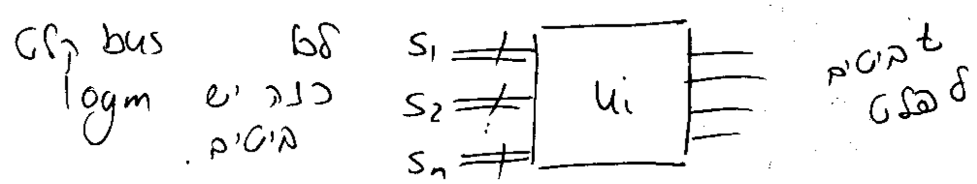
$$\begin{cases} |C| \leq |Q|\sqrt{n} \\ |C| + |Q| \geq \frac{2^n}{2} \end{cases} \Rightarrow |Q| \geq \Omega\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

ואכן זה זמן הריצה המינימאלי שהאלגוריתם יכול לעבוד.

<u>קלט</u>: תיאור קצר של משחק
<u>פלט</u>: ש"מ טהור של המשחק או להגיד שאין כזה.

אבל מה זה תיאור קצר של משחק? אנחנו רוצים להחליף את הקופסה השחורה הדימיונית שלנו. אז התיאור "ינתן ע"י" קוד בשפת מחשב שמחשב את הפונקציה.
אנחנו נניח גם שהפונקציה יעילה (פולינומיאלית).
אנחנו נניח גם שהקוד של הפונקציה כולל נתונים מובלעים (למשל אם n גדול יותר סביר שהפונקציה תהיה ארוכה יותר). אפשר לחשוב על זה כאילו כל הנתונים הם hard-coded בקוד.

אז תיאור קצר של משחק הוא מעגל $\underbrace{\text{בוליאני}}_{}$ (עם שערי ה,ו,) שמחשב את הפונקציה.
וידוע שאם יש קוד שמחשב משהו, אפשר לבנות חומרה פולינומיאלית עם זיכרון פולינומיאלי ומחשבת את אותה הפונקציה בגודל פולינומיאלי.
כמובן, להפך אם יש לנו חומרה כזאת אז אפשר לסמלץ אותה בתוכנה. לכן אנחנו יכולים להניח שהקלט שלנו הוא מעגל בוליאני.
איך מעגל כזה נראה?



אז הקלט הוא n מעגלים, כל אחד עם קלט של $n \cdot \log m$ ביטים ופלט של t ביטים.

אז בהינתן הקוד אפשר כמובן להשתמש בכל מה שעשינו קודם ולהשתמש בקוד בדיוק באותו אופן כמו עם הקופסה השחורה. אבל אולי הסתכלות בקוד יכולה לתת לנו מידע נוסף?

<u>משפט</u>: בעיית ההכרעה (אם יש ש"מ או לא) היא NP-שלמה.
<u>הוכחה</u>: זה ב-NP: ננחש את השיווי משקל ואז בשימוש במעגל

אפשר לבדוק את כל השכנים ולוודא שזה באמת ש"מ.

למה זה NP-שלם? נעשה רדוקציה מ- 3-SAT.

<u>תזכורת:</u> 3-SAT יש פסוק מהצורה - קוניונקציה של דיסיונקציות מאורך 3:

$$(\circ \vee \circ \vee \circ) \wedge (\circ \vee \circ \vee \circ) \wedge \ldots$$

כאשר $\circ$ זה משתנה או שלילתו.

והשאלה היא אם יש השמה מספקת.

אנחנו רוצים איכשהו לקשר את זה למשחק.

כל שחקן הוא פסוקית! $u_I = \begin{cases} 1 & \text{פסוקית מסתפקת} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

נוסיף עוד סוגי שחקנים - לכל משתנה מתאים שחקן ויש לו שתי אסטרטגיות - 0 או 1. והתועלת של השחקנים האלה היא תמיד 1 (לא תלויות בפרופיל)

לכל השחקנים יש תועלת 1 אמ"מ יש השמה מספקת.

אבל אותנו מעניין ש"מ. אנחנו רוצים שאם כולם שמחים אז יש ש"מ ואחרת אין ש"מ.

נשנה את התועלת של שחקני הפסוקיות:

$u_I(s_I, s_{-I}) = 1 \iff$ הפסוקית מסתפקת

ונוסיף עוד שני שחקנים. A,B כך ש-

u_A, u_B:
- אם כל שחקני הפסוקים מסופקים $\implies$ A,B מרוצים $u_A = u_B = 1$
- אחרת $\implies$ A,B ישחקו זוג או פרט (שאין לו ש"מ).

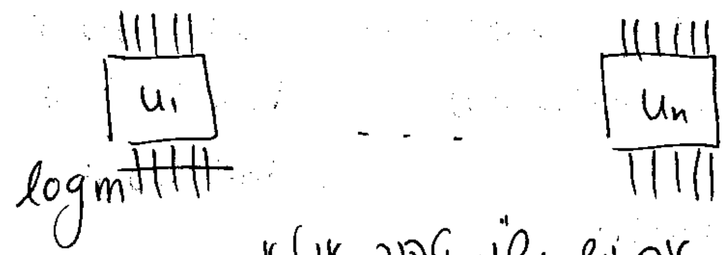
ומשיויון שיש ש"מ נובע אמ"מ יש השמה מספקת, וזה מה שרצינו.

☺

(20) 29/11/09
טבעה חישוב

אנהלות
- תרגיל חדש יתפרסם היום. הגשה - בעוד שבועיים
- בודק תרגילים - נא להגיע לנועם (מיר) רק להתייעץ.

שבוע שעבר דיברנו על מצב שבו פונק' התועלת של כל שחקן נתונה ע"י מעגל חישובי (שאנחנו יודעים את המימוש שלו אבל פרקטית קשה להאמין שאפשר להסיק מהמימוש משהו מועיל).
אז הקלט הוא



והפלט צריך להיות אם יש ש"מ טהור או לא.
עשינו רדוקציה לבעיית 3-SAT כך שיש ש"מ במשחק שלנו אמ"מ יש השמה מספקת לנוסחה. ובכך הוכחנו שהבעיה היא NP-שלמה. חשוב: הבעיה ב<u>ייצוג</u> שבחרנו היא NP-שלמה.

משחק בייצוג גרפי

יש הרבה מקרים שבהם תועלת של שחקן תלויה רק במה שחלק קטן מה שחקנים עושה. במקרה זה אפשר להקטין את הייצוג של המשחק.
- נתון גרף G בין השחקנים.
- פונקצית התועלת של שחקן i תלויה רק בפעולות שלו ושל שכניו בגרף.
- בייצוג מספיק לתאר את פונקצית התועלת של שחקן i כטבלה בגודל m^{d_i+1} כאשר d_i מספר השכנים של i בגרף.

אז עכשיו אפילו אם יש הרבה שחקנים סה"כ יכול להיות שהייצוג יהיה קטן והוא גם מאוד טבעי.

מה הקושי של הבעיה בזיווג הזה?

- אם G השחקנים תלויים בכולם אז הקלט הוא בגודל מעריכי ואז אנחנו במצב טוב - נעבור על G האפשרויות וזה פולינומיאלי ב~~קלט~~. (השיטה הזאת לא עובדת בזיווג הקודם כי הזיווג שם קטן יותר...)
- אם הדרגה של כולם היא 1 אז גם קל לראות שאפשר לפתור את זה. כי למעשה הגרף נראה כך:

וצריך פשוט להסתכל על הזוגות בנפרד.
- אם הגרף הוא עץ אנחנו נוכיח בתרגיל שאפשר לפתור את זה בזמן פולינומיאלי.

נראה שאם הדרגה של הקודקודים היא לכל היותר 3 אז זה קשה-שלם.
אם כן, נעשה רדוקציה ל- 3-SAT.

$$(x_1 \vee \bar{x}_7 \vee x_8) \wedge (x_1 \dots) \wedge \dots \wedge (x_{17} \vee x_{19} \vee \bar{x}_1)$$

גם כאן יש לנו שחקנים (משתנים) אבל צריך שבשיווי משקל בכל מקום שיש x_1 השחקנים ישחקו את אותה האס'.
אז נעשה זוג שחקנים שיחברו את כל ה-x_1-ים ביחד ויוודאו שהאסטרטגיה שלהם תמיד זהה.
אז G שחקן משתנה תלוי בשחקן אחד.
G שחקן פסוקית תלוי בשני שחקנים.
ויש לנו את השחקנים A ו- B שקודם רצינו שיהיו תלויים בכולם. אז פשוט נוסיף עוד שחקני AND שיוצרים שרשרת. שחקן AND_2 שמח אם שחקן פסוקית 1 ושחקן פסוקית 2 שמחים. ורק הלאה AND_{i+1} שמח אם שחקן AND_i ושחקן פסוקית i+1 שמחים. רק למעשה A ו- B תלויים רק ב- AND_n. והמשך כמו שעור שעבר.

<u>משפט</u>: בעיית ההכרעה של קיום ש"מ טהור במשחק
מדרגה 3 היא NP-שלמה.

<u>משחק עומס</u>: יש גרף, לכל צלע פונק' עומס. כל שחקן קודקוד מקור וקודקוד מטרה. פונקציות עומס מוגדרות ע"י n מספרים - המחיר בעומס 1, המחיר בעומס 2 וכן הלאה.
מה הסיבוכיות החישובית של משחק מסוג כזה? האם יש אלג' פולינומיאלי שאומר אם יש ש"מ? כן! האלגוריתם פשוט תמיד אומר שכן (כי זה משחק פוטנציאל). אבל האם אפשר למצוא את הש"מ?

<u>קלט</u>: אלגוריתמים שמחשבים את פונק' התועלת של n שחקנים במשחק פוטנציאל

<u>פלט</u>: שיווי משקל טהור של המשחק

ש"מ במשחק כזה מתקבל במקסימום מקומי של פונק' הפוטנציאל.
הבעיה הזו אכן שקולה למציאת מקס' מקומי של פונק' הפוטנציאל.

נניח שיש לנו פונק' פוטנציאל. איך מוצאים מקסימום מקומי?
נניח שיש פונקציה $f(x,y)$. בהינתן x, איך נמצא y רק ש-$f(x,y)>0$.
זה בעיית NP. מנחשים y ומוודאים. זה אותו דבר כמובן גם בעיה $f(x,y) > c$ עבור c קבוע כלשהו.
אם נרצה y שנותן מקסימום? זאת בעיה קשה יותר.
ואם נרצה y שנותן מקסימום מקומי? בעיה זו שייכת למחלקה נקראת בשם PLS (Polynomially local search). אם יש לנו פתרון כלשהו אנחנו ננסה להזיז קצת בסביבה ולראות אם שיפרנו. זה מסלול יביא אותנו למקסימום <u>מקומי</u> לא גלובלי. האלגוריתמים האלה הם לא פולינומיאליים אבל פרקטית זה בד"כ עובד טוב.

<u>משפט</u>: מציאת ש"מ טהור במשחק פוטנציאל היא בעיה PLS-שלמה.

משפט: מציאת ש"מ במשחק עומס תשפי היא PLS - שלמה.
אנחנו לא נוכיח. זה שזה ב- PLS זה ברור כי זה מקרה פרטי של משחק פוטנציאל. כדי להוכיח שזה PLS-קשה יש רדוקציה שכנראה לוקח קורס שלם לעשות אותה.

שיווי משקל מעורב

<u>משחק סכום אפס</u> בשני שחקנים הוא משחק שבו $u_2 = -u_1$.
משחק כזה אפשר לתאר במטריצה אחת שמייצגת רק את התועלת של השחקן הראשון (שזה ההפסד של השחקן השני).

עד עכשיו לא היה לנו אלמנט של זמן במשחקים. השחקנים בחרו אסטרטגיה בו זמנית.
מה קורה אם במשחק סכום אפס כן יש אלמנט של תור.

Max \ Min	L	R
U	1	2
D	3	0

Min

לשחקן ה- Max עדיף לשחק שני כי הוא יכול להתאים לעצמו את האסטרטגיה בהתאם למה שהראשון עושה. למעשה האסטרטגיות שהשחקנים יבחרו הן

$$\text{Max}: \quad \arg\max_i \min_j a_{ij}$$

$$\text{min}: \quad \arg\min_j \max_i a_{ij}$$

<u>למה:</u> $\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$

<u>הוכחה:</u> מספיק להוכיח שלכל $\hat{i}, \hat{j}$ מתקיים

$$\min_j a_{\hat{i}j} \le \max_i a_{i\hat{j}}$$

וזה כמובן נכון כי

$$\min_j a_{\hat{i}j} \le a_{\hat{i}\hat{j}} \le \max_i a_{i\hat{j}}$$

<u>הגדרה</u>: נניח ששחקן יש m אסט' טהורות אפשריות. אסט' מעורבת היא וקטור $X=(x_1,\dots,x_m)$ כאשר $x_i \ge 0$ לכל i ו- $\sum x_i = 1$.

נתבונן במטריצה שלנו:

	L	R
U	1	2
D	3	0

אם שחקן העמודות משחק אסט' מעורבת $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ושחקן השורות משחק U אז תוחלת התשלום שלו היא $1\frac{1}{2}$.
אנחנו בקורס הזה נניח שתמיד מה שמעניין את השחקנים היא למקסם את תוחלת התשלום שלהם.

נניח ששחקן העמודות משחק אסט' מעורבת y ואנחנו יודעים שהתגובה הטובה (במעורבת) מול y- עבור שחקן 1 היא אסט' מעורבת שנותנת הסתברות חיובית ממש ל- $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. אז בהכרח תוחלת התשלום של הבחירה הטהורה ב- i_1 שווה לתוחלת בכל השאר כי אחרת לא היה כדאי לתת הסתברות חיובית לבחירה עם התוחלת הנמוכה יותר. לכן, כל צירוף קמור של האסט' $i_1,\dots,i_k$ הוא גם תגובה טובה מול y- (כי זה יתן את אותה תוחלת תשלום).

<u>משפט המינמקס</u>: (פון ניומן 1928): במשחק סכום 0

$$\max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij} = \min_y \max_i \sum_j a_{ij} y_j$$

במובן זה אומר שלשחקנים זה לא חשוב מה הסדר שלהם במשחק. תוחלת התשלום היא זהה בכל מקרה (גם אם השחקן השני יודע את האסט' <u>המעורבת</u> (לא מה שבסוף נבחר באמת) של השחקן הראשון

<u>הוכחה:</u> אנחנו מחפשים את

$$\max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij}$$
$$\text{s.t } \sum x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

זה קצת מזכיר בעית תכנון לינארי. אלא ש- min זה לא פונק' לינארית. בעיה שקולה לה אך לינארית היא

$$(*) = \begin{array}{ll} \max & c \\ \text{s.t} & c \leq \sum x_i a_{ij} \quad \forall j \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \\ & \sum x_i = 1 \end{array}$$

באופן דומה עבור שחקן העמודות אנחנו רוצים לפתור את

$$\begin{array}{ll} \min_y \max_i & \sum_j a_{ij} y_j \\ \text{s.t} & \sum y_j = 1 \\ & y_j \geq 0 \ \forall j \end{array} \xrightarrow{\text{שזה כמו}} (**) = \begin{array}{ll} \min & d \\ \text{s.t} & d \geq \sum_j a_{ij} y_j \ \forall i \\ & \sum y_j = 1 \\ & y_i \geq 0 \ \forall j \end{array}$$

ואנחנו רוצים להראות ש- $(*) = (**)$.

נתבונן בבעיה

$$(***) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum x_i \\ \text{s.t} & \sum x_i a_{ij} \geq 1 \ \forall j \\ & x_i \geq 0 \ \forall i \end{array}$$

אפשר לראות שהאופטימום של $(*)$ שווה להופכי של האופטימום של $(***)$

(23) 6/12/09
סטה וחישוב

* הודעה: ביום חמישי יש כנס על נושאים שמאוד קשורים לקורס. סטודנטים ששוקלים להמשיך לחקר בתחום מוזמנים מאוד להשתתף בכנס. מי שמעוניין שישלח מייל למיכל או לנועם.

Israeli Seminar on CGT

* הודעה - מי שלא נרשם לסיכום שיעורים יכול לבקש לפרסם פתרון ב"ס לתרגיל כלשהו.

משחקי סכום אפס בשני שחקנים

המשחק מתואר ע"י מטריצה $A=\{a_{ij}\}$ אשר מתארת את התשלום ששחקן ה-min (עמודות) משלם לשחקן ה-max (שורות).

שחקן ה-max רוצה למקסם את התשלום שלו, כלומר הבעיה שהוא רוצה לפתור היא

$$\max_x \min_j \sum x_i a_{ij}$$
$$\text{s.t. } x_i \geq 0 \ \forall i$$
$$\sum x_i = 1$$

זאת תכנית כמעט לינארית. תכנית לינארית שקולה היא

$$(1) \quad \begin{aligned} &\max \ C \\ &C \leq \sum x_i a_{ij} \ \forall j \\ &x_i \geq 0 \ \forall i \\ &\sum x_i = 1 \end{aligned}$$

קל להשתכנע שזאת אכן תכנית שקולה.

מאידך, שחקן ה-min דווקא רוצה למזער את ההפסד שלו. כלומר הוא רוצה לפתור את התכנית

$$\min_{y} \max_{i} \sum_{j} a_{ij} y_j$$
$$\text{s.t } y_j \geq 0 \ \forall j$$
$$\sum y_j = 1$$

שזה היא נראה לינארית

אבל יש לה תכנית לינארית שקולה

$$\min_{y} d$$
$$\text{s.t } d \geq \sum a_{ij} y_j \ \forall i \qquad (3)$$
$$y_j \geq 0 \ \forall j$$
$$\sum y_j = 1$$

נתבונן בתכנית

$$\min \sum x_i$$
$$\text{s.t } x_i \geq 0 \ \forall i \qquad (2)$$
$$\sum x_i a_{ij} \geq 1 \ \forall j$$

<u>טענה:</u> האופטימום של (1) שווה בדיוק להופכי של האופטימום של (2).

<u>הוכחה:</u> אם $x = (x_1, \dots, x_m)$ פתרון אפשרי ל-(1) ונותן איזה ערך c.

אז $\frac{x}{c} = \left(\frac{x_1}{c}, \dots, \frac{x_m}{c}\right)$ הוא פתרון אפשרי ל-(2)

והוא נותן ערך $\sum \frac{x_i}{c} = \frac{1}{c}$.

לכן $OPT(2) \leq \frac{1}{OPT(1)}$

מצד שני, אם x' פתרון אפשרי ל-(2) ונותן ערך $\frac{1}{c}$ אז $c \cdot x'$ פתרון אפשרי ל-(1) שנותן ערך c. לכן $OPT(1) \geq \frac{1}{OPT(2)} \Leftarrow$ יש שוויון. ☺

אפשר להניח בה"כ ש-$0 < a_{ij}$ כי אחרת פשוט נוסיף קבוע למטריצה ושום דבר לא משתנה.

באופן דומה עבור שחקן ה-min נתבונן בתכנית

$$\max \sum y_j$$
$$\text{s.t}$$
$$y_j \geq 0 \ \forall j \qquad (4)$$
$$\sum_j a_{ij} y_j \leq 1$$

ושם מתקיים $\overset{1}{OPT}(3) = OPT(4)$

אבל תכניות (4) ו-(2) הן דואליות ולכן

$$OPT(4) = V_{max} = V_{min} = OPT(2)$$

$\Leftarrow$ $OPT(1) = OPT(3)$ (כי הם ההופכיים של (2) ו-(4))

$$\Leftarrow \quad \max_{x} \min_{j} \sum_{i} x_i a_{ij} = \min_{y} \max_{i} \sum_{j} a_{ij} y_j$$

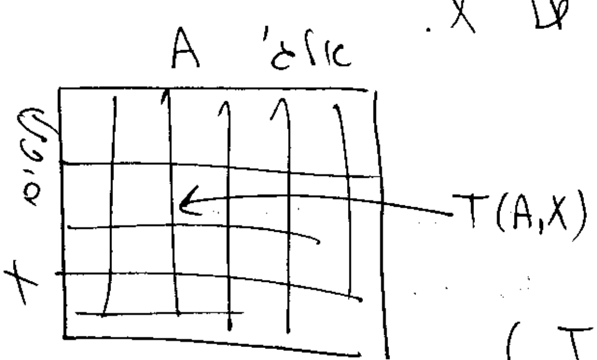
$$\text{s.t. } x_i \geq 0 \ \forall i, \quad \sum x_i = 1 \qquad\qquad \text{s.t. } y_j \geq 0 \ \forall j, \quad \sum y_j = 1$$

ובזאת הוכחנו את משפט המינמקס. הוא משפט מאוד חשוב והוא למעשה אומר שברגע שיש לנו שני שחקנים, אין חשיבות למי שמשחק קודם.

מעבר לזה, השחקנים יכולים לחשב את האסטרטגיה האופטימלית עבורם, ובעזרת תכנון לינארי אפשר אפילו לעשות את זה בזמן פולינומיאלי. האסטרטגיות האלה הן גם ש"מ נאש מעורב.

עכשיו נדון באפליקציות טריוויאליות של המשפט הזה.

נסתכל על משחק סכום אפס: יש איזו בעיה לפתור ויש מ מיני אלג' דטרמיניסטיים שפותרים אותה. בהינתן אלג' A וקלט X נסמן ב- $T(A,X)$ את זמן הריצה של A על X.



אסט' A של שחקן האלגוריתמים מבטיחה תוצאה $\leq T$ כאשר T הוא זמן הריצה של A ב- worst case (כלומר $T = \max_X T(A,X)$).

שחקן האלגוריתמים רוצה למזער את זמן הריצה. מנגד, שחקן הקלטים יכול לתת קלטים שקשה לעבוד עליהם - הוא מנסה לתת לנו קלטים גרועים. זה מודל טוב כי בתור אנשי מדעי המחשב מה שמעניין אותנו הוא ה- worst case.

אם היינו יודעים את ההתפלגות D של הקלטים האפשריים
שאז האלגוריתם היה מוצא את התשובה הטובה ביותר ל-D.
התשובה יכולה להיות מעורבת אבל היא לא חייבת. תמיד
אפשר למצוא אסט' טהורה שממצעת את התוחלת.
אבל הבעיה היא שאנחנו לא יודעים את D ובכלל אין התפלגות
קבועה והיא משתנה עם הזמן.

- זמן הריצה של האלג' הטוב ביותר הוא

$$\min_{A} \max_{x} T(A,x)$$

- זמן הריצה הממוצע הטוב ביותר של התפלגות D של הקלטים הוא

$$\min_{A} T(A,D)$$

כאשר $T(A,D) = \mathbb{E}_{x \in D}[T(A,x)]$

- זמן הריצה הממוצע של האלג' הטוב ביותר של ההתפלגות הגרועה ביותר הוא

$$\max_{D} \min_{A} T(A,D) =$$

$$= \min_{R} \max_{D} T(A,D)$$

משפט המינמקס

התפלגות של A

אז קיימת התפלגות של האלג' הדטרמיניסטיים שלכל קלט מבטיחה. זמן ריצה לכל היותר $\max_{D} \min_{A} T(A,D)$,
אז אפשר לחשוב על אלג' הסתברותי כהתפלגות של אלג' דטרמיניסטים.

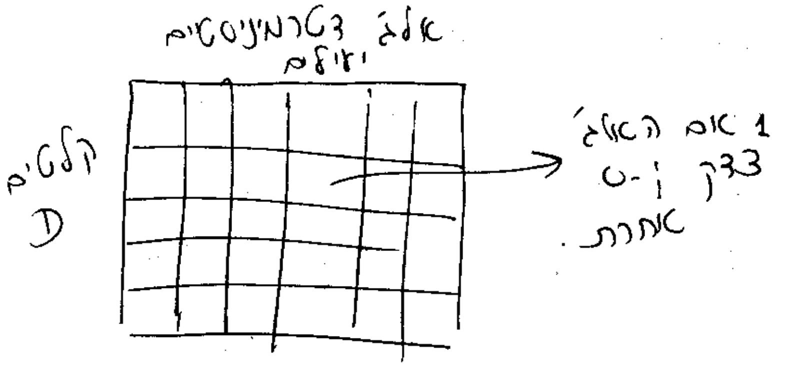
<u>הלמה של Yao</u>: זמן הריצה הממוצע של האלג' הטוב ביותר על ההתפלגות הגרועה ביותר שווה לזמן הריצה הממוצע של האלג' ההסתברותי הטוב ביותר על הקלט הרע ביותר.

הערה: הכיוון (≥) הוא טריוויאלי. זמן הריצה של האלג' הטוב ביותר הוא כמובן חסם תחתון למה שאלג' הסתברותי יכול לעשות. כי זמן הריצה של אלג' הסתברותי הוא ממוצע של זמני הריצה של אלג' דטרמיניסטיים שמתחתיו.
הכיוון השני נובע ממשפט המינימקס (למעשה גם הראשון אבל הוא לא קשה גם ככה). ☺

הלמה הזאת חשובה כי היא נותנת לנו טכניקה למצוא חסמים תחתונים לאלגוריתמים הסתברותיים.

עד כה דיברתי על אלגוריתמים שמעולם לא טועים והעניין היה זמן הריצה שלהם.

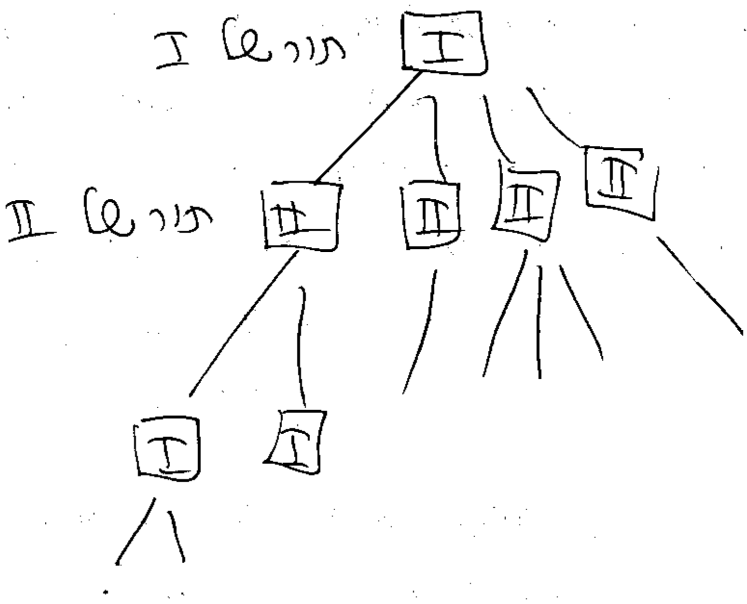
נסתכל על המשחק הבא:



אם אלג' הוא פשוט נכון תמיד אז העמודה שלו היא כולה 1.
אם אלג' צודק על 90% מהקלטים אז בעמודה שלו יש 90% 1.
אלג' הסתברותי צודק ב-90% על קלט אם בשורה המתאימה יש 90% 1 (התוחלות הן כמובן לפי ההתפלגויות)
ואפשר גם לדבר על אלג' שצודק ב-90% של D הקלטים - על D קלט זה צריך להיות 90%. אז גם לאלג' שלא תמיד צודקים אפשר לטעון משהו מאוד דומה ללמה של Yao.

שיערוך של עצי משחק Game-tree evaluation

משחק אפשר לתאר באמצעות עץ. מכל תור לשחקן יש אוסף סופי של צעדים שאפשר לעשות.



העץ מתאר את אוסף ההתפתחויות האפשריות - שומר את חוקי המשחק - מה יכול להיות בכל שלב. כל קודקוד מתאר היסטוריה מסויימת והצלעות שיוצאות ממנו אומרות מה יכול לקרות בהינתן ההיסטוריה הזאת.

בעלים מתואר מה קורה בסוף המשחק. למשל אם זה משחק סכום אפס בעלים אפשר לרשום v_1 - התשלום לשחקן I.

ההצגה הזאת נקראת הצגה מורחבת (extensive) של משחק.

בהצגה כזאת אסט' של שחקן היא בחירה של פעולה לכל קודקוד שבו זה התור של השחקן הזה. כך, אפשר להפוך את המשחק לצורה נורמלית (מטריצה).

כדי לפתור משחק כזה אפשר לעשות אינדוקציה לאחור. בצעד האחרון ממש קל להחליט מה לעשות. שחקן I פשוט ילך לעלה עם הערך הכי גבוה. משם אפשר להחליט מה צריך לשחקן II לעשות. ככה אפשר לפעפע למעלה ולקבל את הערך.

<u>קלט</u>: עץ משחק

<u>פלט</u>: הערך של המשחק

<u>אלג'</u>: מפעפעים למעלה.

26

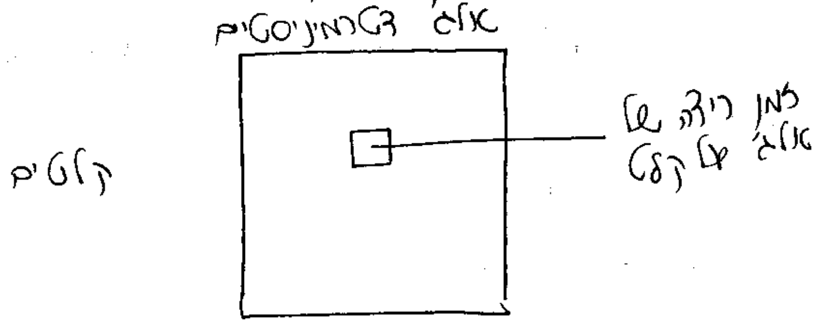
```
eval (v)
  if v is
      return lv
  if v is min-node (II)
      current min = ∞
      for all children u do
          X = eval(u)
          curren min = min(X, current min)
      return current_min
  else //(v is max node)
      current max = -∞
      for all children u do
          X = eval(u)
          current max = max(X, current max)
      return current_max
```

האלג' הזה לינארי בגודל העץ. מפה יכול לעניין אותנו
כמה עלים חייבים לקרוא כדי לשערך. האלג' הזה
קורא את כולם אבל אולי לא חייבים...
שבוע הבא נראה שבאופן כללי * חייבים לקרוא הכל אבל
באופן הסתברותי אפשר לחסוך...

(24) 20.12.09
טבלה וחישוב

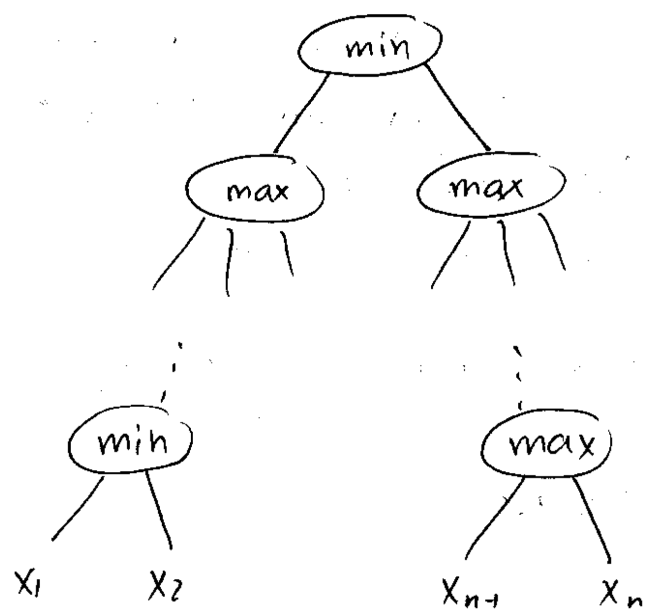
- מנהלות - תרגיל 2 נדחה
שאלה 4 נדחתה עוד יותר
- מי שלא עבר את הקורס אבל לא מגיע לשיעור - ני ני ני

הסתכלנו על אלגוריתמים רנדומליים כמשחק בין קלטים ואלג' דטרמיניסטיים.



משפט המינמקס מעביר אותנו בין התפלגויות בעולם הקלטים להתפלגויות בעולם האלגוריתמים.

דוגמה: הערכה של עצי משחק - ייצוג משחקים בצורה רחבה.
יש שני שחקנים שמשחקים בתורות. בכל שלב לכל שחקן יש אוסף פעולות שהוא יכול לעשות. את זה אפשר לייצג בעץ:

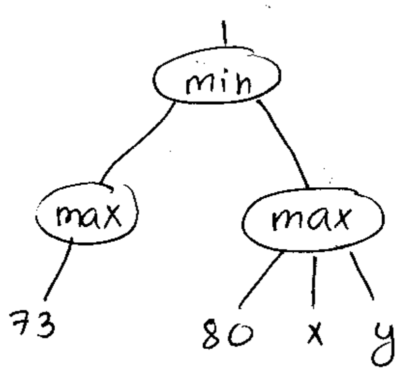


ע"י פעפוע מהעלים (backward induction) אפשר למצוא מה הולך לקרות במשחק כאשר כל שחקן משחק בצורה האופטימלית עבורו.

```
eval(v)
 if v is leaf return its value
 if v is a min node:
     current ← ∞
     for all u∈Sons(v)
         val = eval(u)
         current ← min(val, current)
     return current
 else // v is a max node
     current ← -∞
     for all u∈Sons(v)
         val = eval(u)
         current ← max(val, current)
     return current
```

כמה זמן האלגוריתם הזה לוקח? האלגוריתם הזה מסתכל על כל העלים תמיד וזה לא רק מוגזם כי יש מקרים שבהם מספר העלים ממש ממש גדול (ואין מה לעשות...).
אז אולי איכשהו אנחנו יכולים לצמצם את מספר הצמתים שאנחנו צריכים להסתכל עליהם.

למשל, נניח שאיכשהו אנחנו "יודעים":



מגלה שמימין כבר יש לנו 80 שזה יותר מ-73 ברור שהמקס

המינימום יעדיף ללכת שמאלה. אז אין לו כלל לחשב את x ואת y בכלל. זה חוסך הרבה עבודה...

זה נקרא α,β pruning

<u>eval(v, α, β)</u> // חשב ערך של קודקוד v בקטע $[\alpha,\beta]$

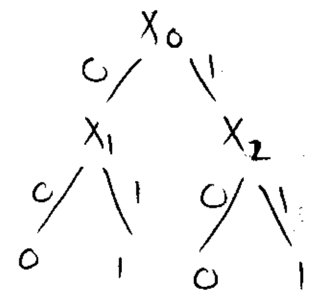
```
if v is a leaf return its value
if v is a min node
      current ← β
      for all u ∈ Sons(v)
            val = eval(u, α, current)
            current ← min(val, current)
            if current ≤ α return α
      return current
else // v is a max node
      current ← α
      for all u ∈ Sons(v)
            val = eval(u, current, β)
            if current ≥ β return β
      return current
```

קל להשתכנע שהנכונות לא השתנתה ורק יכול להיות ששיפרנו את זמן הריצה כי יש ענפים שאולי אנחנו לא בודקים.

נתחיל לנתח זמן ריצה למקרה פרטי שבו הערכים הם רק 0 ו-1 ואז שהקן ה-max מחשב $\vee$ בין הילדים שלו ושהקן ה-min מחשב $\wedge$ בין הילדים שלו. במקרה הגרוע ביותר ה"שיפור" שלנו לא באמת משפר. אפשר למצוא עץ שבו לא תהיה ברירה אלא להסתכל על כל העץ.

<u>הגדרה</u>: פונקציה בוליאנית של n משתנים נקראת מתחמקת אם זמן הריצה של כל אלג' הכרעה עבורה הוא בדיוק n.

האם יש בכלל פונקציה לא חמקנית? כן! למשל אם היא לא באמת תלויה בכל המשתנים שלה. אבל אולי זו דוגמה קצת מתחכמת. הנה דוגמה של פונקציה שכן תלויה בשלושת המשתנים שלה, אבל צריך רק לשאול שתי שאלות כדי להעריך אותה:



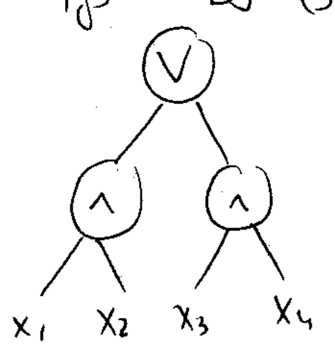
<u>משפט</u>: לכל n קיים משחק בעל n עלים שפונקציית ההערכה שלו הינה חמקנית.

<u>הוכחה</u>: נבנה באינדוקציה על n שישנו יריב שגורר עומק n. האלגוריתם מתחיל ושואל x_j. היריב עונה 0 אם זה קודקוד $\vee$ ו-1 אם זה קודקוד $\wedge$. ועכשיו היריב ממשיך כמו היריב האופטימלי לפונקציה המושרה ע"י x_j שהיא בעלת n-1 עלים. ☺

אז הוכחנו ש- α,β pruning לא שווה כלום. איך בכל זאת נרוויח? נהפוך את האלגוריתם להסתברותי.
ראשית עוברים על הבנים ב- for all $u \in Sons(v)$
נעבור עליהם בסדר רנדומלי

for all $u \in Sons(v)$ <u>in random order</u>

<u>למה</u>: זמן הריצה (בתוחלת) של α,β בהסתכלות על המשחק



הוא ≥ 3.

מסקנה: ליבי עץ בעומק k שרמות מתחלפות (בין min ו- max) זמן הריצה יהיה $O(3^{k/2}) = O(n^{\log_4 3})$

הוכחה: כל פעם מסתכלים על מה שהאלגוריתם עושה ברמה כלשהי.
נסמן את זמן הריצה על עץ בעומק k ב- $T(k)$. אז

$$T(k) \le 3T(k-2)$$

בממוצע נכנסים לרקורסיה 3 פעמים ובכל פעם מפסידים שתי רמות

והפתרון של זה הוא $T(k)=O(3^{k/2})$. ואם העץ בעומק k אז יש לו $n=2^k$ עלים. $\Leftarrow O(3^{k/2}) = O(n^{\log_4 3})$

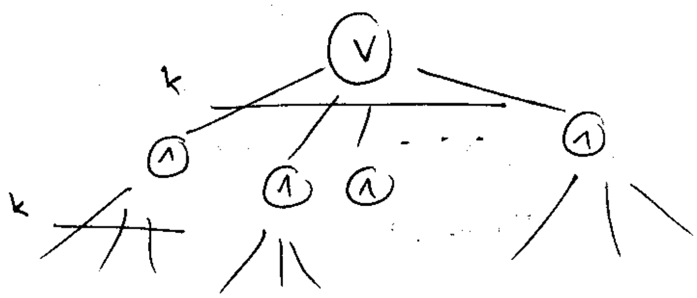
הוכחת הלמה: יש שתי אפשרויות.

① אם התוצאה היא 0 פירוש הדבר ששני הענפים היו 0 ולכן לפחות 1 מכל זוג עלים הוא 0. ז"א 01, 10 או 00. את זמן הריצה של הקלטים האלה אפשר לחשב. כל תת עץ לוקח זמן $\ge 1\frac{1}{2}$ (בתוחלת).

② אם התוצאה היא 1 אז לפחות אחד מהעלים הוא 1 ולכן שני העלים שלו בהכרח 1. אז בהסתברות $\frac{1}{2}$ התחלנו עם תת העץ שהוא 1 ואז זמן הריצה הוא 2 (כי צריך לבדוק את שני העלים אבל לא צריך לבדוק את התת עץ השני). בהסתברות $\frac{1}{2}$ התחלנו עם העץ השני. אם הוא 1 אז זמן הריצה הוא 2 ואם הוא דווקא 0 ואז צריך זמן הריצה $1\frac{1}{2}$ אבל צריך לבדוק גם את השני וצריך עוד 2 בדיקות. סה"כ זמן הריצה הוא בממוצע $2.75 \le 3$.

אנחנו רוצים לחסום מלמטה את זמן הריצה לאלגוריתם הסתברותי. כאן יעזור לנו משפט המינימקס כי יודעים שמספיק לנו להסתכל על אלג' דטרמיניסטיים. נבחר חסם תחתון עבורם וינבע חסם תחתון להסתברותיים.

משפט: זמן הריצה הממוצע של כל אלגוריתם הסתברותי עבור עץ המשחק



$n = k^2$

הוא לפחות $\frac{k(k+1)}{2} \approx \frac{n}{2}$.

הוכחה: נבחר התפלגות D על הקלטים כך שזמן הריצה של כל אלגוריתם דטרמיניסטי יהיה $\geq \frac{k(k+1)}{2}$.

D = בכל תת עץ נבחר 0 יחיד במקום אקראי וכל השאר 1-ים (כלומר הסתברות k^{-k} לכל אחת מהאפשרויות האלה).

נראה שכל אלגוריתם דטרמיניסטי שבודק תמיד דורש זמן (ממוצע) $\geq \frac{k(k+1)}{2}$ על התפלגות זו של קלטים.

אבחנה 1: התוצאה על ההתפלגות שלנו היא תמיד 0. לכן האלגוריתם חייב למצוא קלט 0 בכל תת עץ לפני שהוא מחזיר תשובה.

אבחנה 2: זמן הריצה הכולל שווה לסכום תוחלות זמני הריצה על כל אחד מתתי העצים.

מהו זמן הריצה הדרוש כדי למצוא 0 מתחת עץ $\wedge$?
מתחת עץ יכול להיות שה-0 יתגלה אחרי שאלה אחת, אחרי שתי שאלות וכו'. כל עוד הוא לא הגיע ל-0 הוא לא מפסיק.
לכן הזמן הוא $\frac{k+1}{2} = \frac{1+\dots+k}{k}$.

$\Rightarrow$ הסכום לכל התת עצים הוא $k \cdot \frac{k+1}{2}$ וזהו.

למה ההתפלגות D היא הגרועה ביותר? כי הראינו אסט' לשחקן האלגוריתם שמשיגה את הערך הזה.

אנחנו חוזרים לעולם של משחקים ב-n שחקנים בצורה נורמלית שהם לא בהכרח סכום אפס. במשחקים סכום אפס ראינו שיש ערך למשחק ותמיד ברור מה כדאי לשחקנים לעשות.

האם יש משהו דומה במשחקים כלליים? ראינו שלא תמיד יש ש"מ טהור. אבל אולי ש"מ מעורב יכול לתת לנו משהו...

נתון משחק $u_1 : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}, \dots, u_n : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}$

אסטרטגיה מעורבת של שחקן i היא וקטור $x^i \in \Delta_{m_i}$

כאשר $\Delta_m = \{x_1, \dots, x_m : \sum x_j = 1, \quad x_j \geq 0\}$

נרחיב את הגדרת u מאסטרטגיות טהורות למעורבות:

$$u_i(x^1 \dots x^n) = \mathbb{E}_{\substack{s_1 \sim x^1 \\ \vdots \\ s_n \sim x^n}} u_i(s_1, \dots, s_n) =$$

$$= \sum_{j_1 \in S_1} \dots \sum_{j_n \in S_n} \left(\prod_{l=1}^{n} x^l_{j_i} \right) \cdot u_i(j_1, \dots, j_n)$$

<u>הגדרה:</u> $(x^1 \dots x^n)$ הינו ש"מ נאש אם לכל i, x^i הינו תגובה טובה ביותר ל-x^{-i}, כלומר לכל $x^{i'} \in \Delta_{m_i}$

$$u_i(x^i, x^{-i}) \geq u_i(x^{i'}, x^{-i})$$

זה בדיוק כמו ש"מ טהור אלא שפה הסטרטגיות יכולות להיות מעורבות.

(31) 27/12/09
טטה וחישוב

מנהלות:

- תרגיל 3 פורסם. קצת באג...
- שימו ♡ לשינויים בהקצאות של בדיקת תרגילים.
- הבודקים של תרגיל 1 מתבקשים להחזיר את התרגילים.

ש"מ מעורב

אסטר' מעורבת של שחקן i היא וקטור הסתברויות $(x_1,\dots,x_{m_i})\in\Delta^{m_i}$ שאומר באיזו הסתברות השחקן משחק כל אסט' טהורה שלו.
הרחבנו את ההגדרה של פונק' התועלת לאסט' מעורבות:
$$u_i(x^1,\dots,x^n)=\mathbb{E}_{s_1\sim x^1,\dots,s_n\sim x^n}[u_i(s_1,\dots,s_n)]$$

והגדרנו ש"מ (נאש) - $(x^1,\dots,x^n)$ ש"מ מעורב אם x^i תגובה טובה ביותר ל-x^{-i} לכל i.

טענה: אסט' x^i מעורבת היא תגובה טובה ביותר אמ"מ כל אחת מהאסט' הטהורות בתומך שלה היא תגובה טובה ביותר.

החולשה העיקרית של הדבר הזה היא שמדובר פה רק על התפלגויות ולא על ריאליזציות ספציפיות.

הערה לטענה: אם אסט' טהורות של שחקן 1 הן תגובות טובות ביותר לאסט' מעורבת של שחקן 2 זה לא אומר שהאסט' המעורבת של שחקן 2 היא תגובה טובה ביותר לכל אחת מהאסט' הטהורות של שחקן 1 - היא תגובה טובה ביותר רק לאסט' המעורבת שלו.

החוזק העיקרי של ש"מ מעורב הוא שניתן להוכיח (משפט נאש) שתמיד קיים ש"מ מעורב, בניגוד לש"מ טהור שראינו משחקים שאין בהם כזה.

<u>הוכחת המשפט:</u>

(⇐) אם היתה אסט' אחת שהיא לא תגובה טובה ביותר היה עדיף לו לא לשחק אותה בכלל ולחלק את ההסתברות שלה בין אסט' אחרות.

(⇒) אם כל הטהורות תגובות טובות ביותר אז בודאי כל התפלגות עליהן (גם) תגובה טובה ביותר.

<u>מסקנה:</u> אם יש לנו אסט' מעורבת ורוצים לבדוק אם היא תגובה טובה ביותר מספיק לבדוק אם היא יותר טובה רק מאסט' טהורות וזה מאוד מאוד חשוב כי זו כמות סופית של בדיקות.

<u>דוגמה:</u>

	q	$1-q$
p	2,1	0,0
$1-p$	0,0	1,2

$(2,1)$ ו- $(1,2)$ הם ש"מ טהורים.

נחפש ש"מ מעורב שבו שני השחקנים מעורבים ממש.

מהמסקנה שלנו זה אומר ש-

$$2q = 1-q \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$p = 2(1-p) \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

אם שחקן 1 משחק $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ ושחקן 2 משחק $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ אז זהו ש"מ באסט' מעורבות. לא צריך לבדוק לגבי סטיה לאסט' טהורות כי אין רווח לאף לסטות שהרי שני השחקנים מעורבים ממש.

<u>משפט נאש:</u> בכל משחק סופי (מספר שחקנים סופי ומרחב אסט' טהורות סופי לכל שחקן) קיים ש"מ נאש מעורב.

<u>הוכחה:</u> נשתמש במשפט בראואר: תהי C קבוצה קומפקטית וקמורה ב- $\mathbb{R}^t$ ותהי $f: C \to C$ פונק' רציפה. אזי קיימת נק' $x \in C$ כך ש- $f(x) = x$ (נק' שבת).

אנו נחזור לדיון במשפט נק' השבת.
ב-$\mathbb{R}^n$ שלו ההוכחה ממש מסובכת. אבל ב-$\mathbb{R}$ זה למעשה משפט ערך הביניים.

כל תנאי המשפט דרושים:

- אם הקבוצה לא קמורה - נסתכל רק על שפת מעגל ב-$\mathbb{R}^2$ ונסובב אותה ב-90°. אין שום נקודה שנשארת באותו מקום.
- אם הקבוצה לא סגורה - נסתכל על $f:(0,1)$ המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{2}$. היא רציפה אבל אין לה נק' שבת. כי אם $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}=x \Rightarrow x=1$ וזה מחוץ ל-$(0,1)$.
- אם הקבוצה לא חסומה זה בוודאי לא נכון. נתבונן ב-$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x+1$.

כעת נוכל להוכיח את משפט נאש. נתבונן ב-$C=\Delta_{m_1}\times\dots\times\Delta_{m_n}$ קל להשתכנע שזו קבוצה קמורה וקומפקטית. נגדיר פונקציה $f:C\to C$ באופן הבא.

נסמן ב-x^i_j את המשקל של אסט' j מהתפלגות x^i.

נגדיר $d^i_j=u_i(j,x^{-i})-u_i(x^i,x^{-i})$

זה אומר כמה השחקן i היה מרוויח אם היה משחק j במקום האסט' המעורבת x^i (בהינתן שהאחרים לא משנים אסט').

ונגדיר $d^{i+}_j=\max(d^i_j,0)$

$$\hat{x}^i_j=\frac{x^i_j+d^{i+}_j}{1+\sum_j d^{i+}_j}$$

זה מגדיר התפלגות תקנית חדשה לכל שחקן. אז זו פונק' מ-C ל-C והיא רציפה כי היא מורכבת מפונקציות רציפות.

$\Leftarrow$ עפ"י משפט בראואר יש לה נק' שבת.

נראה שבנקודת שבת זו למעשה נק' ש"מ מעורב. מספיק

והראנו שבנק' $f(x)=x$ מתקיים $d_j^i = 0$ לכל i,j כי זה אומר ש- x^i הייתה תגובה טובה ביותר, שהרי אף סטיה מעורבת לא עזרה לו.

אז נניח בשלילה שקיימים i,j כך ש- $d_j^i > 0$. אז $d_j^{i+} > 0 \Rightarrow \hat{x}_j^i > 0$ אבל $x_j^i = \hat{x}_j^i > 0$ כי זו נק' שבת. מתקיים $\sum_j d_j^i x_j^i = 0$ ולכן חייב להיות j' שעבורו $x_{j'}^i > 0$ ו- $d_{j'}^i < 0$. אבל

$$\hat{x}_{j'}^i = \frac{x_{j'}^i + \overset{=0}{d_{j'}^{i+}}}{\underbrace{1+\sum_j d_j^{i+}}_{>1}} < x_{j'}^i$$

וזו סתירה כי אנחנו בנקודת שבת. ☺

כמה קשה למצוא ש"מ? נקשר את הבעיה ל- SAT

נתבונן בנוסחה $\phi=(x_1 \vee \neg x_2)\wedge(\neg x_1 \vee x_2)$ ונגדיר לה משחק $G(\phi)$ - משחק סימטרי של שני שחקנים:

$=2-n$ כאשר n מספר המשתנים

		x_1 x_2	$+x_1$	$-x_1$	$+x_2$	$-x_2$	$x_1 \vee \neg x_2$ $\neg x_1 \vee x_2$	f
V	x_1	-2	0	0	2	2	-2	-2
	x_2		2	2	0	0		
L	$+x_1$	-2	1	-2	1	1	-2	-2
	$-x_1$		-2	1	1	1		
	$+x_2$		1	1	1	-2		
	$-x_2$		1	1	-2	1		
C	$x_1 \vee \neg x_2$	-2	0	2	2	0	-2	-2
	$\neg x_1 \vee x_2$		2	0	0	2		
	f	1	1				1	0

אז $K(N)$ את התשובות לשחקן 1 והסימטריות יודעים שהתשובות לשחקן 2 הם המטריצה המשוחלפת

אפשר להכליל את הטבלה הזאת לכל נוסחה ϕ.

<u>משפט</u>: אם $(l_1,\dots,l_n)$ מספק את ϕ, אזי קיים ש"מ (נוסף) של $G(\phi)$ שבו שני השחקנים משחקים כל l_i בהסתב' $\frac{1}{n}$. הש"מ הנוסף היחיד הוא (f,f)

מהמשפט הנ"ל אפשר להסיק שכל מיני בעיות שקשורות לש"מ הן NP-קשות. למשל, אילו ידענו לבדוק אם במשחק סימטרי בשני שחקנים יש שני ש"מ אז היינו יודעים לפתור SAT.

<u>הוכחה</u>: נניח ששחקן 2 משחק לפי האסט' שבה כל l_i
בהסתב' $\frac{1}{n}$. אם שחקן 1 משחק את אחד ה-l_i-ים
האלה הוא מקבל 1. נראה שאף אסט' אחרת לא יכולה
לתת לו יותר מ-1. אם הוא ישחק שלילה של אחד מהם
עליו הוא יקבל -2 ועל השאר 1 אז זה לא משתלם.
אם הוא משחק אסט' מ-C אחד מהליטרלים חייב להופיע
שם (בגלל ש-ϕ מסופקת) ובהסתב' $\frac{1}{n}$ מקבלים $2-n$. אז התשלום הוא

$$\frac{1}{n}(2-n)+\frac{n-1}{n}\cdot 2=1$$

אז גם לא כדאי לעבור.
באותו אופן לא כדאי לסטות לאסט' מ-V
ואם סטים ל-f גם מקבלים 1 וזה לא משתלם.
אז אכן זו תגובה טובה ביותר. מהסימטריה זה אותו
דבר גם לשחקן 1 ולכן זה ש"מ נאש.

המשך שבוע הבא...

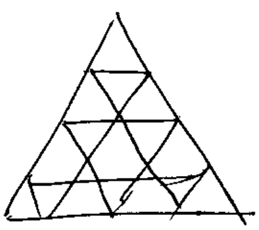
נא לחשוב בבית למה (f,f) זה הש"מ השני <u>היחיד</u>.

(34) 31/10
גומטה וחישוב

<u>משפט נקודת השבת של ברואר</u>: תהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה וקומפקטית. ו- $f: C \to C$ רציפה. אזי קיימת נקודת שבת $f(x) = x$, כאשר $x \in C$.

זה המשפט שבעזרתו הוכחנו את משפט נאש. ההוכחה היתה קונסטרוקטיבית לחלוטין. אם היתה לנו דרך פשוטה למצוא נק' שבת של פונקציה רציפה על קבוצה קמורה אזי היינו יכולים ממש בקלות למצוא ש"מ. למעשה, גם הכיוון השני נכון, אפשר להוכיח שאם אפשר למצוא ש"מ נאש, אז אפשר גם למצוא נקודת שבת.

נוכיח את משפט נקודת השבת ל- $\mathbb{R}^2$.
ראשית, נשים ♡ שאם המשפט מתקיים ל- C ו- C' שקולה טופולוגית ל- C (כלומר יש ביניהן פונקציה רציפה והפיכה שההופכית שלה רציפה) אז מספיק להוכיח את המשפט למשולש ב- $\mathbb{R}^2$.
הפונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית ולכן רציפה במידה שווה. לכן בחלוקה של המשולש למשולשים קטנים בגודל ε, יש קודקוד שמועבר למרחק δ מעצמו.



בגלל שהיא רציפה במ"ש ה- δ תלוי רק ב- ε וככל ש- ε קטן גם δ קטן.
איך מוצאים קודקוד כזה? נצבע כל קודקוד בצבע אחר לפי הכיוון שאליו הוא מועבר

אם נמצא משולש קטן שצבוע בכל שלושת הצבעים אזי הנקודה שבאמצע שלו לא זזה יותר מ- δ.
כי בגלל שהמסביב זז לכל הכיוונים והפונקציה רציפה הנקודה לא יכולה לזוז יותר מדי רחוק מעצמה.

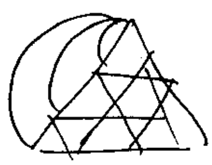
ככה ע"י חלוקה חוזרת ונשנית למשולשים קטנים וקטנים
יותר נקבל סדרת נקודות שמאופסות למרחק לכל היותר
ל מעדמן !- 0←ל . אבל הקבוצה קומפקטית
ולכן יש תת סדרה מתכנסת. תת הסדרה הזאת בדיוק
מתכנסת לנקודת השבת שאנחנו מחפשים.
אבל מי אומר שבכל שלב יש משולש שצבוע בשלושה
צבעים?

<u>הלמה של ספרנר</u>: תהי נתונה 3-צביעה של טריאנגולציה
של המשולש עם התכונה (שקודקודי המשולש צבועים בצבעים שונים) שלכל צלע חיצונית יש צבע
שבו קודקודי הצלע אינם משתמשים. אזי קיים משולש
טרי-כרומטי (צבוע ב-3 צבעים שונים)

הלמה הזאת בדיוק מסדרת אותנו כי בגלל שהפונקציה
שלנו היא לתוך C, כל צלע במשולש יכולה להיות
צבועה בשני צבעים בלבד.

<u>בעיה</u>: החלק היחיד שלא ממש קונסטרוקטיבי פה הוא
שאנחנו אומרים ש<u>קיימת</u> תת סדרה מתכנסת ובפועל אנחנו
לא יודעים איך למצוא אותה. אז אם ממש נפעל בדרך
זו אנחנו רק נוכל לקבל קירוב לנקודת שבת.

<u>הוכחת הלמה של ספרנר</u>: ניזכר משולשים נוספים שהקודקודים
שלהם הם הצלע החיצונית כך:



ואז נלך על המשולשים באופן הבא: נתחיל מצלע בצבע מתאים,
למשל ירוק-אדום, ואז נלך על משולשים שיש להם צלע ירוקה-אדומה
משותפת איתנו. אם נתקענו, זה אומר שהגענו למשולש שיש
לו גם קודקוד כחול וסיימנו. אחרת, נמשיך.

יש כאן שתי נקודות מעניינות:

① זה בהכרח יגיע לקודקוד חדש כי אי אפשר לצאת מצלע חיצונית חדשה בלי להיתקע בהתחלה.

② אין מעגלים כי נכנסים מצלע בשני צבעים ויוצאים מצלע בשני צבעים אבל הצלע השלישית היא חד-צבעית אבל לא חוזרים למשולש הראשון. אין גם מעגלים שחוזרים לאמצע. כל משולש מגדיר כיוון של צלע ירוק-אדום לפי הכיוון של הירוק והאדום בכניסה. כעת, כל משולש דרגת הכניסה ≤ 1 ודרגת היציאה ≤ 1 וקיים קודקוד שבו דרגת הכניסה היא 0. אבל אם יש מעגל  זה אומר שיש לקודקוד מסוים דרגת כניסה 2 וזו סתירה. לכן קיים קודקוד עם דרגת יציאה 0.

נזכיר רק שהסופיות כאן חשובה והדברים שאנחנו אומרים מסתמכים על כך שהגרף סופי.

זהו. בפשטות הוכחנו את ספרנר ואת ברוואר!

הגדרה: PPAD היא מחלקת הבעיות הניתנות להצגה באופן הבא: הקלט הוא שני מעגלים next, pred רק ש- $(x,y) \in E$ iff $next(x)=y$ and $pred(y)=x$ and $y \neq 00...0$ וצריך למצוא קודקוד $x \neq 0...0$ שדרגת היציאה שלו 0.

אז מההוכחה של נאש וברוואר למעלה אנחנו חושב ש- $Brouwer \in PPAD$, $Nash \in PPAD$.

כי הקלט הם פונקציות תועלת שהן מספרים רציונליים (כי זה מודל באופן סופי במחשב) והפלט (שיווי) להיות תיאורטי גם אי רציונלי) הוא ε-קירוב לשו"מ:

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \ge u_i(x_i', x_{-i}^*) - \varepsilon$$

הפונקציה הקונקרטית קובעת כמה איטרציות צריך לעשות תוך

לקבל ε-קירוב.

משפט: Nash הוא PPAD-שלם. (בלי הוכחה)

שיווי משקל מתואם

דוגמה: chicken

	C	D
C	4,4	1,5
D	5,1	0,0

יש פה שני ש"מ טהורים (C,D) , (D,C)

וש"מ מעורב שאפשר לחשב -

p	1-p

$$4p + 1-p = 5p + 0$$

$$\Rightarrow 3p+1 = 5p \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

אז גם $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ ש"מ.

אבל ברור שעדיף תכלס ששניהם יבחרו C. איך אפשר לשכנע אותם?

36 10/1/10
כלכלה וחישוב

הודעות:

- אין תרגיל 4
- תרגיל 3 נדחה לשבוע הבא
- באתר הקורס פירוט של כל התשובות כדי לקבל ציון

ש"מ מתואם

נסתכל על צ'יקן

	D	C
D	0,0	4,1
C	1,4	3,3

יש פה שני ש"מ טהורים ואחד מעורב. אבל אף אחת מהתוצאות היא לא אופטימלית חברתית.
נניח שיש עוד בן-אדם שלישי מבחוץ שכל מה שהוא יודע לעשות הוא לדבר ולא יוצא לו מזה כלום. הבן אדם הזה אומר לשחקנים מה לעשות. האם כדאי להם לעשות מה שהוא אומר? נניח שאותו אדם אף פעם לא אומר להם לשחק (D,D).
נראה ששחקן 1 עדיף להקשיב לאותו אדם.
אם הוא אומר לו לשחק D אז כדאי לו להקשיב כי לשני הוא בטוח אמר לשחק C ובהנחה שהשני מקשיב עדיף לראשון לקבל 4 מאשר 3 (אם יבחר C בכל זאת).
אם הוא אומר לו לשחק C אז בהסתברות $\frac{1}{2}$ השני יעשה D ובהסתברות $\frac{1}{2}$ יעשה C. אז התוחלת של 1 היא $\frac{1+3}{2}=2$ שזה כמו התוחלת בבחירה ב-D. אז לא כדאי לו לעבור.

הגדרה: ש"מ מתואם (correlated equilibrium) הינו התפלגות q על $S_1\times\dots\times S_n$ כך שלכל שחקן i ולכל $s_i', s_i\in S_i$ מתקיים

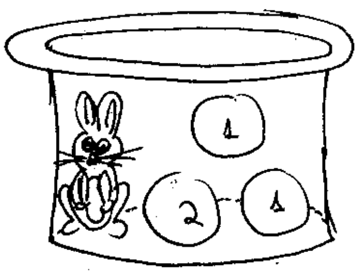
$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_i(s_i,s_{-i})\, u_i(s_i,s_{-i}) \ge \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p_i(s_i,s_{-i})\, u_i(s_i',s_{-i})$$

האם לכל משחק יש ש"מ מתואם? כן! כי ש"מ נאש מעורב הוא בפרט ש"מ מתואם.

קבוצת ש"מ מתואמים היא קבוצה קמורה ב- $S_1\times\ldots\times S_n$ שזה נחמד. זו קבוצה יפה (כי היא נתונה ע"י אי שוויונים לינאריים). זה בניגוד שקבוצת ש"מ נאש בכלל לא קשירה בהכרח. עוד הערה: זו <u>לא</u> הקבוצה הקמורה המינימלית שמכילה את ש"מ נאש: אחרת, לא יכולנו להגיע לתשלום גבוה יותר.

עוד דבר ממש טוב בש"מ מתואם הוא שממש קל למצוא כזה ע"י תכנון לינארי (זה אוסף אי שוויונים). יתר על כן, אפשר לעשות אופטימיזציה לפונ' מטרה שמעניינת אותנו.

אבל איך השחקנים בכלל יגיעו לש"מ מתואם?



נניח שיש להם כובע עם שלושה כדורים
כל שחקן מוציא כדור (ולא מראה לשני).
אם יצא 1 הוא צריך לשחק C
אם יצא 2 הוא צריך לשחק D
זה מקביל בדיוק את אותו אדם שאומר להם מה לעשות. את הרעיון הזה אפשר להכליל למשהו שנקרא Correlation Device (שאומן המציא).

הכובע הזה (או המכונה) עושים Cheap Talk - הם סתם מדברים ואיכשהו מצליחים להשפיע על המשחק.

Regret Minimization

יש שחקן שמשחק במשחק כמה פעמים (הרבה פעמים למעשה) ובכל פעם אולי הוא יודע מה היה קורה אילו בחר אסט' אחרת ואולי אפילו הוא יודע משהו על השחקנים האחרים.
אנו רוצים שהשחקן איכשהו ילמד מההיסטוריה וידע איך לבחור אסט' ושבסוף "יגיע לשם". אפשר לדבר פה על הרבה רמות של אינפורמציה. אנחנו נראה שאפילו אם השחקן יודע רק את התועלת של עצמו אפשר להתכנס לשם.
כאשר לא מסתכלים על תועלות של האחרים אנחנו למעשה נכנסים לעולם של תורת ההכרעות - אין לשחקן אינטראקציה עם אחרים. הוא (לכאורה) תלוי רק בעצמו.

סביבת עבודה:

- שחקן יכול לבחור אחת מ- m פעולות בכל צעד
- אם הוא בוחר פעולה k בצעד t הוא מקבל תועלת $0 \le u^t(k) \le 1$
- אלגוריתם A בוחר בכל שלב k^t לפי ההיסטוריה ומקבל תועלת בזמן t של $u_A^t = u^t(k^t)$.
- <u>המטרה</u>: למצוא A שממקסם את $\sum_{t=1}^{T} u_A^t$ כאשר T קבוע.

<u>הגדרה</u>: חרטה של אלגוריתם A לעומת אלגוריתם B הינה
$$\sum_{t=1}^{T} u_B^t - \sum_{t=1}^{T} u_A^t$$
זה מדד לכמה שאלגוריתם B הצליח יותר מאלגוריתם A.

<u>הגדרה</u>: נאמר של-A יש חרטה חיצונית R אם לכל אלגוריתם שמשחק תמיד אותה פעולה יש חרטה לכל היותר R, כלומר לכל k:
$$\sum_{t=1}^{T} u^t(k) - \sum_{t=1}^{T} u_A^t \le R$$

הגדרה: נאמר של-A יש חרטה <u>פנימית</u> R אם לכל פונקציה $F:\{1,\dots,m\}\to\{1,\dots,m\}$ ל-A יש חרטה לכל היותר R לעומת אלג' B שמוגדר כך: A משחק k $\Leftarrow$ B משחק $F(k)$.

האתגר הוא למצוא אלגוריתם עם $R = o(T)$ ואז בממוצע בכל שלב האלגוריתם מפסיד סכום ששואף לאפס.

אם האלגוריתם דטרמיניסטי זה לא אפשרי כי היריב יכול תמיד לדפוק אותנו ולתת אפס לכל האחרים 1.

לכן נאפשר ל-A להיות הסתברותי: בזמן t הוא יבחר k לפי התפלגות $p^t \in \Delta(m)$. (אז היריב יודע את ההתפלגות אבל לא את הבחירה עצמה בכל שלב) אז תוחלת התועלת היא

$$u_A^t = \sum_k p^t(k) \cdot u^t(k)$$

<u>משפט</u>: קיים אלגוריתם עם חרטה חיצונית

$$R = O\left(\sqrt{\log m \cdot T \log T}\right)$$

וחרטה פנימית $R = O\left(\sqrt{mT\log T}\right)$

למה זה טוב לנו?

יש n שחקנים עם אלגוריתמים משלהם

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & s_1^1, \dots, s_1^t, \dots, s_1^T \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & s_n^1, \dots, s_n^t, \dots, s_n^T
\end{array}$$

<u>טענה</u>: תהי p ההתפלגות האמפירית על $S_1 \times \dots \times S_n$. אזי היא ε-קרובה לשיו"מ מתואם. כלומר, לכל i לכל s_i, s_i'

$$\sum p_i(s_i, s_{-i})\, u_i(s_i, s_{-i}) \ge \sum p_i(s_i, s_{-i})\, u_i(s_i', s_{-i}) - \varepsilon$$

כאשר $\varepsilon = \frac{R}{T}$.

<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח את זה ל-i ספציפי. נחשוב על יריב שבזמן t משחק $u^t(k) = u_i(k, s_{-i}^t)$

אגף שמאל מתאר את התוחלת הממוצעת של האלגוריתם שלי. באגף ימין יש לנו למעשה שחלוף בין s_i ו-s_i', כלומר זה ממוצע רווח של A עם שחלוף $F(k) = \begin{cases} k & k \neq s_i \\ s_i' & k = s_i \end{cases}$ ואז בדיוק החרטה הפנימית אומרת לנו את מה שצריך (צריך לחלק ב-T כי זה ממוצעים ולא סכומים). ☺

ס11|14)
טבלה חישוב

תזכורת:

m פעולות אפשריות

וקטור הפסדים l^t בכל שלב $t=1,\dots,T$

כך $l_i^t\in\{0,1\}$ $\quad l^t=(l_1^t,\dots,l_m^t)$

האלג' שלנו בוחר התפלגות $p^t=(p_1^t,\dots,p_m^t)$ ומקבל

הפסד $\sum_{i=1}^m p_i^t l_i^t$.

סך ההפסד הוא $L_*^T=\sum_{t=1}^T l_*^t$

האלגוריתם רוצה שיהיה לו כמה שפחות הפסד מול יריב כל-יכול.
היריב יודע את ההתפלגות שלנו אבל לא את תוצאת הדגימה ממש.
אנחנו מעוניינים להשיג $L_*^T=o(T)$ ואז בממוצע
במעבר משלב לשלב ההפסד הוא אפס.

חרטה חיצונית של אלג' היא R אם $L_*^T-L_j^T\le R$
כאשר L_j^T מתקבל מאלג' שבוחר פעולה j בכל $t=1,\dots,T$

חרטה פנימית של אלג' היא R אם $L_*^T-L_F^T\le R$
כאשר L_F^T מתקבל מאלג' שמשחק $F(k)$ כאשר A
משחק k ($F:\{1,\dots,m\}\circlearrowleft$).

טענה: כל אלג' מול יריב כל-יכול לא יכול לתת חרטה טובה יותר
מ- $T(1-\frac{1}{m})$

הוכחה: צריך להראות יריב שלכל התפלגות של האלגוריתם שלנו מבטיח
לנו הפסד $T(1-\frac{1}{m})$ לאורך T התקופות.
אז היריב בכל t ייתן הפסד 0 לפעולה עם ההסת' הנמוכה
ביותר והפסד 1 לכל שאר הפעולות. ההפסד שלנו יהיה לכל
הפחות $T(1-\frac{1}{m})$ משום שבכל שלב ההסתברות לשחק כך
שההפסד הוא 0 היא לכל היותר $1-\frac{1}{m}$ (כי זו ההסתברות
הכי נמוכה).

אלג' עם חרטה חיצונית נמוכה

ניסיון ראשון: בכל שלב נבחר פעולה שנתנה לנו עד כה הפסד מינימלי ונשבור לכיוון פעולה עם אינדקס נמוך.

initialize: $x^1 = 1$

for all t: $L^{t-1}_{min} = \min_{i\in[m]} L_i^{t-1}$

$$S^{t-1} = \{ i : L_i^{t-1} = L_{min}^{t-1} \}$$

$$x^t = \min S^{t-1}$$

משפט: האלגוריתם הזה נותן $L_*^T \le m L_{min}^T$

כאשר L_{min}^T ההפסד הכי נמוך שאנחנו יכולים לקבל ע"י פעולה קבועה.

הוכחה: בכל שלב t שבו האלג' שלנו הפסיד 1; L_{min}^T לא עולה ב-1, הקבוצה S^t קטנה לפחות בפעולה אחת. לכן בין כל שתי עליות של L_{min}^T האלג' שלנו עלה לכל היותר m.

משפט: כל אלגוריתם דטרמיניסטי משיג חרטה חיצונית של לכל הפחות m.

הוכחה: היריב יתן תמיד לפעולה שלנו בכל שלב הפסד 1; 0 לכל שאר הפעולות. חייבת להיות פעולה שהאלגוריתם שלנו שיחק לכל היותר $\lfloor T/m \rfloor$ פעמים. האלג' שמשחק את הפעולה הזאת תמיד מקבל הפסד $\frac{T}{m}$ והאלג' שלנו מקבל הפסד T, זה פקטור של m.

שיפור של הניסיון הראשון: במקום לשבור שוויונים באופן דטרמיניסטי נבחר כל פעם באופן רנדומלי מתוך S^{t-1}. לא נעשה את הניתוח אבל זה נותן חסם של $\log n$.

Randomized Weighted Majority

initialize: $w_i^1 = 1 \quad p_i^1 = \frac{1}{m} \quad \forall i \in [m]$

for all t: if $l_i^{t-1} = 1$, $w_i^t = w_i^{t-1}(1-\delta) \qquad 0<\delta<1$

else (i.e. $l_i^{t-1}=0$), $w_i^t = w_i^{t-1}$

$$p_i^t = \frac{w_i^t}{W_*^t} \quad \text{where} \quad W_*^t = \sum_{i\in[m]} w_i^t$$

האינטואיציה היא שאנחנו רוצים להגדיל את מספר הפעולות שניגשים אליהן אבל אנחנו לא רוצים שהגישה תהיה אחידה. כך שפעולה תוביל יותר הפסד (היא) מקבלת פקטור נמוך יותר.

<u>משפט</u>: עבור $\delta\le\frac{1}{2}$ מתקיים $L_*^T \le (1+\delta)L_{min}^T + \frac{\ln m}{\delta}$

<u>הערה</u>: עבור $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\sqrt{\frac{\ln m}{T}}\right\}$ נקבל $L_*^T \le L_{min}^T + 2\sqrt{T\ln m}$

וזה החסם הכי קטן שאנחנו יכולים להשיג.

<u>הוכחה</u>: לב העניין הוא ש-

$$W_*^{T+1} \ge \max_{i\in[m]} w_i^{T+1} = (1-\delta)^{L_{min}^T}$$

כי W_*^{T+1} הוא הסכום

כי פעולה עם הפסד כולל של L תקבל משקל $(1-\delta)^L$ עפ"י האלג' לכן המשקל המקסימלי מתקבל מהפעולה שקיבלה הפסד מספר מינימלי של פעמים.

נגדיר $F^t = \sum_{i:l_i^t=1} w_i^t / W_*^t$ - זה החלק מתוך W_*^t של פעולות שמקבלות הפסד 1. זה למעשה תוחלת ההפסד של האלג' שלנו בשלב t.

לפי ההגדרה מתקיים

$$W_*^{t+1} = (1-F^t)W_*^t + F^t W_*^t(1-\delta) =$$

$$= W_*^t(1-\delta F^t)$$

אז המשקל הכולל יורד בצורה פרופורציונית להפסד של האלג' שלנו.

לכן,

$$(1-\delta)^{L_{min}^T} \le W_*^{T+1} = W_*^1 \prod_{t=1}^T (1-\delta F^t) \underset{W_*^1=m}{=} m\prod_{t=1}^T(1-\delta F^t)$$

נוציא $\log$ ונקבל

$$L_{min}^T \ln(1-\delta) \le \ln m + \sum_{t=1}^T \ln(1-\delta F^t)$$

ע"י מניפולציות אלגבריות נקבל

$$L^T_{min}\ln(1-\delta) \le \ln m - \sum_{t=1}^{T} \delta F^t =$$

$$\ln(1-z) \le \ln z$$

$$= \ln m - \delta \sum_{t=1}^{T} F^t = \ln m - \delta \cdot L^T_*$$

$$\Rightarrow L^T_{min}\ln(1-\delta) \le \ln m - \delta L^T_*$$

$$\Rightarrow L^T_* \le \frac{-L^T_{min}\ln(1-\delta)}{\delta} + \frac{\ln m}{\delta} \le$$

$$\le (1+\delta) L^T_{min} + \frac{\ln m}{\delta}$$

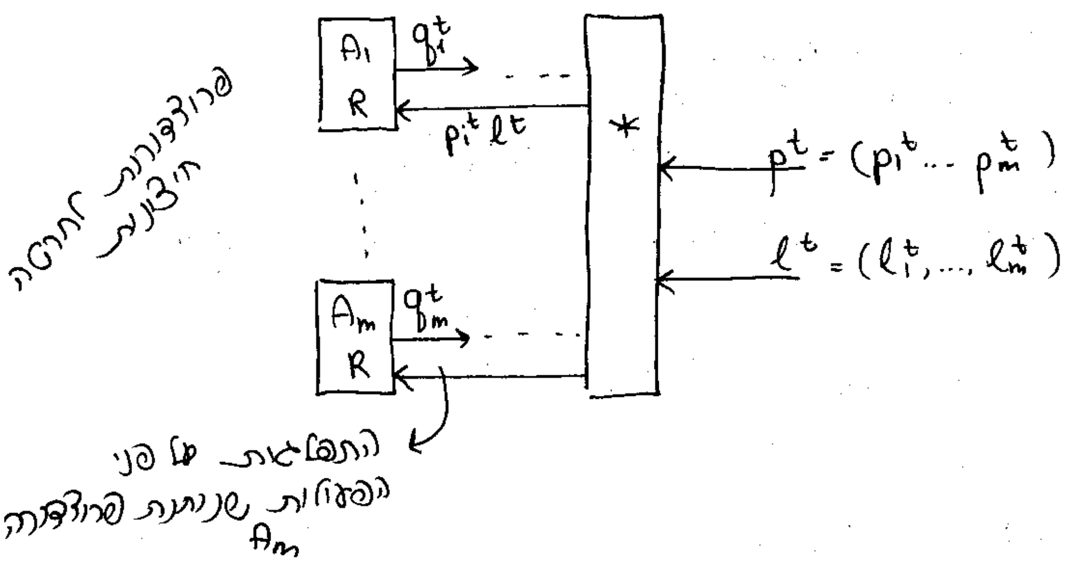
עבור $0 \le z \le \frac{1}{2}$

$$-\ln(1-z) \le z(1+z)$$

וזה בדיוק מה שרצינו. (:)

<u>משפט</u>: בהינתן פרוצדורה שמבטיחה חרטה חיצונית R הפרוצדורה שנראה מיד תבטיח $L^T_* \le L^T_{*,F} + mR$

האלג' שמחליף לפעולה
שלנו i את הפעולה $F(i)$



בהינתן וקטור הפסדים ℓ^t נחלק בין הפרוצדורות כך שפרוצדורה A_i תקבל שבר p_i מההפסדים.

<u>הבחנה</u>: נגדיר את p באופן שיבטיח שסכום ההפסדים "המדומים" תהיה ההפסד האמיתי של האלגוריתם.

נזכור ש- $L^T_A = \sum_{t=1}^{T} \ell^t_A \le \sum_{t=1}^{T} \ell^t_j + R = L^T_j + R$

אנחנו מקבלים q_{ij}^t לכל i ולכל j. נמצא p^t המקיים

$$p_j^t = \sum_i p_i^t q_{ij}^t \quad , \text{כלומר}$$

$$p^t = p^t \cdot \underbrace{Q^t}_{\text{מטריצה}}$$

כלומר p^t הוא ו"ע ימני של Q^t (כי התפלגות סטציונרית של תהליך מרקוב שמוגדר ע"י Q^t).

בהינתן וקטור ההפסדים ℓ^t, ההפסד של פרוצדורה A_i הוא $p_i^t \ell^t$

אבל ההפסד של פרוצדורה A_i יהיה

$$(p_i^t \ell^t) q_i^t = p_i^t q_i^t \ell^t$$

מכיוון שכל פרוצדורה מבטיחה חרטה חיצונית R מתקיים

$$\sum_{t=1}^T p_i^t (q_i^t \ell^t) \le \sum_{t=1}^T p_i^t \ell_j^t + R$$

לכן, אם נסכום את אגף שמאל

$$\sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T p_i^t (q_i^t \ell t) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m p_i^t (q_i^t \ell t) =$$

$$= \sum_{t=1}^T p^t Q^t \ell^t = \sum_{t=1}^T p^t \ell^t = L_*^T$$

באופן דומה אם עכשיו סוכמים את אגף ימין לכל $i=1,\dots,m$ מקבלים בדיוק $L_*^T \le L_{*,F}^t + mR$.

☺

סוף