כלים מתמטיים למדעי המחשב

מבחן סופי

השאלות הנבחרות: 1, 3, 6, 9
בונוס: 8

דינה זליגר

תוכן עניינים

חלק 1: הסתברות

שאלה 1

נוכיח שקיים קבוע $0 < c$ שעבורו לכל משתנה מקרי אי-שלילי X בעל תוחלת ושונות סופיות מתקיים

$$\Pr\left(X \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}X\right) \geq c\frac{\mathbb{E}^2 X}{\mathbb{E}X^2}$$

<u>**אי-שוויון קושי-שוורץ**</u>: יהיו Y, Z משתנים מקריים אי שליליים עם תוחלת ושונות סופיות. אזי

$$\mathbb{E}XY \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}Y^2}$$

<u>**הוכחה**</u>: ראשית, יש להוכיח שהתוחלת של XY סופית. ואכן,

$$\mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) = \mathbb{E}(X+Y)^2 \overset{(*)}{\leq} \mathbb{E}(2X^2 + 2Y^2) = 2\mathbb{E}X^2 + 2\mathbb{E}Y^2$$

כאשר $(*)$ נכון כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ולכן

$$(x+y)^2 = 2xy + (x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2$$

מאחר שהשונות של X, Y סופיות, גם $\mathbb{E}X^2, \mathbb{E}Y^2 < \infty$ ולכן ניתן להעביר אגפים ולקבל

$$\mathbb{E}XY \leq \frac{1}{2}(\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2) < \infty$$

כעת, יהי $t \in \mathbb{R}$ כלשהו. אזי $(tX - Y)^2$ משתנה מקרי אי שלילי ולכן

$$0 \leq \mathbb{E}(tX - Y)^2 = \mathbb{E}t^2X^2 + \mathbb{E}(-2tXY) + \mathbb{E}Y^2 = t^2\mathbb{E}X^2 - 2t\mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y^2$$

$\mathbb{E}(tX-Y)^2 = 0$ אמ"מ $(tX-Y)^2 = 0$ ולמשוואה זו יש רק פתרון אחד. לכן הדיסקרימיננטה של הביטוי $t^2\mathbb{E}X^2 - 2t\mathbb{E}XY + \mathbb{E}Y^2$ חייבת להיות אי-חיובית (אילו הייתה חיובית ממש, אז היו שני פתרונות למשוואה):

$$\begin{aligned}
&4(\mathbb{E}XY)^2 - 4\mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow (\mathbb{E}XY)^2 \leq \mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2 \\
&\Rightarrow \mathbb{E}XY \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}Y^2}
\end{aligned}$$

וזה מה שרצינו להראות. ☺

כעת נוכיח את הטענה שלנו. למעשה, נוכיח טענה קצת כללית יותר. נראה שלכל $\alpha \in (0,1)$ מתקיים

$$\Pr(X \geq \alpha\mathbb{E}X) \geq (1-\alpha)^2\frac{\mathbb{E}^2X}{\mathbb{E}X^2}$$

נפתח את התוחלת לפי ההגדרה:

$$\mathbb{E}X = \sum_{k \in \operatorname{im} X} k\Pr(X = k) = \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha\mathbb{E}X}} k\Pr(X=k) + \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k \geq \alpha\mathbb{E}X}} k\Pr(X=k) =$$

$$= \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha\mathbb{E}X}} k\Pr(X=k) + \left(\sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha\mathbb{E}X}} 0 \cdot k\Pr(X=k) + \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k \geq \alpha\mathbb{E}X}} 1 \cdot k\Pr(X=k)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \sum_{k \in \operatorname{im} X} g(k) \Pr(X = k)$$

כאשר

$$g(k) = \begin{cases} 0, & k < \alpha \mathbb{E}X \\ k, & k \geq \alpha \mathbb{E}X \end{cases} = k \cdot \chi_{\{x \in \operatorname{im} X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}}(k)$$

אבל לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה נובע ש-

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \sum_{k \in \operatorname{im} X} g(k) \Pr(X = k) = \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \mathbb{E}g(X) = \\ &= \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} k \Pr(X = k) + \mathbb{E}X\chi_{\{x \in \operatorname{im} X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} \leq \alpha \mathbb{E}X \sum_{\substack{k \in \operatorname{im} X \\ k < \alpha \mathbb{E}X}} \Pr(X = k) + \mathbb{E}X\chi_{\{x \in \operatorname{im} X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} = \\ &= \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \mathbb{E}X\chi_{\{x \in \operatorname{im} X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} \end{aligned}$$

נחיל כעת את אי-שוויון קושי שוורץ על המחובר השני :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &\leq \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \mathbb{E}X\chi_{\{x \in \operatorname{im} X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}} \leq \\ &\leq \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}\chi^2_{\{x \in \operatorname{im} X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}}} = \\ &\underset{\chi = \chi^2}{=} \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}\chi_{\{x \in \operatorname{im} X : x \geq \alpha \mathbb{E}X\}}} = \\ &= \alpha \mathbb{E}X \Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) + \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \leq \\ &= \alpha \mathbb{E}X + \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונעשה כמה מניפולציות אלגבריות :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}X \leq \alpha \mathbb{E}X + \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \\ &\Rightarrow (1 - \alpha)\mathbb{E}X \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X)} \\ &\Rightarrow (1 - \alpha)^2 \mathbb{E}^2 X \leq \mathbb{E}X^2 \Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X) \\ &\Rightarrow \Pr(X \geq \alpha \mathbb{E}X) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{\mathbb{E}^2 X}{\mathbb{E}X^2} \end{aligned}$$

אנחנו מעוניינים ב-$\alpha = \frac{1}{2}$ ולכן במקרה שלנו נקבל

$$\Pr\left(X \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}X\right) \geq \frac{1}{4}\frac{\mathbb{E}^2 X}{\mathbb{E}X^2}$$

נעיר רק לגבי טיב החסם. בהוכחה של הטענה הכללית השתמשנו בכך ש-$\Pr(X < \alpha \mathbb{E}X) \leq 1$. לכאורה זה חסם גס מאוד, אבל למעשה במקרה הכללי אי אפשר להגיד משהו טוב יותר. למשל אם נתבונן במשתנה מקרי המוגדר לכל $m \in \mathbb{N}$ ע"י

$$X_m = \begin{cases} m, & \frac{1}{m} \\ 0, & \frac{m-1}{m} \end{cases}$$

אז מתקיים $\mathbb{E}X = m \Pr(X = m) = 1$. כמו כן נזכור ש-$\alpha < 1$ ולכן $\{x : X(x) < \alpha\} = \{x : X(x) = 0\}$. מכאן,

$$\Pr(X < \alpha\mathbb{E}X) = \Pr(X < \alpha) = \Pr(X = 0) = \frac{m-1}{m}$$

והסתברות זו קרובה ל-1 כרצוננו...

חלק 2: אלגברה לינארית

שאלה 3

אם $G=(V,E)$ גרף לא מכוון, נגדיר את **הגרף הקווי** המתאים $L(G)=(\bar{V},\bar{E})$ באופן הבא:

$$\bar{V}=E$$
$$\forall (x,y),(u,v)\in E\ \big((x,y),(u,v)\big)\in \bar{E} \Leftrightarrow |\{x,y\}\cap\{u,v\}|=1$$

נניח שהקודקודים הם $\{v_1,\dots,v_n\}$ והצלעות הן $\{e_1,\dots,e_m\}$. נגדיר מטריצה $X\in M_{n\times m}(0,1)$ באופן הבא:

$$X_{i,j}=\begin{cases}1, & v_i \text{ and } e_j \text{ are incident}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

סעיף א

נראה שכל הערכים העצמיים של $L(G)$ הם לפחות -2.

<u>למה 1</u>: מטריצת השכנויות של $L(G)$ היא $B=X^tX-2I_m$.

<u>הוכחה</u>: נסמן את העמודות של X ב-$x_1,\dots,x_m$. אז עבור $i\neq j$:

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[X^t]_{ik}[X]_{kj}=\sum_{k=1}^{n}x_{ki}x_{kj}=\langle x_i,x_j\rangle$$

זו המכפלה הפנימית של שתי עמודות שונות של X. נשים לב שמכפלה זו שונה מאפס אמ"מ יש k שעבורו $x_{ki}=x_{kj}=1$, כלומר k קודקוד שמחובר גם ל-e_i וגם ל-e_j. למעשה המכפלה היא מספר הקודקודים שחלים גם על e_i וגם על e_j. יכול להיות לכל היותר קודקוד אחד כזה כי אם יש שניים אז $e_i=e_j$. לכן $b_{ij}=1$ אמ"מ יש לצלעות המתאימות קודקוד משותף אחד. באופן דומה, אם $i=j$ אז יש שני קודקודים שחלים על שתי הצלעות (כי הן זהות!) ואז $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[X^t]_{ik}[X]_{kj}-2=\sum_{k=1}^{n}x_{ki}x_{kj}-2=2-2=0$. וזה מה שרצינו. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי λ ערך עצמי של $L(G)$. אזי $\lambda\geq -2$.

<u>הוכחה</u>: לפי אחד התנאים השקולים שלמדנו בכיתה[1], המטריצה X^tX היא PSD, כלומר כל הערכים העצמיים שלה הם אי-שליליים. אבל אם μ ערך עצמי של A אז $\mu-c$ ערך עצמי של $A-cI$, שהרי אם v וקטור עצמי מתאים אז $(A-cI)v=Av-cIv=\mu v-cv=(\mu-c)v$. במקרה שלנו $A=X^tX$ ו-$c=2$. מאחר ש-$\mu\geq 0$ נובע ש-$\lambda=\mu-2\geq -2$. ☺

סעיף ב

נראה שאם $|V|<|E|$ אז -2 ערך עצמי של $L(G)$.

לפי למה 1 מספיק להראות ש-0 הוא ערך עצמי של X^tX. בתרגיל 3 הוכחנו שאם $Q\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ כאשר $m\leq n$ אז m הערכים העצמיים הגדולים ביותר של Q^tQ ושל QQ^t זהים ושאר הערכים העצמיים של Q^tQ הם אפס. כאן $X\in M_{|V|\times|E|}(\mathbb{R})$ ונתון ש-$|E|>|V|$. לכן 0 ערך עצמי של X^tX וזה מה שרצינו.

סעיף ג

נניח ש-G d-רגולרי עם ספקטרום $\mathrm{spec}(G)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. נראה ש-

[1] סיכומי הרצאה 7, טענה 37

$$\text{spec}\big(L(G)\big) = \begin{cases} \{0\}, & d = 1 \\ \{\lambda_i\}_{i=1}^n, & d = 2 \\ \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n \cup \{-2\}, & d > 2 \end{cases}$$

<u>למה 2</u>: בסימונים של סעיף א, $A_G = XX^t - dI_n$.

<u>הוכחה</u>: באופן דומה להוכחה הקודמת. מתקיים $[XX^t]_{ij} = \langle x^i, x^j \rangle$ כאשר x^k השורה ה-k של X. מכפלה זו סופרת את מספר הצלעות שחלות גם על v_i וגם כל v_j. אם הקודקודים שווים אז בגלל ה-d-רגולריות מספר הצלעות הוא d ולכן $[XX^t - dI_n]_{ii} = 0$ כפי שצריך. אם הקודקודים שונים אז מספר הצלעות שחל על שניהם הוא לכל היותר $1 - 0$ אם הם לא מחוברים ו-1 אם הם מחוברים. וזו בדיוק ההגדרה של מטריצת שכנויות. ☺

כעת, אם $d = 1$ אז כל קודקוד משתתף בצלע אחת בלבד ולכן $L(G) = 0$. בפרט $\text{spec}\big(L(G)\big) = \{0\}$.

$X \in M_{n\times|E|}(\mathbb{R})$ וכאשר $d \geq 2$ מתקיים $n \leq |E|$. לכן במקרה זה n הערכים העצמיים הגדולים ביותר של X^tX ושל XX^t הם זהים. נסמן אותם ב-$\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. לפי למה 2 $\{\mu_i - d\}_{i=1}^n$ הם הערכים העצמיים של G ולכן מתקיים $\mu_i = \lambda_i + d$. אבל עכשיו לפי למה 1 מתקיים

$$\text{spec}\big(L(G)\big) = \{\mu_i - 2\}_{i=1}^{|E|} = \begin{cases} \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n, & |E| = n \\ \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n \cup \{0 - 2\}_{i=n+1}^{|E|}, & |E| < n \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n, & d = 2 \\ \{\lambda_i + d - 2\}_{i=1}^n \cup \{-2\}, & d > 2 \end{cases}$$

אגב, נעיר רק שבמקרה ש-$d > 2$ הריבוי של הערך העצמי של -2 הוא $|E| - n$ (כי $L(G)$ סימטרית ולכן לכסינה ויש לה $|E|$ ערכים עצמיים).

סעיף ד

תהי A מטריצה ממשית בגודל $\binom{n}{2} \times \binom{n}{3}$ המוגדרת לכל $|S| = 2$ ו-$|T| = 3$ ע"י

$$A_{S,T} = \begin{cases} 1, & S \subseteq T \\ 0, & S \nsubseteq T \end{cases}$$

נחשב את הערכים הסינגולריים של A.

הערכים הסינגולריים של A הם שורשי הערכים העצמיים של AA^t. עבור $|S| = |Q| = 2$ מתקיים:

$$[AA^t]_{S,Q} = \sum_{|R|=3} A_{S,R}A_{Q,R}$$

$A_{S,R}A_{Q,R} = 1$ אמ"מ $A_{S,R} = A_{Q,R} = 1$, כלומר אמ"מ $S \subseteq R$ וגם $Q \subseteq R$. זה קורה אמ"מ $S \cup Q \subseteq R$. יש כמה אפשרויות:

- אם $S \cap Q = \emptyset$ אז $S \cup Q$ מכילה ארבעה איברים ולכן לא יכולה להיות קבוצה R כנ"ל. לכן במקרה זה

$$[AA^t]_{S,Q} = \sum_{|R|=3} A_{S,R}A_{Q,R} = 0$$

- אם $|S \cap Q| = 2$ אז הקבוצות שוות ויש בדיוק $n - 2$ קבוצות R כנ"ל ולכן

$$[AA^t]_{S,Q} = \sum_{|R|=3} A_{S,R}A_{Q,R} = n - 2$$

- אם $|S\cap Q|=1$ אז $|S\cup Q|=3$ ולכן יש קבוצה אחת R שעומדת בתנאים. כלומר,

$$[AA^t]_{S,Q}=\sum_{|R|=3}A_{S,R}A_{Q,R}=1$$

לכן אם נתבונן במטריצה AA^t אז על האלכסון שלה מופיע $n-2$ ושאר האיברים הם 0 או 1. נציג אם כן את AA^t ע"י $AA^t=B+(n-2)I_{\binom{n}{2}}$ כאשר $B\in M_{\binom{n}{2}}(\mathbb{Z}^2)$. ב-$B$ מתקיים

$$B_{S,Q}=\begin{cases}0, & |S\cap Q|\neq 1\\ 1, & |S\cap Q|=1\end{cases}$$

נתבונן בקליקה $G=K_n$. יש ל-G n קודקודים ו-$\binom{n}{2}$ צלעות. הגרף הקווי המתאים הוא

$$\bar{V}=\{\{x,y\}\subseteq[n]: x\neq y\}$$
$$\bar{E}=\Big\{\{\{x,y\},\{u,v\}\}: |\{x,y\}\cap\{u,v\}|=1\Big\}$$

נטען שמטריצת השכנויות המתאימה היא בדיוק B. אכן, אם $\{S,Q\}\in\bar{E}$ אז $|S\cap Q|=1$ ולכן $B_{S,Q}=1$ ואילו אם $\{S,Q\}\notin\bar{E}$ אז $|S\cap Q|\neq 1$ ולכן $B_{S,Q}=0$.

הקליקה K_n היא גרף $n-1$-רגולרי. מן הסתם יש לנו עניין רק ב-$n\geq 3$ ולכן לפי הסעיף הקודם

$$\mathrm{spec}(B)=\mathrm{spec}\big(L(K_n)\big)=\begin{cases}\{\lambda_i\}_{i=1}^n, & n=3\\ \{\lambda_i+n-3\}_{i=1}^n\cup\{-2\}, & n>3\end{cases}$$

כאשר $\mathrm{spec}(K_n)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$.

אז אם נחשב את $\mathrm{spec}(K_n)$ נקבל את $\mathrm{spec}(AA^t)$ ע"י:

$$\mathrm{spec}(AA^t)=\mathrm{spec}(B)+(n-2)=\begin{cases}\{\lambda_i+1\}_{i=1}^n, & n=3\\ \{\lambda_i+2n-5\}_{i=1}^n\cup\{n-4\}, & n>3\end{cases}$$

לכן נותר לנו לחשב את $\mathrm{spec}(K_n)$. מטריצת השכנויות של K_n היא

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}$$

נחשב את הערכים העצמיים שלה[2]:

$$\det\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}-xI\right)=\det\begin{pmatrix}-x & 1 & \dots & 1\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & -x\end{pmatrix}=\big(-x+(n-1)\big)(-x-1)^{n-1}$$

לכן הערכים העצמיים של K_n הם -1 בריבוי $n-1$ ו-$n-1$ בריבוי 1.

---

[2] ר' חישוב בנספח

נסכם את התוצאות. הערכים הסינגולריים של A כאשר $n > 3$ הם:

ערך סינגולרי	ריבוי
$\sqrt{-1+2n-5} = \sqrt{2n-6}$	$n-1$
$\sqrt{n-1+2n-5} = \sqrt{3n-6}$	1
$\sqrt{n-4}$	השאר

אם $n = 3$ אז הערכים העצמיים של K_n הם $\{-1,-1,2\}$ ולכן הערכים העצמיים של AA^t הם $\{0,0,3\}$ והערך הסינגולרי היחיד הוא $\sqrt{3}$.

חלק 3: אופטימיזציה ותכנון לינארי

שאלה 6

יהיו $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$. נגדיר מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ ע"י $A_{ij} = \|z_i - z_j\|_1$. נסמן ב-$\mathcal{L}_n$ את אוסף המטריצות שניתן ליצור באופן זה. נשים לב ש-d אינו פרמטר של $\mathcal{L}_n$ ושהמטריצות ב-$\mathcal{L}_n$ יכולות להיווצר מאוספי וקטורים מממדים שונים.

סעיף א

נוכיח ש-$\mathcal{L}_n$ סגור לחיבור. כלומר בהינתן $A, B \in \mathcal{L}_n$ גם $A + B \in \mathcal{L}_n$. נסמן

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{d_1} \left|z_i^k - z_j^k\right|$$
$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{d_2} \left|w_i^k - w_j^k\right|$$

אז $[A+B]_{ij} = \sum_{k=1}^{d_1} \left|z_i^k - z_j^k\right| + \sum_{k=1}^{d_2} \left|w_i^k - w_j^k\right|$.

נגדיר n וקטורים חדשים $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ באופן הבא:

$$u_i^k = \begin{cases} z_i, & k \le d_1 \\ w_i, & k > d_1 \end{cases}$$

נטען ש-$A + B$ מתקבלת מאוסף וקטורים זה. ואכן:

$$\left\|u_i - u_j\right\|_1 = \sum_{k=1}^{d_1+d_2} \left|u_i^k - u_j^k\right| = \sum_{k=1}^{d_1} \left|u_i^k - u_j^k\right| + \sum_{k=d_1+1}^{d_1+d_2} \left|u_i^k - u_j^k\right| =$$
$$= \sum_{k=1}^{d_1} \left|z_i^k - z_j^k\right| + \sum_{k=1}^{d_2} \left|w_i^k - w_j^k\right| = [A+B]_{ij}$$

לכן $A + B \in \mathcal{L}_n$.

סעיף ב

יהי Z אוסף המטריצות ב-$\mathcal{L}_n$ שאיבריהן ב-$\{0,1\}$, כלומר $Z = \{A \in M_n(\mathbb{Z}_2) : A \in \mathcal{L}_n\}$. נוכיח ש-

$$\mathcal{L}_n = \operatorname{cone} Z = \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i z_i : \forall 1 \le i \le N (z_i \in Z \wedge a_i \ge 0) \right\}$$

צריך להוכיח הכלה לשני הכיוונים.

בסעיף הקודם ראינו ש-$\mathcal{L}_n$ סגור לחיבור. ברור גם שהוא סגור לכפל בסקלר חיובי. שהרי אם

$$A_{ij} = \left\|z_i - z_j\right\|_1 = \sum_{k=1}^{d} \left|z_i^k - z_j^k\right|$$

ונגדיר $B = aA$ עבור $a \ge 0$ אז

$$B_{ij} = aA_{ij} = a\|z_i - z_j\|_1 = a\sum_{k=1}^{d}|z_i^k - z_j^k| = \sum_{k=1}^{d} a|z_i^k - z_j^k| = \sum_{k=1}^{d}|a||z_i^k - z_j^k| =$$
$$= \sum_{k=1}^{d}|a(z_i^k - z_j^k)| = \sum_{k=1}^{d}|az_i^k - az_j^k|$$

ולכן אם נגדיר $w_i = az_i$ לכל $1 \le i \le n$ נקבל ש-$B_{ij} = \|w_i - w_j\|_1$, כלומר $B = aA \in \mathcal{L}_n$.

מההגדרה ברור ש-$Z \subseteq \mathcal{L}_n$ ולכן $\operatorname{cone} Z \subseteq \mathcal{L}_n$ (שהרי איברי $\operatorname{cone} Z$ מתקבלים מפעולות חיבור וכפל בסקלר חיובי על איברי Z ו-$\mathcal{L}_n$ סגור תחת פעולות אלה).

נותר להוכיח ש-$\mathcal{L}_n \subseteq \operatorname{cone} Z$. צריך להראות שכל מטריצה $A \in \mathcal{L}_n$ ניתנת להצגה כצירוף של מטריצות מ-Z. ניתן להניח ש-A נוצרה ע"י וקטורים $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$, שהרי אחרת, לפי מה שראינו בסעיף הקודם מתקיים $A = \sum_{k=1}^{d} A_i$ כאשר $A_i \in \mathcal{L}_n$ נוצרה ע"י הרכיבים $z_1^i, \dots, z_n^i$ של $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^d$. אז אם כל אחת מה-$A_i$ צירוף של מטריצות מ-Z, נקבל שגם A צירוף של מטריצות מ-Z.

כעת ניסיתי הרבה דברים שונים כדי להוכיח את הטענה אבל לצערי לא הצלחתי . הנה שני רעיונות שנראו לי יותר מבטיחים:

1. לייצר רשימה של כל המטריצות ב-Z, להניח ש-$A = \sum_{i=1}^{m} a_i z_i$. זה יוצר מערכת של $n(n-1)$ משוואות ב-m נעלמים.
2. להרחיב את המימד של הווקטורים כך שהמרחקים ביניהם לא ישתנו אבל אפשר יהיה לחלק אותם לבלוקים כך שמרחק בין בלוקים מתאימים בווקטורים שונים יהיה 0 או 1.

חלק 4: אנליזה הרמונית

שאלה 8: בונוס

פונקציה בוליאנית היא פונקציה $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. פונקציה כזאת נקראת **מאוזנת** אם

$$\#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 0\} = \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) = 1\}$$

עבור $u, v \in \{0,1\}^n$ נאמר ש-$u \prec v$ אם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $v_i \le u_i$. פונקציה בוליאנית נקראת **מונוטונית** אם עבור $u \prec v$ מתקיים $f(v) \le f(u)$.

נגדיר את ההשפעה של i על פונקציה בוליאנית $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ע"י

$$I_i(f) = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x + e_i)\}$$

סעיף א

נראה שעבור פונקציה בוליאנית מאוזנת מתקיים $\sum_{i \in [n]} I_i(f) \ge 1$.

נבצע תהליך דומה למה שעשינו בכיתה[3]:

$$I_i(f) = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x + e_i)\} = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta_{f(x) \neq f(x+e_i)}$$

אבל $f(x) \in \{0,1\}$ לכל $x \in \{0,1\}^n$ ולכן $f(x) \neq f(y)$ אמ"מ $f(x) - f(y) = 1 = 1^2 = \left(f(x) - f(y)\right)^2$.
לכן,

$$I_i(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta_{f(x) \neq f(x+e_i)} = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \left(f(x) - f(x + e_i)\right)^2$$

נגדיר כעת $f_i(x) = f(x + e_i)$. לפי שוויון פרסוול, לכל פונקציה בוליאנית $g:\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} g^2(x) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \hat{g}^2(x)$ ואם נזכור גם את הלינאריות של טרנספורם פורייה, נקבל:

$$\begin{aligned} I_i(f) &= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \left(f(x) - f(x + e_i)\right)^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \left(f(x) - f_i(x)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (f - f_i)^2(x) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (\widehat{f - f_i})^2(x) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \left(\hat{f} - \hat{f}_i\right)^2(x) = \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}^n} \left(\hat{f}(x) - \hat{f}_i(x)\right)^2 \end{aligned}$$

נטען כעת ש-

$$\hat{f}_i(a) = \begin{cases} \hat{f}(a), & a_i = 0 \\ -\hat{f}(a), & a_i = 1 \end{cases}$$

כדי להראות זאת נראה ש-$f_i = 2^n g * h$ כאשר $h(x) = \begin{cases} 1, & x = e_i \\ 0, & x \neq e_i \end{cases}$. אכן,

[3] למעשה, נעתיק את זה בצורה מסודרת ☺

$$2^n(f*h)(x)=\frac{2^n}{2^n}\sum_{y\in\{0,1\}^n}f(y)h(x-y)=f(y)$$

כאשר y כך ש-$x-y=e_i$, כלומר $y=x-e_i=x+e_i$ (נזכור שאנחנו עובדים ב-$\mathbb{Z}_2$). כלומר אכן $2^n(f*h)(x)=f(x+e_i)=f_i(x)$ לכל $x\in\{0,1\}^n$.

כעת, נטען ש-$\hat{h}(x)=\frac{1}{2^n}\chi_a(e_i)=\frac{(-1)^{a_i}}{2^n}$. ואכן,

$$\hat{h}(a)=\langle h,\chi_a\rangle=\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}h(x)\chi_a(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}\delta_{x=e_i}\chi_a(x)=\frac{1}{2^n}\chi_a(e_i)$$

עכשיו, בגלל הקשר שבין קונבולוציה לטרנספורם פורייה נוכל לקבל את $\hat{f_i}(a)$:

$$\hat{f_i}(a)=2^n\hat{f}(a)\cdot\hat{h}(a)=\hat{f}(a)(-1)^{a_i}=\begin{cases}\hat{f}(a), & a_i=0\\ -\hat{f}(a), & a_i=1\end{cases}$$

עכשיו נוכל להמשיך את החישוב של ההשפעה:

$$I_i(f)=\sum_{x\in\{0,1\}^n}\left(\hat{f}(x)-\hat{f_i}(x)\right)^2=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=1}}\left(\hat{f}(x)-\hat{f_i}(x)\right)^2+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=0}}\left(\hat{f}(x)-\hat{f_i}(x)\right)^2=$$
$$=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=1}}\left(\hat{f}(x)+\hat{f}(x)\right)^2+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=0}}\left(\hat{f}(x)-\hat{f}(x)\right)^2=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=1}}4\hat{f}^2(x)=4\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=1}}\hat{f}^2(x)$$

נחסום את סכום ההשפעות:

$$\sum_{i=1}^n I_i(f)=\sum_{i=1}^n 4\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=1}}\hat{f}^2(x)=4\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\ x_i=1}}\hat{f}^2(x)=4\sum_{i=1}^n\sum_{i\in S}\hat{f}^2(S)=$$
$$=4\sum_{S\neq\emptyset}|S|\hat{f}^2(S)\geq 4\sum_{S\neq\emptyset}\hat{f}^2(S)$$

כאשר האי שוויון האחרון נכון משום שאם $S\neq\emptyset$ אז $|S|>1$.

כדי להשלים את המשימה נותר לנו לחשב את $\sum_{S\neq\emptyset}\hat{f}^2(S)$. למעשה, נרצה להראות ש-$\sum_{S\neq\emptyset}\hat{f}^2(S)=\frac{1}{4}$. ואכן, נשתמש שוב בשוויון פרסוול כדי לקבל :

$$\sum_S\hat{f}^2(S)=\frac{1}{2^n}\sum_S f^2(S)\overset{(*)}{=}\frac{1}{2^n}\sum_S f(S)\overset{(**)}{=}\frac{1}{2}$$

כאשר $(*)$ נכון בגלל שטווח הפונקציה הוא $\{0,1\}$ ולכן תמיד $f=f^2$ ו-$(**)$ נכון בגלל שהפונקציה מאוזנת.

לבסוף, $\hat{f}(\emptyset)=\langle f,\chi_\emptyset\rangle=\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}f(x)(-1)^0=\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n}f(x)=\frac{1}{2}$ ולכן

$$\sum_{S\neq\emptyset}\hat{f}^2(S)=\sum_S\hat{f}^2(S)-\hat{f}^2(\emptyset)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

ולכן נוכל לקבל את מה שרצינו:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(f) \geq 4 \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

סעיף ב

נראה שעבור פונקציה מאוזנת מונוטונית מתקיים $\sum_{i=1}^{n} I_i^2(f) \leq 1$.

נשתמש במונוטוניות של f כדי לחשב את ההשפעה.

$$\begin{aligned}
I_i(f) &= \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x+e_i)\} = \\
&= \frac{1}{2^n} \left(\#\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 0 \wedge f(x) \neq f(x+e_i)\} + \#\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 1 \wedge f(x) \neq f(x+e_i)\}\right) \\
&\underset{y=x+e_i}{=} \frac{1}{2^n} (\#\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 0 \wedge f(x) \neq f(x+e_i)\} \\
&\qquad + \#\{y \in \{0,1\}^n : y_i = 0 \wedge f(y+e_i) \neq f(y)\}) = \\
&= \frac{1}{2^n} 2 \cdot |\{x \in \{0,1\}^n : x_i = 0 \wedge f(x) \neq f(x+e_i)\}| = \\
&\underset{f \text{ מונוטוניות}}{=} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i = 0}} \big(f(x+e_i) - f(x)\big) = -\frac{2}{2^n} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i = 0}} \big(f(x) - f(x+e_i)\big) = \\
&= -2 \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i = 0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i = 0}} f(x+e_i) \right) = -2 \cdot \frac{1}{2^n} \left(\sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i = 0}} f(x) - \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x_i = 1}} f(x) \right) = \\
&= -2 \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)(-1)^{x_i} = -2\hat{f}(e_i)
\end{aligned}$$

כעת נסכום:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i^2(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(-2\hat{f}(e_i)\right)^2 = 4 \sum_{i=1}^{n} \hat{f}^2(e_i)$$

אם נראה ש-$\frac{1}{4} \geq \sum_{i=1}^{n} \hat{f}^2(e_i)$ נקבל את הדרוש. נשתמש בתוצאות של הסעיף הקודם:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}^2(e_i) = \sum_{|S|=1} \hat{f}^2(S) \underset{\substack{\text{הוספנו מחוברים} \\ \text{אי שליליים}}}{\leq} \sum_{|S| \geq 1} \hat{f}^2(S) = \sum_{S \neq \emptyset} \hat{f}^2(S) = \frac{1}{4}$$

סעיף ג

החסמים לעיל הם הדוקים.

למשל, בהינתן n, נתבונן בפונקציה $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$ ברור שזו פונקציה מאוזנת והיא כמובן גם מונוטונית כי אם $x \prec y$ אז $f(x) = x_1 \leq y_1 = f(y)$. מתקיים

$$\begin{aligned}
I_1(f) &= \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x+e_1)\} = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : x_1 \neq x_1 + 1\} = 1 \\
\forall i > 1 \; I_i(f) &= \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x+e_1)\} = \frac{1}{2^n} \#\{x \in \{0,1\}^n : x_1 \neq x_1\} = 0
\end{aligned}$$

ולכן $\sum_{i=1}^{n} I_i^2(f) = 1 = \sum_{i=1}^{n} I_i(f)$.

שאלה 9

k-רוב היא פונקציה בוליאנית $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ המוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < k \\ 1, & |x| \ge k \end{cases}$$

סעיף א

נחשב את מקדמי הפורייה של פונקציית 2-רוב.

ראשית, נשים לב שיש טעם לדון רק במקרה ש-$n \ge 2$. אחרת הפונקציה היא פשוט $f \equiv 0$ ואז גם $\hat{f} \equiv 0$. לכן נניח מעתה ש-$n \ge 2$.

נוח להתבונן במרחב $\{0,1\}^n$ כאילו הוא מסודר מהקטן לגדול כאשר מסתכלים על האיברים כמספרים טבעיים בבסיס בינארי. למשל, עבור $n = 3,4$ הסדר הוא כזה:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

ו-

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

בהמשך נעשה חישובים קומבינטוריים שישתמשו במבנה הזה.

באופן כללי, מתקיים

$$\hat{f}(a) = \langle f, \chi_a \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)\chi_a(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)(-1)^{\langle a,x \rangle} = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)(-1)^{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}$$

לכן, עבור $a = (0, \dots, 0)$ מתקיים

$$\hat{f}(0, \dots, 0) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)(-1)^0 = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)$$

זה למעשה הממוצע של הפונקציה. נתבונן בטבלה של $\{0,1\}^n$. בחצי התחתון שלה כל האיברים מתחילים ב-1 ולכן פרט לווקטור הראשון $(1,0,\dots,0)$ לכל האיברים יש לפחות שתי אחדות. לכן הסכום של הפונקציה על החצי התחתון של הטבלה הוא $2^{n-1} - 1$. כעת יש לספור את האיברים שבחצי העליון של הטבלה. שם כל האיברים מתחילים ב-0 אלא שאם נתבונן במקום השני, שוב נגלה אותה החוקיות. נחלק את החצי העליון לשניים ונספור שם את האיברים הדרושים. כך מתקבל הסכום הבא:

$$2^n\hat{f}(0,\dots,0)=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)=\#\{x\in\{0,1\}^n:|x|\geq 2\}=$$
$$=(2^{n-1}-1)+(2^{n-2}-1)+\cdots+\left(2^{n-(n-1)}-1\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-i}-(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1}2^{i}-(n-1)=(2^n-2)-(n-1)=2^n-n-1$$

נחשב עוד כמה ערכים לדוגמה:

$$2^n\hat{f}(1,0,\dots,0)=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{\sum_{i=1}^n a_ix_i}=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{x_1}=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1=0}} f(x)-\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1=1}} f(x)=$$
$$=\left((2^{n-2}-1)+(2^{n-3}-1)+\cdots+\left(2^{n-(n-1)}-1\right)\right)-(2^{n-1}-1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-2}2^{i}-(n-2)-(2^{n-1}-1)=(2^{n-1}-2)-(n-2)-(2^{n-1}-1)=-n+1$$

$$2^n\hat{f}(1,1,0,\dots,0)=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{\sum_{i=1}^n a_ix_i}=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{x_1+x_2}=$$
$$=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1+x_2=0}} f(x)-\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1+x_2=1}} f(x)=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1=x_2}} f(x)-\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1\neq x_2}} f(x)=$$
$$=\left(\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1=x_2=1}} f(x)+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1=x_2=0}} f(x)\right)-\left(\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1=1\\x_2=0}} f(x)+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1=0\\x_2=1}} f(x)\right)=$$
$$=\left(2^{n-2}+\left((2^{n-3}-1)+\cdots+(2-1)\right)\right)-\left((2^{n-2}-1)+(2^{n-2}-1)\right)=$$
$$=\left(2^{n-2}+\sum_{i=1}^{n-3}2^{i}-(n-3)\right)-(2^{n-1}-2)=$$
$$=\left(2^{n-2}+(2^{n-2}-2)-(n-3)\right)-(2^{n-1}-2)=$$
$$=(2^{n-1}-n+1)-(2^{n-1}-2)=-n+3$$

$$2^n\hat{f}(1,1,1,0,\dots,0)=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{\sum_{i=1}^n a_ix_i}=\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{x_1+x_2+x_3}=$$
$$=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1+x_2+x_3=0}} f(x)-\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1+x_2+x_3=1}} f(x)=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1+x_2=x_3}} f(x)-\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n\\x_1+x_2\neq x_3}} f(x)=$$

$$= \left(\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+x_2=x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+x_2=x_3=0}} f(x) \right) - \left(\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+x_2=1 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+x_2=0 \\ x_3=1}} f(x) \right) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1\neq x_2 \\ x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2 \\ x_3=0}} f(x) \right) - \left(\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1\neq x_2 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2 \\ x_3=1}} f(x) \right) =$$

$$= \left(2 \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=0 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=1 \\ x_3=0}} f(x) \right)$$

$$- \left(2 \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=0}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=0 \\ x_3=1}} f(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=1 \\ x_3=1}} f(x) + \right) =$$

$$= \left(2\cdot 2^{n-3} + \left((2^{n-4}-1)+\cdots+(2-1)\right) + 2^{n-3}\right)$$
$$-\left(2\cdot(2^{n-3}-1)+(2^{n-3}-1)+2^{n-3}\right) =$$
$$= \left(2\cdot 2^{n-3}+(2^{n-3}-2)-(n-4)+2^{n-3}\right)-\left(5\cdot 2^{n-3}-3\right) =$$
$$= \left(4\cdot 2^{n-3}-n+2\right)-\left(4\cdot 2^{n-3}-3\right) = -n+5$$

נכליל ונקבל

$$2^n\hat{f}(1,\ldots,1,0,\ldots,0) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{\sum_{i=1}^n a_i x_i} =$$
$$= \sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)(-1)^{x_1+\cdots+x_k} = \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=0}} f(x) - \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=1}} f(x)$$

נותר לחשב את שני מחוברים אלה. לצורך כך נחשב ראשית את

$$\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ \forall 1\le i\le k\ x_i=\varepsilon_i}} f(x)$$

ברור שאם יש לפחות שתי קואורדינטות i,j שעבורן $\varepsilon_i=\varepsilon_j=1$ אז $\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ \forall 1\le i\le k\ x_i=\varepsilon_i}} f(x)=2^{n-k}$ שהרי יש בדיוק 2^{n-k} וקטורים שמקיימים $x_i=\varepsilon_i$ לכל $1\le k\le n$ ולכל אחד מהם $f(x)=1$.

אם יש בדיוק קואורדינטה אחת i שעבורה $\varepsilon_i=1$ אז אנחנו בעצם צריכים לספור את מספר הווקטורים שעבורם יש לפחות 1 אחד החל מהקואורדינטה ה-$k+1$. כמו בשיקולי הספירה שעשינו למעלה , מהסתכלות

במבנה המסודר שלנו של $\{0,1\}^n$, נובע שמספר הווקטורים האלה הוא $2^{n-k}-1$ (שוב, בכל הווקטורים בבלוק של 2^{n-k} הווקטורים האלה יש לפחות שתי אחדות פרט לווקטור הראשון שבו מופיע 1 רק בקואורדינטה ה-i), ואז מתקיים $\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ \forall 1\le i\le k\ x_i=\varepsilon_i}} f(x)=2^{n-k}-1$.

אם כל הקואורדינטות הן 0 אז שוב באופן דומה נובע ש-

$$\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ \forall 1\le i\le k\ x_i=\varepsilon_i}} f(x)=\left(2^{n-k-1}-1\right)+\cdots+(2-1)=2^{n-k}-2-(n-k-1)=2^{n-k}-n+k-1$$

כעת נוכל לחשב את מבוקשנו. נשים לב ש-$x_1+\cdots+x_k=0$ אמ"מ יש מספר זוגי של קואורדינטות שמקבלות 1. נסמן ב-k_e את המספר הזוגי הגדול ביותר כך ש-$k_e\le k$ וב-k_o את המספר האיזוגי הגדול ביותר המקיים $k_o\le k$. אזי,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=0}} f(x)&=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ \text{all coordinates} \\ \text{are } 0}} f(x)+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ 2\text{ coordinates} \\ \text{are } 1}} f(x)+\cdots+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ k_e\text{ coordinates} \\ \text{are } 1}} f(x)=\\ &=\left(2^{n-k}-n+k-1\right)+\binom{k}{2}\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=1 \\ x_3=\cdots=x_k=0}} f(x)+\cdots+\binom{k}{k_e}\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=\cdots=x_{k_e}=1 \\ x_{k_e+1}=\cdots=x_k=0}} f(x)=\\ &=\left(2^{n-k}-n+k-1\right)+\left(\binom{k}{2}+\binom{k}{4}+\cdots+\binom{k}{k_e}\right)\cdot 2^{n-k}\end{aligned}$$

כעת, $x_1+\cdots+x_k=1$ אמ"מ יש מספר איזוגי של קואורדינטות שמקבלות 1 ולכן באופן דומה:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=1}} f(x)&=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ \text{one coordinate} \\ \text{is } 1}} f(x)+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ 3\text{ coordinates} \\ \text{are } 1}} f(x)+\cdots+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ k_o\text{ coordinates} \\ \text{are } 1}} f(x)=\\ &=\left(2^{n-k}-1\right)+\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=x_3=1 \\ x_4=\cdots=x_k=0}} f(x)+\cdots+\binom{k}{k_o}\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=\cdots=x_{k_o}=1 \\ x_{k_o+1}=\cdots=x_k=0}} f(x)=\\ &=\left(2^{n-k}-1\right)+\left(\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{k_o}\right)\cdot 2^{n-k}\end{aligned}$$

נחסר ונקבל:

$$\begin{aligned}2^n\hat{f}(1,\ldots,1,0,\ldots,0)&=\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=0}} f(x)-\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=1}} f(x)=\\ &=\left(\left(2^{n-k}-n+k-1\right)+\left(\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k_e}\right)\cdot 2^{n-k}\right)\\ &\quad-\left(\left(2^{n-k}-1\right)+\left(\binom{k}{3}+\cdots+\binom{k}{k_o}\right)\cdot 2^{n-k}\right)=\\ &=(-n+k)+2^{n-k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}-\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{k}{i}=\end{aligned}$$

$$= (-n+k) - \left(\binom{k}{0} - \binom{k}{1}\right) = -n+k-1+k = -n+2k-1$$

כאשר המעבר הלפני האחרון נעשה בשימוש בזהות הקומבינטורית הידועה $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} = 0$.

לסיום, נשים לב שכל החישובים נעשו בהנחה שהקואורדינטות החיוביות הן הראשונות אבל למעשה אין חשיבות לסדר ובכל מקום שבו נכתב $x_1, \dots, x_k$ אפשר היה לכתוב $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ וכל החישובים היו זהים. לכן, ניתן לסכם:

$$\hat{f}(0,\dots,0) = \frac{2^n - n - 1}{2^n}$$
$$\hat{f}(x) = \frac{-n + 2|x| - 1}{2^n}$$

סעיף ב

נחשב את מקדמי פורייה של פונקציית 3-רוב. נסמן ב-f_k את פונקציית k-רוב. ונסמן ב-g_k את הפונקציה

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

אז מתקיים $f_{k+1}(x) = f_k(x) - g_k(x)$. שהרי,

- אם $|x| < k$ אז $f_k(x) - g_k(x) = 0 - 0 = 0$
- אם $|x| = k$ אז $f_k(x) - g_k(x) = 1 - 1 = 0$
- אם $|x| \geq k+1$ אז $f_k(x) - g_k(x) = 1 - 0 = 1$

מהלינאריות של טרנספורם פורייה, נובע ש-$\hat{f}_{k+1} = \hat{f}_k - \hat{g}_k$. ולכן, כדי למצוא את מקדמי פורייה של פונקציית 3-רוב, מספיק למצוא את מקדמי פורייה של $g = g_2$ שהיא פשוטה יותר.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| = 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

בדומה לקודם,

$$2^n\hat{g}(0,\dots,0) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} g(x) = \#\{x \in \{0,1\}^n : |x| = 2\} = \binom{n}{2}$$

בעזרת הניסיון הרב שצברנו בסעיף א, נאזור אומץ וישר נחשב תוצאה מוכללת:

$$2^n\hat{g}(1,\dots,1,0,\dots,0) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} g(x)(-1)^{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i} = \sum_{x\in\{0,1\}^n} g(x)(-1)^{\sum_{i=1}^{k} x_i} =$$
$$= \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\dots+x_k=0}} g(x) - \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\dots+x_k=1}} g(x)$$

שוב, $x_1 + \dots + x_k = 0$ אמ"מ יש מספר זוגי של קואורדינטות שמקבלות 1 ו-$x_1 + \dots + x_k = 1$ אמ"מ יש מספר איזוגי של קואורדינטות שמקבלות 1. לכן, אם נסמן k_e, k_o כמו בסעיף הקודם נקבל:

$$\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=0}} g(x) = \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ all\ \ coordinates \\ are\ \ 0}} g(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ 2\ coordinates \\ are\ \ 1}} g(x) + \cdots + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ k_e\ coordinates \\ are\ \ 1}} g(x) =$$

$$= \binom{k}{0} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=\cdots=x_k=0}} g(x) + \binom{k}{2} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=1 \\ x_3=\cdots=x_k=0}} g(x) + \cdots + \binom{k}{k_e} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=\cdots=x_{k_e}=1 \\ x_{k_e+1}=\cdots=x_k=0}} g(x) =$$

$$= \binom{k}{0}\binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}\binom{n-k}{0} + \binom{k}{4}\cdot 0 + \cdots + \binom{k}{k_e}\cdot 0 = \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}$$

$$\sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=1}} g(x) = \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ one\ \ coordinate \\ is\ 1}} g(x) + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ 3\ coordinates \\ are\ \ 1}} g(x) + \cdots + \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ k_o\ coordinates \\ are\ \ 1}} g(x) =$$

$$= \binom{k}{1} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=1 \\ x_2=\cdots=x_k=0}} g(x) + \binom{k}{3} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=x_2=x_3=1 \\ x_4=\cdots=x_k=0}} g(x) + \cdots + \binom{k}{k_o} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1=\cdots=x_{k_o}=1 \\ x_{k_o+1}=\cdots=x_k=0}} g(x) =$$

$$= \binom{k}{1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{3}\cdot 0 + \binom{k}{5}\cdot 0 + \cdots + \binom{k}{k_o}\cdot 0 = k(n-k)$$

נחסר ונקבל את הדרוש:

$$2^n \hat{g}(1, \dots ,1,0, \dots ,0) = \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=0}} g(x) - \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_1+\cdots+x_k=1}} g(x) =$$

$$= \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2} - k(n-k) = \frac{(n-2k)^2 - n}{2}$$

ולכן

$$\hat{g}(0, \dots ,0) = \frac{\binom{n}{2}}{2^n}$$

$$\hat{g}(x) = \frac{(n-2|x|)^2 - n}{2^{n+1}}$$

ולבסוף התוצאה המיוחלת:

$$\boxed{\hat{f}_3(x) = \hat{f}_2(x) - \hat{g}_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2^n - n - 1 - \binom{n}{2}}{2^n}, & |x| = 0 \\ \dfrac{-n + 2|x| - 1}{2^n} - \dfrac{(n-2|x|)^2 - n}{2^{n+1}}, & 0 < |x| < 2 \end{cases}}$$

אגב, בדקתי את התוצאות ב-MatLab והן אמורות להיות נכונות...

נספח

טענה: לכל $a,b\in\mathbb{R}$

$$\det\begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & a \end{pmatrix} = (a-b)^{n-1}\big((n-1)b+a\big)$$

הוכחה: ידוע שחיבור של שורות לשורות אחרות או חיבור עמודות לעמודות אחרות לא משנים את הדטרמיננטה. נחבר לשורה הראשונה את כל השורות האחרות ונקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b+a+(n-2)b & \dots & b+a+(n-2)b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

כעת נחסיר את העמודה הראשונה מכל שאר העמודות ונקבל את המטריצה

$$\begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & \dots & a-b \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עליונה ומאחר שהפעולות שביצענו משמרות דטרמיננטה נקבל את הדרוש :

$$\det\begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & \dots & a-b \end{pmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

☺