(1) 4/11/08
ת׳ פים

המתרגל: אלון נחמה

אתר הקורס: www.cs.huji.ac.il/~mathtool2

יהיה תרגיל כל שבוע, חובה להגיש הכל פרט לאחד

הבדיקה תתבצע באמצעות ריאיון.

<u>דוגמה</u>: הטלת מטבע + הטלת קוביה

$$\Omega = \{H, T\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

ופונקציית ההסתברות מוגדרת באופן הבא:

	H	T
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	$1/12$	$1/4$
5	$1/12$	$1/4$
6	$1/12$	$1/4$

אז אפשר לחשב כל מיני הסתברויות:

$$Pr(\{H\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$\Downarrow$

כאן למעשה הכוונה היא למאורע

$$\{H\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \subseteq \Omega$$

$$Pr(\{4\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$Pr(\{H\} \mid \{4\}) = \frac{1/12}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$$

אפשר להגדיר מ"מ X שמתאר את תוצאת הטלת המטבע

ומ"מ Y שמתאר את תוצאת הטלת הקוביה.

אפשר לחשב ולראות ש-

$$\forall k \ \forall l \quad Pr(X = k \mid Y = l) = Pr(X = k)$$

לכן אלה מ"מ ב"ת.

נסתכל על הסתברות אחרת:

	H	T
1	0	1/2
2	0	1/8
3	0	0
4	1/12	1/8
5	1/12	0
6	1/12	0

ואז

$$Pr(1|H) = 0$$

$$Pr(1|T) = \frac{1/2}{1/2+1/8+1/8} = \frac{2}{3}$$

למעשה אפשר להסתכל על זה כאילו הניסוי שלנו הוא שהטלנו מטבע ואז הטלנו קוביה. ואז ההסתברות $Pr(1|H)$ מדברת על המקרה שהטלנו קוביה, יצא H ואז אנחנו שואלים את עצמנו את הסיכוי שבהטלת הקוביה קיבלנו 1. ולמה אפשר להסתכל על זה כשני ניסויים עוקבים? כי המשתנים המקריים הם בלתי תלויים!

משתנה מקרי הוא פשוט פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$.
התוחלת היא הממוצע המשוקלל:

$$EX = \sum_{x_k} x_k \cdot Pr(X=x_k) =$$

$$= \sum_{x_k\le r} x_k Pr(X=x_k) + \sum_{x_k>r} x_k Pr(X=x_k) \ge$$

$$\ge \sum_{x_k\le r} x_k Pr(X=x_k) + r\sum_{x_k>r} Pr(X=x_k) =$$

$$= \sum_{x_k\le r} x_k Pr(X=x_k) + r\,Pr(X>r)$$

$$\ge r\,Pr(X>r)$$

בהנחה ש- $X \ge 0$

$$\Rightarrow \quad Pr(X>r) \le \frac{EX}{r}$$

וזה למעשה אי-שוויון מרקוב!

עוד שתי צורות של אי-שוויון מרקוב:

$$\Pr(X \geq t\,\mathbb{E}X) \leq \frac{1}{t}$$

$$s \cdot \Pr(X \geq s) \leq \mathbb{E}X$$

זה חסם ממש טריוויאלי שדרשנו ממש מעט בשבילו ובכל זאת אפשר לקבל ממנו הרבה תוצאות מעניינות.

השונות של X מוגדרת ע"י

$$\mathrm{Var}\,X = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

אי שוויון צ'בישב: נסמן $\sigma X = \sqrt{\mathrm{Var}\,X}$. אז

$$\Pr(|X-\mathbb{E}X| > t\,\sigma X) \leq \frac{1}{t^2}$$

או בגרסה אחרת

$$\Pr(|X-\mathbb{E}X| > K) \leq \frac{\mathrm{Var}\,X}{K^2}$$

③ 11/11/08
ת' פים

נראה אי־שוויון נהדר על הבינום האמצעי:

$$\frac{2^{2m}}{4\sqrt{m}+2} \overset{(**)}{\le} \binom{2m}{m} \overset{(*)}{\le} 2^{2m}$$

$$2^{2m} = (1+1)^{2m} = \sum_{i=0}^{2m}\binom{2m}{i} = \binom{2m}{m} + \text{איברים חיוביים}$$

$1+1=2$ הבינום של ניוטון

⇐ (*) בוודאי נכון.

חוץ מזה ידוע ש- $\binom{2m}{m}$ הוא המחובר המקסימלי. ויש $2m+1$ מחוברים. ⇐ $\binom{2m}{m} \ge \frac{2^{2m}}{2m+1}$ אבל זה הרבה פחות טוב ממה שאנחנו רוצים להוכיח

נתבונן במ"מ $X_1, X_2, \dots, X_{2m}$ בלתי תלויים רק ש-

$$Pr(X_i=0) = Pr(X_i=1) = \frac{1}{2}$$

ונגדיר $X = \sum_{i=1}^{2m} X_i$. אז

$$Pr(X=k) = \binom{2m}{k}2^{-2m}$$

הם כולם בלתי תלויים אז
אנחנו צריכים ש- k מהם יקבלו
1 והשאר 0 וזה נותן את ה-
2^{-2m} ואם יש $\binom{2m}{k}$ אפשרויות
לבחור את אלה שמקבלים 1 אז
זה מה שיוצא.

נחשב את $\mathbb{E}X$ בשימוש בלינאריות:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{2m} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{2m}\mathbb{E}X_i = 2m\,\mathbb{E}X_1 = 2m\cdot\frac{1}{2} = m$$

כי כולם מאותו שווה

תרגיל: אם X, Y בת"ל אז $Var(X+Y) = Var X + Var Y$

באופן דומה השונות היא:

$$Var X = \sum_{i=1}^{2m} Var X_i = 2m\cdot Var X_1 = 2m\cdot\frac{1}{4} = \frac{m}{2}$$

$$Var X_1 = \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X_1 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$X_1^2 = X_1$

לפי אי שוויון צ'בישב נובע ש- $\Pr(|X-m|>\sqrt{m}) \le \frac{1}{2}$

(m = התוחלת)

צ'בישב אומר $\Pr(|X-\mu|>c\sigma) \le \frac{1}{c^2}$ אז כאן

$\mu = m \qquad c=\sqrt{2}$

ומכאן נובע $\Pr(|X-m| \le \sqrt{m}) \ge \frac{1}{2}$ אז

$$\frac{1}{2} \le \Pr(|X-m| \le \sqrt{m}) =$$

$$= \Pr(m-\sqrt{m} \le X \le m+\sqrt{m}) =$$

$$= \sum_{m-\sqrt{m}\le k\le m+\sqrt{m}} \Pr(X=k) =$$

$$= \sum_{m-\sqrt{m}\le k\le m+\sqrt{m}} \binom{2m}{k} 2^{-2m} = \sum_{-\sqrt{m}\le j\le \sqrt{m}} \binom{2m}{m+j} 2^{-2m} \le$$

$$\le (2\sqrt{m}+1)\cdot\binom{2m}{m} 2^{-2m}$$

יש $2\sqrt{m}+1$ מחוברים והמקדם הכי גדול הוא $\binom{2m}{m}$

נעביר אגפים ונקבל

$$\binom{2m}{m} \ge \frac{2^{2m}}{2(2\sqrt{m}+1)} = \frac{2^{2m}}{4\sqrt{m}+2}$$

וזה מה שרצינו!

בוחרים k נקודות על הישר $[0,1]$ בצורה אחידה ובאופן ב"ת

זה הפירוש של התפלגות אחידה כאן לכל נקודה מסויימת יש

סיכוי 0 אבל לכל $0\le a\le b\le 1$ $\Pr(X_i\in[a,b]) = b-a$

נסמן ב- M את המרחק המקסימלי בין הנקודות (ממשה זה המרחק בין נקודות הקצה)

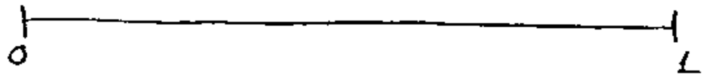
ובה- m את המרחק המינימלי (זה יהיה כמובן מרחק מינימלי בין נקודות עוקבות)

אזי $\forall\varepsilon$ תרגיל:

- אם $d=\omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ אז $m\le d$ כמעט בוודאות
- אם $\varepsilon = o\left(\frac{k}{\log k}\right)$ אז $M\ge 1-\frac{2}{\varepsilon}$ כמעט בוודאות.

כלומר אם $\frac{d(k)}{1/k^2}\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$ אז $\Pr(m\le d)\xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

רמז 8



יהי $n(k)$ נחלק את הישר ל-n קטעים שווים בגודל $\frac{1}{n}$. אז בהינתן נקודה יש לה סיכוי $\frac{1}{n}$ ליפול בקטע כלשהו
אז אפשר לחשוב על זה כמו n תאים ו-k כדורים...

עוד בעניין סימונים: את פרדוקס יום ההולדת אפשר לכתוב רק:
אם $k = \omega(\sqrt{n})$ אז יש שני כדורים בתא כמעט בוודאות

התרגולים יהיו כ-30% מהציון הסופי. מחר יתפרסם תרגול שני ואחרון של הסתברות. הודעה על בוחן תופיע באתר.

התפלגות גיאומטרית

X מ"מ גיאומטרי עם פרמטר $0<p<1$ אם מתקיים
$$Pr(X=k)=p(1-p)^{k-1}$$
אפשר להסתכל על זה ככה: מרחב ההסתברות הוא מרחב של הטלות מטבע אינסוף פעמים; X אומר מה הפעם הראשונה שקיבלנו H.

קודם כל, צריך להראות שזו אכן התפלגות:
$$\sum_{k=1}^{\infty} Pr(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=$$
$$\underset{\text{סכום סדרה הנדסית}}{=} p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{p}{p}=1$$
אכן זו התפלגות.

כמו כן, זו התפלגות חסרת זיכרון. כלומר בהינתן m
$$Pr(X=k+m \mid X>m)=Pr(X=k)$$
את זה אפשר להוכיח ישירות מההגדרה:
$$Pr(X>m)=\sum_{k=m+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=m+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=$$
$$=p\cdot\frac{(1-p)^m}{1-(1-p)}=(1-p)^m$$
$$\Rightarrow Pr(X=k+m \mid X>m)=\frac{Pr(X=k+m \wedge X>m)}{P(X>m)}=$$
$$=\frac{Pr(X=k+m)}{Pr(X>m)}=\frac{p(1-p)^{k+m-1}}{(1-p)^m}=p(1-p)^{k-1}=Pr(X=k)$$

נחשב את התוחלת:

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p(1-p)^{k-1} =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)^k]' =$$

$$= p \left[\sum_{k=1}^{\infty} -(1-p)^k \right]' = p\left[-\frac{1}{p}\right]' = p\left(+\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

זה טור הנדסי מתכנס בהחלט אז ניתן לגזור איבר-איבר

עם טריק דומה מאוד רק עם נגזרת כפולה אפשר לחשב גם את $\mathrm{Var}\,X$ ...

אלגברה לינארית

מרחב וקטורי V מעל שדה F זו קבוצה (של וקטורים) שמוגדרת עליה פעולת חיבור וכפל באיברי F (סקלרים) כך שמתקיימות 8 תכונות.

על מ"ו נהוג להגדיר מכפלה פנימית, נורמה ופונקציית מרחק.

אם השדה שלנו הוא $\mathbb{R}$, מכפלה פנימית היא פונקציה המקיימת $f: \underset{(x,y)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\langle x,y\rangle}{\mathbb{R}}$ כך ש-

1) f סימטרית $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

2) f בי-לינארית $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

3) f חיובית $\langle x,x\rangle \geq 0$ ו-

$\langle x,x\rangle = 0$ אם"ם $x=0$.

דוגמה: על $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum x_i y_i$

(6)

משפט קושי-שוורץ (משפט חשוב מאוד)

$$\langle x,y\rangle^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2$$

סימון $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$. הנורמה.

<u>הוכחה</u>: $0 \le \|x_\perp\|^2 = \| x - \langle x, \frac{y}{\|y\|}\rangle \frac{y}{\|y\|} \|^2 =$

הרכיב של x שניצב לכיוון של y

$$= \| x - \frac{y}{\|y\|^2}\langle x,y\rangle \| =$$

$$= \langle x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|} y,\ x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|} y \rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|} y,\ \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|} y\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle x,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\cancel{\|y\|^2}} \cancel{\|y\|^2} - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2} =$$

$$= \frac{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2 \ge 0$$

כי $\|y\|^2 \ge 0$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$$

אם הוקטורים באותו כיוון אז האי שוויון הופך לשוויון.

נורמה היא פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ רק ש-

1) חיוביות - $\|x\| \ge 0$! $\|x\|=0$ אמ"מ $x=0$

2) ליניאריות - לכל $0 \le \alpha$ $\|\alpha y\| = \alpha\|y\|$

3) אי שוויון המשולש - $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

<u>דוגמה</u>: בהינתן א"פ $\langle,\rangle$ ניתן להגדיר נורמה

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

תרגיל: לבדוק שהתכונות הדרושות מתקיימות

<u>דוגמה 3</u>: עבור $p \ge 1$ מגדירות נורמת-p על $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

הנורמה האוקלידית הרגילה מתקבלת עבור $p=2$.

נורמת אינסוף מוגדרת ע"י $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

מטריקה היא פונקציה $d: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ רק ש-

1) חיוביות - $d(x,y)\geq 0$ ושוויון אמ"מ $x=y$

2) סימטריות - $d(x,y) = d(y,x)$

3) אי שוויון המשולש - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

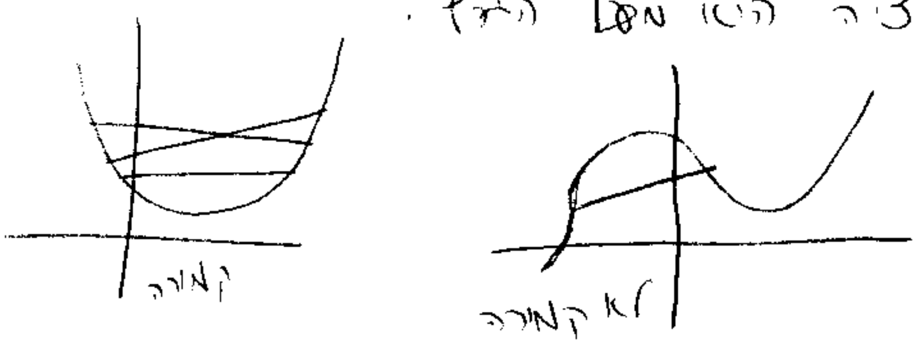
דוגמה: בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ אפשר להגדיר מרחק
$$d(x,y) = \|x-y\|$$

חשוב.

(7) 25.11.08
תי' כים

נניח ש- $p,q \geq 1$ רק ש- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. אז א"י
שוויון הולדר אומר ש $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$
וא"י שוויון יאנג אומר שלכל $0<a,b$ $\quad ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

פונקציה קמורה - באופן אינטואיטיבי זה אומר שכל קו ש-
מיתר של הפונקציה הינו מעל הגרף.



פורמלית, f היא קמורה אם לכל $\lambda \in [0,1]$
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
אם f גזירה פעמיים ו- $f''>0$ אז f קמורה.
f קעורה אמ"מ $-f$ קמורה.

<u>דוגמה</u>: $\log$ קעורה: לכל x,y ולכל $0\leq\lambda\leq 1$
$$\log(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda\log\lambda+(1-\lambda)\log y$$
ניקח $x=a^p$ ו- $y=b^p$ ו- $\lambda=\frac{1}{p}$. אז
$$\log\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q =$$
$$=\log a+\log b=\log(ab)$$
$\log$ פונקציה מונוטונית עולה אז נקבל את א"י שוויון יאנג:
$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

א"י שוויון הממוצעים: לכל $\alpha,\beta>0$ רק ש- $\alpha+\beta=1$
מתקיים $\quad x^\alpha y^\beta \leq \alpha x+\beta y$
אם נבחר $x=a^p$, $y=b^q$, $\alpha=\frac{1}{p}$, $\beta=\frac{1}{q}$ (נק)
שוב את א"י שוויון יאנג.

למה: אם $\|x\|_p=\|y\|_q=1$ אז $|\langle x,y\rangle| \le 1$

מסקנה: אי שוויון הולדר: אם אחד הווקטורים הוא אפס אז גם הנורמה אפס והאי שוויון מתקיים. אחרת, אפשר להתבונן ב- $\hat{x}=\frac{x}{\|x\|_p}$ ו- $\hat{y}=\frac{y}{\|y\|_q}$ אז

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|_p\|y\|_q|\langle \hat{x},\hat{y}\rangle| \underset{\downarrow}{\le} \|x\|_p\|y\|_q$$

כי $|\langle \hat{x},\hat{y}\rangle| \le 1$ כי $\|\hat{x}\|_p=\|\hat{y}\|_q=1$

הוכחת הלמה: נניח ש- $\|x\|_p=\|y\|_q=1$. אז

$$|\langle x,y\rangle| = \left|\sum_i x_i y_i\right| \le \sum_i |x_i y_i| =$$

$$= \sum_i |x_i||y_i| \underset{\text{יאנג}}{\le} \sum_i \left[\frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_i |x_i|^p + \frac{1}{q}\sum_i |y_i|^q =$$

$$= \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q = \frac{1}{p}\cdot 1^p + \frac{1}{q}\cdot 1^q =$$

$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \underset{\text{כי הם דואליים}}{=} 1$$

למה: עד כאן הוכחנו את הולדר ל- $p,q>1$ סופיים. נראה גם עבור $p=1$ ו- $q=\infty$ (שהם גם דואליים זה לזה)

$$|\langle x,y\rangle| = \left|\sum_i x_i y_i\right| \le \sum_i |x_i y_i| \le$$

$$\le \sum_i |x_i| \max_j |y_j| = \max_j |y_j| \sum_i |x_i| =$$

$$= \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1$$

נראה דואליות - מסתכלים על x כאופרטור ובודקים כמה הוא יכול למתוח:

$$y \longmapsto \langle x,y\rangle \qquad \|x\|_q = \max_{\|y\|_p=1} |\langle x,y\rangle|$$

(8)

נתון ש- $\|x\|_q = \max_{\|y\|_p=1} |\langle x,y\rangle| = \max \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|_p}$:

לפי אי שוויון הולדר לכל y $\quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|_q \|y\|_p$

$\Rightarrow$ לכל y $\quad \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|_p} \le \|x\|_q$. אגף ימין לא תלוי ב-y.

לכן אפשר לקחת מקסימום על אגף שמאל ונקבל

$$\max_y \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|_p} \le \|x\|_q$$

מצד שני, ניקח y כך ש- $\quad y_i = \left(\frac{x_i}{\sqrt[q]{\sum x_i^p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}$

אפשר לבדוק שעבור y זה מתקיים $\quad \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|_p} = \|x\|_q$

לכן $\quad \max_y \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|_p} \ge \|x\|_q$

הראינו אי שוויונים משני הצדדים לכן יש שוויון.

מתקיים גם $\quad \max_{\|y\|}$

9/12/08
ת' סים

<u>הערת לסיום:</u>

- אי שוויון מרקוב - יהי משתנה מקרי X. הגדר אותו כך אומר ש- $X \in \mathbb{N}$. אם אי-שליליים רק.

$$\mathbb{E}X = \sum_{k\in Im(X)} k\Pr(X=k) = \sum_{\substack{k<a \\ k\in Im(X)}} k\Pr(X=k) + \sum_{\substack{k\ge a \\ k\in Im(X)}} k\Pr(X=k) \ge$$

$$\ge a\Pr(X\ge a)$$

$$\Rightarrow \Pr(X\ge a) \le \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

נתון ש- $X\in[5,10]$. ונחסום את $\Pr(X<9)$ (ראשית $\mathbb{E}X=6$)

ידוע להשתמש גם בעובדה ש- $X \ge 5$. (תזכור את ההוכחה של מרקוב)

$$\mathbb{E}X = 6 \ge 5\cdot\Pr(X<9) + 9\Pr(X\ge 9) =$$

$$= 5\Pr(X<9) + 9(1-\Pr(X<9)) =$$

$$= -4\Pr(X<9) + 9$$

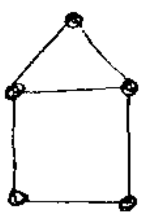
$$\Rightarrow \Pr(X<9) \ge \frac{3}{4}$$

ההדוקות של חסם מרקוב: לכל $\mathbb{E}X$ עבור a רוצים למצוא דוגמא רק ש- $\Pr(X\ge a) = \frac{\mathbb{E}X}{a}$. אם מתקיים בהוכחה ואת האי שוויון רוצים להפוך לשוויון

בהינתן m, a נסמן $p = \frac{m}{a}$ ונגדיר $X = \begin{cases} a & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

$\Leftarrow$ $\Pr(X\ge a) = \Pr(X=a) = p = \frac{m}{a}$! $\mathbb{E}X = pa = m$

- השאלה עם הגרף $p(G=(V,E)) = p^{|E|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E|}$



זה נשמע $G(n,p)$.

נניח ש- $p = o(n^{-5/6})$. רוצים להראות שבמצב כזה בהסתברות אין בתים בגרף. ונסמן ב- T חמישייה סדורה ונגדיר $X_T = \begin{cases} 1 & \text{T בית} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

אז $\Pr(X_T=1) = p^6$ ונסמן X = מספר הבתים בגרף אז $X = \sum X_T$

$$\mathbb{E}X = \binom{n}{5}5!\,p^6 \le n^5p^6K = o(n^5 n^{-\frac{5}{6}\cdot 6}) = o(1) \longrightarrow 0$$

ולפי מרקוב $\Pr(X\neq 0) = \Pr(X\ge 1) \le \frac{\mathbb{E}X}{1} \longrightarrow 0$ וסיימנו

תזכורת לאלגברה לינארית:

<u>משפט</u>: M מטריצה סימטרית ממשית. אזי M ניתנת ללכסון ע"י מטריצה אורתוגונלית: $M = U\Lambda U^t$ כאשר U אורתוגונלית.

<u>טענה</u>: תהי M סימטרית ממשית.

(א) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$ (הע"ע של M)

(ב) $M = AA^T$

(ג) $x^t M x \ge 0$ לכל x. (M מטריצה מוגדרת אי שלילית)

<u>הוכחה</u>:

(א ⇐ ב) מתקיים $M = U\Lambda U^t$ כאשר Λ אלכסונית ואיברי האלכסון שלה אי-שליליים. לכן אפשר להגדיר את $\sqrt{\Lambda}$ - המטריצה האלכסונית שאיבריה שורשים של Λ ומתקיים $\Lambda = \sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}$ (כפל אלכסוניות והתאמה) וכן $\sqrt{\Lambda}^t = \sqrt{\Lambda}$. לכן $M = U\sqrt{\Lambda}\cdot\sqrt{\Lambda}^t U^t = AA^t$ כאשר $A = U\sqrt{\Lambda}$.

(ב ⇐ ג) יהי $x \in V$. אזי

$$x^t M x = x^t A A^t x = x^t A \cdot (x^t A)^t = \langle x^t A, x^t A \rangle = \|x^t A\| \ge 0$$

(ג ⇐ א) יהי u_i ו"ע שמתאים לע"ע λ_i אזי

$$0 \le u_i^t M u_i = u_i^t \cdot \lambda_i u_i = \|u_i\|^2 \cdot \lambda_i$$

אך $\|u_i\|^2 \ge 0$ ולכן $0 \le \lambda_i$.

(10) 16/12/08
ת' טים

Courant-Fischer משפט

$$\lambda_i = \min_{w_1,\dots,w_{i-1}} \max_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\perp\{w_1,\dots,w_{i-1}\}}} x^tAx$$

$$\lambda_i = \max_{w_{i+1},\dots,w_n} \min_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\perp\{w_{i+1},\dots,w_n\}}} x^tAx$$

תזכורת: $x \perp \{w_1,\dots,w_{i-1}\}$ אמ"מ

$$\begin{pmatrix} — & w_1 & — \\ & \vdots & \\ — & w_{i-1} & — \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | \\ x \\ | \end{pmatrix} = \vec{0}$$

משפט הסירוג

נניח ש- $A_{n\times n}$ סימטרית ממשית: A_i - מתקבלת ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-i. ויהיו $\lambda_1\ge\dots\ge\lambda_n$ הע"ע של A עם ו"ע $u_1,\dots,u_n$ מתאימים; ו- $\mu_1\ge\dots\ge\mu_{n-1}$ הע"ע של A_i עם ו"ע $v_1,\dots,v_{n-1}$ מתאימים. אזי:

$$\lambda_1\ge\mu_1\ge\lambda_2\ge\mu_2\ge\dots\ge\mu_{n-1}\ge\lambda_n$$

הוכחה: (נראה ש- $\lambda_1\ge\mu_1$:

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|_2=1} x^tAx \ge \max_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\perp e_i \\ x\in\mathbb{R}^n}} x^tAx = \max_{\substack{\|y\|_2=1 \\ y\in\mathbb{R}^{n-1}}} y^tA y = \mu_1$$

(נראה ש- $\mu_1\ge\lambda_2$:

$$\lambda_2 = \min_{w_1}\max_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\perp w_1}} x^tAx \le \max_{\substack{\|x\|=1 \\ x\perp e_i}} = \mu_1$$

(נראה ש- $\lambda_2\ge\mu_2$:

$$\lambda_2 = \max_{w_3,\dots,w_n}\min_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\perp\{w_3,\dots,w_n\}}} x^tAx \ge \min_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\perp e_i \\ x\perp\{\hat v_3,\dots,\hat v_{n-1}\}}} x^tAx = \min_{\substack{y\perp v_3,\dots,v_{n-1} \\ \|y\|_2=1}} y^tAy = \mu_2$$

$V_k = \hat{V}_k$ שהכנסנו 0 במקום ה-i

וככה ממשיכים...

נניח ש-A סימטרית ממשית וכן ש- $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq|\lambda_3|\geq\dots$

אנחנו נרצה למצוא את (λ_1, v_1). אפשר לכתוב

$$A = \sum \lambda_i v_i v_i^t = V \Lambda V^t$$

$$\Rightarrow A^k = V\Lambda^k$$

אם $\lambda_1 = 1$ אז השאר קטנים יותר ממנו $\lambda_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Leftarrow$ $A^k = \sum \lambda_i^k v_i v_i^t \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1 v_1 v_1^t$

עכשיו נראה אלגוריתם למציאת (λ_1, v_1):

$q^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ // some vector in $\mathbb{R}^n$

for $k=1,2,\dots$

$\quad z^{(k)} = A q^{(k-1)}$

$\quad q^{(k)} = \dfrac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|}$ // normalize for numeric stability

Until $\|z^{(k)} - z^{(k+1)}\| < \varepsilon$ //

$v_1 = q^{(k)}$

$\lambda_1 = \|z^{(k)}\|$

למה האלגוריתם נכון? נניח לשם הפשטות למקרה ש- $n=2$
אבל אותה הוכחה עובדת למימדים גבוהים יותר (רק עם עוד אינדקסים). נניח ש- v_1, v_2 בסיס אורתונורמלי.
$v_1 \perp v_2$ כי $\lambda_1 \neq \lambda_2$ והם פורשים את $\mathbb{R}^2$ ולכן

$$q^{(0)} = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$$z^{(1)} = Aq^{(0)} = \lambda_1 a_1 v_1 + \lambda_2 a_2 v_2$$

$$c_1 = \|z^{(1)}\|$$

$$q^{(1)} = \frac{Aq^{(0)}}{c_1} = \frac{\lambda_1}{c_1}\left(a_1 v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2\right)$$

$$z^{(2)} = Aq^{(1)} = \frac{\lambda_1^2}{c_1}\left(a_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 a_2 v_2\right)$$

$$q^{(2)} = \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2}\left(a_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 a_2 v_2\right)$$

וכך הלאה

$$q^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{c_1 \cdots c_k}\left(a_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k a_2 v_2\right)$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\lambda_1^k a_1}{c_1 \cdots c_k} v_1$$

אבל בגלל שהנורמה של $q^{(k)}$ היא 1 פשוט $q^{(k)} \longrightarrow v_1$

וזה מה שהאלגוריתם מחזיר.

נניח שרוצים עכשיו למצוא את (λ_2, v_2) אז נתבונן

ב- $B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$ ונפעיל עליה את האלגוריתם שלנו.

(12) 23.12.08
ת' סים

לדעת את ההוכחה של קושי שוורץ (אם לא של SVD)

&

Optimization & Linear Programming

יש קבוצה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ופונקציה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ויכול להיות מעניין למצוא

$$\min_{\substack{s.t.\\ x\in\Omega}} f(x) \qquad \max_{\substack{s.t.\\ x\in\Omega}} f(x) \qquad \exists ?\, x\in\Omega \quad f(x)>\alpha$$

נדבר על שני מקרים:

(א) f לינארית כלומר היא מהצורה $f(x) = \langle c, x\rangle$

(ב) Ω לינארית - כלומר מוגדרת ע"י שוויונים ואי שוויונים לינאריים

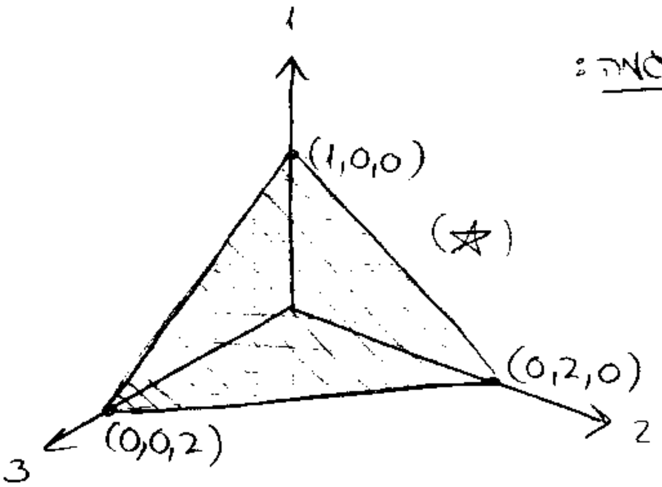
<u>דוגמה</u>: ב-$\mathbb{R}^2$

$$\max x_1 \quad s.t. \quad x_1 = x_2, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

כאן הקבוצה היא פשוט האלכסון ברביע הראשון ושם אין מקסימום.

<u>דוגמה</u>:

$$\max x_1 + x_2 \quad s.t. \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



כאן יש מקסימום כי הקבוצה חסומה וסגורה.

נסתכל על ישרים $x_1 + x_2 = \alpha$ - ישרים במישור (☆) והשאלה היא מה ה-α המקסימלי כך שהמישור חותך את המשולש שלנו.

הצורה הקאנונית של בעית אופטימיזציה כזאת היא

$$\begin{array}{ll} \max \langle c,x\rangle & \min \langle c,x\rangle \\ s.t & s.t \\ Ax\le b & Ax\ge b \\ x\ge 0 & x\ge 0 \end{array}$$

כאשר $c\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}^m$; $A_{m\times n}$

<u>דוגמה:</u>

$$\begin{aligned} &\max\ x_1+x_2 \\ &s.t \\ &\quad x_1+x_2+x_3=2 \\ &\quad x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{aligned}$$

הצורה הקאנונית היא

$$\begin{aligned} &-\min (-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \\ &s.t \\ &\quad (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2 \\ &\quad x\ge 0 \end{aligned}$$

<u>דוגמה:</u>

$$\begin{aligned} &\max\ 50x_1+30x_2 \\ &s.t \\ &\quad x_1+3x_2\le 5 \\ &\quad 3x_1-4x_2\le 7 \\ &\quad x_1,x_2\ge 0 \end{aligned}$$

$$50x_1+150x_2\le 250 \Leftarrow x_1+3x_2\le 5$$

$$50x_1+30x_2\le 50x_1+150x_2 \Leftarrow 0\le x_2$$

$$\max\ 50x_1+30x_2\le 250 \Leftarrow$$

ככה אפשר לקבל הרבה חסמים. אם אנחנו רוצים את החסם הכי טוב.

נכפיל את האילוצים שלנו ב- $y_1,y_2\ge 0$

$$y_1x_1+3y_1x_2\le 5y_1$$

$$3y_2x_1-4y_2x_2\le 7y_2$$

אם $y_1+3y_2\ge 50$, $3y_1-4y_2\ge 30$ אז $\max\ 50x_1+30x_2\le 5y_1+7y_2$

סק,

$$\max\ 50x_1+30x_2 \quad \le \quad \min\ 5y_1+7y_2$$

s.t

$x_1+3x_2 \le 5$ | $y_1+3y_2 \ge 50$

$3x_1-4x_2 \le 7$ | $3y_1-4y_2 \ge 30$

$x_1,x_2 \ge 0$ | $y_1,y_2 \ge 0$

זו הבעיה הדואלית!

באופן כללי,

בעיה פרימאלית | בעיה דואלית

$$\max \langle c,x\rangle \quad \le \quad \min \langle y,b\rangle$$

s.t

$Ax \le b$ | $yA \ge c$

$x \ge 0$ | $y \ge 0$

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $x_0 \ge 0$ וכן ש- $Ax_0 \le b$;

$y_0 \ge 0$ וכן ש- $y_0A \ge c$. אז

$$cx_0 \le y_0Ax_0 \le y_0b$$

$$\forall x_0 \qquad \langle c,x_0\rangle \le \langle b,y_0\rangle$$

$$\Rightarrow \forall y_0 \quad \max \langle c,x_0\rangle \le \langle b,y_0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \max \langle c,x_0\rangle \le \min \langle b,y_0\rangle$$

☺ וזה משפט הדואליות החלש!

(14) 6/1/09

ת׳ סים

המשך:

• הוכחת קושי-שוורץ:

$$0 \le \left\| x - \langle x, \tfrac{y}{\|y\|} \rangle \tfrac{y}{\|y\|} \right\|_2^2 =$$

$$= \langle x,x\rangle + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^4}\langle y,y\rangle - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2} =$$

$$\|x\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \|y\|^2\|x\|^2 - \langle x,y\rangle^2$$

$$\Rightarrow \quad \langle x,y\rangle^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \langle x,y\rangle \le \|x\|\|y\|$$

נשים לב שכל מה שהשתמשנו בו זה ש- $\|\cdot\|^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$

ולכן זה נכון לכל מרחב מ"פ

מההוכחה אפשר להבין מתי יש שוויון. ברור שיש שוויון אם $x=0$ או $y=0$. (והמקרה המעניין הוא כשהם שונים מאפס). אם יש שוויון אז מקבלים ש- $\|x - cy\|=0$

$\Leftarrow$ $x = cy$ ו- c כלשהו. אבל אז

$$c\|x\|^2 = \langle x,y\rangle = \|x\|\|y\| \ge 0$$

ולכן אם $c \ge 0$. ראינו, אם הם תלויים אז יש שוויון.

המסקנה: יש שוויון אמ"מ הווקטורים תלויים עם סקלר חיובי.

• $\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$

אם $x>0$ אז

$$\|x\|_1 = \sum x_i = \sum x_i \cdot 1 = \langle x, \vec{1}\rangle \le \|x\|_2\|1\|_2 = \sqrt{n}\|x_2\|$$

ואם יש רכיבים שליליים אז $\|x\|_1 = \sum|x_i| = \sum x_i(\pm 1)$

ומשאירים הכל באותו אופן.

• ג3: $\|x\|_2^* = \|x\|_2$

$$\|x\|_2^* = \max_y \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|} \overset{CS}{\le} \max_y \frac{\|x\|\|y\|}{\|y\|} = \|x\|_2$$

$\|x\|_2^* \le \|x\|_2$ ⇐

ואם ניקח $y=x$ אז $\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|_2} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|_2$

ומקיים שוויון.

תזכורת לאופטימיזציה

הצורה הכללית של LP:

$$\max_{\substack{s.t.\\ Ax\le b\\ x\ge 0}} \langle c,x\rangle = M$$

והבעיה הדואלית היא

$$\min_{\substack{s.t.\\ yA\ge c\\ y\ge 0}} \langle b,y\rangle = m$$

והוכחנו את משפט הדואליות החלש:

$$\max_{\substack{s.t.\\ Ax\le b\\ x\ge 0}} \langle c,x\rangle \le \min_{\substack{s.t.\\ yA\ge c\\ y\ge 0}} \langle b,y\rangle$$

משפט הדואליות החזק (שנוכיח בהרצאה) אומר שיש שוויון.

ומה משפט הדואליות הזה טוב? הוא מאפשר לנו לתת חסמים בקלות. כי אם מצאנו $z\ge 0$ רק ש- $zA\ge c$ אז $M \le m \le \langle b,z\rangle$.

כל שוויון אפשר להביע כאי שוויון:

$$\max_{\substack{s.t.\\ Bx=b\\ x\ge 0}} \langle c,x\rangle = \max_{\substack{s.t.\\ \begin{pmatrix} B\\ -B\end{pmatrix}x \le \begin{pmatrix} b\\ -b\end{pmatrix}\\ x\ge 0}} \langle c,x\rangle =$$

$$= \min_{\substack{s.t.\\ (y\ z)\begin{pmatrix} B\\ -B\end{pmatrix}\ge c\\ y,z\ge 0}} \langle b,y\rangle + \langle -b,z\rangle$$

(15)

$$= \min_{\substack{s.t \\ y,z \geq 0 \\ (y|z)\begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix} \geq c}} \langle b, y-z \rangle = \min_{\substack{s.t \\ y,z \geq 0 \\ (y-z)B \geq c}} \langle b, y-z \rangle =$$

$$= \min_{\substack{s.t \\ tB \geq c}} \langle b, t \rangle$$

(16) 16 log
ת׳ סמ

minimal VC

c - גרף ונרצה למצוא תת קבוצה של הקודקודים כך שלכל
קשת לפחות אחד מהקודקודים נוגע.
נציג ב- x_v אם בחרנו את הקודקוד v או לא. אז
אפשר לייצג את כל הבעיה כמעט לינארית.

$$\min \sum x_v$$
s.t.
$$\forall e=(u,v) \quad x_v + x_u \geq 1$$
$$x_v \in \{0,1\}$$
$$x_u \geq 0$$

זו לא בעיה לינארית, כי התנאי $x_v \in \{0,1\}$ לא לינארי
במקרה שמשקלי הקודקודים - מכוסה מינימלי (מוגדר ע"י בעיה NP-שלמה.

max matching

יש גרף דו צדדי $G=(L,R,E)$ ורוצים למצוא זיווג מקסימלי.
זיווג = התאמה חח"ע מן חלק ה-L ל-R ואנחנו רוצים זיווג
מקסימלי. אולי תת קבוצה של L ע"י הוא מקסימלי.
גם את זה אפשר לייצג כך

$$\max \sum x_e$$
s.t.
$$x_e \in \{0,1\}$$
$$x_e \geq 0$$
$$\forall v \sum_{\substack{e\in E \\ v\in e}} x_e \leq 1$$

זה תנאי לא לינארי שהופך את הבעיה לקשה

טוען יש רק קודקוד אחד שמחובר

במקום הבעיה הקשה נפתור את הבעיה

$$\max \sum x_e$$
s.t.
$$\forall v \sum_{e=(u,v)} x_e = 1$$
$$x_e \geq 0$$

איך נראית המטריצה?

$$A = V\underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{E} \qquad A_{v,e} = \begin{cases} 1 & v\in e \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

איך מוצאים קודקודים? נניח שהבעיה נתונה בצורה סטנדרטית

$$\begin{aligned} &\min \langle c, x\rangle \\ &s.t \\ &\quad Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

אם  $m\times n$, $m \leq n$

מסתכלים על כל תת המטריצות $A'_{m\times m}$

אם יש פתרון ל- $A'x = b$

ו- x חיובי אז זה קודקוד

<u>דוגמה</u>:

$$\begin{aligned} &\max\ x_1 + x_2 \\ &s.t \\ &\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

יש פה שתי תת מטריצות הפיכות

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \qquad \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אלה שני הקודקודים והמקסימום מתקבל על אחד מהם.

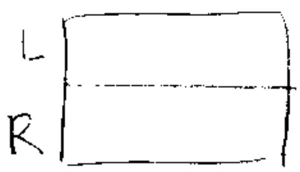
נחזור לבעיה עם הגרף. אם נניח שכל תת מטריצה A_I, A_I^{-1} מורכבת מ- $\{0,1,-1\}$ אז הקודקודים $x = A_I^{-1}b$ שלמים ונקבל פתרון גם לבעיה המקורית.

באופן כללי, $(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{|A|}C_{ji}$ כאשר $C_{ji} = (-1)^{i+j}\det\begin{pmatrix} \text{בלי } A \\ \text{השורה ה-}i \\ \text{והעמודה} \\ \text{ה-}j \end{pmatrix}$

(17)

נראה שכל תת מטריצה ריבועית $B_{k\times k}$ של A
מקיימת $|B| \in \{0,1,-1\}$ ובפרט $|A| \in \{0,1,-1\}$ ונסיים.
באינדוקציה:

$k=1$ זה ברור כי B איבר ב-A הם 1, -1, 0.
נראה (תסתכל) על תת מטריצה $B_{k\times k}$ יש שלושה מקרים
(1) יש ב-B עמודת אפסים $\Leftarrow$ $|B|=0$
(2) יש ב-B עמודה עם 1 יחיד $\Leftarrow$ נפתח דטרמיננטה
לפי העמודה הזאת והנחת האינדוקציה על מטריצה $B_{k-1,k-1}$
(קטנה) אותו דבר
(3) בכל עמודה יש יותר מ-1 יחיד, אז בהכרח אחד מהם



ב-L ואחד מהם ב-R והשאר חייבים
להיות אפסים. אם נחשב קומבינציה של שורות
השורות של L שווה לסכום השורות של R
(שניהם שווים ל-$(\underbrace{1,\dots,1}_{k})$) ולכן השורות תלויות
$\Leftarrow$ הדטרמיננטה היא אפס.

כלומר: סיימנו. (המטריצה הזאת נקראת אוני מודולרית totally)

Set Cover

יש עולם $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ ואוסף תת קבוצות
$S=\{S_1,\dots,S_k\}\subseteq 2^E$
מחפשים אוסף מינימלי של קבוצות מ-S כך ש-
$C\subseteq S, \quad \forall i\ \exists j\quad e_i\in S_j\in C$
(מקרה פרטי של זה הוא vertex cover)

$$\min \sum x_s$$
s.t.
$$\forall e \quad \sum_{s \mid e\in S} x_s \geq 1$$
$$x_s\in\{0,1\}$$

כמו קודם, את הבעיה הזו אנחנו לא יודעים לפתור.
אבל יש לפתור בעיה פשוטה יותר:

$$\min \Sigma Y_s$$
s.t.
$$\forall e\in E \quad \sum_{s|e\in S} X_s \ge 1$$
$$X_s \ge 0$$

נניח שהפתרון השבור הוא X^* והפתרון השלם הוא $\overline{X}$. כל פתרון שלם הוא בפרט שבור ולכן $\Sigma X_s^* \le \Sigma \overline{X}_s$.
אז קיבלנו חסם תחתון לבעיה.

נגדיר $f = \max_{e\in E}\{\#S | e\in S\}$ /maxdeg

מוכרח $0 \le X_i^* \le 1$ כי אחרת אם יש $X_i^* > 1$
אז נשנה אותו ל-1 ואז X^* עדיין מתאים לבעיה
אבל הסכום שלו קטן יותר.

נגדיר $C_i = \begin{cases} 1 & X^* \ge \frac{1}{f} \\ 0 & X^* < \frac{1}{f} \end{cases}$ אז

$$\Sigma C_i \le f\, \Sigma X_i^* \le f\, \Sigma \overline{X_i}$$

אם יש e רק
$$\sum_{s|e\in S} C_s < 1 \Rightarrow C_s = 0$$

$$\sum_{s|e\in S} X_s^* < \sum_{s|e\in S} \frac{1}{f} \le f \cdot \frac{1}{f} = 1$$

min-max theorem - Game Theory

Colin - שחקן העמודות בוחר עמודה i
Rowan - שחקן השורות בוחר שורה j
ואז Colin משלם ל-Rowan a_{ji} (שורה j ועמודה i
שלו). הטבלה A קבועה וידועה.

(18)

מה צריכה להיות האסטרטגיה של Rowan ?

$\max_j \min_i a_{ij}$

בקבוצי עמודות מקסימום (או מספר ערכים)

באופן דומה Colin תבחר את $\min_i \max_j a_{ij}$

כך המשחקים C- Colin ישלם ≤ ולכן

$\max_j \min_i a_{ij} \leq \min_i \max_j a_{ij}$

$$\begin{aligned} &\max\ c \\ &s.t \\ &\forall i\ a_{ij} \geq c \\ &j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

(19) 20.01.09
ת' 5ים

אנליזה הרמונית

יש חבורה (קומוטטיבית) $(G,+)$ סופית ואנחנו מתעניין בפונקציות
$$G \longrightarrow \mathbb{C}$$
בין שתי פונקציות ראשונה (נגדיר מכפלה פנימית
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)}$$

פונקציה $f: G \to \mathbb{C}$ נקראת קרקטר (character)
אם $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$
הפעולה של G — כפל ב- $\mathbb{C}$

נבע מכאן ש- $f(0) = 1$.

דוגמה: $G = \{0,1\}^n = \mathbb{Z}_2^n$
אם $f: \{0,1\}^n \to \mathbb{C}$ קרקטר אז
$$1 = f(0) = f(x+x) = f(x)f(x) = f(x)^2$$
$x \in \mathbb{Z}_2^n$ ה-

ולכן למעשה $f: \{0,1\}^n \to \{\pm 1\}$

כל $x \in \{0,1\}^n$ אפשר להציג באופן יחיד באמצעות הבסיס הסטנדרטי - $x = \sum x_i e_i$

אם $e_i \mapsto a_i$ אז $a_i = \pm 1 = (-1)^{b_i}$!
$$f(x) = f(\sum x_i e_i) = f(\sum_{x_i\neq 0} e_i) = \prod_{x_i \neq 0} a_i =$$
$$= \prod_{x_i\neq 0} (-1)^{b_i} = (-1)^{\sum_{x_i\neq 0} b_i} = (-1)^{\langle x, b\rangle} \longrightarrow = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$
(כל אחד ב $\mathbb{Z}_2$)

אז כל קרקטר הוא מהצורה הנ"ל. ולהפך, $f_a(x) = (-1)^{\langle a, x\rangle}$ הוא קרקטר ואלה בדיוק כל הקרקטרים של $\{0,1\}^n$.

אפשר להכליל את זה גם ל- $\mathbb{Z}_m^n$.

נזכור שאם $f,g:\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ הגדרנו

$$\langle f,g\rangle = \underbrace{2^{-n}}_{\frac{1}{|\{0,1\}^n|}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)g(x)$$

נסמן $W_T(x) = (-1)^{\langle x,T\rangle}$ אז

$$\langle W_T, W_S\rangle = \begin{cases} 1 & S=T \\ 0 & S\neq T \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\{W_S\}$ קבוצה אורתונורמלית (מקסימלית) ויש בה 2^n איברים

היא מהווה בסיס למרחב הפונקציות. (כי אפשר לחשוב על הפונקציה כווקטור באורך 2^n אז זה מרחב 2^n ממדי).

נראה שאם $S\neq T\subseteq[n]$ אז $W_T\neq W_S$

צריך למצוא x כך ש- $W_T(x)\neq W_S(x)$.

$S\neq T$ אז (נניח בה"כ) שיש $i\in S\setminus T$ (נגדיר) $x=e_i$ אז

$$W_S(x) = (-1)^{\langle S,x\rangle} = (-1)^{\sum_{j\in S} x_j} = -1$$

$$W_T(x) = (-1)^{\langle T,x\rangle} = 1$$

אם $f:\{0,1\}^n\to\mathbb{R}$ אפשר לרשום

$$f(x) = \sum_S \hat{f}(S) W_S(x)$$

אז יש העתקה $f\mapsto \hat{f}$ והיא לינארית, אז יש לה מטריצה (זו המטריצה שראינו באלגו).

מכיון ש- $\{W_S\}$ בסיס

$$\hat{f}(S) = \langle f, W_S\rangle = \langle \sum \hat{f}(T) W_T, W_S\rangle =$$
$$= \sum \hat{f}(T)\langle W_T, W_S\rangle = \hat{f}(S)$$

(20)

דוגמא: $f \equiv 1$

$$\hat{f}(S) = \langle f, W_S \rangle = 2^{-n} \sum_x f(x) W_S(x) = $$
$$= 2^{-n} \sum_x (-1)^{\langle S, x \rangle}$$

אם $S = \emptyset$ אז

$$\hat{f}(S) = 2^{-n} \sum_x (-1)^{\langle \emptyset, x \rangle} = 2^{-n} \cdot 2^n \cdot 1 = 1$$

אחרת,

$$\sum_x (-1)^{\langle S, x \rangle} = \sum_{x_i} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{x_i} (-1)^{\langle S \setminus i, x \rangle} =$$
$$= \sum_{x_i} \left[(-1)^{x_i} \left(\sum_y (-1)^{\langle S \setminus i, x \rangle} \right) \right] =$$
$$= \left(\sum_y (-1)^{\langle S \setminus i, x \rangle} \right) \sum_{x_i} (-1)^{x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}(S) = 0 \quad \forall S \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow f = W_\emptyset$$

דוגמא: $A = \{x \mid \sum x_i = 1\} = \{e_i\}_{i=1}^n$

$f = \mathbb{1}_A$ - הפונקציה המציינת

$$2^n \hat{f}(S) = 2^n \langle f, W_S \rangle = \sum_x f(x) W_S(x) =$$
$$= \sum_i W_S(e_i) = \sum_i (-1)^{\langle S, e_i \rangle}$$
$$= \sum_i (-1)^{S_i} = \#\{i \mid i \notin S\} - \#\{i \mid i \in S\}$$
$$= (n - |S|) - |S| =$$
$$= n - 2|S|$$

$$(-1)^{S_i} = \begin{cases} -1 & i \in S \\ 1 & i \notin S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(S) = \frac{n - 2|S|}{2^n}$$

(21) 3/2/09
ט' שבט

נתונה פונקציה $f:\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$

זה יכול לייצג הצבעה $S \subseteq [n]$ — $f(S)$ — מנצחת

אם ההצבעה עוברת או נכשלת.

Banzaff Index of power

שאלה: מי הכי משפיע, מהו הכוח?

$$I_i(f) = \Pr_{x\in\{0,1\}^n}\left(f(x) \neq f(x+e_i) \right)$$

לדוגמא, אם $f(x) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; $x \in \{0,1\}^5$

אז $I_4(f) = 0$; $I_3(f) = 1$

שאלה: מהו הכי קטן? הערך C

find f s.t. $\max I_i(f) \leq c$

נניח שהפונקציה מאוזנת, כלומר $\Pr(f(x)=1) = \frac{1}{2}$;

מקיים $\max_i I_i(f) \geq \frac{\log n}{n}$ וזה הדוק (הוכח ע"י קלל);

לגבי: נראה משהו (חלש יותר) אנחנו נוכיח שלכל

לכל f $\max_i I_i(f) \geq \frac{1}{n}$

מספיק להראות ש- $\sum I_i(f) \geq 1$ כי אם לכל i

$I_i(f) < \frac{1}{n}$ אז $\sum I_i(f) < 1$

נוכיח את זה לפי פורייה:

$$I_i(f) = \Pr_x\left(f(x) \neq f(x+e_i) \right) =$$

$$= 2^{-n} \sum_x \delta_{f(x) \neq f(x+e_i)} =$$

$$= 2^{-n} \sum_x \left(f(x) - f(x+e_i) \right)^2$$

לכל $g:\{0,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ מתקיים $2^{-n}\sum_x g^2(x) = \sum_x \hat{g}^2(x)$

וכן, הטרנספורם פורייה לינארי - $\widehat{g+h} = \hat{g} + \hat{h}$

לכן:
$$2^{-n}\sum_x \left(f(x) - f(x+e_i) \right)^2 = \sum_x \left(\hat{f}(x) - \hat{f}_i(x) \right)^2$$

כאשר $f_i(x) = f(x+e_i)$

נשים לב ש-
$$\hat{f}_i(S)=\begin{cases}\hat{f}(S) & i\notin S\\ -\hat{f}(S) & i\in S\end{cases}$$
כלומר
$$\hat{f}_i(x)=\begin{cases}\hat{f}(x) & x_i=0\\ -\hat{f}(x) & x_i=1\end{cases}$$
$$\hat{f}_i(S)=\langle f_i,\chi_S\rangle=\sum\dots=\begin{cases}\hat{f}(S) & i\notin S\\ -\hat{f}(S) & i\in S\end{cases}$$
תרגיל: להשלים

אנחנו נראה את זה אחרת. נשים לב ש- $f_i=2^n f*h$ כאשר
$$h(x)=\begin{cases}1 & x=e_i\\ 0 & x\neq e_i\end{cases}:$$
$$(f*h)(y)=2^{-n}\sum_x f(x)h(y-x)$$
מכיוון שנתון את h להיות 1 רק בנקודה מסוימת מדויק יוצא מה שצריך.

כמו, נשים לב ש- $\hat{h}(x)=2^{-n}\chi_{e_i}=(-1)^{x_i}/2^n$
(צריך להראות).

ועכשיו מאחר ש- $\widehat{f*h}=\hat{f}\cdot\hat{h}$ מדויק נקבל ש-
$$\hat{f}_i(x)=\begin{cases}\hat{f}(x) & x_i=0\\ -\hat{f}(x) & x_i=1\end{cases}$$
לכן
$$I_i(f)=\sum_x\left(\hat{f}(x)-\hat{f}_i(x)\right)^2=\sum_{x:x_i=1}4\hat{f}(x)^2=$$
$$=4\sum_{x:x_i=1}\hat{f}^2(x)=4\sum_{S:\,i\in S}\hat{f}^2(S)$$

כנדרש,

(22)

$$\sum_i I_i(f) = \sum_i 4 \sum_{i\in S} \hat{f}^2(S) = 4 \sum_i \sum_{i\in S} \hat{f}^2(S) =$$

$$= 4 \sum_{S\neq\emptyset} |S|\, \hat{f}^2(S) \underset{|S|\geq 1}{\geq} 4 \sum_{S\neq\emptyset} \hat{f}^2(S)$$

נותר רק נראה ש- $\sum_{S\neq\emptyset} \hat{f}^2(S) = \frac{1}{4}$.

הנתון ש-f מאוזנת, כלומר $2^{-n}\sum_x f(x) = \frac{1}{2}$

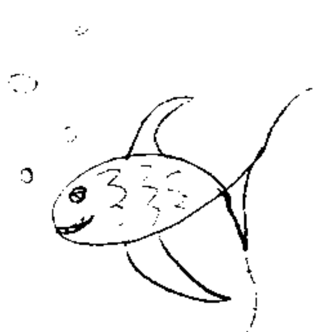
ואכן $f(x)\in\{0,1\}$ אז:

$$\frac{1}{2} = 2^{-n}\sum_x f(x) = 2^{-n}\sum_x f^2(x) \underset{\text{פרסבל}}{=} \sum_S \hat{f}^2(S)$$

$$\hat{f}(\emptyset) = \langle f, \chi_\emptyset \rangle = 2^{-n}\sum f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{S\neq\emptyset} \hat{f}^2(S) = \sum_S \hat{f}^2(S) - \hat{f}^2(\emptyset) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

סיימנו!



סוף