30.10.05
אינפי





שיעור אינפי ראשון. אומאי...

בקורס נדבר תחילה מהתשובה הגדולה שהתפתחה מאז תקופת היוונים. במלכה נדבר על המספרים הממשיים. הקורס יבדוק את הדברים הפונדמנטליים של דברים שכבר הכרנו קודם ונקדם אימונים לחלוק בדברים פורמליים.

בה קורס קשה אפל בפיק מקווה שנוכל לשנות את הקשיים הזה.

הקורס בנוי בעזרת אתר שנשמר באתר OWL.HUJI.AC.IL. שם תהיה אינפורמציה נוספת שקשורה לקורס. אתרנו מצמצם לשתמש מאוד באתר הזה שוטף.

אז נתחיל...

המספרים הממשיים

באופן תאומטי כולנו חושבים שיש הממש. כך אנשים שמאמינים לנו לעשות אפיזודות שונות. אנחנו מלמדים מתמטי שיתאר את האפיזודות ויאפשר לנו לעשות פעולות עם האפיזודות הללו.

יש הממש, אבל מה 3 תכונות שנתייחס אליהן כאקסיומות.

$\mathbb{R}$ המספרים הממשיים מקיימים את האקסיומות הבאות:

- מבנה אלגברי:

ב- $\mathbb{R}$ מוגדרות שתי פעולות: (פעולה כזה אומר שאפשר לקחת שני איברים מהקבוצה והתוצאה תהיה איזה איבר אחר) וכמו $(+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y)$ וכפל $(\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x\cdot y)$ שמקיימות:

1S $(a+b)+c = a+(b+c)$ לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אסוציאטיביות

2S $a+b = b+a$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$ קומוטטיביות

3S $a+0 = 0+a = a$ לכל $a\in\mathbb{R}$ קיום אפס

4S $a+(-a) = (-a)+a = 0$ לכל $a\in\mathbb{R}$ קיום נגדי

M1	$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$	אסוציאטיביות
M2	$\forall a,b \in \mathbb{R}$	$a\cdot b = b\cdot a$	קומוטטיביות
M3	$\forall a \in \mathbb{R}$	$a\cdot 1 = 1\cdot a = a$	קיום יחידה $1 \neq 0$
M4	$\forall a \in \mathbb{R}, a\neq 0$	$a\cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot a = 1$	קיום הופכי

$\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $a(b+c) = ab+ac$ דיסטריבוטיביות

מהיכן הבאנו של אוברים שמקיימים את האקסיומות נעלם תיקרא הקבוצה. שדה . יש לה אינ שדות. למשל המספרים הרציונליים.

משפט: יהיו $a,b,c \in \mathbb{R}$. אז לכל $a \neq 0$ קיים $x \in \mathbb{R}$ אחד ויחיד עם התכונה $c = ax+b$

בקצרה מה שהמשפט הזה אומר הוא שבשדה המספרים המשלימים אותנו ויש לפחות משוואה ליניארית (כזו שבה x הוא הנעלם). אלמלי כלל, הפיתרון הוא יחיד!

הוכחה: (יחידות) נניח ש- x ו- x' מקיימים ומקבלים $\begin{cases} c = ax+b \\ c = ax'+b \end{cases}$ צ"ל: $x = x'$.

מהמשוואות נוכל להסיק ש- $ax+b = ax'+b$. [כאן אנחנו משתמשים בהנחות לגיטימיות של סימטריה וטרנזיטיביות]

נפעיל על המשוואה את אקסיומות השדה

$ax+b = ax'+b$

(S4) $(ax+b)+(-b) = (ax'+b)+(-b)$

(S1) $ax+(b+(-b)) = ax'+(b+(-b))$

(S4) $ax+0 = ax'+0$

(S3) $ax = ax'$

(M4) $\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(ax')$

(M1) $(\frac{1}{a}\cdot a)x = (\frac{1}{a}\cdot a)x'$

(M4) $1\cdot x = 1\cdot x'$

(M3) $x = x'$ הוכחנו יחידות

$a=b \Rightarrow b=a$
$a=b, b=c \Rightarrow a=c$
$a=b \Rightarrow a+c=b+c$
$ac=bc$

(2)

(קיום) נבחר $x = \frac{1}{a}\left(c + (-b)\right)$ אך"כ את הפתרון שלה.

($a \neq 0$ כי $a \in \mathbb{R}$)

ניתן לתהות ולבדוק אחרי. ניתן לכפול ולבדוק אחרי.

בפיק אחרי לעיל בתרגיל למעלה ש $a\left(\frac{1}{a}(c+(-b))+b\right) = c$.

אחת (יחידות)

נשים ❤ שלא נשתמש ב- $2S$. התרגיל מאשקע יפיק

זהה הראשון נכון יהי לקבלת שאין אף"מ את $2S$.

מסקנות

(1) יחידות האפס. נוסח על המשוואה $x+b=b$. הרעיון

$x=0$ פותר את המשוואה לפי הראשון ונשו יחיד.

(2) יחידות הנגדי - נובע מהמשוואה $x+b=0 \Leftarrow x=-b$

(3) יחידות היחידה - לפי $ax=a$, $a \neq 0 \Leftarrow x=1$

(4) יחידות ההפכי - לפי $ax=1$, $a \neq 0 \Leftarrow x=\frac{1}{a}$

(5) לכל $y \in \mathbb{R}$ $y \cdot 0 = 0$. נבדוק משואה $y \cdot 0 = y \cdot 0 + x \Leftarrow x = 0$.

אבל אנחנו נטען שזה $x = y \cdot 0$ הוא הפיתרון.

$y \cdot 0 = (0+0) \cdot y = y \cdot 0 + y \cdot 0$

(3) ↓ פיסוק צדק ימין

אבל הפיתרון יהיה יחיד $\Leftarrow x = x - 0 = y \cdot 0$. אחת (ב)

הערה $0 = 0+0$ לא נתן משהו שבאפס הוא אפס. אבל

בשלב זה לא כתבה פה ש- 0 הוא היחיד של עצמו $0 = -0$

כלל $1 = 1 \cdot 1$ מלל תכונות היחידה אבל זה נובע מרק

ש- 1 הוא ההפכי של עצמו - $1 = \frac{1}{1}$.

זה מסביר למה אמרנו לא פרשים הפכי כפל $b = 0$. שפה.

מאז הכאה אין שום סיבה שנשתמש שנכפיל אותו באפס יחיד אחד.

המשך מסקנות

(6) $ax = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow x = 0$. לכל $a \neq 0$ קיים $\frac{1}{a}$.

$$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) x = \frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$$

↙ מסקנה 5

מכאן נובע כי אם $ab = 0$ אזי $a = 0$ או $b = 0$

* כלומר "או" אינקלוסיבי: כלומר יכול להיות ש $a = 0$ וגם $b = 0$.

פשוט כמו אמא של שלו - "או שתשתבשי יפה או שאני אכעס עליך".

כלומר אם התשובה יפה ונכונה אם הרמון שלו. בשאלה הבאה "שקרן".

"גם", אמר בלי, "אני אתנא יקראי")

(7) $a(-1) = -a$. לכל a כי $a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0 \cdot a = 0$

(8) חוק הסימנים $(-a)(-b) = ab$ $-ab = (-a)b$

מה אלגברה לדעת את כל הכללים האלה בעל פה? אם שתשוב על מה שתשוב

שבשבה אפשר לפתח אינטואיציות לגבי איזה מהם נכונים ואפס

את הכללים יותר בקלות!

סימון $a + (-b) =: a - b$

$a \cdot \frac{1}{b} =: \frac{a}{b}$ $b \neq 0$

מה מבדיל את המספרים הממשיים מסקנה כ שהם?

אקסיומות של סדר (מה שמאפשר לנו לסדר את המספרים על ישר)

① טריכוטומיה לכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים אחת ורק אחת מ-

$a > b$, $a = b$, $b > a$

② טרנזיטיביות $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

③ $b > a \Rightarrow b + c > a + c$. לכל $a, b, c \in \mathbb{R}$

④ $b > a \Rightarrow bc > ac$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ו- $c \in \mathbb{R}$ כך ש $c > 0$

③

הגדרה מספר $a \in \mathbb{R}$ יקרא **חיובי** אם $a > 0$.

נסמן ב- $\mathbb{P}$ את קבוצת המספרים החיוביים. $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$

הגדרה $a \leq b \iff a < b \vee a = b$

טענה יהיו $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. אם $a < b$ ו- $c < d$

אז $a+c < b+d$.

הוכחה
$$\left.\begin{array}{l} a < b \overset{(3)}{\Rightarrow} a+c < b+c \\ c < d \overset{(3)}{\Rightarrow} b+c < b+d \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} a+c < b+d$$

אסף ⑪

תזכורת (=אשכו שמרכה אשאיר מהוא עלמאידים):

לכל $a \in \mathbb{R}$ $\quad a > 0 \iff -a < 0$.

(מוריתים את כה ז' הוספה לשני הצדדים)

(ergo=) $\therefore a > 0 \iff 0 > -a$

יש מבנים. אפשר שהגיד $\mathbb{P}$ מקיים $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ (איזה כי)

שעליי, טוב קטנים מאפס.

יש קונבנציה שמספרים שליליים רושמים עם מינוס (-).

אבל מבחינה פורמלית המינוס רק אומר גידי. אפשר היה

להשתמש בקונבנציה אחרת. אל לנו להתבאס אם הדין

הוסוף יהיה -0...

משפט: (1) $1 > 0$ (שכך אומר שקבוצת החיוביים לא ריקה)

(2) $a,b \in \mathbb{P} \Rightarrow a+b \in \mathbb{P}$ } (קבוצת החיוביים סגורה
(3) $a,b \in \mathbb{P} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{P}$ } תחת חיבור וכפל)

הוכחה: (1) שכך: טריכוטומיה ומהעלך ש- $0 \neq 1$ (יחידות) מתקיימת

אחת וכך אחת מהאפשרויות הבאות: $1 > 0$, $0 > 1$.

בדרך השלילה, נניח ש- $0 > 1$ ונראה שנגיע לסתירה.

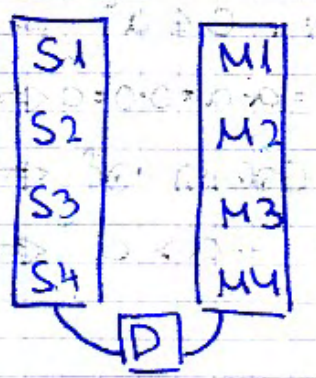
אם $0 > 1$, לפי הגדרת $-1 > 0$. לפי קונסיסטנטיות של

הנחה אף הכפלה במספר חיובי נקבל $1 = (-1)(-1) > (-1)0 = 0$

$\Rightarrow 1 > 0$ וכאות סתירה לטריכו שמיה.

⑤ 1.11.05
אוניפוטנטיות

מפקח הקדמה:



אנחנו מנסים לבנות תכונות של מספרים ראשיים... משל

יהי * קבוצה שמקיימת את אקסיומות ההיבור בקבוצת abelian group

קבוצה שמוגדרת בה שתי פעולות - כפל וחיבור - וה מקיימות את

האקסיומות ערוץ (אקסיומות השדה) בקבוצת שדה

קבוצה שמוגדר בה יחס וזמ"מ את אקסיומות הסדר

(טרנזיטיביות וטריכוטומיות) בקבוצת קבוצה עם סדר מלא:

במספרים הראשיים יש לפי הקונסטרוקציה. x^{-1}

שדה שמקיים את ע התכונות שרשומות למעלה בקבוצת שדה סדור

במפקח הקדמה ניגע במשפט שהוכחה. נמשיך.

משפט: (1) $\mathbb{P} \ni 1$

(2) $\mathbb{P} + \mathbb{P} \subset \mathbb{P}$

(3) $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \subset \mathbb{P}$

* סימון

$$A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\}$$

מה שאנחנו אומרים ב-(2) + (3) הוא שקבוצת הראשוניים סגורה תחת

חיבור וכפל.

הוכחה:

(1) הוכחנו בשיעור קודם בדיק השלילה.

(2) יהיו $a, b > 0$. עלינו למצוא קדמה שהוכחנו

$$a+b \in \mathbb{P} \iff \exists q \quad a+b > 0+0 = 0$$

(3) משל ⓜ $(\exists a, b > 0 \in \mathbb{P}$. שלא נמצא קדמה $a \cdot b > 0 \cdot 0 = 0$

הגדרה: יהי $a \in \mathbb{R}$. נגדיר $a^2 := a \cdot a$.

טענה: לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $a^2 \geq 0$. יתר על כן, $a^2 = 0 \iff a = 0$

הוכחה: אם $a = 0$ אז $a^2 = a \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$

אם $a > 0$ אז $a \cdot a > 0$ לפי הגדרת המשפט הקודם

אם $a < 0$ אז $-a > 0$ ולכן $a^2 = (-a)(-a) = (-a)^2 > 0$

(משפט קודם) (משיקולי קודם)

כך מוכיח את החלק הראשון של הטענה. כעת נוכיח את השקילות.

$(\Rightarrow)$ $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$.

$(\Leftarrow)$ $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ או $a = 0$ (לפי משפט קודם)

משל ☺

מסקנה: ב- $\mathbb{R}$ אין פתרון למשוואה $x^2 + 1 = 0$.

(ב- $\mathbb{R}$ או אפשר לפתור כל משוואה ריבועית. אפשר לפתור משוואות מעריכיות)

הוכחת המסקנה: יהי $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 + 0 = 1 > 0$.

$\Rightarrow x^2 + 1 > 0$. כלומר, שוויון לא יכול להתקיים $x^2 + 1 = 0$

משל ☺

בהמשך נלמד כמה מספרים אנחנו צריכים בשביל הקורס. המטרה היא שאתם תכירו את המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$. אתם יודעים את המספרים השלמים $\mathbb{Z}$. אתם יודעים את המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ ואתם את $\mathbb{R}$ הממשיים.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

אותנו נעניין בספרים. בהתחלה $\mathbb{R}$ ולכן אתחיל לתאר את תת הקבוצות.

הגדרה: $S \subset \mathbb{R}$ נקרא אינדוקטיבית אם הוא מקיים:

(1) $1 \in S$

(2) $x \in S \Rightarrow x + 1 \in S$

לפי הגדרה היא אם אינדוקטיבית מלבד.
אין שום מספר טבעי שמקיים את $\mathbb{N}$ בתוכו שהם הטבעות אינדוקטיביות.

משל (iii)

אינדוקטיביות $\Rightarrow$ $1+x$ שייך למעלה $\Rightarrow$ $1+x$ שייך לתוכו.

(ii) יהי x שייך לתוכו. אז x שייך לכל אחת מהקבוצות

(i) 1 שייך לכל אחת מהקבוצות $\Rightarrow$ 1 שייך לתוכו.

הוכחה:

הגדרה: חיתוך של כל האינדוקטיביות היא הקבוצה אינדוקטיבית שהיתוכ של כל הקבוצות האינדוקטיביות הוא קבוצה אינדוקטיבית.
משפט שבה הגדרה הבאה תהיה במשמעות לנו אלא אחת מהכוונה

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\substack{S \subseteq \mathbb{R} \\ S \text{ אינדוקטיבית}}} S$$

הגדרה: $\mathbb{N}$ היא הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר (.)

③ כל קבוצה סופית לא יכולה להיות אינדוקטיבית. בפרט הקבוצה הריקה $\emptyset$.

- $x \in \emptyset \Rightarrow 0 < x \Rightarrow 0 < 1+x \Rightarrow 1+x \in \emptyset$
- $1 \in \emptyset$ לפי אשפט קודם

② $\mathbb{N}$ היא אינדוקטיבית -

- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1+x \in \mathbb{R}$ בגלל סגירות ביחס לפעולת החיבור.
- $1 \in \mathbb{R}$ לפי הגדרה.

① $\mathbb{R}$ היא אינדוקטיבית.

תרגילים:

עקרון האינדוקציה

מסקנה: אם $S \subset \mathbb{N}$ אינדוקטיבית אז $S = \mathbb{N}$.

הוכחה: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ אפן $S \subset \mathbb{N}$ כי $\mathbb{N}$ היא חיתוך של כל הקבוצות האינדוקטיביות. $\Leftarrow S = \mathbb{N}$. משל ⓔ

(כלי הניסוח הפורמלי, ש-$\mathbb{N}$ היא האינדוקטיבית ה"מינימלית")

את עיקרון האינדוקציה אפשר לנסח גם בצורה אחרת.

תהי $P(n)$ נוסחה טענה עבור $n \in \mathbb{N}$. נניח כי:

(i) $P(1)$ נכונה

(ii) אם $P(n)$ נכונה אז $P(n+1)$ נכונה.

אז $P(n)$ נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.

אם יש פה בעיה? אותנו רוצים להוכיח אינסוף טענות אבל לא "יקח" אינסוף זמן. אינדוקציה כמו פומינו. הטענות עומדות את זמני השניה ואנחנו יודעים שאם אחת נופלת אז בטוח שאחריה נופלת. אם נפיל (נניח) את הטענה הראשונה אז כל הטענות "פלו (נכונו)".

הוכחה: תהי $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ נכונה}\} \subset \mathbb{N}$. שלי. צ"ל $S = \mathbb{N}$.

בלשון מוסיק שברור ש-S אינדוקטיבית:

(i) $1 \in S \iff P(1)$ נכונה לפי הגדרה. אבל $P(1)$ נכונה לפי ההנחה

לכן $1 \in S$.

(ii) $n \in S \Rightarrow P(n)$ נכונה לפי הגדרת S. לכן לפי ההנחה $P(n+1)$ נכונה.

$\Rightarrow n+1 \in S$. לפי הגדרת S.

$\Rightarrow S$ אינדוקטיבית. משל ⓜ

הקושי של האינדוקציה הוא בניסוח טענות אינסוף טענות מבית את...

דוגמה: $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(i) $1 = \frac{1}{1}(1+1)$ ✓

(ii) $1+n+n+\dots+2 = \frac{n}{2}(n+1) + (n+1) = (1+\frac{n}{2})(n+1) = \frac{2+n}{2}(n+1)$

הגדרה: (הקלסית) יהי $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} x^1 := x \\ x^{n+1} := x^n \cdot x \end{cases}$$

טענה: לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

הוכחה: באינדוקציה על n.

(i) $n=1$ $x^{1+m} = x \cdot x^m$ - כך נבנו חזקות (בהקלסית)

טענה $P(1)$ נכונה.

(ii) נניח $P(n)$ נכונה. נוכיח אחרות, לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$ (שימו לב שאנו n קבועה). נשים לב ש-$P(n+1)$ נכונה.

$$x^{(n+1)+m} = x^{1+(n+m)} = x \cdot x^{n+m} = x \cdot (x^n \cdot x^m) = (x \cdot x^n) \cdot x^m = x^{n+1} \cdot x^m$$

(בהגדרה) (אסוציאטיביות) (הנחת האינדוקציה) (בהגדרה)

מסקנה: לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n+m \in \mathbb{N}$. נניח שהוכחנו את זה.
אפשר להשתמש בה בקלות. $\Leftarrow n+m \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $\mathbb{N} = \mathbb{N} + \mathbb{N}$

אפס ☺

אי שוויון ברנולי: (Bernoulli)

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $h > -1$ $h \in \mathbb{R}$ מתקיים $(1+h)^n \geq 1 + nh$

הוכחה:

(i) $P(1)$ נכון $(1+h)^1 \geq 1 \cdot h + 1$ - כלה בוודאי נכון.

(ii) נניח ש-$P(n)$ נכון ונוכיח ש-$P(n+1)$ נכון אם כן.

א. שוויון ברנולי (Bernoulli):

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall h\in\mathbb{R},\ h>-1$$
$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

הוכחה (באינדוקציה):

$P(1)$ נכונה כי $(1+h)^1 = 1+1\cdot h$.

$P(n)$ נכונה $\Rightarrow$ $P(n+1)$ נכונה. ז"א:

$$(1+h)^n \geq (1+nh),\ 1+h>0 \Rightarrow$$
$$(1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$$

כי $nh^2\geq 0$.

ב. הוכח את האפיון לתכונת הארכימדיות של הטבעיים.

הערה: הצג את הטענות הבאות כך: $\mathbb{N} := I \cup \mathbb{N}$ אינדוקטיבית $\subset \mathbb{R}$ *

אפיון ארכימדי הוא טענה אם היא שייך לכל קבוצה אינדוקטיבית שמכילת ב-$\mathbb{R}$.

כאן כוונתנו שהטבעיים היו הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר ב-$\mathbb{R}$

(במובן שהיא תת הקבוצה).

משפט: ① $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists m\in\mathbb{N}\ m>n$

② $\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}$

③ $\mathbb{N}\cdot\mathbb{N}=\mathbb{N}$

④ לכל $n\in\mathbb{N}$ $n>1$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש-$n=1+m$. למשל $1-n\in\mathbb{N}$

⑤ לכל $n,w\in\mathbb{N}$ אם $w>n$ אז $\exists m\in\mathbb{N}\ n+m=w$

⑥ לכל $n\in\mathbb{N}$ לא ייתכן שקיים $w\in\mathbb{N}$ כך ש-$n<w<n+1$.

הוכחה:

① (באינדוקציה). אם $n=1$ בדרך ש-$2\geq n$. $\Rightarrow P(1)$ נכון.

נניח ש-$n\geq 2$ ונוכיח ש-$n+1<2$.

$2>0 \Rightarrow n+1\leq 1+1<2$.

④ فرض کنید $I = \{1\} \cup \{m+1 : m \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ باشد به‌طوری که:

(الف) $1 \in I$

(ب) اگر $n \in I$ دلخواه باشد، آنگاه $n+1 \in I$

ثابت کنید $I = \mathbb{N}$.

حل: فرض کنید $I \neq \mathbb{N}$. در این صورت $\mathbb{N} - I \neq \emptyset$. پس طبق اصل خوش‌ترتیبی، $\mathbb{N} - I$ دارای کوچک‌ترین عضو است. فرض کنید n کوچک‌ترین عضو $\mathbb{N} - I$ باشد. چون $1 \in I$ طبق (الف)، پس $n \neq 1$. بنابراین $n > 1$ و $n - 1 \in \mathbb{N}$. از طرفی $n - 1 < n$ و n کوچک‌ترین عضو $\mathbb{N} - I$ است، پس $n - 1 \notin \mathbb{N} - I$. یعنی $n - 1 \in I$. طبق (ب)، $(n-1)+1 = n \in I$. این با $n \notin I$ تناقض دارد. پس فرض خلف باطل است و $I = \mathbb{N}$.

⑤ ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n > 1$، n یا اول است یا حاصل‌ضرب اعداد اول.

حل: $P(n)$: n یا اول است یا حاصل‌ضرب اعداد اول.

پایه استقرا: $P(2)$ درست است زیرا 2 اول است.

فرض استقرا: فرض کنید $P(k)$ برای $2 \leq k \leq n$ درست باشد.

گام استقرا: ثابت می‌کنیم $P(n+1)$ درست است.

اگر $n+1$ اول باشد، حکم برقرار است. اگر $n+1$ اول نباشد، پس $n+1 = ab$ که $1 < a < n+1$ و $1 < b < n+1$. در این صورت $2 \leq a \leq n$ و $2 \leq b \leq n$. طبق فرض استقرا، a و b یا اول‌اند یا حاصل‌ضرب اعداد اول. پس $n+1 = ab$ حاصل‌ضرب اعداد اول است.

* اصل خوش‌ترتیبی: هر زیرمجموعه ناتهی از اعداد طبیعی دارای کوچک‌ترین عضو است.

⑥ ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک و تنها یک $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $m - 1 < n \leq m$.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم $m - (n-1) \in \mathbb{N}$. چون $n - 1 < m$ پس $m - (n-1) > 0$. همچنین $m - (n-1) = m - n + 1 < m + 1$. پس $m - (n-1) \in \mathbb{N}$.

حال ثابت می‌کنیم m یکتاست. فرض کنید $m_1 \neq m_2$ و هر دو در شرط صدق کنند. بدون کاستن از کلیت، $m_1 < m_2$. پس $m_2 - m_1 \geq 1$. از طرفی $n \leq m_1$ و $m_2 - 1 < n$، پس $m_2 - m_1 < 1$. این تناقض است.

⑦ ثابت کنید

הגדרה: תהי $S \subset \mathbb{R}$. איבר $m \in S$ יקרא אינפימום של S אם $\forall s \in S \; m \leq s$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $s \in S$ כך ש- $s < m + \varepsilon$.

דוגמה: אם האינפימום קיים אז הוא יחיד.

משפט: עקרון הסדר הטוב ב- $\mathbb{N}$

תהי $\emptyset \neq S \subset \mathbb{N}$ אז ל- S אבר מינימלי.

הוכחה:

אם $1 \in S$ אז 1 מינימלי ב-S (לפי הגדרת הקבוצה)

אחרת, תהי $I = \{n : n \in \mathbb{N}, \forall s \in S \; s > n\}$.

טענה: I אינדוקטיבית. ברור ש $1 \in I$.

נניח ש-$n \in I$ ונראה בדרך השלילה, שאם ל-S אין אבר מינימלי,

אז $n+1 \in I$. אחרת אזי $n+1 \notin I$ אז, קיים $s \in S$ כך ש-

$s \leq n+1$. ל-S אין אבר מינימלי $\Rightarrow$ קיים t ב-S כך ש-

$n+1 < t < s$ ובאותה סתירה נשלים הוכחת הטענה. $\Rightarrow I$ אינדוקטיבית.

$\mathbb{N} \subset I \Rightarrow \mathbb{N} = I$ אבל $S \cap I = \emptyset$ ובאותה סתירה נובעת הנדרשת

$S = \emptyset$.

משל (!!)

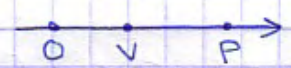
תרגיל את השפתי: עקרון הסדר הטוב שקול לעקרון האינדוקציה

www.notes-heaven.tk

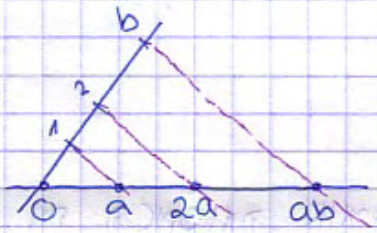
PARADOX { יום ה' הבא עומר לפקין (HERE) / BE THERE!

אקסיומת השלמות

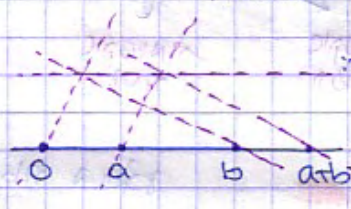
כל עד עכשיו עסקנו בתחום הרציונלי, זה סדר $\mathbb{Q}$ ורואינו את הפרדה $\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$. הכוונה פ אינו רציונלי שבין הקטעים $\mathbb{N}$. בקטעים א' אפשר למצוא פ שי מספרים, פומר אפשר גם להתוכיח עכ מהכרח תהיה קטגוריה. למשל כך יש לנו את השלמים $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup-\mathbb{N}$ את הטבעיים אפשר למצוא אבל אי אפשר למצוא, וגם מספרים שיש הפרי רפ. וכך בשבר כה יש לנו את כל הרציונלים $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\}$ הרציונלים הם שדה סדור. ניתן לראות מאיזה הרחבה $\mathbb{R}$ הרציונלים ותשמו שאלה הם ה"מספרים" הם מתלכדים בהבה בראשונה. ניתן ישר ונתאים לו את הקואורדינטות את המרחק בין O ל- P ניתן תמיד להביע במונחים של אורך המקטע OP.



יש הרבה בין נקודות למספרים ובכל מספר יש נקודה ואל אפשר לחסר ולהוסיף מאומה.

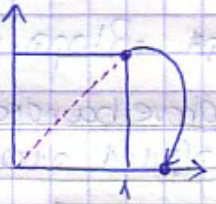


כפי:



ל' אנלוגיות:

אם היינו רוצים לעשות התוכנה קטנה בין הרציונלים למען הנקודות היינו נמצאים במצב הבא:



אוקי פאלכסון הזה בלי אבל הפעם לא הצלחנו !!!

משפט: לא קיים $q \in \mathbb{Q}$ שהתכונה $2 = q^2$.

הוכחה: בדרך השלילה נניח ש $q \in \mathbb{Q}$ ו- $2 = q^2$. ניתן לייצג את q כ- $\frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. נניח שבצמצמנו את q כשר m ו- n אין מחלקים משותפים (כלומר, בצמצמנו אותו עד הסוף).

$$2 = q^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow 2m^2 = n^2 \Rightarrow n \text{ זוגי} \Rightarrow n = 2l, \ l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2m^2 = (2l)^2 = 4l^2 \Rightarrow m^2 = 2l^2 \Rightarrow m \text{ זוגי} \Rightarrow m = 2k, \ k \in \mathbb{Z}$$

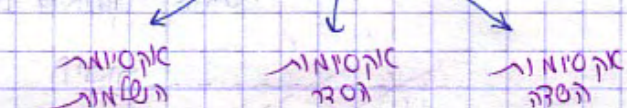
סתירה לכך ש- n ו- m אין מחלקים משותפים ☺ משפ"ל

המשפט הזה, על אף הפשטות שלו, ארז אותו מאוד חשוב. יש תורים בין המספרים הרציונליים! ולשניהם אותן מידות - q.

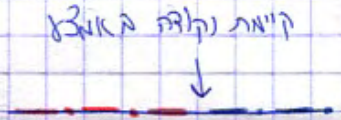
אקסיומת השלמות היות $L, U \subset \mathbb{R}$ קבוצות כך שמתקיים $U \geq L$ (במילים אחרות, לכל $u \in U$ ו- $l \in L$ מתקיים $u \geq l$). אז קיים $c \in \mathbb{R}$ שהתכונה $u \geq c \geq l$ לכל $u \in U$ ו- $l \in L$.

* מעתה התכונה הזאת אותנו נראה ש- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

אז מה אותנו יודעים על $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}$ הוא שדה סדור שלם



נסיון מה האקסיומה אומרת:



המחשה הגיוני הוא כאשר שתי הקבוצות קרובות מאוד אחת לשנייה.

הגדרה: קבוצה $S \subset \mathbb{R}$ תיקרא **חסומה מלמעלה** (above bounded) אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $M \geq x$ לכל $x \in S$. במקרה זה M יקרא **חסם מלמעלה** (upper band) של S.

דוגמאות:

- $S = \{0\}$. 0 הוא חסם מלמעלה של S.
- $\mathbb{R}$ (שלילי) חסומה מלמעלה למשל ע"י 0 וכל חסם מלמעלה.

אבל אפשר לעשות את זה ע"י סימטריה. נסתכל על הקבוצה הנ"ל.

הגדרה: אפשר לעשות את (4) ע"י תיקון של הכתבת הבעיה הפשוטה.

4) לפשט את הכתבת הבעיה (לא הכרח אותה.

3) לפשט את הפתרון

2) לפשט את הפתרון

1) לפשט את הקבוצה המתאימה

דוגמה:

$\mathbb{N} \subseteq S$ - כל מספר טבעי הוא חסם עליון של S. לא קיים חסם עליון קטן יותר.

$\mathbb{Z}$ - כל מספר שלם הוא חסם עליון של S. לא קיים חסם עליון קטן יותר.

$\emptyset$ - כל מספר ממשי הוא חסם עליון של $\emptyset$. זה נכון מהגדרה. הסיבה היחידה שזה לא נכון היא שקיים $x \in S$ שהוא לא חסם עליון של $\emptyset$.

אקסיומת השלמות:

לכל $x \in \mathbb{R}$ יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > x$.

- כל $\mathbb{R}$ שאינו $\mathbb{N}$ נקרא **אינפיניטסימלי**.

הגדרה: $s \in \mathbb{R}$ נקרא **חסם עליון** (supremum) של $S \subseteq \mathbb{R}$ אם:

least upper bound

(i) $\forall x \in S \quad x \leq s$

(ii) לכל $m \in \mathbb{R}$ אשר מקיים $\forall x \in S \quad x \leq m$ מתקיים $s \leq m$.

סימון:
$s = \sup(S) = \text{l.u.b}(S)$

באופן אחר, חסם עליון הוא נקודה שמינית לקבוצה S. אבל גם הנקודות הימינית הם לא מעניינים אותנו.

משפט: תכונת החסם העליון:

תהי $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ חלקית מלמעלה. אז, ל- S יש חסם עליון.

הוכחה:

תהי $\mathbb{N}$ הקבוצה של החסמים מלמעלה של S. $\mathbb{N} \neq \emptyset$ כי, לפי הנחה S חלקית מלמעלה. נשים לב ש- $\mathbb{N} \subseteq S$. לפי אקסיומת השלמות קיים $x \in \mathbb{R}$ כך שהכתבה $\forall n \in \mathbb{N}$. נסמן $c = \sup S$.

① $x \leq c \Rightarrow c$ חסם מלמעלה של S.

② $n \geq c \Rightarrow c$ הינו החסם מלמעלה הקטן ביותר (כי, אחרת הוא שלילי

לכל החסם מלמעלה של S). מש"ל ■

דוגמה: 1) מציאת את כל הקבוצה החלקית מלמעלה

2) מציאת אחד החסם מלמעלה

3) מציאת אחד החסם התחתון

4) מציאת את הכתבת הבעיה (לא הכרח אותה.

הערה: אפשר לעשות את (4) ע"י תיקון של הכתבת הבעיה הפשוטה. אבל אפשר לעשות את כל הנ"ל. סיטואציה. נסתכל על הקבוצה הנ"ל

יהי A חסם עליון ראשי של X. נראה שהוא יחיד בתכונת החסם העליון.

הוכחה:

- $\sup(X) \neq \sup(X)$ כאשר הוכחה לכך שהחסם העליון שלו קטן ממש. $\Rightarrow$ A
- $\sup(X) = \sup(X)$. כאשר הוכחה לכך שהחסם העליון שלו שייך לקבוצה. $\Rightarrow$ A

הערה: תכונת החסם העליון מבטיחה חסם עליון אבל לא אינפימום. ההבדל הוא שחסם עליון לא חייב להיות איבר בקבוצה שלקחנו ממנו אינפימום והוא איבר מ A ואיבר.

משפט: יחידות החסם העליון (לא משפיע מעניינים התיכוניים כי ברור ש סופרמום יש לו אחד)

הוכחה: יהיו s, s' שמקיימים את תכונת $\sup s$.

$s' \geq s$ עבור x כי הם חסמים מלמעלה.

$\sup s = s \Rightarrow s' \geq s$ (כי s' חסם מלמעלה של S)

בצורה דומה $s \geq s' \Rightarrow s = s'$. משל (!!)

זוכרים שאקסיומת השלמות אומרת את תכונת החסם העליון. אבל יש הבדל ההפוך נכון. (סתם כך) הקבוצות ~~[redacted]~~ (סתם כך) החסם העליון של ~~[redacted]~~. פה תכונת החסם העליון היחיד זה שהוא אבר ה X. ואנחנו לא יודעים אם $\sup$ הקבוצה הם חסמים מלמעלה, אבל אם כן אז הוא הקטן ביותר. ואנחנו יודעים של ~~[redacted]~~. $\Rightarrow$ החסם העליון (אבל כאמצע).

משפט: תהי $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלמעלה. אז הטענות הם אות שקולות:

(1) $X \sup = s$

(2) (i) $s \geq x$ $x \in X \forall$ (כלומר s הוא חסם מלמעלה)

(ii) אם $s > y$ אז, קיים $x \in X$ כך ש- $s \geq x > y$.

(3) (i) $s \geq x$ $x \in X \forall$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ קיים $x \in X$ אשר מקיים $x > s - \varepsilon$.

(צריך אינטואיציה שהאיברים ב- X יגיעו שרירותית קרוב ל- s.)

$\exists$ כאשר הטענה שמופיעה אז אנחנו יודעים שהיא נכונה.

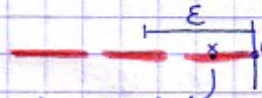
הוכחה:

(1 ⇐ 2) $\sup X = s \Leftarrow$ מהיות שלכל $x \in X$ מתקיים $x \le s$.

כלומר, יש חסם מלעיל שקיים $s > l$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים $x \le l$. לכן, מהיות $\sup X = s$, $l \ge s$. וזאת סתירה לכך ש-s הוא הסופרמום (חסם מלעיל הקטן ביותר).

(2 ⇐ 3) נניח בשלילה ש-(2 ii) ⇒ (3 ii). כלומר, $\exists \varepsilon > 0$ (למשל $\varepsilon = s - l$) מהיות ש-$s - \varepsilon < s - \varepsilon$. $\Rightarrow$ לפי (2 ii) קיים $x \in X$ כך ש-$s - \varepsilon < x \le s$.

$\Rightarrow \varepsilon > s - x$.



(2 ii) מהטיות שהוא קיים

(3 ⇐ 1) נניח בשלילה ש-s הוא הסופרמום אך הוא לא הקטן ביותר. כלומר, $\forall m \in \mathbb{R}$ כך ש-$m < s$ קיים $x \in X$ עבורו $m \le x$. נראה שקיים חסם מלעיל m כך ש-$m > s$. יהי $m = s + \varepsilon$ עבור (3 ii) קיים $x \in X$ כך ש-$m - s > x - s$. $\Rightarrow m < x$ אבל זאת סתירה לכך ש-m הוא חסם מלעיל של X.

מש"ל

הערה נוספת:

הדגמנו את השאיפה כך

ייתכן שהאיבר שהאינפ נקלעו. אז אין יכול להיות שזה מספר ואיך אחד נשנה...

יתכן ש"נפיל" את האינפ? אז $\inf = \sup$ אז הם מתקרבים

המשך הוכחת

משפט: יהיו $T \subseteq H \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות. $H \geq T$ אם התנאים הבאים שקולים:

(i) קיים מספר $c \in \mathbb{R}$ מהצורה $h \geq c \geq t$ עבור $t \in T$ ו- $h \in H$.

(ii) $\sup T = \inf H = s$

(iii) עבור $\varepsilon > 0$ קיים $t \in T$ ו- $h \in H$ כך ש- $t > h - \varepsilon$.

אלטרנטיבת השלמות אומרת שיש לקבוצות מספר אחד בין שתי הקבוצות הללו.

ובמשפט אחרון בלי מילים יש לך מספר אחד.

הערות:

מהנ"א הטענה $\emptyset \neq T$ מוגדרת מלמעלה (ε, ע"י איברי H) $\Rightarrow$ קיים $\sup T$

ו- $0 \neq H$ מוגדרת מלמטה (ε, ע"י איברי T) $\Rightarrow$ קיים $\inf H$

יתר על כן, לפי אקסיומת השלמות קיים $h \geq c \geq t$ עבור $t \in T$ ו- $h \in H$.

לכן $i \geq c \geq s \Rightarrow i \geq s$.

הוכחה:

(i $\Rightarrow$ ii) מדרך השלילה נניח ש- $i \neq s$. (מהנ"א הוכחה חייב להיות $i \geq s$.

אותנו כובים שהאי שוויון, כלומר סתם או שוויון חלש) $\Rightarrow i > s$. את נקבע

לפי ההגדרה $h \geq i > s \geq t$ ונראה סתירה לזה כי קיבלנו שני מספרים

שנמצאים בין T ל- H. $\Rightarrow i = s$

(ii $\Rightarrow$ iii) קיים $t \in T$ עם התכונה $s \geq t > s - \varepsilon/3$. קיים $h \in H$ עם התכונה

$t > h - \varepsilon/3$ (לפי אי-השוויון שם נסמן ε אחרת ואחר כך ε). ובפרט לפי ההגדרה

$i + \varepsilon/3 > h \geq i$ (לפי אי-השוויון שם נסמן ε אחרת ואחר כך ε).

$i = s$ $\Rightarrow$ $h - t < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$ (לפי תכונה א' השלושים וחלקות. אמצעים).

(iii $\Rightarrow$ i) נניח שקיימים c, c' עם התכונה $h \geq c' \geq c \geq t$ עבור $t \in T$ ו- $h \in H$.

אבל $h - t > c' - c$ בניגוד ε הנתון. (אולי היינו מוותרים $c' - c > \varepsilon > 0$ היינו

סותרים את תנאי ההנחה). משל 😊

משפט: יהי $y>0$. אז לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x\in\mathbb{R}$ $x>0$ יחיד עם התכונה $x^n = y$.

off the record: נסתכל על הציור:

נראה שבעל מספר שקטן מ-x אקבל מספר קטן מ-y.

וכל מספר גדול מ-x אקבל מספר גדול מ-y.

את משפחת טבעי, ניזכר שיש לכל מספר – אחיו בפי x. נראה שקיים בין שתי ההבדלות מספר אחד ויחיד אבוך נראה שהפונקציה שלנו מקיימת את הדרישה שלנו.

הוכחה:

יחידות: (תרגיל) לכל $n\in\mathbb{N}$, $a>b\geq 0 \iff a^n>b^n$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$ (באינדוקציה).

מכאן נובעת היחידות. יהיו $x>x'>0$ עם התכונה $x^n = y = (x')^n$.

אבל ראינו טרנזיטיביות כי $x>x' \Rightarrow x^n>(x')^n$ (לפי התרגיל).

קיום: נקח הפונקציה הבאה (בהכ) ניתן להניח ש-$y>1$. אחרת $y=1$ $\Rightarrow x=1$. אם $0<y<1$ $\Rightarrow \frac{1}{y}<1$. נניח ש-$z>0$ ומקיים $z^n = \frac{1}{y}$.

אזי, $y = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$ (בגלל הנוסחא הבינומית ש-$(ab)^n = a^n b^n$) ו- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

כלומר הפנו שמספיק לחפש רק עבור המקרה $y>1$.

ונגדיר $T = \{t\in\mathbb{R} : t\geq 0,\ t^n \leq y\}$ ו- $H = \{h\in\mathbb{R} : \exists n\ h^n \geq y\}$.

אותנו רוצים להשתמש בתכונה השלמות $\Rightarrow$ כדי לקבל שמתקיים התנאים של אקסיומת השלמות. $1\in T$ ו- $H\ni 1+y$ $\Rightarrow$ H ו-T לא ריקות.

טענה: קיים $c\in\mathbb{R}$ יחיד עם התכונה $h\geq c\geq t$.

הקיום הוא פונקציה וזאת של אקסיומת השלמות. נותנה היחידות. מספיק להראות $2^n \geq y \geq t^n$ לכל $t\in T$ $\Rightarrow$ $n\geq t$. $\Rightarrow$ $n>T$.

$\exists i,s$ $\sup T = \inf H = s$ (לפי הגדרה הסופרמום). נניח ש-$i\neq s$. אזי קיים c כך ש-$i>c>s\geq 0$ $\Rightarrow$ $c>0$. נתבונן ב-c^n. אם $y=c^n$ $\Rightarrow$ $H\cup T\ni c$ $\Rightarrow$ $s\geq c$, ובאותו סתירה כי $i>s$.

אם $c^n<y$ $\Rightarrow$ $T\ni c$ $\Rightarrow$ $s\geq c$ ובאותו סתירה.

אם $y < c^n$ $\Leftarrow$ $\exists c \in A$ $\Leftarrow$ $i \leq c$ ובאותו אופן.

$\Leftarrow$ יש איבר אחד ויחיד בין b ל- 1 שבין a ל- A.

יהי $i = x = s$ - אותו x שבאינפ.

עתה נוכיח: לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $h \in A$, $l \in B$ כך ש $\varepsilon > l^n - h^n$.

הוכחה: נזכור ש $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$

אם $b > a \geq 0$ נקבל $b^n - a^n > (b-a)\, n a^{n-1}$ (*)

(כי אחד ש $b > a$ - $b^{n-1} > a^{n-1}$ וסה"כ יש n איברים כאלה)

לפי (*) $l^n - h^n \leq n(l-h)\, l^{n-1}$. אותה נהניח ש- $h < l$ $\Leftarrow$

$n(l-h)\, l^{n-1} > n(l+y)\, l^{n-1}$.

לפי הנ"ל ש- $i = s$ (קיים מספר אחד ויחיד בין l לבין h) ולכן שיעור ה (iii) אנלאה היסודית (עיין לפחות $h \in A$ ו- $l \in B$ כך ש-

$l - h > \frac{\varepsilon}{n(l+y)^{n-1}}$ $\Leftarrow$ $\varepsilon > l^n - h^n$.

טענה: $y = x^n$. אזי $y > x^n$, נכון ש $x \leq l \Leftarrow x^n \leq l^n$

$\Leftarrow$ $n \geq y > x^n \leq l^n$ $\Leftarrow$ $l^n - h^n > x^n - y$ ובאותו סתירה.

מאותן אופן אם $y < x^n$, נכון ש $h \geq x$ $\Leftarrow$ $h^n \geq x^n > y - x^n$.

$\Leftarrow$ $l^n - h^n > y - x^n$. ובאותו סתירה. $\Leftarrow$ $x^n = y$.

משפט ☺

מה יש פה?

נראינו ש- $\mathbb{Q}$ אין שורש כזהו ל- 2. אבל ב- $\mathbb{R}$ לכל מספר חיובי אפשר להוכיח כל שורש ואותנו ניתאר ב- $\mathbb{R}$.

שאלה 4 (20 נקודות) **חלקי מספרים ממשיים**

סעיף א (10 נקודות) **תכונת הארכימדיות**

סעיף ב (10 נקודות) **צפיפות**

שאלה 5 (20 נקודות) **שורשים**

סעיף א (10 נקודות) **קיום שורשים**

סעיף ב (10 נקודות) **יחידות**

שאלה 6 (20 נקודות) **פונקציות רציפות**

סעיף א (10 נקודות) **משפט ערך הביניים**

סעיף ב (10 נקודות) **משפט ויירשטראס**

אינפי'

בפעם הקודמת הבנו כאשר שטענו שעבור המקרה ש- $m=1$ אז הכל מתקן. כעת אפשר להוכיח את המשפט (מצאתם בה שגיאה?):

משפט: הצפיפות של $\mathbb{Q}$ ב- $\mathbb{R}$



לכל $x<y$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{m}<y-x$ (כלומר $\exists n: nx>1 \iff \exists m: x>\frac{1}{m}$)

!

לפי (מסקנת) ארכימדיות, כי $n\in\mathbb{N}$ עם התכונה $(y-x)n>1$

($\iff nx>1+x$). לפי ארכימדיות $\{n\in\mathbb{N}: nx>1\}\neq\emptyset$ (כי

m מינימלי עם תכונה כו.

תיקון

אם $m=1$ אז $nx<1<1+x<ny$ $x<0$

$\downarrow$

כי $0<x$

ם שאר ההוכחה תקינה שמלמדים!

ערך מוחלט

$|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

הגדרה: לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$

יש פה מקרה לדוגמה: תמיד יש אוסף שם אינו עם שלילי, אבל הגדרה של מספר שלילי היא תמיד, אבל במקרה הזה האיבר הזה דווקא כן, לפי ההגדרה אותנו עתיד.

למשל, $|0|=0$, $|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|\pi-1|=-(\pi-1)=1-\pi$

תכונות:

① חיוביות $\forall x\in\mathbb{R}\quad |x|\geq 0$

② סימטריה $\forall x\in\mathbb{R}\quad |x|=|-x|$

הערה: לכל $x\in\mathbb{R}$ $\quad -|x|\leq x\leq |x|$. כפי שיוגן, אבל אם מישהו מספיק יש רבים 3 מקרים: $x=0$, $x<0$, $x>0$

משפט: לכל $r>0$ ו $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x|\le r \iff -r\le x\le r$

הוכחה: מה מקור ה- r? r לא כאיבר בקיום. הסיבה לכך היא יותר
* מה שיהיה ה- r מאוחר יותר, נאמר:

מאחר מרחוק r מהמקום האפשרי הקטן $x-r$.

אפשר לחתוך את הדיאגונל באמצע (לקבל פשטה קטע $[r,2r]$ ו

הוכחה:

$(\Rightarrow)$ $r\ge|x|\ge x\ge-|x|\ge -r$

$(\Leftarrow)$ $r\ge 0 \Rightarrow r\ge x=|x|$

$x<0 \Rightarrow -x=|x|\le r$ משל"ב

מסקנה: לכל $r>0$, $a\in\mathbb{R}$ $\quad r\ge|x-a|\iff a+r\ge x\ge a-r$

מכאן הדרך ניתן לסכם את הצפיפות של $\mathbb{Q}$ ב- $\mathbb{R}$ באופן הבא:

לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $b\in\mathbb{Q}$ כך ש- $|b-x|<\varepsilon$

נשים ❤ שראן אי השוויון הנכון תמיד וכל ההבדל שהוכחנו עליה אותנו
היו שם אי-שוויון מתמ. אבל אפשר לשנות את ε ההוכחות: לא שוויון
תמיד ויתקבלו אותן התכונות.

אי שוויון המשולש לכל $x,y\in\mathbb{R}$

הוכחה:

$$|x|+|y|\ge|x+y|$$

$$|x|\ge x\ge -|x| \quad -|y|\le y\le|y|$$

$$-(|x|+|y|)\le x+y\le(|x|+|y|) \iff |x+y|\le|x|+|y|$$

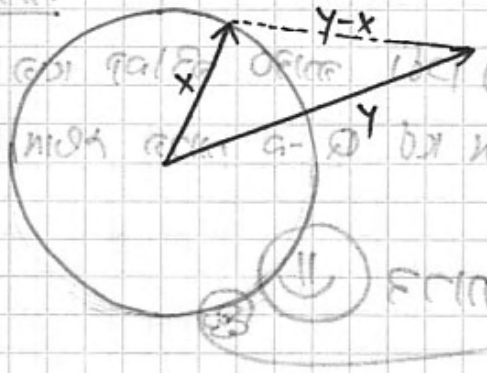
את' יש שוויון $\iff$ אם $x=0$ מתקיים $0=0$

כאן נן אם x ו- y שווי סימן.

משל"ב: $\quad -|x|\le x\le|x| \quad x\in\mathbb{R}$

$x=0$, $x>0$: ברור שקיים כזה מתקיים

מספרים רושמים את אי שוויון המשולש באופן הבא: $|y-t|+|t-j|\ge|y-j|$
המתוך בין ירושלים לתל אביב עובר דרך המתוך אירושלים לתל אביב ואתא עתיקה.



טענה:

$$|x-y| \geq |\,|x|-|y|\,|$$

הוכחה:

$$x+(y-x)=y$$

$$\Rightarrow |x|+|y-x| \geq |y|$$

$$\Leftarrow |y-x| \geq |y|-|x|$$

מצורה סימטרית מקבלים $|x-y| \geq |\,|x|-|y|\,|$

$$\Leftarrow |x-y| \geq |\,|x|-|y|\,|$$

מש"ל ☺

קבוצות Intervals

הגדרה: $I \subseteq \mathbb{R}$ (מספרי הממשי) תיקרא קבוצה קמורה אם:

$$a,b \in I \Rightarrow c \in I \quad , \quad a<c<b$$

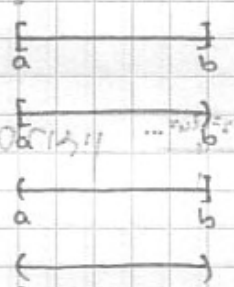
תזכורת:

בקבוצת הטבעיים שאין לנו תורים בהגדרות. ב הקבוצות שהצגנו
הקבוצה שייכת קרוצה. למשל $(0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ לא כוללת כי יש תור ב $\frac{1}{2}$.

קבוצות מהצורה: $a,b \in \mathbb{R}$ הגדרה: $a<b$ אז:

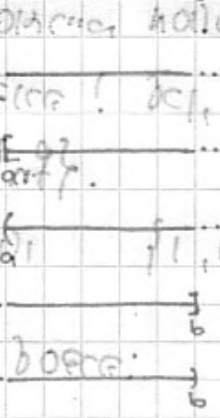
קבוצות סופיות:

$$\begin{cases} [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \end{cases}$$



קבוצות לא סופיות:

$$\begin{cases} \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \\ [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\ (a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\ (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\ (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \end{cases}$$



מסקנה: $I \subseteq \mathbb{R}$ כזו שאינה קבוצה.

II סדרות ב- $\mathbb{R}$

הגדרה: סדרה ב- $\mathbb{R}$ היא פונקציה מהצורה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(1) = f_1$
$f(2) = f_2$
$f(3) = f_3$
$\vdots$

כדי לציין סדרה f - נכתוב (f_n) או $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ או $(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots)$

דוגמאות:

1. סדרה קבועה $f_n \equiv c \in \mathbb{R}$ לכל $n \in \mathbb{N}$
(אקונום שהשתמש ב($\equiv$) כאשר הכיתוי אינו שווה להוכיח שכיתי משהו)

2. $h_n = \frac{1}{n}$ (h לה בשביל harmonic)

3. $\exists b \in \mathbb{R}$ $b_n = b$

4. נכון את מי שאשר מאבדן הסדרה הפורמלית של הסדרה:
$(Q_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ ואנו $\{Q_n\} = \{1, -1\}$
מאחר בין הסדרה (q_n) לבין תיאורי הסדרה $\{q_n\}$.
אבל בסדרה הסדר חשוב - לכן הסדרה שונה! אבל, לא שהתפקיד יש מספרים (איברים) שמופיעים סדרה בשוויוניות מסוימים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

הגדרה: $(Q_n) = (-1)^n$ נקבל 1 - (1-) לסירוגין

$(P_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots)$ p_n = המספר הראשוני ה-n-י

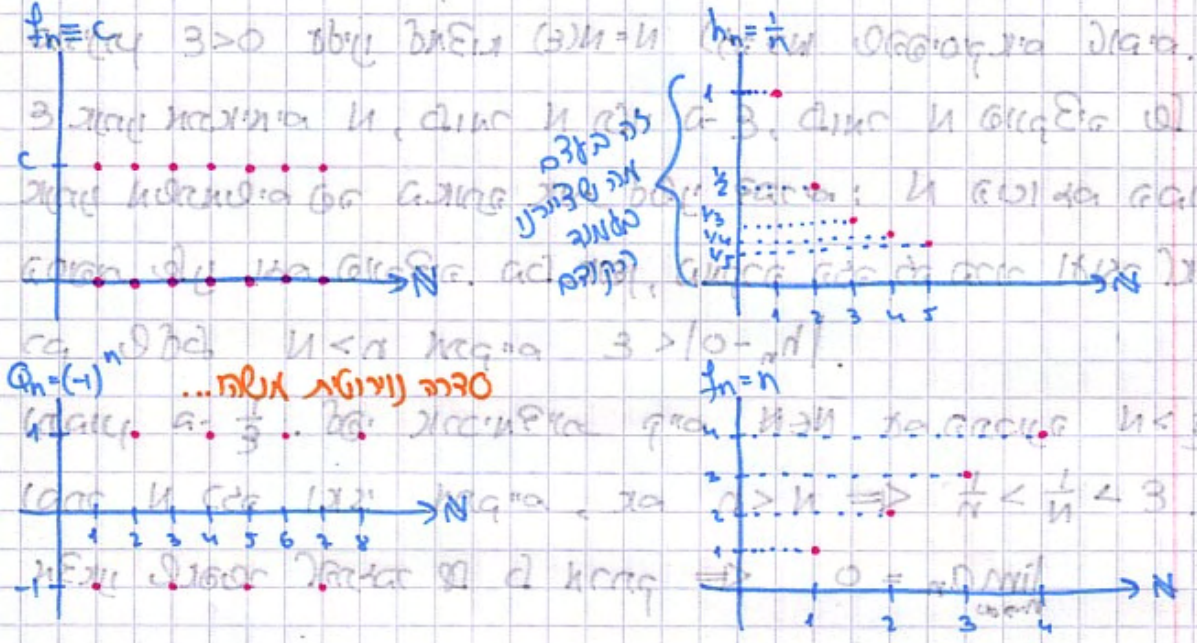
מרוב מה הכווני אבל אין לסדרה. אפיין כותבים לסדרה היינו מאוד אפורמלים...

אומרים שהסדרה מתכנסת ל-0 אם: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |a_n - 0| < \varepsilon$

הערה חשובה - המספר הטבעי N תלוי ב-ε שנתון לנו. ככל ש-ε קטן יותר, N גדול יותר.

מבחינים את הגרפים כאן שאנחנו רואים מתוך ההגדרה שלמעלה

תורים ואין רבוץ ⇐ אם הגרף מתאחר ולא מגיע





תהי (a_n) סדרה ב-$\mathbb{R}$. $l \in \mathbb{R}$ יקרא גבול של הסדרה (a_n) אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

במקרה כזה נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

כאן בלתי יתכן הסבר אינטואיטיבי

דוגמה:

בכל: $0 \xrightarrow{n\to\infty} h_n = \frac{1}{n}$

נוכיח מהגדרה שמתקיים אף אחד מסה בכל. בדיק נוכיח שמתקיים אף אחד.

נבחין $\exists \varepsilon > 0$ עליון לאיזה $\exists N = N(\varepsilon)$ כך שהפיסקאים טובים. עבור ε נתון אחראים N, כזאת N תלוי ב- ε, כזאת N פונקציה של ε.

אנחנו משתמשים פה באותה אות עליון דברים: N הוא מה הבחירה הספציפית שלנו. פונקציה. בכל אופן, מהקבה הזה מה בדיוק (אינטואיציה) כך שלכל $n > N$ מתקיים $|h_n - 0| < \varepsilon$.

נתבונן: $\varepsilon = \frac{1}{3}$. לפי ארכימדיות קיים $N \in \mathbb{N}$ שהתכונה $N > \frac{1}{\varepsilon}$ בפרט N כזה ואז, מתקיים, אם $n > N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

אבחנה שהוכחנו למעלה אף ε מתקיים $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} n = 0$

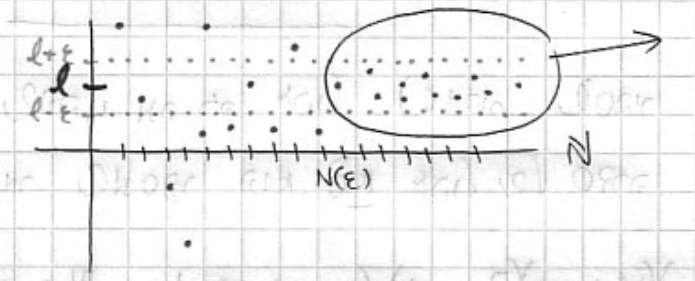
(19) 15.11.05

שעה נעלה

⑨ הגדרת הגבול

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\left(n>N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - l|<\varepsilon\right)$$

כלומר לכל ε שנבחר (גם אם הוא קטן מאוד) נוכל למצוא N טבעי כך שכל האיברים a_n עבורם $n>N$ נמצאים בין $l+\varepsilon$ ל- $l-\varepsilon$:



לכל ε מתאים N טבעי כזה שכל האיברים a_n עבורם $n>N$ נמצאים בין $l+\varepsilon$ ל- $l-\varepsilon$.

דוגמה: הוכח כי $\left(\frac{1}{2^n}\right)\to 0$.

הוכחה: נתון $\varepsilon>0$. יהי $N>\frac{1}{\varepsilon}$ (קיים ע"פ אכ"מ אם לא קיים)
אז: $n>N \Rightarrow |a_n-l| = \left|0-\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

יצא כמובן שמתקיים $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \frac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty} 0$.

דוגמה: $\left(\sqrt{n}-\sqrt{1+n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} 0$. באופן אינטואיטיבי, לפי הגדרה כי במספרים מאוד גדולים אין הבדל גדול בין $1+n$ ל- n, לכן כאשר אותו הדבר. אז אם נשווה שהם אותו דבר.

off the record:
$$|0-\sqrt{n}-\sqrt{1+n}| = \sqrt{n}-\sqrt{1+n} = \left(\sqrt{n}-\sqrt{1+n}\right)\frac{\sqrt{n}+\sqrt{1+n}}{\sqrt{n}+\sqrt{1+n}} = \frac{n-1-n}{\sqrt{n}+\sqrt{1+n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{1+n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \quad n>\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$$

כי $\sqrt{n}<\sqrt{1+n}$

$\sqrt{n}+\sqrt{n} < \sqrt{n}+\sqrt{1+n}$

$2\sqrt{n} = \sqrt{n}+\sqrt{n}$

זאת אומרת $a>b$

$\Downarrow$

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. (יקח $N \in \mathbb{N} > \left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)^2$. אז:

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\varepsilon > \frac{1}{2\sqrt{n}} \Leftarrow \sqrt{n} > \frac{3\varepsilon}{1} \Leftarrow n > N > \left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)^2$$

עניין שהבנו אחה לא: אבוץ: (תזכורת שסבירו שאנו). עתה נסיון אחר

לה חזור שאפשר הוא לבחור אבוץ של סדרה.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}): (n > N \wedge |a_n - l| \geq \varepsilon) \Leftrightarrow \lim a_n \neq l$$

- $\exists \varepsilon > 0$: אומר שקיים ε חיובי כך שלא משנה איזה N נבחר, תמיד נמצא n גדול מ-N שמרחקו מ-l גדול או שווה ל-ε.
- $\forall N \in \mathbb{N}$: מתייחס לכל N טבעי.
- $\exists n \in \mathbb{N}$: אומר שקיים n טבעי גדול מ-N שמרחקו מ-l גדול או שווה ל-ε.
- $n > N \wedge |a_n - l| \geq \varepsilon$: אומר שהתנאי $n > N$ וגם התנאי $|a_n - l| \geq \varepsilon$ מתקיימים יחד.

נוכיח עם ההגדרה החדשה הנ"ל כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \neq 1$.

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$. יהי $N \in \mathbb{N}$. $n = 2N \Rightarrow |a_n - 1| = |\frac{1}{n} - 1|$

אומנם $n > N \Leftarrow |\frac{1}{n} - 1| > \frac{1}{2}$ אבל אנחנו צריכים שיתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \neq 1$

* אינטואיטיבית: אפשר לומר שהמספרים ש-1 הכי קרובים, הם המספרים הגדולים N מתאימים כמו שאנחנו רוצים 0.

בניגוד לזה: כשלפי לה יש מי שמקבל תשובות ומי שלא מקבל תשובות.

ומי שמקבל תשובות אנחה מעצור למי שלא מקבל תשובות שיקבל תשובות ...

<u>אנלוגיה:</u> $a_n = (-1)^n$ אין גבול.

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$. יהי $\varepsilon = 1$.

לכל $N \in \mathbb{N}$ יהי n טבעי עם $n > N$. מהקרבה כזו יתקיים $n > N$ ואם $\varepsilon = 1 < 2 = |1 - (-1)^n| \Rightarrow$ זוגי הוא לא גבול.

במילים פשוטות אנחנו $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$.

אבל איך פורמלים אבול? למשל כאשר אנחנו שואלים שאין שבוע מכלל?

יהי $l \in \mathbb{R}$ ויהי $\varepsilon = \min\{|1-l|, |-1-l|\}$. אזי (כאשר l לא יכול להיות אבולץ) ε הוא המרחק המינימלי בין הקיומות ל-l. עכשיו אנחנו רוצים להתאבר - מרחק שקטן מ-ε! ובעצם זה אנחנו רוצים שאין שבוע להתאבר. וכאן מגיעה ההבחנה בין הנקודים $\{1, -1\} \neq l$ והשאר. שהרי, תיפוס $\varepsilon > 0$. ואז לכל $n \in \mathbb{N}$ $\exists |a_n - l| < \varepsilon$ עבור l שבוע להתאבר.

הגדרה סדרה (a_n) תיקרא <u>מתכנסת</u> אם קיים $l \in \mathbb{R}$ עם $\lim a_n = l$ אחרת נאמר ש-(a_n) מתבדרת.

הגדרה – נגיד ש-$P(n)$ נכונה תמיד אם היא נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$

– $P(n)$ נכונה כמעט תמיד אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$P(n)$ נכונה לכל $n > N$

– $P(n)$ <u>שכיחה</u> אם היא נכונה לאינסוף $n \in \mathbb{N}$. במילים אחרות לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ עם $P(n)$ נכונה.

<u>דוגמאות:</u> "$n \geq 1$" $= P(n)$ נכונה תמיד,

"$0 < n$" $= P(n)$ נכונה כמעט תמיד

"p is a prime" $= P(n)$ שכיחה.

ברור ש<u>כל</u> טענה נכונה תמיד היא טענה נכונה כמעט תמיד וכל טענה נכונה כמעט תמיד... היא טענה שכיחה.

תתי הקבוצות החשובים אפשר לרשום

$\lim a_n = l$ אם לכל $\varepsilon > 0$ הטענה $|a_n - l| < \varepsilon$ נכונה כמעט תמיד.

נאיך נראה שאשהו הוא גבול של סדרה?

קיים $\varepsilon>0$ כך שהטענה $|a_n-l|<\varepsilon$ שכיחה.

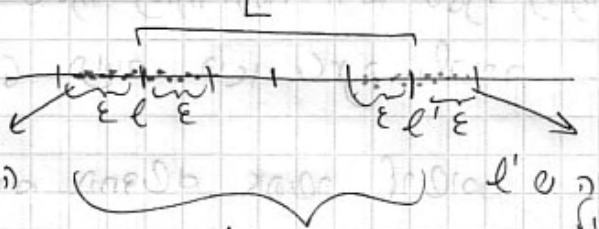
נשים לב שאם $P_1,\dots,P_n$ נכונים כמעט תמיד אז $P=P_1\wedge P_2\wedge\dots\wedge P_n$ נכונה כמעט תמיד.

הוכחה: P_i נכונה כמעט תמיד $\Leftarrow$ קיים $N_i\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_i$ $P_i(n)$ נכונה. נסמן את $\max(\{N_i\})=N$.
מכך אנו שלכל $n>N$ $P(n)$ נכונה. משל"ש

מושפט: (יחידות הגבול של סדרה מתכנסת) אם $a_n\to l$ וגם $a_n\to l'$. אזי $l=l'$.

הוכחה: נניח בשלילה $\varepsilon>0$ כך ש $\forall N\in\mathbb{N}$ $\exists n>N$ $|a_n-l|>\varepsilon$ וגם $|a_n-l'|>\varepsilon$.
לכל n כלשהו $2\varepsilon>|l'-a_n|+|a_n-l|\geq|l'-a_n+a_n-l|=|l'-l|$
אך שכתבנו פה הוא שלכל ε $|l'-l|<2\varepsilon$ $\Leftarrow$ $l=l'$.
משל"ש

תרגיל: אם $x\geq 0$ מתקיים לכל $\varepsilon>0$ $x<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $x=0$
כאשר הייתה הוכחה יפיפה. אבל אפשר אם נשלים. אניחים ש $l'\neq l$.
במ"כ $l'>l$. $\Leftarrow$ המתקן מינימום קטנים מרחק $\frac{1}{2}$ אפשר אם ניקח $\varepsilon<\frac{1}{2}$
רקע: נגלה ש l הוא הגבול כמעט תמיד כל הנקודות נופלות מרחק שקטן מ $\frac{1}{2}$ מהמרחק עד l'.
נגלה ש l' הוא הגבול אבל כמעט תמיד כל הנקודות נופלות במרחק שקטן מ $\frac{1}{2}$ מהמרחק עד l.
אמנם כאן סתירה כי אם $l'>l$ אנו יכולים שיש נקודות ש מוקות מ l ביותר מ $\frac{1}{2}$.



נק' שפיכה של l הוא הגבול
נק' שפיכה של l' הוא הגבול

סתירה!

משל"ש

(16)

הגדרה: $X \subseteq \mathbb{R}$ נקראת חסומה אם קיימים $M, m \in \mathbb{R}$ כך ש-
$m \leq x \leq M$ לכל $x \in X$.

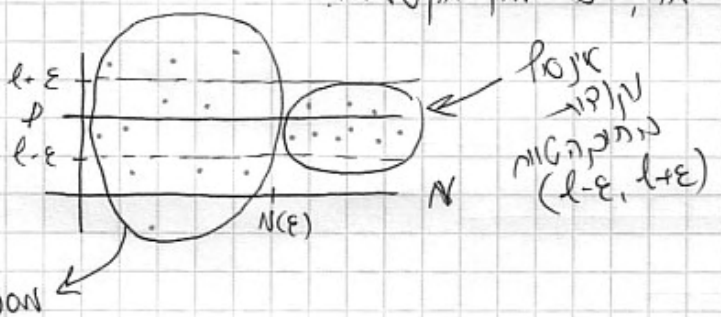
תנ"ד: תהי f שקלף: קיים $r > 0$ כך ש- $r > |x|$.

הגדרה: (a_n) תיקרא חסומה אם $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה.

הגדרה: נאמן כי ζ את הסדרות המתכנסות (converge)
נאמן כי $\mathcal{B}$ את קבוצת הסדרות החסומות (Bounded)
נאמן כי $\mathcal{N}$ את קבוצת הסדרות השואפות לאפס (null)

משפט: $(\mathcal{B} \supseteq \zeta)$ כל סדרה מתכנסת הינה חסומה.

אינטואיציה: סדרה מתכנסת a לכל ε החל מאיזשהו N-י
מתחם שכן $a+\varepsilon$ לכן $a-\varepsilon$. ומספר סופי של נקודות מחוץ
לקטע הלה. אבל לה מספר סופי של הנקודות שאו אולי יהיו
שבהרות יותר אפי', יש להן מקסימום.



הוכחה: נניח ש- $a_n \to a \in \mathbb{R}$ יהי $\varepsilon = 1$. אזי, $1 = \varepsilon > |a_n - a|$
כאשר תאיר מאוחר אותרת קיים $N = N(\varepsilon) = N$ כך שלכל $n > N$
$1 > |a_n - a| \iff a+1 > a_n > a-1$. יהי $M = \max(\{a+1, a_1, \ldots, a_N\})$
ויהי $m = \min(\{a-1, a_1, \ldots, a_N\})$ מהיר ש- $m \leq a_n \leq M$ לכל $n \in \mathbb{N}$

משל"ם (11)

מיום שלישי ראינו $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.
נשים ❤ שהכלי מאוכן התקין.

פעולות על סדרות

משפט: $\forall (a_n) \in \mathbb{R}$ סדרה כך ש $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$ ו- $\exists (b_n) \in \mathbb{R}$
אזי $\exists (a_n b_n)$

הוכחה: קיים $L \in \mathbb{R}$ כך שעבור n $|a_n| \geq L$.
אם $L = 0$ $\Rightarrow$ $|a_n| = 0$ $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\Rightarrow$ $a_n b_n \equiv 0$ $\Leftarrow$
$a_n b_n \xrightarrow{\text{משפט}} 0$
אחרת, לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n b_n - 0| < \varepsilon$ כאשר n גדול.
$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n| \cdot L < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$
$a_n \longrightarrow 0 \Rightarrow$ מהגדרה $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{L}$ $\exists N$ $\forall n > N$ $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon'$.
עבור $n > N$ אמיתי, סדרה כאשר n גדול
משפט ☺

דוגמה: $\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin n \longrightarrow 0$
$\frac{1}{n}$ מתכנס ל-0
$\sin n$ חסומה $-1 \leq \sin n \leq 1$

סדרות מתכנסות וסדר

משפט הסנדוויץ': יהיו $(a_n), (b_n), (c_n)$ סדרות אשר מקיימות $a_n \leq b_n \leq c_n$ כאשר n גדול. כמו כן $a_n \longrightarrow L$ וכן $c_n \longrightarrow L$
אזי $b_n \longrightarrow L$

הוכחה: מהנתון $\varepsilon>0$

$\exists_{N_1}$ כך ש $|a_n-\ell|<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $\ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon$

$\exists_{N_2}$ כך ש $|c_n-\ell|<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $\ell-\varepsilon<c_n<\ell+\varepsilon$

$\Leftarrow$ $\ell-\varepsilon\le a_n\le b_n\le c_n<\ell+\varepsilon$

$\Leftarrow$ $|b_n-\ell|<\varepsilon$ כאשר $n>N_3$. ומ"ש ☺

דוגמאות

(1) $\lim_{n\to\infty} q^n=0$ עבור $|q|<1$

הוכחה: נניח ראשית $0<q<1$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{q}>1$

$\Leftarrow$ קיים $h>0$ כך ש $\frac{1}{q}=1+h$. אזי:

$q^n=\left(\frac{1}{q}\right)^n=(1+h)^n\ge 1+nh$ $\Leftarrow$ $q^n\le\frac{1}{1+nh}$ >0.

מלגלגי

הצלחנו לסנדוויץ' את q^n בין 0 (שהתשובה שלנו כסדרה קבועה אפס) ובין סדרה $\frac{1}{1+nh}$ שאינטואיטיבית שואפת לאפס: ואם נרצה פורמלית:

$$0<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{h}\longrightarrow 0$$

(קבוע)

$\Leftarrow$ $q^n\longrightarrow 0$ אם $0<q<1$

אם $-1<q<0$ אז $|q^n|=|q|^n=q^n=|q^n|$. $|q|<1$

$\Leftarrow$ מסנדוויץ' $q^n\to 0$ אם עבור $-1<q<0$.

ומ"ש ☺

(2) באופן אפסיקים דומה $q^n \to 0$ אם $|q| < 1$

הוכחה:

נראה באינדוקציה ש $(1+h)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$.

נניח $0 < q < 1$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{q} > 1$ $\Rightarrow$ קיים h כך ש $\frac{1}{q} = 1+h$

$$q^n = \left(\frac{1}{q}\right)^n \geq \frac{n(n-1)h^2}{2} \Leftarrow 0 < q^n \leq \underbrace{\frac{2}{n(n-1)}}_{\text{גדול}} \underbrace{\frac{1}{h^2}}_{\text{גדול}}$$

$\to 0$

מש"ל (2)

(כיוון הפוך)

$|b|<1 \Rightarrow b^n \to 0$

נראה עבור $0<b<1$

עבור $b=0$ הטענה טריוויאלית.

עבור $0>b>-1$ לפי סנדוויץ' $-|b|^n \le b^n \le |b|^n$

סוף כיתה

הגדרה: יהי x. נגדיר $sgn(x) = \frac{x}{|x|}$.

למעשה אם $x>0$ נקבל $sgn(x) = \frac{x}{x} = 1$ ואם $x<0$ $sgn(x) = \frac{x}{-x} = -1$

בנוסף נגדיר $sgn(0) = 0$ לפעמים אומרים שזו אי-הגדרה.

מה יוצא?

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

משפט: $a_n \to a \neq 0$ אזי $sgn(a_n) = sgn(a)$ כאשר n גדול.

יתר על כן, אם $a_n \neq 0$ אזי $(\frac{1}{a_n})$ חסומה.

הוכחה: נניח $a>0$ יהי $\frac{a}{2}>\varepsilon>0$. קיים N כך שלכל $n>N$

מצד $|a_n - a| < \frac{a}{2} \Rightarrow a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$.

באופן דומה עבור $a<0$.

כלומר נניח שיש $a>0$. יהי N כמו קודם. אזי לכל $n>N$

$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{1}{a_n} < \frac{2}{a}$ כאשר n גדול

נראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\frac{1}{a_n} \le \max\left\{\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_N}\right\} \le \max\left\{\frac{2}{a}, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_N}\right\}$$

זהו חסם.

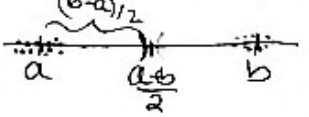
משפט (!!) לכל סדרה מתכנסת a_n חסומה.

אי שוויונים בין סדרות

משפט: נניח ש- $b_n \to b$ ו- $a_n \to a$ ומתקיים $a < b$

אזי $a_n < b_n$ כמעט תמיד.

אינטואיציה: מאיזשהו שלב כל הנקודות של a_n הן מצד b ומשלב מסוים כל הנקודות של a_n הן מצד a כך שלב מסוים a_n יהיו לפחות שהיות שהם "פראשו".



(לפי הקרוא הוכחה מפרק הקודם...)

הוכחה: יהי $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ יהי $N_1 \in \mathbb{N}$ אשר מקיים שלכל $n > N_1$ אז $b_n > b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$ ויהי $N_2 \in \mathbb{N}$ אשר מקיים שלכל $n > N_2$ אז $a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$.

יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$. אזי $n > N$ אז $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$

לפי טרנזיטיביות. משל"ש

משפט: $a_n \to a$ ו- $b_n \to b$ ומתקיים $a_n < b_n$ כמעט תמיד.

אזי $a \leq b$.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $a > b$. אזי לפי מסקנה לכך ש- $a_n < b_n$ כמעט תמיד. משל"ש

אריתמטיקה של גבולות



משפט: יהיו (a_n), (b_n) סדרות כך ש $a_n \to a$, $b_n \to b$.

א) $(a_n+b_n) \to a+b$

ב) $(a_n \cdot b_n) \to ab$

ג) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$ בתנאי שהגדרה ש- $b_n \neq 0$ ו- $b \neq 0$ תמיד?

הוכחה:

א) בהינתן $\varepsilon > 0$ יהיו $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש $n > N_1$ גורר $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

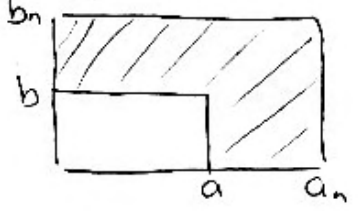
$N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש $n > N_2$ גורר $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$. אז לכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n+b_n-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a| + |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

א שווין המשולש

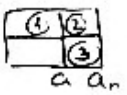
ב) נתחום קצת לפני. את $a_n b_n$ ו- ab אפשר לייצג ע"י מלבנים. נזכיר שהבדיקה שה מרוחק בין ab ל $a_n b_n$ קטן.



כאשר נזכיר שהבדיקה שהשטח המקווקו קטן מכל ε. נשים לב ש:

$$a_n b_n - ab = (a_n-a)(b_n-b) + a(b_n-b) + b(a_n-a)$$

כי הסתכלנו על השטח כ- 3 מלבנים לפי:



בשימוש בא' שווין המשולש ובדבר שצריך אותלס שם אפשר גם אפשר להציב את האותלסים ולקבל:

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n-a||b_n-b| + |a||b_n-b| + |b||a_n-a| \to 0$$

0 ↓

0 כי $a_n \to a$ — קבוע — 0 — קבוע — 0

0 — 0 — 0

0 — כאן — כמו סדרה קבועה — 0 בתור סדרה מתאפסת

אם בלקח נוכח לדרישות $x_n \to 0$ אזי $|x_n| \to 0$

הוכחה: ($\Leftarrow$) $x_n \to 0$ $\Leftarrow$ $|x_n| = |0 - x_n| \geq ||0| - |x_n||$

אומר אם $x_n \to 0$ אזי קיים N כך שלכל $n > N$ $|x_n| < 3$.

$\Rightarrow$ $|x_n| < 3$.

($\Leftarrow$) ברור ש $|x_n| \geq x_n \geq -|x_n|$ ואז לפי $x_n \to 0$ $\leftarrow 0$

תרשו נשתמש במשפט שכתוב שמתקיים $|ab - a_n b_n|$ הראנו
ש $\exists$ יהיה שואף לאפס ואם $\exists$ שאינו שואף לאפס.

$\Rightarrow$ $|ab - a_n b_n| \to 0$ $\Rightarrow$ $a_n b_n \to ab$

④ נסתכל ראשית במקרה הפרטי ש $a_n = 1$. לפי ההנחה
הראשונה של היום $|\frac{1}{b_n}| > 0$ $\exists$ $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.
מהגדרת $\exists > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|b_n - b| < \frac{|b|}{3}$
אזי לכל $n > N$ יתקיים

$$\exists = \frac{|b|}{3} \frac{|b|}{2} > |b_n - b| \frac{|b|}{2} \geq \frac{|b_n b|}{2} = \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right|$$

מהמקרה הקל, אפשר לכתוב $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ ולהשתמש
במה שהוכחנו לעיל. הכפל.

משפט ☺

הוכחות

⑤ יהי $a > 0$ אזי $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to 1$

מהיכן $a > 1$. אזי $a = 1$ אזי $a^{1/n} \equiv 1$ סדרה קבועה.

אזי $1 > a > 0$ נסתכל על $\frac{1}{a} > 1$. $\frac{1}{a} \to 1$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{1/n}}$

לכן $a^{\frac{1}{n}} \to 1$.

נניח אזי לכל $a > 1$. $\Rightarrow$ $a^{1/n} > 1$ $\Rightarrow$ קיים $h_n > 0$
כך ש $a^{1/n} = h_n + 1$. מספיק להראות $h_n \to 0$.

$a = (h_n + 1)^n \geq n h_n + 1$ (ברנולי) $\Rightarrow$ $0 < h_n \leq \frac{a-1}{n} \to 0$

לכן לפי סנדוויץ $h_n \to 0$.

ג) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.

$\sqrt[n]{n} = 1+h_n$ כך ש $h_n > 0$ קיים $\Leftarrow \sqrt[n]{n} \geq 1$

$\Leftarrow n = (1+h_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$ $\Leftarrow$ $0 \leq h_n^2 \leq \frac{2 \cdot n}{n(n-1)}$

(הוכחנו בתרגיל שבו הגדרנו את הפונקציה e^x)

$\Leftarrow h_n^2 \to 0 \Leftarrow h_n \to 0 \Leftarrow \sqrt[n]{n} \to 1$

(תרגיל: $x_n^2 \to 0 \iff x_n \to 0$)

משל"ד (ג)

סדרות מונוטוניות חסומות

הגדרה: (a_n) נקראת עולה אם $a_n \leq a_{n+1}$ לכל n

עולה ממש (או עולה במובן הקפדן) אם $a_n < a_{n+1}$ לכל n.

באופן דומה מגדירים סדרה יורדת וכן יורדת ממש.

(a_n) נקראת מונוטונית אם היא מקיימת אחת מהתכונות הנ"ל.

משפט: כל סדרה מונוטונית ומסומנת מתכנסת.

הוכחה: נניח ש a_n עולה ומסומנת מלמעלה. אז הקבוצה $\{a_n\}$ מסומנת מלמעלה $\Leftarrow$ קיים לה חסם עליון שנסמנו a.

נראה ש $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n\}$.

מהגדרת a כחסם עליון נובע כי: $\forall \varepsilon > 0$. מהגדרת a כ$\sup\{a_n\}$ קיים N כך ש $a - \varepsilon < a_N \leq a$. אם $n > N$

מאינדוקציה נובע שהסדרה $a \geq a_n \geq a_N > a - \varepsilon$

$\Leftarrow a + \varepsilon > a_n > a - \varepsilon \Leftarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

משל"ד (ב)

(27) 22.11.05

אינפי

משפט הקטעים הסגורים של Cantor : Nested Interval Property

תהי (a_n), (b_n) סדרות כך ש- $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} < b_n$ לכל n. כלומר $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$.

נניח $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ כך ש- $a \le a_n \le b_n \le b$ לכל n. אז $\forall x \in \mathbb{R}\ a \le x \le b \Leftrightarrow \forall n\ a_n \le x \le b_n$

אם $b_n - a_n \to 0$ אז $\exists! c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \le c \le b_n$

אינטואיציה: (a_n) עולה וחסומה - למשל ע"י b_1 שיודעים מכך ש- $a_n \le b_n$. $\Leftarrow$ יש לה גבול וגבוה שהוא a ה- a_n-ים מתקרבים משמאל. ובאופן אינטואיטיבי ה- b_n-ים מתקרבים מימין עד הנקודה b שהיא הגבול של (b_n) אז ה- a ו-b "אלה" והיו המועמדים שלנו לקטע.

ומהיכן ש- $b_n - a_n \to 0$ לא כמו אינטואיציה נשמעת ואין ניתן להדגיש שהקטעים שקולטים.

הערה: $\{a_n\} \le \{b_n\}$. מפורש לכל $m, l \in \mathbb{N}$ אם $n \ge m, l$. אזי $a_l \le b_m$. ועתה $a_n \le b_n \le b_m$ $\Leftarrow$ $a_n \le b_m$ לכל m, l.

הוכחה: (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה ע"י b_1. לכן היא מתכנסת ל- $a = \sup\{a_n\}$, כלומר $a_n \to a$.

(b_n) מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ע"י a_1. לכן היא מתכנסת ל- $b = \inf\{b_n\}$, כלומר $b_n \to b$.

$a_n \le b$ תמיד מאפיון אשכנזי לסופרמום $a \le b$. $\Leftarrow$ אם $a \le x \le b$ אז $a_n \le x \le b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

אם $b_n - a_n \to 0$ אזי $b = a$. אחרת לפי הטריכוטומיה $a < b$ $\Leftarrow$ $b - a > 0$ אזי תמיד היו מקבלים $b_n - a_n \ge b - a > 0$ וזה בניגוד לנתון. משל ☺

תרגיל לבית: למצוא על סדרה של קטעים פתוחים כך שהחיתוך יהיה ריק.

משפט $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

הסדרה (a_n) מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

מסומנת $e \equiv \lim_{n\to\infty} a_n$ (e של Euler)

הוכחה נשתמש באי-השוויון $b^r > a^r + r(b-a)b^{r-1}$, $0<a<b$, $r\in\mathbb{N}$.

נקח $a = 1+\frac{1}{n+1}$, $b = 1+\frac{1}{n}$ ו- $r = n+1$. אז:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + (n+1)\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$\Leftarrow a_n < a_{n+1}$ עבור כל $n\in\mathbb{N}$, כלומר a_n מונוטונית עולה חלק.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}\left(\frac{1}{n}\right)^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} =$$

↓ נכתוב ביטוי

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \ldots >$$

$$< 1 + 1 + 1\cdot\frac{1}{2!} + 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + \underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{n}\cdot\frac{1}{n!} >$$

(כי $1 > \left(1-\frac{k}{n}\right)$)

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

(שכן $n! > 2^{n-1}$ באינדוקציה)

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

(נוסחה לסכום טור הנדסי: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$)

$\Leftarrow$ הסדרה (a_n) חסומה כי $2 < a_n < 3$ לכל $n > 1$

$\Leftarrow$ קיים $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ ומתקיים $2 < e < 3$. $a_1 = 2$

☺ נמצא?

$b_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ הוכיחו שהסדרה $x>0$ אם

אם היא מונוטונית וחסומה אז כן מתכנסת. נוכיח, מה שיקרה

כאשר $b_n \longrightarrow e^x$. ולאחר מכן נראה שהפונקציה

האקספוננציאלית. אומר, ערכים מתקבלים e הינו

הגבול של הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ולאחר מכן הפונקציה הלוגריתמית שלו.

בהמשך נראה כי זהו הבסיס הטבעי היחיד שבו $\ln$ הוא הפונקציה הלוגריתמית הטבעית ולאחר מכן

מה לא יעשה בבסיס הלוגריתמים שנתונים כאן לקורס. יאללה!

לימה: יהי $x \in \mathbb{R}$ נגדיר $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ונסמן (a_n) מונוטונית

עולה כאשר n גדול מספיק. כלומר $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$.

טענה: יהיו $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש- $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ מתקיים

$$\text{GM}_{\text{הנדסי}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \text{AM}_{\text{חשבוני}}$$

ושוויון אמ"מ $a_1 = \ldots = a_n$. (ללא הוכחה כרגע).

הוכחת הלימה: כאשר $x=0$ הסדרה קבועה ולכן מתכנסת.

כאשר $x \neq 0$: יהי n גדול מספיק כך ש- $1+\frac{x}{n} > 0$.

ניקח $a_1 = \ldots = a_n = 1+\frac{x}{n}$ ו- $a_{n+1} = 1$. אז לפי $\text{AM} \geq \text{GM}$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{n(1+x/n)}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \prod_{i=1}^{n+1} a_i$$

$\Rightarrow$ הסדרה מונוטונית עולה כמעט תמיד.

את הסימון נכיר בימים אחר...

* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ חסומה כדרך (מרגילה) אותנו.

נצבור שוב ש- $a^r + r(b-a)b^{r-1} > b^r$. ונקח $b = 1+\frac{1}{n^2}$ ו- $a = 1$. $r = n$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + n\cdot\frac{1}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

(29) 24.11.05
איגף

אנחנו עוסקים מספרה $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

ההוכחה נראית לה:

רצינו להראות שהסדרה (c_n) חסומה.

נשתמש באי שוויון $b^r > a^r + (b-a)ra^{r-1}$, $r \in \mathbb{N}$, $0<a<b$

ערכים לאפיר $r = n$, $a = 1$, $b = 1+\frac{1}{2n}$ ונשתמש באי שוויון

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 1 + \frac{1}{2n} n \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n-1} < 1 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 2$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4 \Rightarrow c_{2n} < 4$$

מסדרה מונוטונית שם הגבולות הגדולים הזוגיים חסומים אינם כל האיברים חסומים.

(c_n) מונוטונית עולה $\Leftarrow c_{2n-1} < c_{2n} < 4$ לכל n!

ערכים (מסדרת עד) $x_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

אם $x < 0$ הסדרה מונוטונית עולה החל מאיבר מסוים

$x = 0$ הסדרה קבועה

$x > 0$ הסדרה מונוטונית עולה החל מאיבר מסוים

* $GM \le AM$: יהיו $a_1, \dots, a_r \ge 0$ אזי:

$a_1 \cdot a_2 \cdots a_r \le \left(\frac{a_1 + \dots + a_r}{r}\right)^r$ ושוויון אמ"מ $a_1 = \dots = a_r$

יהי $x > -n \Leftarrow 1+\frac{x}{n} > 0$ נרצה להראות ש- $x_{n+1} > x_n$.

נשתמש ב- (*) מהשוויון הזה: נגדיר $a_1 = 1$, $a_{n+1} = x_n$

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+(1+\frac{x}{n})n}{n+1}\right)^{n+1} > 1 \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a_{n+1}$$

$\Leftarrow$ הסדרה מונוטונית עולה אמ"מ כאשר x נתון, החל מאותו $n > -x$.

הגדרה: תהי (x_n) סדרה ותהי (n_k) סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים $\ldots > n_3 > n_2 > n_1$ אזי הסדרה $y_k = x_{n_k}$ תיקרא **סדרה חלקית** או **תת סדרה** של (x_n).

סימון (שלא לבוש): $(x_{n_k}) \triangleleft (x_n)$

דוגמה: נסתכל על הסדרה $(1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n\ \ldots)$

כל אחד:
$$\begin{cases} (1\ 3\ 6\ 7\ 9\ 10\ \ldots) \\ (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ \ldots\ 2n-1\ \ldots) \\ (2\ 4\ 6\ 8\ 9\ \ldots\ 2n\ \ldots) \end{cases}$$ תת סדרות

אולם: $(\ldots 3\ 5\ 2\ 4\ 1)$ **אינו** תת סדרה! אולי אותם האיברים, אולם בסדר שונה לא נחשב עדיין תת סדרה. כלומר מה שחשוב בהגדרה הוא ש**עולה ממש**.

לכן בחירת סדרות חלקיות בסדרת הטבעיים שונה מהותית מבחירת תת קבוצות: אנחנו יכולים לשמור את שכאן ולזרוק שלה מהסדר הוא לזרוק. כלומר כשאנו שומרים על סדר נשמרים את איברי הסדרה ואנחנו בלחצים את שכאן תוקעים אצבע בסדר ומשמיטים את האיבר.

משפט הירוניה (נשים הוסו הוכיחה כן לעיל)

תהי (x_n) סדרה ו- (x_{n_k}) סדרה חלקית אזי:

א) אם (x_n) חסומה אזי (x_{n_k}) חסומה

ב) אם $M \in (x_n)$ (מת אפסית) אזי $M \in (x_{n_k})$

ג) אם $\zeta \in (x_n)$ (מתכנסת) אזי $\zeta \in (x_{n_k})$

יתר על כן אם $x_n \to x$ אזי $x_{n_k} \to x$

ד) אם $M \in (x_n)$ (מונוטונית) אזי $M \in (x_{n_k})$

מאותו כיוון שלכל הפחות מאותה צורה.

הוכחה:

א) נסתכל על קבוצת האיברים של (x_n) וקבוצת האיברים של (x_{n_k}).
ברור ש- $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ $\Leftarrow$ אם (x_n) חסומה אזי גם (x_{n_k}).

ב) $x_n \to 0 \Leftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ $|x_n| < \varepsilon$.
יהי $\varepsilon > 0$ ויהי N כמו קודם. נבחר K כך ש- $n_K > N$. לזה אפשרי כי לאת סדרה עולה מאוס של טבעיים. $\Leftarrow$ לכל $k > K$ מתקיים $n_k > n_K > N$ ולכן $|x_{n_k}| < \varepsilon$.
(אושם של n_k עולה מאוס, ונשים ♡ ש $n_k \geq k$ לכל k)
נקבל $n_k > n_K \geq N$ ואז מהנתון ש $x_n \to 0$ נקבל $|x_{n_k}| < \varepsilon$.

27.11.05
תרגול יא'

משפט (הירושה - תכונות שלמות שנשמרות בירושה מהמרחב אל תת-המרחב)
(סוף ההוכחה)

(4) נניח בשלילה כי (x_n) מונוטונית עולה. את שאר המקרים מוכיחים באותו אופן.
מתקיים $x_m \leq x_n$ לכל $m \leq n$. לכן (x_n) עולה. $\Leftarrow$ $x_{n+1} > x_n$ לכל n.
(3) נניח ש- $x_n \to x$ $\Leftarrow$ נסתכל על הסדרה $(x - x_n)$. מהיות $0 \to x - x_n$
כלומר $(x - x_{n+1}) \to 0$ בא מתוך סדרה של $(x - x_n)$ ומכך (2) $0 \to x - x_{n+1}$.
כלומר נסתכל על $(x + (x - x_n))$. לפי אריתמטיקה של סדרות $x \to x_n$.

משפט ☺

אם יש לנו שתי סדרות שנשמרות את ההתכנסות שלהן ביחס לעולה.
כלומר אם x_n עולה ו- y_n עולה אז גם עולה. נסתכל על:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{N} \xrightarrow{n} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$$

$$i \longmapsto n_i$$

$$x_{n_n} \longmapsto n \longmapsto x$$

$$x_{n_{n_k}} \longmapsto n_{n_k} \longmapsto n_k \longmapsto f$$

אז אם נוותן כיוון מה קורה?

סדרה תלוית הסדרה (של סדרה) היא סדרה (של סדרה המקורית)

הגדרה: תהי (x_n) סדרה. נגדיר לכל m ש- $X^{(m)} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots) = (x_n)_{n=m+1}^{\infty}$

נאמר ש- (x_n) סדרה של סדרה (x_n) ואשר $x_n^{(m)} = x_{n+m}$ כלומר $x_{n+m} = x_n^{(m)}$

$\Leftarrow$ $\lim_{m\to\infty} x_{n+m}^{(m)} = x_n$ לכל n, בתנאי שכל סדרה של סדרה מהסדרה שמתקבלת
משמרים אנחנו אומרים שזו האיברים ההתחלתיים. אלה שאנחנו לוקחים באינטואיציה.
ההתכנסות נשארת אוטומטית.

משפט: לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

הוכחה: נאמר x_n "יקירו" של x_m אם $x_n \geq x_m$ לכל $m \leq n$ (כלומר אם x_n
מתחת לכל מה שיש לו אחריו אך אחריו אולי יש עוד). יש שני מקרים:
מקרה א': יש אינסוף יקירים. נבחר יקיר x_{n_1} כלשהו. נבחר יקיר x_{n_2} כלשהו שנמצא
אחרי x_{n_1} וכך הלאה. $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \dots \geq x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}} \geq \dots$ כך ש- $n_1 < n_2 < \dots$
מקרה ב': יש סופית הרבה יקירים. נבחר n_1 גדול מכל היקירים. $\forall m \in \mathbb{N}$ יש $n > n_1$
כך ש- $x_n < x_{n_1}$. נבחר n_2 כזה. $\forall m \in \mathbb{N}$ יש $n > n_2$ כך ש- $x_n < x_{n_2}$.
וכך הלאה. $x_{n_1} > x_{n_2} > \dots$ ו- $n_1 < n_2 < \dots$ ו- $x_{n_k} > x_{n_{k+1}}$ לכל k.

בין $\frac{1}{n}$ ל- $\frac{1}{n+1}$.
שהרי אין שום a_n קרוב ל- x כדי
קיים K כך שלכל $n>K$ מתקיים $|x-\frac{1}{n}|<\varepsilon$
שבה נמצאת $x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}$ שמוכלת $\varepsilon>0$ לכן
קיבלנו n יחיד כך ש- $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$.
נסתכל שוב על x שבנינו לעיל!
שאר מהצורה $\frac{1}{n}$?
הרעיון יכול לעזור לנו, אבל,
לא כל נקודת הצטברות של קבוצה
היא איבר בקבוצה.

נסתכל על הסדרה $\frac{1}{n}$ ... $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ 1
נסמן ב- S את קבוצת הגבולות החלקיים שלה.
$S=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$.

דוגמאות: $a_n=(-1)^n$ $S=\{1,-1\}$
$b_n=\frac{1}{n}$ $S=\{0\}$ - סדרה יכולה של סדרה מתכנסת
מתכנסת לאחד ואחד, אך לא ירצים
שהיו אבנים חלקיים שונים.

$\exists (u_n)\subseteq(x_n)$ ת"ד $\lim_{n\to\infty} u_n=p \iff \forall (x_n)\subseteq A\setminus\{a\}: x_n\to a \Rightarrow \exists (u_n)\subseteq(x_n): u_n\to p$

$S=\{p\in\mathbb{R}: \exists (x_{n_k})\subseteq(x_n) \wedge x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} p\} \neq \emptyset$ מקבץ חח"ע
↑ subsequence ↑ partial

קבוצות חלקיים

הוא מתכנס. משפט (!!)
הוכחה: שכל המשפט הקודם מספיק לבחור את סדרה מונוטונית שהוא תסומה
לכן סדרה תסומה יש לה סדרה מתכנסת.
משפט בולצאנו-ויירשטראוס Bolzano-Weierstrass

$(x_{n_k})\Rightarrow$ מתכנסת (נשלכה כי אחרת x_{n_k} היה סופי) $x_{n_{k+1}}>x_{n_k}$ מונוטונית עולה. משפט (!!)
אחרת, יש מספר סופי של איברים. לכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ x_n אינו
שבר מהצורה $x_{n_1}>x_{n_2}$ ולכן $n_1<n_2$ ויהי $n_1>N$ נמצא בהכרח קודם לו.
יהי $x_1>x_2>\dots>x_n$ כך ש- $x_{n_1}>x_{n_2}>\dots>x_{n_k}$. יהי $x_{n_{k+1}}>x_{n_k}$ כך ש-

משפט: $S \ni d$ $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ $\quad d+\varepsilon > x_n > d-\varepsilon$ לאינסוף n.

הוכחה:

($\Rightarrow$) $S \ni d \Rightarrow$ קיימת $(x_n) \triangleright (x_{n_k})$ כך ש $x_{n_k} \xrightarrow{\text{מהיות}} d$. בהינתן $\varepsilon > 0$ יהי $k \in \mathbb{N}$ שעבורו מתקיים $d+\varepsilon > x_{n_k} > d-\varepsilon$ לכל $k > K$. לכן $d+\varepsilon > x_n > d-\varepsilon$ באופן שכיח (אינסוף פעמים). שהרי, מהגדרת N, יהי $k > \max\{N, K\}$

$\Leftarrow n_k \geq k$ (כי n_k עולה ממש) $\Leftarrow n_k > K$ ו־ $n_k > N \Leftarrow$

$d+\varepsilon > x_{n_k} > d-\varepsilon$.

($\Leftarrow$) נניח $d+\varepsilon > x_n > d-\varepsilon$ באופן שכיח לכל ε. יהי n_1 כך ש־ $d+1 > x_{n_1} > d-1$ (לאור תכונה שכיחה את קיים לפחות אחד ואותו אינטגרל n, כך שמתקיים $n_2 > n_1$ כך ש־ $d+\frac{1}{2} > x_{n_2} > d-\frac{1}{2}$. התכונה נכונה אינסוף פעמים לכל ε. בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$. התכונה שכיחה, לפחות פעם אחת עבור אינטגרל n, כך שמתקיים $n_2 > n_1$ [כבה נמשיך כבנוי את הסדרה n_k כך ש $d+\frac{1}{k} > x_{n_k} > d-\frac{1}{k}$ ואכן נקבל לפי משפט ה־ $d \leftarrow x_{n_k}$].

נבנה בצורה רקורסיבית. נניח שכבר מצאנו $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ כך ש $d+\frac{1}{i} > x_{n_i} > d-\frac{1}{i}$ לכל $i = 1, \dots, k$. יהי $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$. התכונה $d+\frac{1}{k+1} > x_n > d-\frac{1}{k+1}$ שכיחה. לכן ניתן לבחור $n_{k+1} > n_k$ כך ש־ $d+\frac{1}{k+1} > x_{n_{k+1}} > d-\frac{1}{k+1}$ לכן נקבל סדרה חלקית (x_{n_k}) שמקיימת $d+\frac{1}{k} > x_{n_k} > d-\frac{1}{k}$ לפי משפט הסנדוויץ' $x_{n_k} \longrightarrow d$

כאשר $n \longrightarrow \infty$ $\quad$ משל"ל

$d \in (x_n) \Leftrightarrow$ קיימים $M, m \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\{x_n\} \cap [m, M] \neq \emptyset$. כלומר S סגור חסום $\Leftarrow$ יש ל־ S איבר מינימום ואיבר מקסימום. $M = \sup S \in S$ ו־ $m = \inf S \in S$.

$\Leftarrow [m, M] \subset S$. יהי l כלשהו כך ש $l \in [m, M]$, כלומר l הוא האי־שוויון של S ו־ m הוא המקסימום של S מאחר.

הגבול העליון של x_n $\quad \overline{\lim} x_n = \limsup x_n = x^* = M$

הגבול התחתון של x_n $\quad \underline{\lim} x_n = \liminf x_n = x_* = l$

משפט: $S \supset \{m, l\}$

למה: תהי $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלמעלה (מלמטה). אזי קיימת סדרה ב-X (x_n) כך ש- $x_n \longrightarrow \sup X$ ($x_n \longrightarrow \inf X$).
$X \supseteq \{x_n\}$

הוכחה: (לא)

הוכחת המשפט: נניח ש- $S \in \mathbb{R}$. תהי (p_n) ב-S כך ש $p_n \longrightarrow l$
(מק"ש שכל תת"ס שלה מתכנס ל-l). יהי $\varepsilon > 0$ כך ש $l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
נפעל כך: נבנה $n_1 < n_2 < \dots$ כך ש $p_i - \frac{1}{i} < x_{n_i} < p_i + \frac{1}{i}$ לכל $i = 1, \dots, k$.
נתבונן ב $p_{k+1} - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} < p_{k+1} + \frac{1}{k+1}$ שניתנה $\Leftarrow$ ניתן למצוא $n_{k+1} > n_k$ עם
נתבונן בכדור (x_{n_k}) $B_{\frac{1}{k}}(x_0)$ כך ש $p_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < p_k + \frac{1}{k}$.
$\Leftarrow$ קיבלנו
שם שאיזושהי תת"ס שלו מתכנסת ל $x_{n_k} \longrightarrow l$
בנוסף נתון $S \ni n$. משפט ☺

ניתנה בניתון של נתון ש $x_{n_k} \longrightarrow x$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ (|x_n - x| < \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\exists \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \ |x_{n_k} - x| < \varepsilon \quad ((x_n) \triangleright (x_{n_k}))$$

29.11.05
שיעור:

נסתכל על המבחן הבא

1	2	3	4	...
1/2	2/2	3/2	4/2	
1/3	2/3	3/3	4/3	
1/4	2/4	3/4	4/4	
:				

מישהו בכיתה יכול לרשום את כל המספרים הרציונליים החיוביים.
ובכל זאת, יש מספרים רציונליים יותר מאשר מספרים טבעיים.
נוכיח את זה בעזרת מושג הסדרה. נגדיר מהי סדרה, מהי סדרה מתכנסת, ומהי סדרה מתבדרת.
אנו נוכיח שלכל סדרה מתכנסת יש גבול יחיד.
נוכיח שכל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.
נגדיר מהי סדרה חלקית ונוכיח שלכל סדרה יש סדרה חלקית מונוטונית.
נוכיח את משפט בולצאנו-ויירשטראס.
נגדיר סדרת קושי ונוכיח שסדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

הגדרה: סדרה היא פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
נסמן $a_n = f(n)$ ונכתוב את הסדרה (a_n).

דוגמאות:
1. $a_n = n$ הסדרה $1, 2, 3, 4, \ldots$
2. $a_n = \frac{1}{n}$ הסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
3. $a_n = (-1)^n$ הסדרה $-1, 1, -1, 1, \ldots$
4. $a_n = \frac{n}{n+1}$ הסדרה $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
5. $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ הסדרה $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$
6. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ הסדרה $\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \ldots$
7. $a_n = \frac{n^2}{n!}$ הסדרה $1, \frac{4}{2}, \frac{9}{6}, \frac{16}{24}, \ldots$

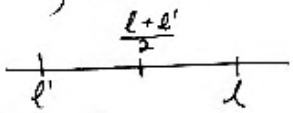
הגדרה: תהי (a_n) סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$.
נאמר ש-(a_n) מתכנסת ל-L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \to L$.
אם (a_n) מתכנסת ל-L נאמר גם ש-L הוא **הגבול** של (a_n).
אם (a_n) לא מתכנסת נאמר שהיא **מתבדרת**.

משפט: תהי (a_n) סדרה. אזי התנאים הבאים שקולים:
1. $\lim a_n = L$
2. מתקיים לכל $\varepsilon > 0$ קבוע
   (i) $a_n < L + \varepsilon$ לכל n החל ממקום מסוים
   (ii) $a_n > L - \varepsilon$ לכל n החל ממקום מסוים.

הוכחה:
(1 $\Rightarrow$ 2) ברור מהגדרת הגבול. לפי (i) מתקיים $a_n < L + \varepsilon$ לכל $n > N$.
בכיוון השני נניח ש-(ii) אינו נכון. מהיכן לה, כי $\exists \varepsilon > 0$. $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists n > N$ $a_n \le L - \varepsilon$.

(2⇐1) (i) + (ii) ⇒ $\exists l+\varepsilon > x_n > l-\varepsilon$ שכיחה. (תיאוק של 2 טענה שכיחות הסו שכיח (ii) נכונה כאמ"ם תמ"ד - בפרט שכיח).

⇐ l אחד יחיד של (x_n). נניח בשלילה ששניים $l' > l$ שניהם אחרי יחיד של (x_n).



יהי $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$ אזי $x_n > \frac{l'+l}{2}$ שכיחה.

אזי $x_n > \frac{l'+l}{2}$ כאמ"ם תמ"ד.

כי אומטורד? $\Rightarrow \lim x_n = l$.

ראשון ☺

(סמן $T_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. ברור ש- $T_{n+1} \subseteq T_n$.

לסמן $s_n = \sup T_n$ ו- $i_n = \inf T_n$. נשים ♡ ש-

$s_n \geq s_{n+1} \geq i_{n+1} \geq i_n$. תרשים אנחנו מתכוונים לצמד של קטור $(s_n) \geq (i_n)$. יהי $i = \sup i_n$ ו- $s = \inf s_n$. ואז מתקיים $s_n \geq s \geq i \geq i_n$.

משפט: תהי (x_n) שרתוב לאפלה, $\lim x_n = l = i$.

הוכחה: (ראה ש $s = i$ (לומר ש- i הוא אפנן תלוי): צריך להוכיח שמתקיים $\varepsilon > 0$ הטענה $i+\varepsilon > x_n > i-\varepsilon$ שכיחה.

$\{n : x_n < i+\varepsilon\} = \sup\{n : x_n < i+\varepsilon\}$ ⇐ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N > i-\varepsilon$. אבל $i_N = \inf T_N$

⇐ שמור $N > n$ $x_n \geq i_N$ ⇒ $x_n > i-\varepsilon$ נכונה כאמ"ם תמ"ד.

הוכחה מדגם:

$\{n \leq j : x_j\} \inf = i_n = \inf T_n$ בלדד אך סופית:

$\{n \leq j : x_j\} \sup = s_n = \sup T_n$. כאן $T_n \supseteq T_{n+1}$.

$$\frac{T_n}{T_{n+1}} \Leftarrow \begin{cases} s_n \geq s_{n+1} \\ i_n \geq i_{n+1} \end{cases} \Leftarrow s_n \geq s_{n+1} \geq i_{n+1} \geq i_n$$

כי הם $\inf$ ו-$\sup$ של אותה קבוצה

צריך להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ $x_n > i-\varepsilon$ כאמ"ם תמ"ד ו- $i+\varepsilon > x_n$ כאמ"ם שכיח.

יהי $\varepsilon > 0$ (ראה ש $x_n > i-\varepsilon$ כאמ"ם תמ"ד. $\{n : x_n < i+\varepsilon\} = \sup$ ⇐ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $N_1 > i-\varepsilon$. אזי לכל $n \geq N$ $x_n \leq i_{N_1} > i-\varepsilon$

$N \in \mathbb{N}$ כך ש- $x_n \leq i+\varepsilon$ לכל $n \geq N$. $x_n \in T_N$ ⇒ $x_n \leq i+\varepsilon$ ⇐ $i+\varepsilon$ חסם מלמעלה של T_N ⇐ $i_N \leq i+\varepsilon$. סתירה, כי $i = \sup i_n$. משל ☺

נמשיך מאיפה שעצרנו. אז שעשינו לפני שבוע אבל תתרגלו:

משפט: יהי (x_n) סדרה חסומה אזי: $\exists$ תת-סדרה (x_{n_k}) כך ש- $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

ובמילים פשוט $x_{n_k} \to \overline{\lim} x_n$ כלומר $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

הוכחה:

($\Rightarrow$) אם $\exists$ תת-סדרה $x_{n_k} \to x$ אזי, לפי משפט הירושה, $\forall \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ מכיל x_{n_k} לכל k גדול מספיק $\Rightarrow S = \{x\}$.

($\Leftarrow$) $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim} x_n \Rightarrow S = \{x\}$. צריך להראות ש- $x_n \to x$.

יהי n_1, n_2 כך שלכל $n_2 \geq n_1$ מתקיים $x_{n_2} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n$ קיים.

$\Leftarrow$ סה"כ נקבל את הטענה.

משו"ב ☺

זו אחת השיטות. כמו משפט בולצאנו ויש אפיון תלוי, אחד בלבד אז הנה שיטה אחרת. אחד שלא אומר לכם את תת הסדרות הוא האינסופיות של x_n הן האיברים של x. משפט $(x_n) \in B$ אם (x_n) מתכנסת? וכזה בדיוק את שעשינו אוכיחים.

אי אומר ש (x_n) מתכנסת? וכזה בדיוק את שעשינו אוכיחים.

שב"כ - שקלו את סדרת קושי!

תנאי קושי (Cauchy)

הגדרה: סדרה (x_n) תקרא סדרת קושי אם

$$\forall A>0\ \exists \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N}\ (n,m>N \longrightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon)$$

הגדרה זו מתארת קושי. הרעיון הפשוט שאנחנו עושים בקורס הזה הוא שנוח יותר לעבוד עם הגדרות שקולות. אנחנו נראה שקילות בין ההגדרה הנ"ל לבין ההגדרה שראינו בתחילת הקורס. נניח שיש לנו סדרה ואנחנו רוצים לבדוק האם היא מתכנסת או שלא. אפשר לנסות כמובן לחפש גבול ? קושי נותן לנו כלי שמאפשר לנו לבדוק את זה בלי לדעת מה הגבול אם הוא קיים. הוא מאפשר לנו לבדוק את זה מבלי לדעת מה הגבול, ולכן הוא שימושי מאוד. אנחנו נראה שקושי שקול לכך שהסדרה מתכנסת. ההוכחה של כיוון אחד קלה יחסית, אבל בכיוון השני נצטרך להשתמש בכלים שלמדנו בקורס הזה כדי להוכיח את ההתכנסות.

משפט: (x_n) סדרת קושי $\iff$ (x_n) מתכנסת.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- (x_n) סדרת קושי.

$$|x_m-x_n|<1 \iff \forall n,m\in N$$ יהי $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon=1$. אז קיים (x_n) כך ש-

$$|x_m-x_n|\le |x_m-x|+|x-x_n| = |(x_m-x)+(x-x_n)| \iff$$

$\exists$ m ומ m יקנים א- N ויקיים $|x_m-x|<\frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|x-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ כך שאם $n>N$ אז $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2}$. אנחנו נרצה להראות שאם $\varepsilon>0$ אז $\exists N$ כך שאם $n>N$ אז $|x_n-x|<\varepsilon$.

($\Rightarrow$) $x_n\to x$ $\iff$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$ כך ש- $n>N$ אז $|x_n-x|<\varepsilon$.

$$|x_n-x_m| = |x_n-x+x-x_m| \le |x_n-x|+|x-x_m| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\forall n,m>N$ $|x_n-x_m|<\varepsilon$ $\iff$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$ כך ש-

$X_N - 1 < X_m < X_N + 1$ כך ש $m > N$.

$(X_m) = (X_n)$ תסומה כמעט תמיד. אפשר לסדר את $\{X_1, \dots, X_N, X_N+1\}$ ו $M = \max$, $\{X_1, \dots, X_N, X_N - 1\}$ ו $m = \min$ ומכאן שלכל $n \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow$ (X_n) תסומה $\Leftarrow$ $m \le X_n \le M$

עכשיו נראה בשתי דרכים שהסדרה מתכנסת. שתיהן בשלוטות:

א) יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n \ge N$ מתקיים $|X_m - X_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\Leftarrow$ לכל $n > N$ $|X_n - X_N| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Leftarrow$ $X_N + \frac{\varepsilon}{2} > X_n > X_N - \frac{\varepsilon}{2}$ לפי הגדרת הסופרמום של S_N קיים $n_j \le S_N \le X_n$ כך ש

$X_N - \frac{\varepsilon}{2} \le X_N - \frac{\varepsilon}{2} < \inf S_N = \lim X_{n_j} \le \lim X_n = \sup T_N < \sup S_N + \frac{\varepsilon}{2} = X_N + \frac{\varepsilon}{2}$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\lim X_n - \lim X_{n_j} < (X_N + \frac{\varepsilon}{2}) - (X_N - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ $\Leftarrow$ $\lim X_{n_j} = \lim X_n$

$\Leftarrow$ מהמשפט שראינו שלשם - (X_n) מתכנסת.

תזכורת: $T_N = \inf\{X_n\}_{n=N}^{\infty}$, $S_N = \sup T_N$ $\Leftarrow$ לפי הגדרה של $\sup$ קיים $X_n < S_N + \frac{\varepsilon}{2}$ כך ש $n > N$. אלא, שזה יש מכוכה.

הוא ניתן ליישר בשיעור הבא. אלא שיש לנו עוד הוכחה

ב) $\exists (X_n) \Leftarrow$ לפי BW קיימת $(X_n) \supset (X_{n_k}) \ni \zeta$

כך ש $X_{n_k} \longrightarrow X \longleftarrow X_n$ נשמח ש $X \longleftarrow X_n$ אפשר.

יהי $\varepsilon > 0$. יהי N לפי קושי. אשר מקיים שלכל $m, n > N$ אז $|X_m - X_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ויהי K לפי התכנסות (X_{n_k}) כך ש שלכל $k > K$ מתקיים $n_k > N$.

(לפי אפשרי כי n_k עולה ממש) $\Leftarrow$ לכל $n > N$

מתקיים $|X - X_{n_k}| + |X_{n_k} - X_n| \ge |X - X_n| < \varepsilon$.

משל :)

תזכורת:

(x_n) קונ' $\Leftarrow$ (x_n) חסומה $\wedge$ יש לה מס' יחיד

בהינתן $\varepsilon>0$ וי' $N\in\mathbb{N}$ כך ש $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $m,n \geq N$

שהוכ' $n > N$ מתק"י $x_N - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_N + \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

נשים לב ל $\{j \geq N : x_j \in T_N x_n\}$.

(*) $x_N - \frac{\varepsilon}{2}$ הוא מלמעלה ל- T_N. $x_N + \frac{\varepsilon}{2}$ הוא מלמעלה

ל- T_N. לכן: $x_N + \frac{\varepsilon}{2} \geq N_S \geq x_n \overline{\lim} \geq x_n \underline{\lim} \geq N_i \geq x_N - \frac{\varepsilon}{2}$

$\Leftarrow$ $\varepsilon > x_n \overline{\lim} - x_n \underline{\lim} \geq 0$ $\Leftarrow$ $x_n \underline{\lim} = x_n \overline{\lim}$.

משפט ②

הסבר: ראינו שאם סדרה מתכנסת אז כל תתי הסדרות

שלה מתכנסות לאותו הגבול. הכיוון ההפוך לא נכון

בדוגמא שלנו אכן הייתה סדרה שלכל תת סדרה שלה יש

גבול חסום. הסימונים שלנו הם ש N_i הוא ה- $\inf$ של $T_N x$.

$\Rightarrow$ הוכיח בדיוק כמו במשפט שלמעלה - $N_i \geq x_N - \frac{\varepsilon}{2}$. אבל

בדיוק לפי הגדרת $x_n \underline{\lim} \Rightarrow$ $x_n \underline{\lim} \geq N_i$. וכמובן תמיד נכון

$x_n \underline{\lim} \leq x_n \overline{\lim}$. אותו הדבר קורה גם בצד ה"שני".

משפט Cesaro

אם $x_n \to 0$ אז $\frac{x_n + \dots + x_1}{n} \to 0$.

הוכחה:

$\exists \varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > M$ מתק"י

$\exists \varepsilon > \left| \frac{x_n + \dots + x_1}{n} \right|$.

ב"ש שלכל $\varepsilon > 0$ קיים M מתק"י $n > M$

off the record: $x_n \to 0$ אז (כפי שאפשר לראות בציורים) יהיו

קטעים ל- ε ומחוצה. שהם מוצץ קטן מ- ε. ולפיכך אותם סכומים

בשניים: $\frac{x_n + \dots + x_{M+1}}{n}$ ② + $\frac{x_M + \dots + x_1}{n}$ ③ = $\frac{x_n + \dots + x_1}{n}$

ב- ② כמו שאמרנו בציורים קטנים מ- ε אז אם נתלק ב- n גדול אם בסדר

$x_M + \dots + x_1$ הוא מספר קבוע כי M קבוע $\Rightarrow$ ③ $\to 0$

לכשום באופן מסוף:

מהיותן $\varepsilon>0$ יהי $N\in\mathbb{N}$ כך ש $|x_n|<\varepsilon/2$ לכל $n>N$.

עלינ ש $|x_n|<K$ לכל $N\in\mathbb{N}$ (הסדרה מתכנסת $\Rightarrow$ חסומה)

יהי $M>\frac{3NK}{\varepsilon}$ ונקבל $n>M$ אזי, עבור

$$\left|\frac{x_1+\dots+x_N}{n}+\frac{x_{N+1}+\dots+x_n}{n}\right|<\frac{NK}{n}+\frac{(n-N)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{NK}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

מש"ל ☺

סדרות לא חסומות וסדרות שואפות לאינסוף

<u>הגדרה:</u> $x_n\longrightarrow+\infty$ אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>N$ אזי $x_n>M$.

מילולית זה אומר ש (x_n) שואפת ל $+\infty$ (או מתבדרת ל $+\infty$).

* יש סדרים שאומרים "מתכנסת ל $+\infty$" אבל אנחנו נקרוס הלזה נשתמש מילה מתכנסת רק בסדרות ששואפות לגבול סופי.

<u>הגדרה</u> (אנלוגית) $x_n\longrightarrow-\infty$ אמ"מ לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>N$ אזי $x_n<M$.

<u>דוגמאות</u>

א. $a_n=n\longrightarrow+\infty$

ב. $a_n=(-1)^n\cdot n$ אינה שואפת לאינסוף ולא ל $+\infty$ ולא ל $-\infty$.

אפשר לסדרה שואפת לאינסוף (ולא) משלב מסוים כל איבריה יהיו חיוביים (ואין זה לגמרי כמובן. כלל לגבי אינסוף).

ג. $c_n\longrightarrow+\infty$. היא לא מונוטונית ובכל זאת היא שואפת לאינסוף.

$c=(1,0,3,2,5,4,\dots)$

גבולות וסדר

משפט: $a_n \le b_n$ $\quad a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

$b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

הוכחה: זה כל מה שמשתנה - תרגיל!

משפט: (אריתמטיקה של גבולות אינסופיים)

x מספר שהוא סדר גודל מתכנס כאשר הוא קבוע אחר:

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot (\operatorname{sgn} x) \qquad (x \neq 0)$$

דוגמאות: $(+\infty) + (-\infty)$ אין גבול סופי אבל

$(-n) + n \to 0$ אבל

$(-n) + n^2 \to +\infty$

$n \cdot \frac{1}{n} \to 1$ אבל $n \to \infty$ אין גבול סופי אבל

$n \cdot \frac{1}{n^2} \to 0$

$n^2 \cdot \frac{1}{n} \to \infty$

משפט: $x_n > 0$, $\quad x_n \to \infty \iff \frac{1}{x_n} \to 0$.

הוכחה: תרגיל

מסקנה: $|x_n| \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to 0 \qquad (x_n \neq 0)$

$\frac{1}{|x_n|} \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$

הוכחה: תרגיל

$\sup S = +\infty$ ($\inf S = -\infty$)

הגדרה: אם $S \subseteq \mathbb{R}$ אינה חסומה מלעלה (מלרע) (אז ש-

טבעית שאיפת f ל- $+\infty$ ($-\infty$).

משפט: לכל סדרה שאינה חסומה מלעלה (מלרע) יש לה סדרה

חלקית ששואפת ל- $+\infty$ ($-\infty$).

הערה: אם נסדרה יש רק סדרה אחת ששואפת לאינסוף אפשר

לומר בכוון שהסדרה שואפת לאינסוף כי אפשר לראות עושים

מה שאנחנו רוצים עד כדי הגדרה הזו שלא לכל חסומה.

משפט: לכל סדרה יש לפחות תת סדרה אחת ששואפת לאינסוף

או שיש לה תת סדרה מונוטונית. אמ"ה (x_n) מונוטונית וחסומה, יש לה גבול סופי.

הוכחה: נראה שלכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית. לפי

משפט: לכל סדרה יש לפחות תת סדרה כזאת.

אפשרות א' יש לפחות תת סדרה כזאת כך שכל תת סדרה שלה

שואפת לאינסוף.

משפט: אם $x_{n_k} \longrightarrow (x_n)$ אז $\pm\infty \longleftarrow \pm\infty$.

מתוך אלגברה אם (x_n) סדרה מונוטונית וגדלה וקיים תת סדרה

כך ש: $x_{n_k} \longrightarrow \infty$.

במקרה אלגברה אם (x_n) סדרה מונוטונית יורדת וקיים תת סדרה

אם $b_n \longrightarrow -\infty$ הסדרה מתבדרת.

אפ"ם $b_n \longrightarrow \infty$ וגם, אינטואיציה של שקילות $\infty \longleftarrow b_n$.

כאשר $h > 0$. $\Longrightarrow b_n = (1+h)^n > nh+1$ לפי ברנולי.

אם $b > 1$ כך $\infty \longleftarrow b_n$. לאחר $b > 1 \Longrightarrow b = h+1$

הוכחה: (b^n). רואים שאם $|b| < 1$ אז $0 \longrightarrow b^n$.

הגדרה: אם (x_n) אינה חסומה מלעיל אז $\lim x_n = +\infty$

אם (x_n) אינה חסומה מלרע אז $\lim x_n = -\infty$

משפט: $x_n \to l \iff \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

l יכול גם להיות $\pm\infty$ (ראה גם תרגיל).

הוכחה:

אם הגבול $l \in \mathbb{R}$ קיים, כבר הוכחנו. אותה:

$(\Leftarrow)$ $x_n \to +\infty \Leftarrow$ (x_n) אינה חסומה מלעיל $\Leftarrow$ לפי הגדרה

$\lim x_n = +\infty$. עלינו להראות שאם הגבול הנתון הוא $+\infty$

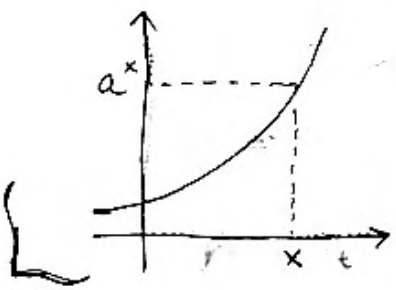
$x_n \to +\infty \Leftarrow n_i \to +\infty \Leftarrow \lim n_i = +\infty = \overline{\lim} x_n$

$(\Rightarrow)$ $x_n \to +\infty \Leftarrow \lim n_i = +\infty \Leftarrow \overline{\lim} x_n = +\infty$ משל ②

תכונות ממשיות

יהי $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. נבקש להגדיר a^x לכל $x \in \mathbb{R}$ כך שיתקיימו כל התכונות שאנחנו מכירים עבור $x \in \mathbb{Q}$.

off the record: אמנם יודעים לחשב בפועל כל ביטוי מהצורה a^x כאשר $x \in \mathbb{Q}$. אם נרצה את a^x עבור $x \in \mathbb{R}$ הם יסכימו לקרב את x ע"י $r \in \mathbb{Q}$ שמקרב מאוד את x ולחשב את a^r שמקרב מאוד את a^x. אבל נוכל לפחות את x ע"י $t \in \mathbb{Q}$, $t > x$ ולחשב את a^t שמקרב מאוד את a^x.



נסתכל ראשית על המקרה בו $a > 1$

$$L_a(x) = \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}$$
$$U_a(x) = \{a^t : t \in \mathbb{Q}, t > x\}$$

מכך ש $\emptyset \neq L, U \subseteq \mathbb{R}$ וכן $L \leq U$ $\Rightarrow$ קיימים סופים

$\sup L_a(x) =: s \leq i := \inf U_a(x)$ ולכן מתקיים

טענה: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$ (כלומר $a^{\frac{1}{n}} \to 1$).

$\Leftarrow$ $\inf\{a^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = 1$ אם $a > 1$.

טענה: $S=i$.

הוכחה: צריך להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיימים $t>x>r$ כך ש $a^t-a^r<\varepsilon$. אי $\varepsilon>0$.

לפי הפרופ נבחר $t>x>r$ כך ש $t-r<\frac{1}{n}$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ מספיק $a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$ $(0<i)$. אזי

$$a^t-a^r=a^r(a^{t-r}-1)\leq i(a^{t-r}-1)<i(a^{\frac{1}{n}}-1)<i\cdot\frac{\varepsilon}{i}=\varepsilon$$

כלומר לפי הגדרה הסופרמום $S=i$. ☺

הגדרה: $a^x=\exp_a(x):=S$

עכשיו נותן לנו שאר? ובכן בהגדרה שלנו a^x מוגדר רק כש x רציונלי. ואפשר להשתמש בהגדרה זו לכל x-ים רציונליים. המשמעות שלנו היא שעכשיו נקבל שהגדרה החדשה מתלכדת עם מה שאנחנו יודעים לכל הרציונלים.

משפט: לכל $b\in\mathbb{R}$ $a^b=\exp_a(b)$

הוכחה: $a^b\geq 1\Leftrightarrow b\geq 0\Leftrightarrow a^r\leq b$ $\Leftarrow$ a^b חסם מלעיל של $L_a(b)$.

יהי $t<b$ $\Rightarrow$ $a^t<a^b$ $\Rightarrow$ $a^b\geq s$ חסם מלעיל של $L_a(b)$.

$\Leftarrow$ $a^b=i=S$ משל ☺

מה שעשינו כאן הוכיח מעלים לבדוק שהגדרה שלנו היא מתיישרת היטב - שהתוצאה לא תלויה באופן שבו אנחנו מגיעים אל הדברים. משהוכחנו את זה אפשר להשתמש באותו טיעון.

הגדרה: $1^x=1$ $a=1$

$a^x=(\frac{1}{a})^{-x}$ (כלת מוגדר היטב כי $\frac{1}{a}>1$) $1>a>0$

משפט: $x<y$ $\quad -1 \quad a>1 \Rightarrow a^x<a^y$

$0<a<1 \Rightarrow a^y<a^x$

הוכחה:

נניח $x<p<q<y$, $p,q\in\mathbb{Q}$. נראה כאלה קיימים.

אם $a>1$ $\quad a^x \le a^p < a^q \le a^y$

a^y חסם מלעיל של a^q $\quad$ $p,q\in\mathbb{Q}$ $\quad$ a^x חסם תחתון של a^p

אם $0<a<1$ נתבונן ב- $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ונקבל את אותן הדרכה.

אפשר לרשום עתה את ההגדרה הבאה:

$a>1$ $\quad a^x = \sup\{a^v : v\in\mathbb{R}, v\le x\} = \inf\{a^w : w\in\mathbb{R}, x\le w\}$

יש שלושה נתונים ארוכים.

ה.ת) איך הנתונים יכולים להיות שווים אם אחד על ארוכים.

חזקות ממשיות (המשך מעמ' קודם)

! מה קורה כאשר $a>1$ ו x כל מה שנעשה הוא לעבור $a>1$.

$$a^x := \sup L_a(x) = \inf U_a(x)$$

$$\{a^r : r\in\mathbb{Q}, r\le x\} \qquad \{a^t : t\in\mathbb{Q}, t\ge x\}$$

הרעיון ש-$\sup$ זה ה-$\inf$ שם הוא נקבע בדיוק מתלכד ונותן אותו ל-a^x. כמו כן הרעיון שמאחורי ההגדרה עם הזנב מתלכדת עם ההגדרה שאנחנו עבור חלקות רציונליות. עכשיו נראה מה שמבדיק שכן ההגדרות שאנחנו מכירים עבור רציונליים מתקיימות גם כאן.

משפט: $x<y \iff a^x < a^y$

הוכחה: מהשיעור הקודם.

משפט: $a^{x+y}=a^x a^y$ כך $x,y\in\mathbb{R}$.

הוכחה: נטען ש-$L_a(x)L_a(y)\subseteq L_a(x+y)$.

יהיו $r<x$, $s<y$ כך ש $a^r\in L_a(x)$, $a^s\in L_a(y)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow r+s<x+y \Rightarrow a^{r+s}\in L_a(x+y) \Rightarrow L_a(x)L_a(y)\subseteq L_a(x+y)$

נטען שאם $A,B\ge 0$ ומתקיים $\sup(AB)\le \sup(C)$ $\Leftarrow$ $C\ge AB$ (הוכיח כתרגיל)

$\Rightarrow \sup(L_a(x)L_a(y)) \ge \sup(L_a(x+y)) = a^{x+y}$

מצד שני $U_a(x)U_a(y)\ge U_a(x+y)$. מאותו אופן שהראנו ש $\inf U_a(x)\inf U_a(y) = \inf(U_a(x)U_a(y)) \ge \inf U_a(x+y)$ מקבלת תרגיל קודם

נשלים את כל אי השוויונים ונקבל $a^{x+y}=a^x a^y$.

הערה: יש מקום לחשוב שהגדרנו באופן שרירותי את הכל עבור מספרים $a>1$ ומעתה ילכו עבור כל a.

משפט: $(a^x)^y = a^{xy}$ $\quad (a>1),\ (x>0),\ (y<0)$

הגדרה: מהלך הוכחה: $x<0$ ל- $\frac{1}{2}$ - רוצים ש $a^x<1$.

מסקנה: $(a^x)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{px}{q}}$ כאשר $p,q>0$

הוכחה: $x>y \Leftrightarrow a^x > a^y \Leftrightarrow (a^x)^{\frac{p}{q}} > (a^y)^{\frac{p}{q}}$ כאשר $\frac{p}{q}>0$

$\Leftarrow a^{xq} \in La(xq) \Leftarrow xq<yq \Leftarrow (a^x)^q < a^{yq}$

$(a^x)^q \geq a^{xq}$ מכאן שלכל $a^{xq} = \sup La(xq) \leq (a^x)^q$

ל' שמוש כ- $La(xq)$ ע"י:

$x<t \Rightarrow a^x < a^t \Rightarrow (a^x)^q < (a^t)^q = a^{qt}$

$\Leftarrow (a^x)^q \leq a^{xq}$ משל"מ ☺

הוכחת המשפט

$$La^x(y) = \{(a^x)^r : r\in\mathbb{Q},\ r<y\}$$

$$\sup La^x(y) = \sup\{(a^x)^q : q\in\mathbb{Q},\ 0<q<y\} =$$

כי q נתון מתקיים $0<q<y$ שקולות

$$= \sup\{a^{xq} : q\in\mathbb{Q},\ 0<q<y\} \leq$$

$$\leq \sup\{a^v : v\in\mathbb{R},\ v<xy\} = a^{xy}$$

ההוכחה הבאה: ישלים את א השוויון מכיוון השני.

משל"מ ☺

משפט: $(ab)^x = a^x b^x \quad a,b>1$

הוכחה: נשתמש ב- $La(x)Lb(x) \subseteq Lab(x)$

אבל ההכלה של שתי הקבוצות שווה ומכאן השוויון

נוכיח את השוויון בין הקבוצות.

יהי $r<x \Rightarrow a^r\in La(x),\ b^r\in Lb(x) \Rightarrow a^r b^r \in Lab(x)$

נזכור כי כל הדיונים ואותו דבר מכיוון השני $\Leftarrow$ הכלה שווה.

משל"מ ☺

$$\begin{cases} La(x)Lb(x) \subseteq Lab(x) \\ \Rightarrow \sup(La(x)Lb(x)) \leq \sup Lab(x) \\ Ua(x)Ub(x) \supseteq Uab(x) \\ \Rightarrow \sup(Ua(x)Ub(x)) \geq \sup Uab(x) \end{cases} \Leftarrow a^x b^x \geq (ab)^x \geq a^x b^x$$

$\Downarrow$

$a^x b^x = (ab)^x$ משל"מ ☺

סכום: $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$x<y \qquad 1<a \Rightarrow a^x < a^y \qquad y>x$$

$$0<a<1 \Rightarrow a^x > a^y$$

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad a>1$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad x,y>0$$

$$(ab)^x = a^x b^x \qquad a,b>0$$

הוכיחו כי אם $a,b>0$ שהתכונות הנ"ל נכונות עבור $\forall x,y \in \mathbb{R}$ אז $a=b$.

אולם הוכיחו כי $a<b$ אפשר להפליך את ההוכחה.

* * * *

נניח שאנו יודעים ש- x^e מוגדר לכל x.
כמו כן אומרנו ש- $x^e \longleftarrow (\frac{1}{n}+1)^n$
ניתן להוכיח שכתיבת הביטויים הבאה x^e מתלכדת!

אין לנו כאן מקום את זה, אבל ההוכחה השקולה יתכוב את הנושא.

בהמשך נוכיח שהסכום האינסופי כשמחברים אותו אינו ∞ אבל

סכום $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

בפרט נוכיח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

אם אנחנו רוצים לפרק את הנושא הזה

תהי (a_n) סדרה ב־ $\mathbb{R}$

נגדיר (S_n) באופן הבא:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(S_n) תיקרא סדרת הסכומים החלקיים שמתאימים לסדרה (a_n)

הגדרה: (a_n) תיקרא סכימה (או ניתנת לסכימה) (summable)
אם (S_n) מתכנסת. נאמן אותו נ.ל. $a_1 + a_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

ובמקרה $S_n \longrightarrow S$ נכתוב $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ יקרא הטור המתאים לסדרה (a_n).

אם (S_n) מתבדרת נאמר שהטור $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ מתבדר

הבה נראה קל לזה לחלק את הסכימה מ־ 0 או מ־ $n-1 \leq n$ למרות
שמתחילה סדרתנו סדרה תמיד מתחילה מ־ $n=1$ אבל לפי
מה שהוכחנו קודם זה לא משנה בכלל.

דוגמאות

① הטור הגיאומטרי $a_n = q^n$ $q \in \mathbb{R}$

אם $q=0$ $\Leftarrow a_n = 0 \Leftarrow S_n = 0$ $\Leftarrow \sum_{1}^{\infty} q^n = 0$

אם $q \neq 0$

$$\begin{cases} S_1 = q \\ S_2 = q+q^2 \\ \vdots \\ S_n = q + q^2 + \dots + q^n \end{cases}$$

אם הלוכסנים $S_n = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$

אם $q \neq 1$ אחרת מכירים $q \neq 1$ אם $S_n = 1+1+\dots+1 \longrightarrow \infty$ אם $q=1$

אם $|q| < 1$ $\Leftarrow q^{n+1} \longrightarrow 0$ $\Leftarrow S_n \longrightarrow \frac{q}{1-q}$ $\Leftarrow \sum_{1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$

אם מתקיים $0^0 := 1$, בטור כזה נקבל אם לחוד $q=0$.

(2) $a_n = (-1)^n$

$S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ אי זוגי} \\ 0 & n \text{ זוגי} \end{cases}$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ הסדרה מתכנסת

(3) $a_n = n$ $\Leftarrow$ $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ $\longrightarrow \infty$

$\Leftarrow$ הסדרה מתבדרת

(המשך) דוגמאות

④ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ נסמן $\heartsuit$ $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

כפי שקיבלנו מהר יותר.

⑤ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $\quad S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

מתבדר.

⑥ $a_n = \frac{1}{n}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{n} \to \infty$$

$\Leftarrow$ הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ מתבדר בצורה

שזה מעניין כיוון שזה כל כך מהיפוך הדומה.

⑦ $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ לפי טור מהצורה הנ"ל.

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\vdots$$

אם נקיים את כל הקבוצות שמתקבלות כאלה

נקודות אחיזה שהן מתכנסות כיצד אחת לזה גם יהיה

סכומים חלקיים. אחלק לה כיון ס

(8) $a_n = \frac{1}{2^n}$.

האם הטור $\sum a_n$ מתכנס? מדוע?

נצטרך את הטור הטלסקופי $\sum \frac{1}{n^2+n} = \sum \frac{1}{n(n+1)}$ ה. מ. הלה בטוח

נסכם מספיק את סדרי אחד. אז $\sum a_n$ והטור הטלסקופי הם

מאותו טבע אחד $\Leftarrow$ כנראה ש $\sum a_n$ מתכנס.

אפשר להסתכל כאן וזאת בדרך שונה.

$$S_n = \frac{1}{2^1} + \underbrace{\frac{1}{2^2}}_{\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}}_{\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}}_{\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

נכון הלאה $\Leftarrow$ נקבל שלה קטן מהטור המתאים $\sum(\frac{1}{2})^n$.

$$\Leftarrow \sum_1^\infty a_n \text{ מתכנס} \Leftarrow \sum_1^\infty (\frac{1}{2})^n < 1+2$$

$\Leftarrow$ $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס! הוא הוא שבדיוק קשה מאוד לחשב סכום

של טור, אבל לפחות שהוא מתכנס לה קיים או שהוא נפל,

אפ כי לנו בהכרח לא באותה.

אם רק כזכר נכון $\sum_1^\infty a_n = \frac{\pi^2}{6}$. החישוב הלה הוא אחרת

מפני שדאה ולזרינו לשת ניצן בלה מקורס הלה.

נשים לב שלכזה: את עם $a_n = \frac{1}{n^2}$

נשים לב שלכזה $\sum_1^\infty a_n = s$

הוא הוא שאם $p > 1$ אז $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס ותלמיד

ונלמיד יכול אותה לה s תיקון של ההוכחה שכזה $p=2$.

שלכזה $p \geq 1$ $\sum_1^\infty a_n$ את הדר

תזכורת:

$(x_n) \in C$

$\Updownarrow$

$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall N \in \mathbb{N}$

$\exists m, n > N \Rightarrow |x_n - x_m| \geq \varepsilon_0$

משפט: הקריטריון של קושי:

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ מתכנס $\Longleftrightarrow$

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל

$N < m \leq n$ מתקיים

$|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$

משפט:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $a_n \longrightarrow 0$.

הערה חשובה: לא תמיד הכיוון, אם $a_n \longrightarrow 0$ אזי $\sum a_n$ מתכנס! (למשל $a_n = \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$)

הוכחה: נניח $\varepsilon > 0$ לפי קושי, יהי N כך ש$\forall$

$N < n \leq m$ אזי $|a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$ (קח $n+1 = m$)

ואז $|a_{n+1}| < \varepsilon \Rightarrow a_n \longrightarrow 0$. משל ☺

הוכחה ב: אם $\sum a_n$ מתכנס $\Rightarrow$ סדרת הסכומים החלקיים (S_n)

מתכנסת. אבל $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$. S_n מתכנסת ל- S. S_{n+1}

סתם הלקיח של S_n נסכן מתכנסת לאותו גבול S. $\Longrightarrow a_{n+1} \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow a_n \longrightarrow 0$. משל ☺

אינפי

משפט: (התכנסות מהתלכ ⇐ התכנסות)

אם $\sum|a_n|$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי: מהנתון $\exists \varepsilon>0$ ו- $\forall N\in\mathbb{N}$ קיים $m>n>N$ שעבורם $|a_{n+1}|+\ldots+|a_m|<\varepsilon$

(שכן $\sum|a_n|$ מתכנס). מהאי שוויון המשולש Δ:

$$|a_{n+1}+\ldots+a_m|\le|a_{n+1}|+\ldots+|a_m|<\varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\sum a_n$ מקיים את תנאי קושי. $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

משל ☺

הערה חשובה! המשפט הנ"ל הוא חד כיוני. כלומר לא ש- $\sum a_n$ מתכנס אכן אזי ש $\sum|a_n|$ מתכנס. לשם, עוד נראה שאכן $\sum\frac{1}{n}(-1)^n$ מתכנס אם $\sum\frac{1}{n}-|\frac{1}{n}(-1)^n|$ שאכן לאינסוף!

⑤ טורים עם איברים חיוביים ($a_n\ge 0$)

הערה: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

מטור עם איברים חיוביים סדרת הסכומים החלקיים סדרה עולה

$\Leftarrow$ אם $\sum a_n$ טור עם איברים חיוביים, אזי:

$\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ (S_n) חסומה.

משפט (מבחן ההשוואה Comparison Test)

① אם $c_n\ge|a_n|$ כאשר $\sum c_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

② אם $a_n\ge b_n\ge 0$ ו- $\sum b_n$ מתבדר אז גם $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה:

① $\sum a_n$ מקיים את תנאי קושי. מהנתון $\exists \varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m>n>N$ מתקיים $|c_{n+1}+\ldots+c_m|<\varepsilon$

מתנאים אלה נקבל

$\exists m > n \quad |a_{n+1} + \dots + a_m| \le |a_{n+1}| + \dots + |a_m| \le c_{n+1} + \dots + c_m$

לכן $\sum a_n$ מקיימת את תנאי קושי, ולפיכך מתכנסת.

(2) (נניח ש (1) אינו נכון) $\sum a_n$ מתכנס, לפי (1) $\sum b_n$ מתכנס ולכן מתקיים $b_n \to 0$ אפ"ל (שקול)

משפט: $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$

מתבדר $p \le 1$

הוכחה:

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}}_{<} + \underbrace{\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}}_{<} + \underbrace{\frac{1}{8^p} + \dots}_{<} \dots$$

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots$$

S_1

$S_3 < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}$

$S_7 < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$

$S_{15} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3$

באינדוקציה אפשר להראות ש-

$S_{2^n-1} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \dots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1} < \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}$ $\quad p > 1$

נזכור a_n חסומה, שכן כל האברים מהאיבר $2^k - 1$ חסומים אל כל האברים הסמוכים (כי מהגדרת k נקבל $n < 2^k - 1$) $\Rightarrow$ עבור $p > 1$ $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס.

עבור $p \le 1 \Rightarrow n \le n^p \Rightarrow \frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^p}$ מתבדר.

משפט (3)

משפט: **מבחן ההשוואה הגבולי:**

נניח $a_n, c_n > 0$ החל מ-n כלשהו.

(1) אם $\lim \frac{a_n}{c_n} > 0$ אז $\sum c_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

(2) אם $\lim \frac{a_n}{c_n} = 0$ ו- $\sum c_n$ מתכנס $\Rightarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה: (נשים ♡ שההוכחה תראה לו שהוא הבין היטב את תנאי המשפט).

(1) $\lim \frac{a_n}{c_n} > 0 \Rightarrow$ קיימים $\beta > \alpha > 0$ כך ש-$\beta > \frac{a_n}{c_n} > \alpha > 0$

כלומר $\alpha c_n < a_n < \beta c_n$ (שוב מצד ימין אנו מקבלים תנאי טורים אבל כאן נשתמש בזה).

אם $\sum c_n$ מתכנס אז לפי אריתמטיקה של טורים $\sum \beta c_n$ מתכנס $\Rightarrow$ לפי מבחן ההשוואה (ימין) $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n$ מתכנס $\Rightarrow$ $\sum \alpha c_n$ מתכנס $\Rightarrow$ $\sum c_n$ מתכנס.

(2) אם $\lim \frac{a_n}{c_n} = 0$ למשל $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ כמעט תמיד $\frac{a_n}{c_n} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n < c_n$ כמעט תמיד ומכאן לפי מבחן ההשוואה $\sum a_n$ מתכנס. ∎ (ב)

משפט: **מבחן דלמבר**

נניח ש- $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. יהי $u = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ו- $l = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(1) אם $u < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס.

(2) אם $l > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה:

(1) יהי $1 > q > u$. אז $q > \frac{a_{n+1}}{a_n}$ כמעט תמיד $\Rightarrow$ קיים $N \in \mathbb{N}$

כך ש $a_{N+1} < a_N q$

$a_{N+2} < a_N q^2$

$\vdots$

$a_{N+m} < a_N q^m$

$\Rightarrow \underbrace{a_{N+1} + \ldots + a_m}_{S_m - S_N} < a_N \sum_{i=1}^{m} q^i < a_N \left(\frac{1}{1-q}\right)$ (סכום של טור גיאומטרי עם $|q| < 1$)

$\Rightarrow$ לכל $m > N$: $S_m < S_N + a_N \left(\frac{1}{1-q}\right)$ כלומר (S_n) חסומה

מלעיל $\Rightarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

(2) $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1 \Rightarrow$ יהי $\ell > \alpha > 1 \Rightarrow$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha$ כמעט תמיד. במילים אחרות $a_{n+1} > \alpha a_n$

כמעט תמיד. מכאן $a_n \not\to 0$ ולכן $\sum a_n$ מתבדר.

משל"ה (ש)

הערה: מהמשפט האחרון עולה כי הכרעה בטור הנתון תלויה בשוויון ל-1.

לדוגמה: אם $a_n = \frac{1}{n} \to 1$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$ $\sum a_n$ מתבדר.

אבל אם $b_n = \frac{1}{n^2} \to 1$ $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ $\sum b_n$ מתכנס.

דוגמה (מאוד חשובה)

הטור $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$.

(לזה טור ממש מכבד מתמטית והוא מתכנס ל- e^x)

(רואה שהטור מתכנס בהחלט: $|a_n| = \frac{|x^n|}{n!}$

לפי מבחן המנה הטור מתכנס כי:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

הטענה השנייה מוכיחה כי $E(x) = e^x$ היא

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$e^x = \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\} = \inf\{e^t : t \in \mathbb{Q}, t > x\}$

צריך להוכיח ש- $e^x \to \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (נובע מהוכחתנו)

נצטרך את מה שהוכחנו אומרים הוא ש-

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נוכיח את זה עבור המקרה ש- $x > 0$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ במקרה ש $x \geq 0$

הוכחה:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{x}{n}\right)^i = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \dots =$$

$$> 1 + x + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3 + \dots =$$

$$\overset{x>0}{\underset{n>1}{=}} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ניקח $n > m$ כלשהו:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)x^m$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^m}{m!}$$

↓

מתקבל עבור m כלשהו קבוע וn שואף לאינסוף

עכשיו אפשר לתת לm לשאוף לאינסוף ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

משל (11)

הגדרה

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

בהמשך נראה ש$C(x)$ את $\cos(x)$ ו$S(x)$ את $\sin(x)$.

בניק משהו על כתיבה לפניכם שהם מתכנסים.

משפט: (מבחן השורש) : אם $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ונניח $L = \lim \sqrt[n]{a_n}$.

(1) אם $L < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס.

(2) אם $L > 1$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה:

(1) יהי: $1 > q > L \geq 0$. $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{a_n} < q$ כמעט תמיד.

$\Leftarrow$ $a_n < q^n$ כמעט תמיד ומהמבחן ההשוואה $\sum a_n$ מתכנס.

(2) יהי: $L > \alpha > 1$ $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{a_n} > \alpha$ כמעט תמיד. $\Leftarrow$

$a_n > \alpha^n > 1$ כמעט תמיד $\Rightarrow$ $0 \not\to a_n$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ מתבדר.

משל (11)

תכונה נוספת הבאה:

אי שוויון ש- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

מוכיחים את זה קודם עבור $x = p \in \mathbb{N}$ ואחר כך:

עבור מספר כלשהו p אפשר לרשום

$$\lim\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{p}}\right)^n = \left(\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{p}}\right)^{\frac{n}{p}}\right)^p = e^p$$

$\frac{n}{p} \to \infty$ כש $n \to \infty$

(48) 13.12.05

אוניברסיטה

$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum \frac{x^n}{n!}$ ① ② אנחנו עומדים להוכיח שמתקיים

ראינו (אתמול ≡ אתם שהיו בכיתה) ש- $e^p = \lim\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$

מה עם $p \in \mathbb{Z}$? אם $p<0$ אז $-p>0$.

$$e^{-p} = \lim\left(1-\frac{p}{n}\right)^n = \lim\left(\frac{1}{\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^n}\right)$$

$$\lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^n = \lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p+p} =$$

$$= \lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p}\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^p$$

$$\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^p \longrightarrow 1$$

$$\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p} \triangleleft \left(1+\frac{p}{n}\right)^n \Longrightarrow \exists! L : \left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p} \longrightarrow L$$

$$\Rightarrow \lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^n = L$$

$$\Rightarrow e^{-p} = \lim\left(1-\frac{p}{n}\right)^n = \frac{1}{L} \Rightarrow L = e^p$$

תרגיל: (טרק עד $r=\frac{p}{q}$ ו- $p,q \in \mathbb{Z}$ כך ש- $q>0$).

$$e^p = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{qk}\right)^{kq} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{p/q}{k}\right)^k\right)^q =$$

(תת-סדרה של סדרה מתכנסת)

$$= \left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p/q}{k}\right)^k\right]^q \Rightarrow e^{p/q} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p/q}{k}\right)^k$$

(סדרה שמתכנסת ל-L ולכן גם $L^q = e^p$ ולכן $L = e^{p/q}$) ⇐

תכונות: (הוכחה:)

$$e^x = \inf\{e^t : t\in\mathbb{Q}, x<t\} = \sup\{e^r : r\in\mathbb{Q}, r<x\}$$

יהי $t>x>r$. אז $\exists n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{t}{n} > \frac{x}{n} > \frac{r}{n}$

$\Leftarrow$ $\frac{t}{n}+1 > \frac{x}{n}+1 > \frac{r}{n}+1$. נעלה בחזקת n (מספר טבעי)

$\Leftarrow$ (מכיוון שכולם חיוביים) $\left(\frac{t}{n}+1\right)^n > \left(\frac{x}{n}+1\right)^n > \left(\frac{r}{n}+1\right)^n$

$e^t \geq \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \geq e^r$ כי $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ מתכנסת ל-e^x (אתמול ②)

כלומר אנחנו יודעים ש- e^x הוא ה-$\inf$ של e^t מעל הרציונליים ש-t גדולים מ-x. מצד ③



טורים שארית וקירובים

מהגדרת הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, הטור $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ יקרא הזנב שלו.

שאלה: מה **לא** הגדרת הסכומים החלקיים?

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots$$

(t_n) סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ הינו

$$t_1 = a_{m+1}$$
$$t_2 = a_{m+1} + a_{m+2}$$
$$t_3 = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3}$$
$$\vdots$$
$$t_k = a_{m+1} + \dots + a_{m+k}$$

ואילו סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הינו

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_k = a_1 + \dots + a_k$$

נשים לב ש $t_1 = S_{m+1} - S_m$

$$t_2 = S_{m+2} - S_m$$
$$t_3 = S_{m+3} - S_m$$
$$\vdots$$
$$t_k = S_{m+k} - S_m$$

(סמן את $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ ע"י r_m.

משפט אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ל S אזי $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס גם $m \in \mathbb{N}$ ומתקיים $S = r_m + S_m$

② אם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ומתקיים $S = r_m + S_m$.

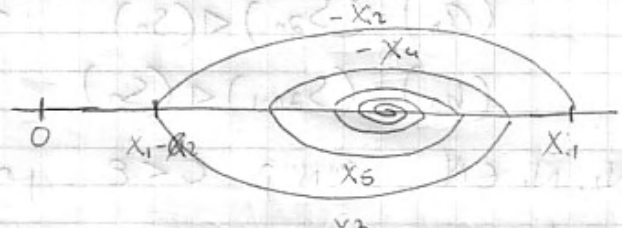
הוכחה: ① $t_k = S_{m+k} - S_m$. $S_n \to S \iff S_{m+k} \to S$

$$\Leftarrow \quad t_k \longrightarrow S - S_m = r_m$$

② $S_{m+k} = S_m + t_k \longrightarrow S_m + r_m$. $\Leftarrow \quad S = \lim S_{m+k}$. מש"ל

טור עם סימנים מתחלפים

משפט (לייבניץ) תהי (x_n) סדרה כך ש $x_n > 0$ ו- $x_n \to 0$. אזי $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} x_n$ מתכנס. $x_n > x_{n+1}$



יהי S סכום הטור, אזי $x_1 > S > 0$.

למת"ד הכללי והתלת מדה הכללית: הוכח מתמן אותם להיפך ולקיום הוכחה שמשתמשת בקריטריון קושי.

הוכחה (בעזרת הגדרה של קנטור)

$S_1 = x_1$: b_1 (לפקיר) $\quad a_1 = S_2 = x_1 - x_2$

$S_3 = x_1 - x_2 + x_3$: $b_2 \quad a_2 = S_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$

$\vdots$

S_{2n-1} : $b_n \quad a_n = S_{2n}$

שתי סדרות $a_n = S_{2n}$ ו- $b_n = S_{2n-1}$ שתי סדרות מונוטוניות בתנאי הגדרה של קנטור.

נטען ש (a_n) מונוטונית בתנאי הגדרה של קנטור.

$a_n < a_{n+1} \iff a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = S_{2n} + x_{2n+1} - x_{2n+2} - S_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n+2} =$

מומלץ לך להוריד את זה בינתיים

$x_{2n+1} > x_{2n+2} \iff$ הגדרה

ולכן נכון כי (x_n) סדרה יורדת.

$b_{n+1} < b_n \iff b_n - b_{n+1} = S_{2n-1} - S_{2n+1} = S_{2n-1} - S_{2n} + x_{2n} - x_{2n+1} =$

$x_{2n} > x_{2n+1} \iff$ הגדרה $= x_{2n} - x_{2n+1}$

ולכן נכון כי (x_n) סדרה יורדת.

כעת קיבלנו שתי סדרות (a_n), (b_n) שמקיימות (a_n) עולה ו- (b_n) יורדת. נוכיח ש $a_n < b_n$:

$a_n < b_n \iff b_n - a_n > 0 \iff S_{2n-1} - S_{2n} = x_{2n} = (S_{2n} - x_{2n}) - S_{2n-1}$

x_n חיובית $\Leftarrow$ $a_n < b_n$.

(יהי $(x_n)\in\mathbb{R}$ כך ש $x_{2n}\to 0$ כי $b_n-a_n=x_{2n}\to 0$)

$\Rightarrow$ לפי הלמה של קנטור קיים S אחד ויחיד אשר מקיים

$$a_n \to S \leftarrow b_n$$

מסקנה: $S\to S_n$

הסבר: $(a_n)=(S_{2n})\triangleleft(S_n)$

$(b_n)=(S_{2n-1})\triangleleft(S_n)$

מהנתון $\exists \varepsilon>0$ קיימים $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ כך ש לכל n מתקיים

אם $n>N_1$ אז $|S_{2n}-S|<\varepsilon$

$n>N_2$ אז $|S_{2n-1}-S|<\varepsilon$

עלינו אם $n>\max\{N_1,N_2\}$ אז יתקיים לכל n

$|S_n-S|<\varepsilon$ מתקיים ☺

ההוכחה הנ"ל ישימה לכל שיטת הוכחה לשני תנאים מתכנסים. יש פה תלוקה מתמטית ומשני הסופיים שהם יש גבול אחרים.

15.12.05

(50)

משפט לייבניץ

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\begin{cases} a_n > 0 \\ a_n > a_{n+1} \\ a_n \to 0 \end{cases}$

ואז קיים $0 < S < a_1$ כך ש-$S \in \mathbb{R}$ מתכנס

מסקנה: באותם התנאים כנ"ל, $\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס לסכום r_m ואז:

אם m זוגי $0 < r_m < a_{m+1}$

m אי-זוגי $0 > r_m > -a_{m+1}$

בשני המקרים $|r_m| < a_{m+1}$ כלומר $(-1)^m r_m > 0$

הערה: לא קשה לראות שהמשפט נותן קריטריון מתכנס מאוסף כל הטורים.

הגדרה: אם תנאי המשפט רק מתקיימים: $a_n \geq 0$, $a_n \geq a_{n+1}$ אך המסקנות עדיין מתקיימות.

טענה: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \lim(1+\frac{1}{n})^n = e \notin \mathbb{Q}$

הוכחה: $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ אנו נראה ש- $S_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{n+1} + \dots = e$

נניח ש- $e = \frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ מדרך השלילה

$$e - S_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!}$$

נכפול את $e - S_n$ ב- $n!$ ונקבל $n!(e - S_n) < \frac{1}{n}$. נקח $n = q$ ונקבל $q!(e - S_q) < \frac{1}{q}$ שהוא אפס ואז נגיע לסתירה כי לא ייתכן שקיים מספר טבעי $q!$ כך ש- $q!S_q \in \mathbb{Z}$ ו- $q!e \in \mathbb{Z}$ אבל $0 < q!(e - S_q) < 1$ משל (11) שהוא אי-שוויון.

[מהאחר מוסיף שאנשי מדע המחשב יודעים זה מזה בשלף ה- $n!$ שלה אומרים שאפשר להתקדם לא יותר מדי מהר בלי הרבה מחופרים]

הערה אם הינו מורידים מהשטח לחפש את הפרט שלה
ש - a_n מונוטונית לא היה נכון. למשל, הטור
$\frac{1}{\sqrt{1}-1} + \frac{1}{\sqrt{1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$ גם מתכנס.

משפט תהי (a_n) תזמית יורדת כך ש $\sum a_n$ מתכנס
אזי $n a_n \longrightarrow 0$.

הוכחה: מהדרך יורדת נלין $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n a_n$
לכל $m > n$ $a_1 + a_2 + \dots + a_m \geq m a_m$
$\Rightarrow (m-n) a_n \leq S_m - S_n$
$\Rightarrow n a_n \leq S_n - S_m + m a_n$
מהנתון $\exists \varepsilon$ יהיו $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ אשר מקיימים:
1 - לפי קושי $|S_m - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ אם $m, n > N_1$
2 - נקח $m \in \mathbb{N}$ ~~$m > N_1$~~ וכדאי נקח $2 \mid m$ כך ש
$m a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ אם $n > N_2$ אז
לפחות $N > N_1, N_2$ נקבל $n a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

משיעור הבא- פיתוח עשרוני של מספרים ממשיים.
קריטריון קושי להתכנסות וקריטריון אבל

(51) 18.12.05
אינפי

(כמה) תכונות של טורים מתכנסים

יהיו $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים מתכנסים. אזי

1. $a_n \geq 0 \Rightarrow \sum a_n \geq 0$ חיוביות
2. $a_n \leq b_n \Rightarrow \sum a_n \leq \sum b_n$ מונוטוניות
3. $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
4. $k \in \mathbb{R}$ $\sum k a_n = k \sum a_n$

} לינאריות.

אותנו לא נלכוד את זה. לזה קריטריאלי לאחר. אבל נשים לב שמה שקובע פה הוא בעצם שאחרי הטורים המתכנסים הוא מרחב וקטורי. חוץ מזה, לזה נכון גם לטורים שיש להם אבולוציה בדרך, חוץ מאשר ב-(3) ושם לאו דווקא טור עם גבול $(\infty-) + \infty +$.

משפט הקיבוץ (Condensation)

תהי (a_n) חיובית מונוטונית יורדת, אזי

$\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_0^\infty 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

הוכחה נסמן $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}$$

כאשר $n < 2^k$:

$$S_n \leq a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leq$$
$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k$$

כאשר $n > 2^{k+1}$:

$$S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5+a_6+a_7+a_8) + \ldots + (a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k$$

קיבלנו

$$\left.\begin{array}{ll} t_k \leq S_n \leq 2t_k & n < 2^k \\ \frac{1}{2}t_k \leq S_n \leq t_k & n > 2^{k+1} \end{array}\right\} \Leftarrow \text{אם } \sum a_n \text{ מתכנס} \Rightarrow (S_n)$$

חסומה $\Leftarrow$ t_k חסומה $\Leftarrow$ $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

סיימנו סאטרי נותן את הכיוון השני. אפס ☺

שימו לב שהוכחה לא ממש השתמשנו בכך ש a^k.
ורוצים לבדוק את אותה הגדרה עבור a^k ופשוט היינו
שמים את הסדרים מהתאם למספר שבחרנו.

<u>פתרון:</u>

(1) $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס $\iff$ $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ מתכנס.

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n \equiv q^n$$

טור גאומטרי q^n מתכנס $\iff$ $0 < q < 1$ $\iff$
$\iff$ $2^{1-p} < 1$ $\iff$ $1-p < 0$ $\iff$ $p > 1$.
קיבלנו הוכחה שונה למשפט שהוכחנו קודם.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ מתכנס $\iff$ $\sum 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n}$ מתכנס.

הטור מתפדר $\Leftarrow$ $2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln n}$.

$\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ מתכנס $\iff$ $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2}$ מתכנס

הטור מתכנס $\Leftarrow$ $\frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2} = \frac{1}{n^2 (\ln 2)^2}$.

ניתן למצוא הוכחה לקריטריון המעבה של קושי בספרו של Hardy + Wright
A Course in Pure Math. יש שם הרבה
תרגילים של סדרים.

תרגילים

יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, $a_0 \geq 0$

מוגדר $a_0.a_1a_2\ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$

ה3ג'ה עשרונית של מספרים ממשיים:

יהי $a \in \mathbb{R}$. קיים מספר שלם אחד ויחיד $[a]$ כך ש

מקיים $a_0 = [a] \leq a < [a]+1 \in \mathbb{Z}$

$$a_0 \leq a < a_0 + 1$$

$$0 \leq a - a_0 < 1$$

$$0 \leq 10(a-a_0) < 10$$

קיים $a_1 \in \mathbb{Z}$ אחד ויחיד $0 \leq a_1 \leq 9$ שמקיים

$$a_1 \leq 10(a-a_0) < a_1 + 10$$

$$\frac{a_1}{10} \leq a - a_0 < \frac{a_1}{10} + 1$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

ולפי הסימון שהצגנו $a_0.a_1 \leq a < a_0.a_1 + \frac{1}{10}$

נמשיך בדרך הקורסבית ונקבל בעד שכב

$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ $0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 9$ כ-

$$a_0.a_1 \ldots a_n \leq a < a_0.a_1 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$$

* תלמיד מקף, המחשב שים לב שיהלנו לעשות את הדבר עם 2 והינו מקבלים פיתוח בינארי של המ"ש.

$a_0.a_1 \ldots a_n \ldots$ נותן "הצגה עשרונית של a".

a הינו הגבול של סדרת הקירובים העשרוניים.

מפורשות: הסדרה $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ שהגיע קודם באופן הקורסבי, אינה מתכנסת כי הינו סדרה של שלמים, אבל:

$$a = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

מקרה מיוחד:

אם $\pi = 3.1415\ldots$ אחרי רושמים $-\pi = -3.1415\ldots$

אבל כאן לכאו ההצגה העשרונית שמופיעה ראן. למשל מה שעשינו ערשו בדרך ערשום $4(1-0.1415\ldots)$ אבל לא נקבל בח"י הינואים.

הוכיחו שכל סדרה יש לה לכל היותר שתי הצגות.

מה הכוונה שיש שתי הצגות? כאן הכוונה היא לא יחידה.
למשל $0.999\ldots = 1.000\ldots$
מה הכוונה שלכל היותר שתי הצגות? אלו הן כאלה:
1 - הצג אחד שבו יש רק אפסים
2 - הצג אחד שבו לפני אותו מקום יש רק תשעות.

נניח סדרה $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ $a_n \in \mathbb{Z}$
$0 \le a_n \le 9$ לכל $n \ge 1$
הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ מתכנס וסכומו a מספר ממשי. אשר הסדרה מייצרת את ההצגה העשרונית שלו. צמוד הטור מתכנס?

$$\frac{a_n}{10^n} \le \frac{9}{10^n}$$

$$a_0 \le S_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le a_0 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right) < a_0 + 1$$

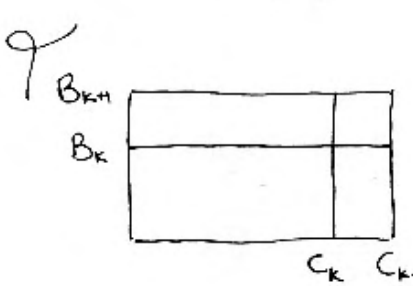
טור גאומטרי עם $q = \frac{1}{10}$

צומח (S_n) חסומה לכן הטור מתכנס.

☺ ☺ ☺ ☺ ☺

(כמה) קריטריונים לבחינת טורים עם איברים כלליים.

נזכיר של אבל Abel



$$c_{k+1}B_{k+1} - c_kB_k = (B_{k+1} - B_k)c_{k+1} + c_k(B_{k+1} - B_k) = (c_{k+1} - c_k)B_{k+1} + c_k(B_{k+1} - B_k)$$

מהו סדרות (a_i), (b_i) כך ש $n > m \ge 1$

$$\sum_m^n a_k b_k = a_{n+1}B_{n+1} - a_mB_m - \sum_m^n (a_{k+1} - a_k)B_{k+1}$$

כאשר $B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}$

הוכחה:

מהגדרת סדרה (c_k) נגדיר $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$

בסימון זה $\Delta B_k = B_{k+1} - B_k = b_k$

$$\Delta(a_k B_k) = a_{k+1} B_{k+1} - a_k B_k =$$

$$= (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} + (B_{k+1} - B_k) a_k = (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} + b_k a_k$$

(נכתוב n - m עד n :

$$a_{m+1} B_{m+1} - a_m B_m$$

$$a_{m+2} B_{m+2} - a_{m+1} B_{m+1}$$

$$a_{m+3} B_{m+3} - a_{m+2} B_{m+2}$$

$$\vdots$$

$$\underline{a_{n+1} B_{n+1} - a_n B_n}$$

$$a_{m+1} B_{m+1} - a_n B_n = \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} + \sum_{k=m}^{n} a_k b_k$$

☺ אש"ל

משפט (קריטריון דיריכלה Dirichlet)

יהיו $\sum b_n$ טור חסום (מאוים אחרות, סדרת הסכומים החלקיים חסומה), ו- (a_n) סדרה חיובית מונוטונית שואפת לאפס. אז הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

תלכורת (הזאה שם אבל Abel)

$$\sum_m^n a_k b_k = a_{n+1} B_{n+1} - a_m B_m - \sum_m^n (a_{k+1} - a_k) B_{k+1}$$

כאשר $B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}$.

הוכחה

off the record: מתפשים אז ש- N כך שהזנב מאוד $< \varepsilon$ $\left|\sum_m^n a_k b_k\right|$.

נשתמש בתלכורת:

$$\left|\sum_m^n a_k b_k\right| \leq M\left[|a_{n+1}| + |a_m| + \left|\sum_m^n (a_{k+1} - a_k)\right|\right] =$$

(M חסם של B_n)

$$= \left[\underbrace{|a_m - a_{n+1}|}_{\text{טור טלסקופי}} + \underbrace{a_m + a_{n+1}}_{\text{כי הסדרה חיובית}}\right] M =$$

$$= \left[\underbrace{a_m - a_{n+1}}_{a_n \text{ מונוטונית יורדת וגרן הביטוי בתוך ה-|·| שלילי}} + a_m + a_{n+1}\right] M = 2M \cdot a_m < \varepsilon$$

$a_n \to 0$ כי a_m את זה אפשר לדבר כי

נשתמש בקריטריון קושי.

יהי $M \in \mathbb{R}$ כך ש- $M \geq |B_n|$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

מהנתון $\exists \varepsilon > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך ש $\exists_{M2} > a_n = |a_n|$ לכל $n > N$.

אז לכל N כזה ולכל $n > m > N$ מתקיים

$$\left|\sum_m^n a_k b_k\right| \leq M\left[|a_{n+1}| + |a_m| + \left|\sum_m^n (a_{k+1} - a_k)\right|\right] \leq 2M\, a_m < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{M2} = \varepsilon$$

(אם a_n יורדת)

משל"ש ☺

Δ

$\sum a_n b_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס. משפט (יא) $\sum a_n b_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס בהחלט. $\sum a_n b_n$ מתכנס בהחלט $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס בהחלט. $\sum a_n b_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס. $\sum a_n b_n$ מתכנס

מתכנס גם בלי סוגריים, אבל אם טור מתכנס אותו שהכנסנו יש משהו שם טוב למה שהתקבל במשפט: אם נכנים סוגריים בטור שהתקבל מהכנסת סוגריים בטור $1-1+1-1+\ldots$ שהוא מתכנס.

לדוגמה! הטור $0 = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$

מכאן שהטור $\sum b_n$ מתכנס לאותו הסכום כמו $\sum a_n$. משל (ש)

$\Leftarrow$ סדרת הסכומים החלקיים של (b_n) מתכנסת

מתכנסת אם היא לאותו הגבול. $\Leftarrow$ $S \longleftarrow S_{n_k} = t_k$

הנחנו ש S_n מתכנס ל-S. אבל גם כל תת של סדרה מתכנסת

(n_k) עולה אמש $\Leftarrow$ $(S_n) \triangleright (S_{n_k})$

$S_{n_k} = a_n + \ldots + a_{n_k} = a_1 + \ldots + b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = t_k$

① **הוכחה:** לפיכך: $t_k := \sum_{n=1}^{k} b_n$ נשים ש-

נאמר ש- $\sum b_n$ התקבל מהטור $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים.

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}$$

$$\vdots$$

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$$

כאשר (n_k) עולה אמש למספרים טבעיים.

נסמן ב- $\sum b_n$ את הטור שהתקבל מהכנסת סוגריים בטור $\sum a_n$

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

נכניס סוגריים כך שיתקבל את הביטוי הבא:

$$\sum a_n = (a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots$$

כעת מתקיים,

בהינתן הטור $\sum a_n$ וסדרה מונוטונית עולה אמש ב- N (n_k)

נגדיר:

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}$$

$$\vdots$$

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$$

② **משפט** (תנאי הכרחי)

אם טור מתכנס וסכומו S אז לאותו סכום מתכנס גם טור שמתקבל מהכנסת סוגריים.

③ **משפט:** אם $\sum b_n$ טור מתכנס שהתקבל מהטור $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים שהתקבל בהם אותו סדר אותו סדר אז $\sum a_n$ מתכנס לאותו סכום.

הוכחה בלתי פורמלית אינה מספיקה,
אך היא בהחלטה הכיוון איזה משפט.

$$|t_{k+1} - t_k| = \varepsilon >$$

כי הם מאותו סימן

$$= \left| a_{n_k+1} + \dots + a_n \right| \geq |a_n| + \dots + |a_{n_k+1}| =$$

$$= |(a_1 + \dots + a_{n_k}) - (a_1 + \dots + a_n)| = |t_k - s_n|$$

יהי $N := n_K$ עבור $N \leq n \in \mathbb{N}$. קיים k כך ש $n_k, \dots, n_{k+1} \ni n$
$k > K$ (שם כלשהו). נניח ש $t_k = s_{n_k}$.
מהנתון $\varepsilon > 0$ קיים $\mathbb{N} \ni K$ כך ש $|t_k - t_l| < \varepsilon$ עבור
סדרות שונים, אבל נזכיר שכל k ו האברים $(*)$ שוו סימן).
נסמן אותו סימן. לכל k (k-ים שונים יהיו לפחות
אני מניחים ש (t_k) מתכנסת וכל האברים $a_{n_k}^{(*)}, \dots, a_{n_{k+1}}$ הם
הוכחה: (באותם הסימונים כמו קודם).
②

ה"מקור" התכנס.
וה טור שקיבלנו מתכנס, אבל אפשר לטעון שבעצם אם הטור
אם התסנו סדרים בכה שבכל סדרים אין חופף סדרים
אפשר יש דבר שקוראים כזה נכון?
מי סדרים מתכנס כך לא אומר שהטור ה"מקורי" מתכנס.

משפט: אם $\sum b_n$ טור מתכנס אשר התקבל מטור $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים כך שכל האיברים בתוך הסוגריים בטל' אותו סימן אז $\sum a_n$ מתכנס לאותו סכום $\sum b_n$.

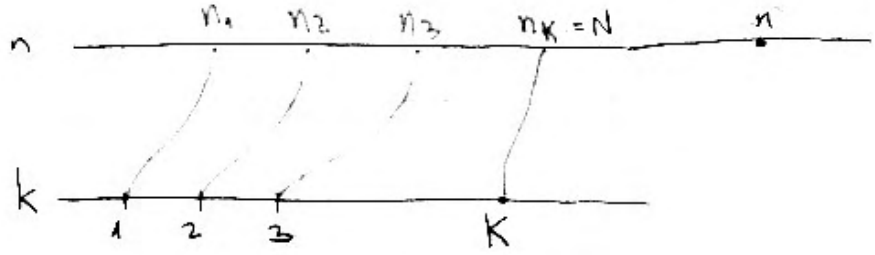
הוכחה: (n_k) סדרה עולה של טבעיים יש סדרה $(a_1, a_2, \dots)$ וסדרת סכומים חלקיים שלה S_n. b_n היא כלשהי:

$$(a_1+a_2+\dots+a_{n_1},\ a_{n_1+1}+\dots+a_{n_2},\ \dots,\ a_{n_{k-1}+1}+\dots+a_{n_k},\ \dots)$$

וסדרת הסכומים החלקיים שלה $t_k = b_1+b_2+\dots+b_k = a_1+\dots+a_{n_k} = S_{n_k}$

נראה ש- $\sum a_n$ מקיים את קריטריון קושי ולכן מתכנס.

מצד אחד מהנתון לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש $\sum b_n$ שמתקבל מ- $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים שאינו מתלכד לפי $\sum a_n$



הטור $\sum b_n$ מתכנס ולכן מקיים את קריטריון קושי:

יהי $\varepsilon>0$. אז קיים $N\in K$ כך שלכל $k,l \geq K$ מתקיים $|t_k - t_l| < \varepsilon$ (*)

אם $n > N$ נשים לב ש $n \geq n_k + 1$ עבור n כלשהו קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $k \geq K$ יתכן שם התכונה הבאה $n_{k+1}, \dots, n_{k+1} \in n$

$$S_n = \underbrace{\underbrace{(a_1+\dots)+(\dots)+\dots+(\dots+a_{n_k})}_{t_k} + a_{n_k+1}+\dots+a_n+\dots+a_{n_{k+1}}}_{S_n}$$

$$|S_n - t_k| = |a_{n_k+1}+\dots+a_n+\dots+a_{n_{k+1}}| \leq |a_{n_k+1}+\dots+a_{n_{k+1}}| =$$

(כי הם בעלי אותו סימן)

$$= |t_{k+1} - t_k| \overset{(*)}{<} \varepsilon$$

אזי $m > N$ קיים $k \leq l \in \mathbb{N}$ עבורו $|s_m - t_l| < \varepsilon$ וכיוון ש (t_n) תת-סדרה של (s_n) אזי $|s_n - s_m| \leq |s_n - t_k| + |t_k - t_l| + |t_l - s_m| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$.

מש"ל ☺

הגדרה: (סדר שהוא תת-סדרה) תהי (a_n) סדרה. סדרה (b_n) נקראת תת-סדרה של (a_n) אם קיימת $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ עולה ממש כך ש $b_n = a_{\varphi(n)}$.

משפט: (חוק הסנדוויץ') יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס. אם (b_n) היא סדרה שהיא סדר של (a_n) אזי $\sum b_n = \sum a_n$.

הוכחה: תהי $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ עולה ממש כך ש $b_n = a_{\varphi(n)}$. מהיות φ עולה ממש קיים $N \in \mathbb{N}$ מספיק גדול כך ש $\{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\} \supseteq \{1, \ldots, k\}$.

$t_n = b_1 + \ldots + b_n = a_{\varphi(1)} + \ldots + a_{\varphi(n)}$

$s_k = a_1 + \ldots + a_k \leq t_n \leq \sum a_n$

(t_n) מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ע"י $T \to t_n$ ולכן מתכנסת $\sum b_n = T \leq S \cdot \sum a_n \Rightarrow$

שזה בדיוק שמשפחה (a_n) מתקבלת מהסדרה (b_n) ע"י שינוי סדר באיבריה ע"י φ^{-1} ואז באותו אופן נקבל $T = S \Leftarrow T \geq S$.

משפט: (תוך התניה) אם $\sum a_n$ טור מתכנס מהתפ"ט.
תהי $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ תמורה ויהי $b_n = a_{\sigma(n)}$. אז $\sum b_n = \sum a_n$.

הוכחה: מהגדרתן $\sum a_n$ נראה כי:

$$P_n = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n > 0 \iff P_n = a_n > 0 \,,\ N_n = 0$$

$$N_n = \frac{a_n - |a_n|}{2} \qquad a_n < 0 \iff N_n = -a_n > 0 \,,\ P_n = 0$$

תלכודת: טור $\sum a_n$ מתכנס מהתפ"ט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס.

משפט: אם $\sum a_n$ מתכנס מהתפ"ט אז $\sum P_n$ ו- $\sum N_n$ מתכנסים ומתקיים $N - P = S$ כאשר $\sum a_n = S$, $\sum N_n = N$, $\sum P_n = P$.

ולהיפך, אם $\sum P_n$ ו $\sum N_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס מהתפ"ט.

הוכחה: נניח ש $\sum a_n$ מתכנס מהתפ"ט. נסמן $\alpha > \sum |a_n|$

$$|a_n| \geq P_n \iff \alpha > \sum |a_n| \geq \sum P_n$$

$$|a_n| \geq N_n \iff \alpha > \sum |a_n| \geq \sum N_n$$

נשים ♡ ש- $a_n = P_n - N_n$ ואריתמטיקה של טורים $N - P = S$.
להיפך אם $P = \sum P_n$ ו- $N = \sum N_n$ נשים לב ש-
$P_n + N_n = |a_n| \iff$ אריתמטיקה של אגפות $\sum |a_n|$
מתכנס ומתקיים $N + P = \sum |a_n|$.

תכונת משפט התילוף

אם $\sum a_n$ מתכנס מהתפ"ט אז $\sum P_n$ ו- $\sum N_n$ מתכנסים.
מספיק לשים לב: $\sum a_n = \sum P_n - \sum N_n$
אבל לפי המשפט מהשיעור הקודם $\sum P_n = \sum P_{\sigma(n)}$, $\sum N_n = \sum N_{\sigma(n)}$ -
לפי תוך התילוף לעיל טורים לא אוהבים לשנות סדר

$$\sum b_n = \sum a_{\sigma(n)} = \sum P_{\sigma(n)} - \sum N_{\sigma(n)} = \sum a_n = S$$

משל"ל (ש"ל)

$\sum q_n = \sum (-N_n)$ מתבדר ל- $-\infty$.

נשים לב: $\sum p_n = \sum a_n$ מתבדר ל- ∞

מסקנה הבאה:

סדרת האיברים החיוביים והשליליים של טור מתכנס חייבת לשאוף ל-0.

$(p_1, p_2, \ldots, p_{n_1}, \ldots)$

$(q_1, q_2, \ldots, q_{n_2}, \ldots)$

הוכחה: יהיו

הטענה שאנחנו נוכיח אותו הוא קצור ונקרא $\sum a_n = S$.

טור שסדרת האבסולוטיות שלו יש לה אבסולוטיות חלקיים שונים.

כלומר, אפשר למצוא טור שבטוח לא מתכנס, אם לא מאוכן הסכם -

$\sum a_{\hat{\sigma}(i)}$ יהיה S_2 והאבול הוא יהיה S_2

או שווה) ניתן למצוא פרמוטציה כך שהאבול העליון של

בהינתן טור שמתכנס בהחלט אבל שני מספרים $S_1 \neq S_2$ (שונים

את הטענה בקורה הרבה יותר חלקה. ניתן ניסוח אחר מכך השווה:

הערה: הטענה הזאת נכון אם נדרוש $a_n = \pm S$ ולא שהוא סתם

קיים סידור לאברי הטור $\sum b_n = S$ כך ש $b_n = a_{\sigma(n)}$.

משפט (רימן): אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז לכל $S \in \mathbb{R}$

סכום סדרות מתכנסות, והתכנסות של שתי סדרות תגרור

התכנסות של השלישית.

מסקנה לשם כך $\sum b_n = \sum a_n - \sum p_n$. לפי אריתמטיקה

מתפדרים לאינסוף.

מסקנה: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum p_n + \sum N_n$

דוגמה: $\sum \frac{1}{n}(-1)^n$ מתכנס בתנאי.

הגדרה (חשובה): $\sum a_n$ מתכנס בהחלט (absolutely convergent)

אם $\sum a_n$ מתכנס אבל $\sum |a_n|$ לא מתכנס.

הגדרה (חשובה): $\sum a_n$ מתכנס בתנאי (conditionally convergent)

אם $\sum a_n$ מתכנס אבל $\sum |a_n|$ לא מתכנס.

משפט הלייבניץ: תהי (a_n) סדרה יורדת של איברים חיוביים וסדרת האיברים השליליים של הטור

$\sum (-1)^n a_n$ שואפת ל-0. אז הטור מתכנס.

הוכחה: נסתכל על הסדרה (S_{2n}) של סכומים חלקיים זוגיים.

$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$

$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$

(a_n) יורדת $\Rightarrow a_{n-1} - a_n \geq 0$

$\Rightarrow S_{2n} \leq a_1$

$S_{2n} \geq 0$

$\Rightarrow (S_{2n})$ חסומה

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$

$\Rightarrow (S_{2n})$ מונוטונית עולה

$\Rightarrow (S_{2n})$ מתכנסת

$\lim S_{2n} = S$ נסמן

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S + 0 = S$

$\Rightarrow \lim S_n = S$

$\Rightarrow \sum a_n = S$

דוגמה: $\sum \frac{1}{n}(-1)^n$ מתכנס בתנאי.

$\sum \frac{1}{n}$ מתבדר

$\sum \frac{1}{n^2}(-1)^n$ מתכנס בהחלט.

$\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n$ מתכנס בתנאי.

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר

$\sum \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$ מתכנס בתנאי.

$\sum \frac{1}{n}$ מתבדר

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{0.99}}$ מתכנס בהחלט.

$\sum \frac{1}{n^{0.99}}$ מתכנס

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{1.01}}$ מתכנס בהחלט.

$\sum \frac{1}{n^{1.01}}$ מתכנס

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ מתכנס בהחלט $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ מתכנס בתנאי $\Leftrightarrow 0 < \alpha \leq 1$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ מתבדר $\Leftrightarrow \alpha \leq 0$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ מתכנס $\Leftrightarrow \alpha > 0$

יהי m_1 המקסימלי כך ש $p_1+\dots+p_{m_1} < S \le p_1+\dots+p_{m_1-1}+p_{m_1+1}$

יהי n_1 המקסימלי כך ש $q_1+\dots+q_{n_1}+p_1+\dots+p_{m_1} \le S < q_1+\dots+q_{n_1}+p_1+\dots+p_{m_1}+p_{m_1+1}$

$$\underbrace{q_1+\dots+q_{n_1}}_{A_1}+\underbrace{p_1+\dots+p_{m_1}}_{B_1} \le S < \underbrace{q_1+\dots+q_{n_1}+p_1+\dots+p_{m_1}+p_{m_1+1}}_{B_1}$$

נתעלם מהאיברים שכבר נבחרו ונמשיך באיברים שנותרו. אנחנו בוחרים את p_{m_1+1} ומוסיפים אותו לסכום הנוכחי. אנחנו יודעים שלא נחרוג מ S כי זה קורה רק כשהיינו מוסיפים את p_{m_1+1} לסכום הקודם, וזה לא קרה. אנחנו ממשיכים באופן דומה.

משפט בעלך (א)

כאן נמצא ההוכחה, הוא ירשום את ההוכחה בעצמו מאוחר יותר ואז יהיה ברור.

(ב) משפחה שנוצרת

אם היו לנו שני צוותי שופטים איך מחלקים אותם?

	a_0	a_0+a_1	$a_0+a_1+a_2$	$a_0+a_1+a_2+a_3$
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0
b_0+b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1
$b_0+b_1+b_2$	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2

היינו כופלים כל שני איברים ומכאנים.

אפשר לחלק בעיות כאלה לשבועיים אינטואיטיביים - אבל אז היו לנו אינסוף שורות ועמודות בטבלה ועדיין קלות למדי. איך מכאנים טבלה אינטואיטיבי?

עלית שהטבלה נראית כך

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	-1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-1	0
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

אם נסכם לפי שורות נקבל שסכום כל שורה הוא 0.

אם נסכם לפי עמודות נקבל:

$$\sum = \begin{cases} 0 = \cdots \frac{1}{32} \frac{1}{16} \frac{1}{8} \frac{1}{4} \frac{1}{2} -1 \\ 0 = \cdots \frac{1}{16} \frac{1}{8} \frac{1}{4} \frac{1}{2} -1 \ 0 \\ 0 = \cdots \frac{1}{8} \frac{1}{4} \frac{1}{2} -1 \ 0 \ 0 \\ \vdots \\ \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots}_{\sum = -2} \end{cases}$$

אבל! $-2 \neq 0$! אז אנחנו נוכחים שהסדר כאן משנה!

אותנו נראה באילו תנאים סדר הסכימה אינו משפיע.

שני מקרי סכימה (סדירה) חשובים:

① מרובעים:

	a_0	a_1	a_2	a_3	...
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	...
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	
⋮					

וכאן סדרת המכפלה נראית כך:

$$(a_0b_0, a_0b_1, a_1b_1, a_1b_0, a_0b_2, a_1b_2, a_2b_2, \ldots)$$

והטור יתן לנו את הסכומים של הריבועים.

② מלכנים:

	a_0	a_1	a_2	a_3
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2
⋮				

סדר הכיסוי: $(a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_0b_2, a_1b_1, a_2b_0, \ldots)$

אומרים שהטור $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט אם טור
הערכים המוחלטים $\sum |a_n|$ מתכנס. (חוק החיץ)
אם הטור מתכנס אבל לא בהחלט נקרא לו טור מתכנס בתנאי.
מבחן סידו קוש: שהוא סידור אחד חשוב.

משפט יהיו $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים מתכנסים מוחלטים עם
סכומים a, b בהתאמה (לפי סידור קוש:)
$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ (זה סידור קוש:)
אזי $\sum c_n$ מתכנס ל $\mathbb{R}$ ומתקיים $ab = c$.

הערה: כאן המיוחד של הטאיה נעשה באלגוריתם. מלבד יתרה
ש $\sum c_n$ מתכנס בהחלט ואז אם המיוחד של הטאיה שלה
הערה: נתבונן בסידור הרבועי. הפונקציה $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$
$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ הפונקציה הזו
$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא הפונקציה
$(i,j) \mapsto a_i b_j$ כך. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אחרי ההרכבה
אז ההרכבה $\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ תיתן סידור מתאים לטורים.
תביעת עזר: אם σ התמורה שהיתה נוחה ל σ^{-1},
הטור סידור קוש: או מוביל ל
טענה אם $\sum |w_n|$ מתכנס.
הוכחת הטענה יהי $\sum_{m} |w_m|$ סכום חלקי. נתבונן ב $N = \max_{i,j} \sigma^{-1}(i,j)$
כאשר i,j אינדקסים שמופיעים באיבר הראשון $w_0, \dots, w_m$.

$$ab \geq \left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right)\left(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\right) \geq \sum_{m} |w_m|$$

כי הטורים מתכנסים מוחלטים. כי $N \geq m$ אולי יש פחות איברים.

$\Leftarrow$ נוכיח ש סכום החלקים חסום ומכאן
ההתכנסות בהחלט.
שפיר שיש $\sum w_m$ מתכנס סכום שאינו תלוי
מטפיק נשים לב ש $u_t \leq s_t$ סכום חלקי שמתאים לסידור הרבועי. t^2.
מטרד ש $\sum a_i = s$ ו $\sum b_j = u_t$ לפי אריתמטיקה של פעולות $ab \leftarrow u_t \cdot s_t$
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס לאותו סכום. אם
סכום חלקי בטור $\sum w_m$ מתכנס סכום שאינו תלוי
בהתכנסות בהחלט.

$\Rightarrow$ $ab = \sum c_n$ משפט (11)

27.12.05
ג'נפי

סדרה היא למעשה אוסף שבו איברים $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$

מבחינה יש סדר טבעי ע"י הפונקציה $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$.

זו אחד האופנים שבהם הגדרנו את הסדרות.

סדרה כפולה היא כאן מטריצה אינסופית $X : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$(i,j) \mapsto x_{ij}$

$$X = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & & & & \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_{m1} & & \cdots & x_{mn} & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

כאן אין סדר טבעי. איך נדע לאיזה אפשר לשייך את האיברים?

סדרה (y_n) תיקרא סידור של הסדרה הכפולה (x_{ij}) אם
קיימת $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חח"ע ועל כך ש- $y_n = x_{\sigma(n)} = x \circ \sigma = x_{i_n j_n}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xleftarrow{x} & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \xleftarrow{\sigma} & \mathbb{N} \\ x_{i_n j_n} & \longleftarrow & (i_n, j_n) = \sigma(n) & \longleftarrow & n \end{array}$$

במונחים אלו, $\sum a_n$ סידור לסדרה הכפולה $x_{ij} = a_i b_j$
ואז הסדרה הרגילה (סמן (x_{ij}). אם יש סדרה באופן טבעי)
נדע לרשום את הסכום שלה, או לפחות לבדוק אותו מתכנס. אבל
מה שבעיה היא לדעת לנסח בצורה סדר לתאר את האיברים.

מהיכן שהיה הדוגמה שניתן לעיל הוא:

משפט: יהיו סדרים $\sum a_n$, $\sum b_n$ טורים. נסמנה כאן קיצר
$x_{ij} = a_i b_j$ ונניח שקיים סידור (y_n) של הסדרה הכפולה (x_{ij})
שמתכנס בהחלט לסכום הטור הזה S. אז גם
$\sum y_n$ מתכנס בהחלט לסכום הטור $\sum z_n$ שמתכנס בהחלט
ומתקיים $\sum z_n = S$.

קיבלנו סידור אחד שעבורו $AB=\sum y_n$ ולפי תוכן ההוכחה לא נוכל לעבור סידור אחר (☺)

$$A\cdot B \quad \downarrow \quad \sum y_n$$

$$t_n s_n = (a_0+\dots+a_n)(b_0+\dots+b_n) = \underbrace{d_1}_{s_2}+\dots+\underbrace{d_n}_{s_n} = d_1+d_2+\dots+d_n$$

$$= \underbrace{(a_1b_1)}_{p_1} + \underbrace{(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)}_{p_2} + (a_1b_3+\dots+a_3b_1) + \dots =$$

$$= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + \dots$$

תוכן הסידור

נתבונן בסידור שלפי ריבועים. $(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, \dots)$

כעת נתשב את הסכום: נרשום את האברים:

a_1b_1 | a_2b_1 | a_3b_1 | ...

a_1b_2 | a_2b_2 | a_3b_2

a_1b_3 | a_2b_3 | a_3b_3

a_1b_4

⋮

$\Leftarrow$ $\sum y_n$ מתכנס בהחלט.

$$\text{אי שוויון המשולש} \quad = \left(\sum |a_n|\right)\left(\sum |b_n|\right) \leq$$

$$\leq \underbrace{(|b_0|+\dots+|b_m|)}_{\text{סכום חלקי של } \sum |b_n|}\underbrace{(|a_0|+\dots+|a_m|)}_{\text{סכום חלקי של } \sum |a_n|} \geq |y_0|+\dots+|y_m| = \sum_1^m |y_n|$$

↓

יתכן להיות שבלבד אין יותר מ m איברים מלה שאנו רוצים באחד מהם אולם אין שום אחד שאנו רוצים באחד מהם אולם אין

$\sum |y_n|$ תסומה. נגדיר $M = \max_{1\leq n\leq m}\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$.

נתבונן בסכום חלקי $\sum |y_n|$ של $\sum |y_n|$ תיכף נקבע שהוא מתכנס

$\sum |y_n|$ אז $\sum |a_n|$ ו- $\sum |b_n|$ הוכחה: ראשית נראה שאם

משם כן נראה שסדרת הסכומים החלקיים של $|y_n|$ חסומה, ומאחר

יתר על כן, $\sum y_n$ מתכנס בהחלט.

משפט: אם $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים בהחלט וסכומם A

ו- B בהתאמה אז נקבע ש- $A\cdot B = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, כאשר לכל סידור

שנסמנו (y_n) לסדרה המקבלת $(a_ib_j) = (x_{ij})$ $AB = \sum y_n$

בשקף שלפני נסיתנו

הערה: כפי שנראה בהמשך קיים שהסדרות
כך שהסדרה a_n ניתנת לסידור מחדש אך $\sum a_n = 0$.
ובהתאם יתקיים $\sum a_n = 0$ לכל n. בשונה מהמקרה הסופי על

משפט קושי (משפט קוש')

אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנסים בהחלט אל הסכומים A ו- B
בהתאמה אזי $AB = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ כאשר $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$

הוכחה: (תכונת הסידור קשה)

$$(a_0b_0,\ a_0b_1,\ a_1b_0,\ a_0b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_0,\ \dots)$$

$$AB = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + \dots =$$

$$= \underbrace{(a_0b_0)}_{c_0} + \underbrace{(a_0b_1 + a_1b_0)}_{c_1} + \underbrace{(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)}_{c_2} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

משל (ב)

תזכורת משיעור

הוכחנו ש $E(x)$ מתכנס לכל x. כאן נוכיח ש $x \geq 0$

$$E(x) = e^x$$

נראה ראשית משהו יפה:

לכל x, y מתקיים הנוסחת חיבור: $E(x+y) = E(x)E(y)$

$$E(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$\downarrow$ $j = n-i$

$$\sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} x^i \cdot \frac{1}{j!} y^j = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!j!} x^i y^j$$

אבל ראינו כעת שנוסחת הכפל של $E(x)$ ו- $E(y)$ פה.

סדור מחדש:

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} x^i \cdot \frac{1}{j!} y^j$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!} x^i \frac{1}{j!} y^j = E(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

הוכחה $E(x)E(y)$

כאינו שלילי $x \geq 0$ $\lim(1+\frac{x}{n})^n = \sum \frac{x^n}{n!}$

ולאינו שלילי $x \in \mathbb{R}$ $\lim(1+\frac{x}{n})^n = e^x$

אם $x < 0$ נקבל

$$1 = e^x e^{-x} = e^x E(-x)$$

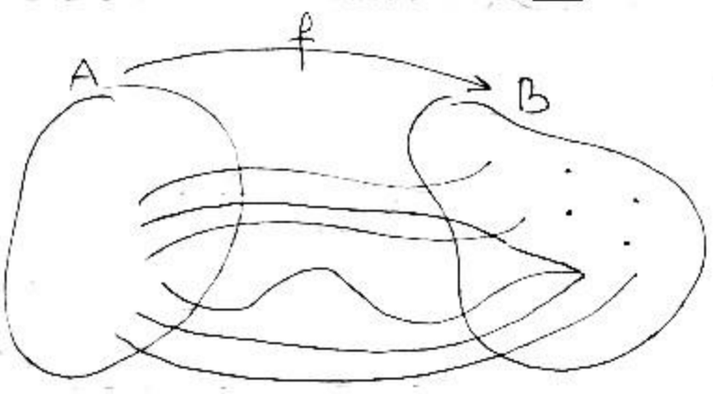
כי $-x > 0$

ולכן $E(x)E(-x) = E(0) = 1$

$$\Rightarrow E(x) = e^x$$

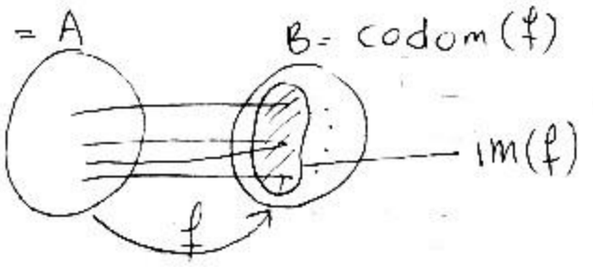
השלמנו את ההוכחה

פונקציות מעריכיות



אנחנו רוצים לתאר תכונות מן ההתנהגות של פונקציה אחת שלהתנהגות של פונקציה אחת לא יכול להיות יותר מ-1 התנהגויות שם משתנה אחד בכמה התנהגויות של משתנה אחר

פונקציה היא התאמה בין איברים ב A לאיברים ב B כך שאיבר מ A מותאם איבר אחד ויחיד ב B.



$$\forall b \in im(f) \subseteq codom(f) : \exists a \in dom(f),\ f(a) = b$$

זה עזר קצת להבין כי לפעמים משתמשים במילה "תמונה" כדי לתאר במה בדיוק שונים.

אם $f(a)=b$ אומרים ש- b התמונה (תחת f) של a.

נותר למשה עוד הגדרה מאוכזבים שמכניסים אליה a-ים נהיו מוגדרה את ה- b-ים המתאימים.

A ו- B יקראו קבוצות כלשהן, שנקרא f פונקציה.

מקרה מאוד מיוחד הוא פונקציות (מספריות) מעל $\mathbb{R}$ אלו

$dom(f), codom(f) \subseteq \mathbb{R}$

נאלץ קצת להסתכל על מה שקורה מעל הפונקציה.

$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in dom f, y \in codom f, y = f(x)\}$

דוגמה

סדרות הן למעשה דוגמה של פונקציות מעל $\mathbb{N}$:

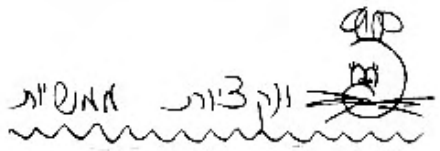
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto f(n) = f_n$

הסדרות הן הפונקציות שאנחנו מכירים. באופן דיסקרטי.

אבל מה אם המידות כבר לא $\mathbb{N}$ אלא נניח על קטע

domain-ים רציפים

(63) 29.12.05
איפה



תהי $A \subseteq \mathbb{R}$

$f : A \to \mathbb{R}$

- f — השם שנותן לפונקציה
- A — תחום ההגדרה
- $\mathbb{R}$ — טווח

רושמים $y = f(x)$ כאשר $x \in A$ ו- $y \in \mathbb{R}$

- x — משתנה בלתי תלוי
- y — משתנה תלוי

נזכיר שבהעתקה אין x אחד שמתאים ל y

סדרות הן אחלה דוגמה של פונקציות אמיתיות, כאשר תחום ההגדרה הוא $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

(עוד כמה) דוגמאות

(1) הפונקציה הקבועה: $c \in \mathbb{R}$ יהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \equiv c$$

כל מספר שנציב ב x, קבוע!
הפונקציה תמיד מחזירה c

אז $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ ו $\mathrm{Im} f = \{c\}$.

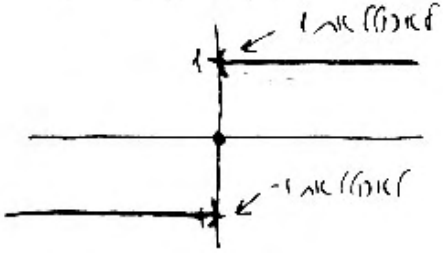
(2) $n \in \mathbb{N}$ $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $p_n(x) = x^n$.

(3) $n \in \mathbb{N}$ $r_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. פה כבר נתקלנו בבעיה של תחום ההגדרה, כלומר שכל מיני פונק' מאולצות עושות מחלות משמעות מבחינת תחום ההגדרה שלה. הכוונה היא שבמקרה זה n אי זוגי, אז מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$. אם n זוגי אז מוגדרת רק עבור $x \geq 0$.

(4) $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ ו- $a \neq 1$ $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ באופן הבא: $x \longmapsto a^x$

(5) $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת כך: $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

הגרף הבא שהמה מתאים לפונקציה הנ"ל מהדוגמה הקודמת.



⑥ $f(x) = y = \lfloor x \rfloor$ הגרף נראה כך:

(שלם הקרוב ביותר) x של

⑦ פונקציה שלא רציפה בשום נקודה $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת כך:

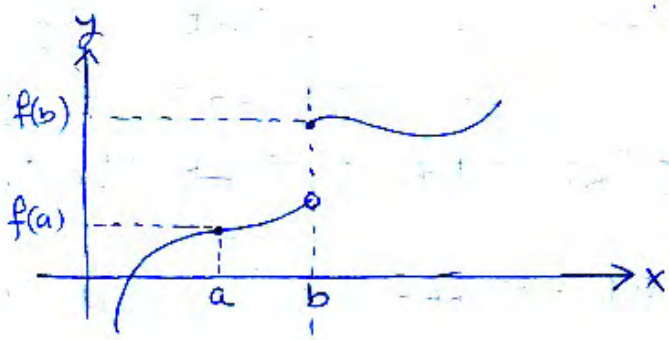
$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

לא ממש אפשר לצייר את הפונקציה.

רציפות של פונקציות

הוא רוצה לתת פיטר עבודה השנייה שתי דוגמאות אחת מהשתנה באופן רציף בפונקציה של הדוגמה השנייה.
מאופן אינטואיטיבי: ניתן שיש תלמיד שגרף מקום ישר ומדפים את הכמן ואת המיקום. אפשר לתאר את המיקום בפונקציה של כמן. עושים טבלה $\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline t \\ \hline \end{array}$ ואפשר לרשום $x = q(t)$ ולראות פונקציה, למרות שכל כמן מתאים מקום אחד ויחיד (אחרון או קונטיי שלו). ברשותי מלפים שאם מפקנו בכמן מקום מסוים אל המקום הכמן קרוב לאותו מקום קודם. למרות אין קפיצות קונטיות שראינו מהמקום התלמיד. הדוגמה היא שאנו מכירים כמה מאות שניים אתמטיקאים היו מטומים שכל הפונקציות מתנהגות מלוהה כלות. למרות, הם חשבו שכל הפונקציות הן רציפות. אולם פונקציה דירכלה, למשל, היא אכן רציפה! איך נתיר את הדעיון הזה מאופן פורמלי?

קל יותר להשתמש במונחים אלמנטריים. נניח שיש פונקציה שהגרף שלה נראה כך:



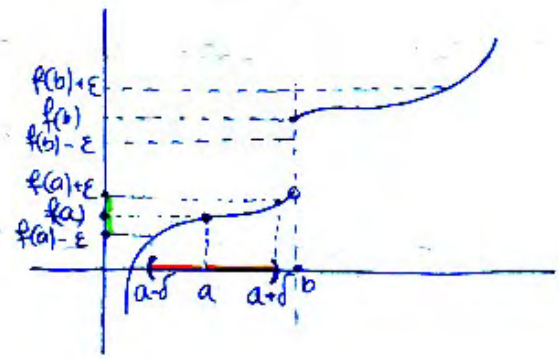
מה רואים בציור? אם לוקחים נקודות מספיק קרובות מאוף ל-a (משני הצדדים) אז הערכים של הפונקציות קרובים לערך של f(a). ו-b לא כך בכלל. גם מתקרבים מלמעלה אין מקפצים ערכים שקרובים ל-f(b) אפשר אפילו מתקרבים מלמעלה שאז אנחנו בתוך המ- f(b) אפשר לעשות גם מלמטה לאורך שקטן מ- f(b)-f(a).

הגדרה: קבוצה $U \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא **סביבה** של $a \in \mathbb{R}$ אם קיים קטע פתוח I כך ש $a \in I \subseteq U$.



הקטע ראו הוא מהמקור של segment - כי מה שמאלץ הוא אם תיקח מהקבוצה

ולרשום תיבים שיהיו את ε. נרשה אחר סביבות ε מסוימת מספיק ל- f(a) (נשאר) אחרי שאני אומרים שם a כך שהתמונות של הפונקציה מקטע נמצאות בתוך הסביבה שרשמנו.



שני אלגוריתמים שכאלה ☺

נשכיל ונכיר.

הראשון הינו של $S(x)$ רציפה בכל נקודה !! אבל את זה נעלה

$$\exists \delta > |x^2| = |S(0)-S(x)|$$

נבחר $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ואכן מוודאי שאם $|x| < \delta$ אזי

② $S(x) = x^2$ S רציפה ב- $a=0$ מהיותן $\exists \varepsilon > 0$

כלה טריוויאלי.

① אם $f(x) \equiv c$ אז f רציפה בכל $a \in dom f$.

דוגמאות

$\delta > 0$ יתאים δ הדרישות שלנו.

ב-$\exists$ וב-a אלו בדיוק שבהגדרת שאלנו δ כלה, אם ל

מה שהטיעון אומר הוא ש-δ לא משנים. הוא תלוי

אבל לה טיעון קלת מטעה, כי δ כה לא חייב להיות יחיד.

כזאת δ תקוי אם ב-$\exists$ ואם ב-a. אפשר $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

קטן כך שיתקיים $f(x)$ מוגדרת ב $(a-\delta, a+\delta)$

אנו נוכיח כאן דרישה כפולה: ה-δ יהיה חלק מקרב מספיק

- כדי שהתנאי $|f(x)|$ הפונק' חיובית תהיה מוגדרת ב-x.
- כדי שהתנאי $|f(a)|$ הפונק' חיובית תהיה מוגדרת ב-a.

כאלה תנאים

שימו ♥: את אומר שהגישה הלא יהיה מוכיח דרישה שהתקיים

$$\exists A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

נאמר ש- f רציפה ב- a אם

הגדרה: תהי $f: A \to \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה של $a \in A$.

הגישה הפורמלי הוא כלה:

הגדרה: רציפות בנקודה

$f: A \to \mathbb{R}$ רציפה ב- a אם

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

דוגמאות (המשך)

$S(x) = x^2$ רציפה על $a \in \mathbb{R}$

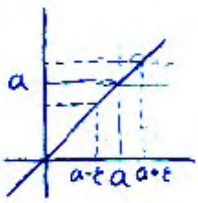
מבוקש $\varepsilon > 0$ יהי $\delta > 0$ כך ש- $|x-a| < \delta$ גורר $|x^2 - a^2| < \varepsilon$

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a| < |x-a|(|a|2+1) < \varepsilon$$

$$|x-a| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{|a|2+1}\}$$

$$|x-a| < 1 \Rightarrow |x+a| = |x-a+2a| \le |x-a| + 2|a| < 1 + 2|a|$$

דוגמא (בנאלית): פונקציית הזהות $Id(x) = x$ רציפה על $a \in \mathbb{R}$



יהי $\varepsilon > 0$ נתון. נבחר $\delta = \varepsilon$ ואז

אם $|x-a| < \delta = \varepsilon$

אז $|f(x) - f(a)| = |x-a| < \varepsilon$

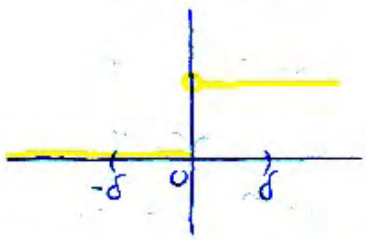
זה, כמובן, טריוויאלי. הכל כאן נובע מכך שבחרנו δ להיות ε עצמו.

מה זה אומר ש- f אינה רציפה ב- a?

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x : |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \ge \varepsilon$$

דוגמא:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



g אינה רציפה ב- $a = 0$ (הוכחה בכיתה).

יהי $\varepsilon = 1$ על $\delta > 0$, $\delta > x > 0 \Rightarrow g(x) = 1$, שגורם

$$g(x) - g(0) = 1 - 0 \ge \varepsilon$$

היו מתקבלת לעיתים שונים רשמי הפשט אך תהיה לנו מקיפה...
עכשיו נוכל להגדיר את f להיות הגבול הזה ב- a אם
נראה שאם משני הסדרים של a המתקבלת לאותו
גבול שאם התשובה תהיה ב- f אם נקבל את הזה בראש
ואז היה הייתה רציפה באופן ברור, אבל ראו לה המקרה המעניין יותר.
אם a הייתה מהופעת היינו יכולים להמשיך את f באופן שהיתה.

להגדיר את f ב- a רק ש- f תהיה רציפה ב- a?
האם ניתן להרחיב את f על I, במילים אחרות,

להלן f מוגדרת ב $I\setminus\{a\}$ כאשר I קטע פתוח.

מכיוון את a אנחנו תיקרא סביבה מנוקבת של a
הגדרה: קבוצה אשר מכילה קטע פתוח שמכיל את a אבל לא
כשהוא מאותו יותר)
(כמובן בהגדרות, אבל לה קלת מסובך יותר וזהין בהה
לכן המקרה המעניין של הרציפות הוא בנקודות בהן מוגדרת
הפונקציה a בדיוק מה היא נקודה מהופעת. אבל היא
שלפי f בהן ותקיים התנאי של הרציפות.
הנתה אותה! בשביל להיות אמתית צריך עדיין a כך
רציפה באופן ריק - כי פשוט אי אפשר למצוא סדרות
שכל הנקודה a בדיוק מה היא נקודה מהופעת. אבל היא
רציפה באופן ריק - כי פשוט אי אפשר למצוא סדרות

תארו לעצמכם את המצב הבא:

* הגדרה הפונקציה אבן תשובה:

נקח ε חיובי:

אם $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אזי f חסומה סביב a:

$$\forall x\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \quad \exists \delta>0\ \forall \varepsilon>0$$

ראו כי $x=a$ יכול או לא לקיים את הקבוע I אפשר שהוא שייך ל-a.

(קושי) **הגדרה**: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. $l\in\mathbb{R}$

נקרא **אבן** של f ב-a אם מתקיים

$$\forall x\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon \quad \exists \delta>0\ \forall \varepsilon>0$$

↓ **הבעיה** ש f לא מוגדרת ב-a.

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a אזי

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow x\in D_f\ (=dom(f))$$

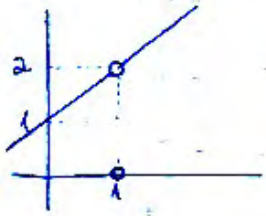
משפט (יחידות הגבול)

אם קיים גבול של f ב-a אז הוא יחיד.

סימון. אם הגבול קיים מסמנים $\lim_{x\to a} f(x)$

הערה: כאשר - נניח שיש שני אבולות שונים ואז נמצא ε שקטן מהפרש מניחים ונגיע לסתירה.

דוגמה: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $\quad f(x)=\frac{1-x^2}{1-x}$



ברור ש- $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

על אף שהפונקציה ש- f לא מוגדרת ב-1.

פורמלית: נניח $\varepsilon>0$ נמצא $\delta=\varepsilon$ ואז

אם $0<|x-1|<\delta$ אז

$$0<|f(x)-2| = \left|\frac{1-x^2}{1-x}-2\right| = |1+x-2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

לפי ניתן לפרמט את ההגדרה של הפונקציה לפיצול

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$$

g מוגדרת על כל $\mathbb{R}$

ורציפה בנקודה $x=2$.

$\Leftarrow$ $f(x_n)\to l$ שאפשר δ-ל

מהנחנו $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N$ כך שם $N<n$ (קטן) ש $|f(x_n)-l| > \varepsilon$

מהסתמך על אותו $\delta>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $0<|x_n-a|<\delta$.

סדרה שם התכונות של ההיפוך של הגדרה זו. מהנתון $\exists \varepsilon>0$ ו-

נניח ש- $l\in\mathbb{R}$ מקיים את ההיפוך של קושי. תהי (x_n)

הוכחה (רק אם מופיע ב- $\lim$)

משפט: שתי ההגדרות שקולות

היתה מהפיזיקה היינו מתקשים לאלגו את הדרך של $x_n\to a$.

כפי שאנחנו עושים שימוש בלה שהקילה a לא מופיעה. אם היא

מתקיים $f(x_n)\longrightarrow l$

(1) $x_n\in D_f$

(2) $x_n\neq a$

(3) $x_n\to a$

שואפת ל- l "

f מאבירה סדרות

שואפות ל- a ל- סדרות

(ה"ן ה) **הגדרה:** (אמנו ש קורקדיה הנקודה בשפה של סדרות)

תהי f מאידות המוגדרת מעיקרית שלו a $\mathbb{R}\ni$ יקרא אמנו ש

f ב- a אמת לכל סדרה (x_n) יש התכונות

משפט: (או ההגדרה)

תהי f מאידות המוגדרת מעיקרית שלו a. אז f רציפה ב- a

אמת $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

מתקיים אחרות: (1) $a\in D_f$

(2) קיים $\lim_{x\to a} f(x)$

(3) השוויון מתקיים

הכיוון ההפוך:

נניח מהנתון השלילה ש- $\exists \ell \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \ 0 < |x-a| < \delta \ \text{ו-} \ |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

אז δ - $\exists$ כזה נבחר $\delta = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = \varepsilon$ וכן הנ"א נקבל

ק"א x_n שמקיימים

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{ו} \quad |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$$

(x_n) מקיימת את שלושת התנאים של הגדרה שכן סדרת

$a \longleftarrow x_n$ שכן סנדוויץ' - כי $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0$ $\longrightarrow$ a

$x_n \neq a$ כי $|x_n - a| > 0$

$x_n \in D_f$ - f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a

(המשך)

מכאן והלאה, בדיוק כמו בהוכחה, נניח ש- $\ell \in \mathbb{R}$ אינו מקיים את ההגדרה של $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ אינו מקיים את ההגדרה כאשר $x \in D_f$ מקיים את ההגדרה כאשר $0 < |x-a| < \delta$ אך $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

עתה נבחר $\delta = \frac{1}{n}$ ונקבל סדרה (x_n) כך ש- $x_n \in D_f$, $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ אך $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon$.

(iii) מקיימת את התנאי הנדרש כאשר $f(x_n) \not\to \ell$ משום ש

$$x_n \to a \iff x_n - a \to 0 \iff |x_n - a| \to 0$$

* ההשוואה מאפשרת לנו לקבל תוצאות חשובות אחרות בקלות.

ג. $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ (קיים) ונוכיח זאת בדרך שונה מהדרך שהדגמנו בכיתה. הרעיון שהדגמנו הוא שהפונקציה $\sin\frac{1}{x}$ אינה 2 חח"ע בסביבה כלשהי של 0, ולכן נוכל לבחור את הסדרות x_n ו- y_n שקיבלנו כך שהסדרה $f(x_n)$ תהיה קבועה ושונה מהסדרה $f(y_n)$.

מה לגבי $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$? אנו יודעים שהגבול הזה קיים ושווה ל- 0, אך לא נוכל להשתמש בשיטה הקודמת כדי להוכיח זאת. הסיבה לכך היא שהפונקציה $x\sin\frac{1}{x}$ חח"ע בכל סביבה של 0, ולכן לא נוכל לבחור את הסדרות x_n ו- y_n כך שהסדרה $f(x_n)$ תהיה קבועה ושונה מהסדרה $f(y_n)$.

הוכחה

($\Rightarrow$) נניח $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. עלינו למצוא $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

מהגבול נובע שקיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

($\Leftarrow$) נניח שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$\begin{cases} |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < |x-a| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} |f(y) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < |y-a| < \delta \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x,y \; 0 < |x-a| < \delta \wedge 0 < |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

משפט (הקריטריון הקושי) יהי $\ell \in \mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ אם"ם

מה הקשר? אפשר לשים לב שהקריטריון הקושי לגבולות מאוד מזכיר את הגדרת הגבול. למעשה, אנחנו נראה שהוא שקול להגדרת הגבול.

נסתכל על הסדרה $(f(x_n))$. נניח ש $(f(x_n))$ סדרת קושי.
מהיותה $\varepsilon>0$ יהי $\delta>0$ המתאים ל- ε לפי הקריטריון.
אותו $\delta>0$ הנתון ל- $x_n \to a$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש לכל $n>N$
מתקיים $0<|x_n-a|<\delta$.
אם $n,m>N$ $0<|x_n-a|<\delta$, $0<|x_m-a|<\delta$
$\Leftarrow$ לפי הקריטריון $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. (לשים לב ש $x_n,x_m\in D_f$ לפי (1)) $\Leftarrow$ $(f(x_n))$ סדרת קושי
$\Leftarrow$ היא מתכנסת מאחר שקושי שקולה $f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} l$.
נסמן ש $l=\lim_{x\to a} f(x)$. נראה כעת מאחדות הגבול הסדרה קושי.
יהי $\varepsilon>0$ $f(x_n)\to l$ קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_1$
$|f(x_n)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ (*). יהי $\delta>0$ המתאים ל- $\frac{\varepsilon}{2}$ לפי הקריטריון.
$x_n\to a$ $\Leftarrow$ קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_2$ $0<|x_n-a|<\delta$ (**)
יהי $N=\max(N_1,N_2)$. לכל n עם התכונה $n>N$.
יהי $x\in D_f$ כך ש $0<|x-a|<\delta$. אזי,

$$|f(x)-l| \le |f(x)-f(x_n)| + |f(x_n)-l| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(שימוש ב)

יהי $n>N_1$ $\Leftarrow$ $|f(x_n)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ (*) כך ש
$n>N$ $\Leftarrow$ $0<|x_n-a|<\delta$ (**) כך ש
מהקריטריון $|f(x)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

משפט: אם $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$ אזי לכל $q < |l|$ ($r > 0$)

$$\exists \delta > 0 \;\forall x \; 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| > q \quad (r > f(x))$$

הערה: היה לנו משפט דומה מהשורות. אמרנו שאם סדרה מתכנסת לגבול שאינו אפס אז כאפס תמיד הסדרה תהיה כאן אנחנו אומרים משהו דומה אבל על טבעה מנוקבת של a

הוכחה: יהי $l > b$ (נתבונן ב- $l-b=\varepsilon>0$ לפי הי"מ $\delta>0$ כך

ש אם $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$$\Leftarrow \quad f(x) > l-\varepsilon = (l-b) - l = b$$

באופן דומה מוכיחים עבור $r > l$. מש"ל ☺

פעולות על פונקציות

עד עכשיו דיברנו על סדרות.

נתבונן בפרטיקולרי של המכונה

יש לנו מכונה שעושה איזו פעולה על

מה שיוצא מהמכונה של f ומה שיוצא

מהמכונה של g.

משפט: אריתמטיקה של גבולות:

נניח שקיימים $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$. אזי

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) * g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x) \quad \text{כאשר } *\in\{+,-,\cdot,\div\}$$

אם $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ אז גם יש לה $\div = *$

ההוכחה מתקבלת מהסתכלות בהגדרת הגבול של הינה ושאנו

מאה שעשינו בשביל סדרות.

משפט הסנדוויץ': יהיו $f(x), g(x), h(x)$ פונקציות כך ש-

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow g(x) \le f(x) \le h(x)$$

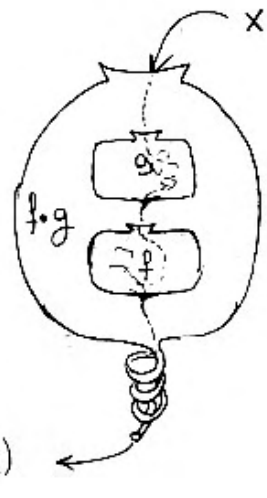
$$\lim_{x\to a} g(x) = l = \lim_{x\to a} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{:ו}$$

עכשיו שרוצים להוכיח את האבחנה של הפונקציות בא מאקב.

אבא מטורף:

הרכבה של פונקציות

לה נקרא



$$(g\circ f)(x) = f(g(x)) = Z$$

משפט (על הגבלה של הרכבה) נניח שמתקיימים התנאים הבאים:

(i) $\lim_{x\to a} g(x) = b$

(ii) $\exists \rho > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x-a| < \rho \Rightarrow g(x) \neq b$ (ניתן לשנות b לשנות מהנקודה)

(iii) $\lim_{x\to b} f(x) = l$

אז $\lim_{x\to a} f(g(x)) = l$

הוכחה:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0 : \quad 0 < |x-a| < \rho \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \varepsilon \quad \exists \alpha > 0$$

נתון (iii) כך ש-

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 : \quad 0 < |y-b| < \eta \Rightarrow |f(y) - l| < \varepsilon \qquad (**)$$

(i) אבא $\rho > 0$ שקיים לו $\rho_2 > 0$ כך ש-

$$\forall x \quad 0 < |x-a| < \rho_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \rho \qquad (*)$$

יהי $\rho_1 = \min\{\rho_2, \rho\}$.

$$\forall x \quad 0 < |x-a| < \rho \Rightarrow |g(x) - b| > 0 \qquad (**)$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \rho > 0 : \quad 0 < |x-a| < \rho \Rightarrow |f(g(x)) - l| > \varepsilon \qquad (***)$$

$$\rho_* > |g(x) - b| > 0 \Rightarrow \rho > |x-a| > 0 \quad \forall x$$

יהי $\rho = \min\{\rho_1, \rho_*\}$.

$$\rho > |g(x) - b| \Rightarrow \rho_2 > |x-a| > 0 \quad \forall x \qquad (*)$$

(i) אבא $\rho > 0$ שקיים לו $\rho_2 > 0$ כך ש-

מ(ii) יהי $\rho_1 > 0$ כך ש- $0 < |x-a| < \rho_1 \Rightarrow g(x) \neq b$ $\forall x$ $(**)$

$$\varepsilon > |f(y) - l| \Rightarrow \rho > |y-b| > 0 \quad \forall y \quad 0 < \rho \in \varepsilon \qquad (***)$$

מהנתון $\exists \alpha > 0$ שמ (iii)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0 : \quad 0 < |x-a| < \rho \Rightarrow |f(g(x)) - l| < \varepsilon \quad \exists \alpha > 0$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall \rho > 0 \quad 0 < |x-a| < \rho \Rightarrow |f(g(x)) - l| > \varepsilon \quad (***)$$

$$\rho > |g(x) - b| > 0 \Rightarrow \rho > |x-a| > 0 \quad \forall x$$

$$\rho > |g(x) - b| \Rightarrow \rho_2 > |x-a| > 0 \quad \forall x \qquad (*)$$

$$\varepsilon > |f(y) - l| \Rightarrow \rho > |y-b| > 0 \quad \forall y \quad 0 < \rho \in \varepsilon \qquad (**)$$

$$\varepsilon > |f(g(x)) - l| > 0 \quad (***)$$

$$\rho > |g(x) - b| > 0 \Rightarrow \rho > |x-a| > 0 \quad \forall x$$

$$\rho > |g(x) - b| \Rightarrow \rho_2 > |x-a| > 0 \quad \forall x \qquad (*)$$

$$\varepsilon > |f(y) - l| \Rightarrow \rho > |y-b| > 0 \quad \forall y \quad 0 < \rho \in \varepsilon \qquad (**)$$

$$\varepsilon > |f(g(x)) - l| > 0 \quad (***)$$

גבולות חד-צדדיים (one-sided limits)

סביבה ימנית של a: $(a, a+\delta)$

סביבה שמאלית של a: $(a-\delta, a)$

יהי $a \in \mathbb{R}$ ו- f פונקציה כך ש-

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad a - x > 0 \Rightarrow x \in D_f$$

מתקיים כך ש- f מוגדרת בסביבה ימנית מנוקבת של a.

באופן אנלוגי מגדירים סביבה שמאלית מנוקבת של a.

הגדרה (גבול מימין של פונקציה בנקודה)

$l \in \mathbb{R}$ הוא הגבול מימין של f כאשר x שואף ל- a מימין אומר

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad a - x > 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

אם מסמנים:

$$f(a+) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{0 \neq x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = l = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

בדרך אנלוגית מגדירים גבול משמאל של פונקציה בנקודה.

דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{0^+} f(x) = 1$$

משפט: $\lim_{a < x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ לכל (x_n) כך ש

$$\begin{cases} (i) & x_n \in D_f \\ (ii) & a < x_n \\ (iii) & x_n \to a \end{cases} \Rightarrow f(x_n) \to l$$

ההוכחה אינטואיטיבית כי כבר הורחנו קצת קודם. נתן...

משפט: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a אז:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = l = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

משפט: תהי f מוגדרת בסביבה (לאו מנוקבת) של a.
טענו 3 התנאים הבאים הינם שקולים.

1) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x \ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$
2) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
3) לכל (x_n) יהי $x_n \in D_f \to a$ מתקיים $f(x_n)\to f(a)$

הגדרה f רציפה מימין ב-a אם $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

משפט: f רציפה ב-a אם"מ f רציפה ב-a מימין ומשמאל.

Disclaimer: כאן בדיוק חבר שלה על איך שאמא הזו טענה אסור לבכות אז לה ובמה שהוא אומר משהו כמו שאו קיפוס מאמין אם לה שאו נירון.

הגדרה: f תיקרא רציפה ב-$D_f \supseteq A$ אם f רציפה ב-a לכל $a\in A$.

f תיקרא רציפה סתם f רציפה ב-D_f.

דוגמאות: $f(x) = x\,D(x)$ כאשר $D(x)$ שונק דיריכלה

f רציפה ב-$a=0$ ואינה רציפה ב-$a\neq 0$ (תרגול)

רציפות במקטע

המשך הדיון ברציפות במקטע סגור יביא אותנו למשפטים חשובים ביותר. נסכים שאם אפשר למדוד טמפרטורה בכל נקודה במקטע $[a,b]$ אז הגיוני שבמקטע תמיד תהיה נקודה שבה הטמפרטורה היא בדיוק 0 מעלות.

משפט ה"אפסים" של ברנשטיין

תהי f רציפה במקטע I, $a,b\in I$. אם $f(a)f(b)<0$ אז קיים $c\in I$ בין a לבין b כך ש- $f(c)=0$.

הוכחה: נניח ש- $a<b$ ו- $f(a)<0<f(b)$ (סעיף ב- $f(a)>0>f(b)$ מוכח באופן דומה). נסמן $a_0=a$, $b_0=b$ ונפעל באופן הבא: אם $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)=0$ סיימנו. אם $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)<0$ (אפשר $\frac{a_0+b_0}{2}=b_1$ $a_0=a_1$) אם $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)>0$ לעומת זאת $\frac{a_0+b_0}{2}=a_1$ $b_1=b_0$

נניח שהגדרנו $a_0\le a_1\le\dots\le a_n\le b_n\le\dots\le b_1\le b_0$ כך שלכל n טבעי $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\ne 0$. אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ סיימנו. אחרת אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0$ (אפשר $\frac{a_n+b_n}{2}=b_{n+1}$ $a_n=a_{n+1}$) אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$ לעומת זאת $\frac{a_n+b_n}{2}=a_{n+1}$ $b_n=b_{n+1}$

אם התנאים יתקיימו לאין סוף צעדים (ואיך נוכיח שזה לא קורה?) נקבל:

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\longrightarrow 0$$

יהי $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $a_n\le c\le b_n$ לכל n. מכך שהגבול של $a_n\to c$ הוא $b_n\to c$, מכך שהפונקציה f רציפה נובע כי $f(a_n)\to f(c)$ ו- $f(b_n)\to f(c)$.

אבל

$$f(a_n)<0\ \Rightarrow\ f(c)\le 0$$
$$f(b_n)>0\ \Rightarrow\ f(c)\ge 0$$
$$\Rightarrow\ f(c)=0$$

משל"ה

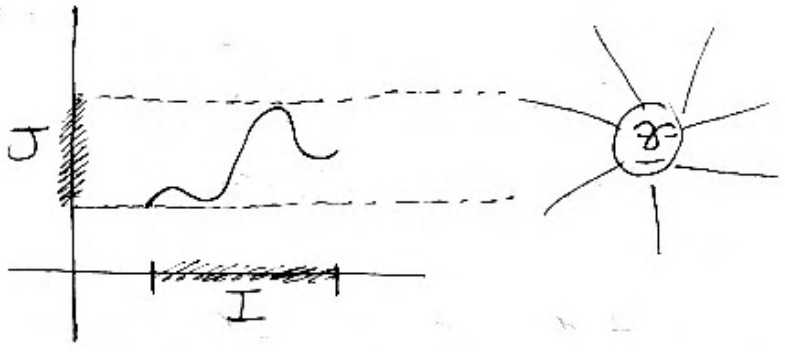
רציפות במקטע

משפט: תהי f רציפה במקטע I. $a,b\in I$, $a<b$ ו-
$f(a)f(b)<0$. אזי קיים $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$.

הוכחה (אחת) נניח (למ"ל) $f(a)>0>f(b)$
I קטע $\Leftarrow$ $I\ni[a,b]$. נתבונן ב
$S=\{x\in[a,b]\ :\ \forall t\ a\le t\le x\Rightarrow f(t)>0\}\subseteq[a,b]$
נשים לב ש- $a\in S$ $\Leftarrow$ $S\neq\emptyset$. כמו כן,
$S\subseteq[a,b]$ $\Leftarrow$ S חסומה. $\Leftarrow$ קיים $c=\sup S$.
נראה ש $a<c<b$ ו- $f(c)=0$.
f רציפה מימין ב-a לכן $f(a)>0$ $\lim_{x\to a^+}f(x)\cdot f(a)>0$
$\Leftarrow$ $\exists\delta>0\ :\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>0$
אם ניקח $a<x<a+\delta$, $x\in S$ $\Leftarrow$ $a\le x\le c$.
כמו כן, $c>a$. אחרת $c=a$. f רציפה משמאל ב-b.
לכן $\exists\delta>0$ $0<|x-b|<\delta\Rightarrow f(x)>0$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)<0$
אם ניקח $b-\delta<x<b$ $\Leftarrow$ $x\notin S$, כי קיים $b-\delta<t<x$
$f(t)>0$. $\Leftarrow$ $c<b$.
טענה: $f(c)=0$. אחרת נניח $f(c)>0$. f רציפה ב-c.
$\exists\delta>0$ $0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>0$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)>0$
יהי $a<e<c$. אזי f שלילית בקטע $[a,c]$ ובן
בקטע $[e,c]$ $\Leftarrow$ f שלילית ב- $[e,a]$
$S\subseteq[a,e]$ מסקנה קודמת ש- $c=\sup S$
בגלל אונאלוגיה שוללים את האפשרות $f(c)<0$.
$\Leftarrow$ $f(c)=0$.
משל ☺

מסקנה: משפט ערך הביניים Intermediate Value Theorem

תהי f רציפה בקטע I. אזי בהכרח $J=f(I)$ הוא גם קטע.



במילים אחרות: לכל $c,d\in J$ ולכל y כך שy שבין c לבין d, קיים $x\in I$ כך ש$f(x)=y$.

הוכחה: יהיו $c,d\in J$. מה"כ $c<d$. $\Leftarrow$ ק"ו $a,b\in I$ כך ש$f(a)=c$, $f(b)=d$. בה"כ ניתן להניח $a<b$ (אחרת נעבוד עם $h(t):=f(-t)$)
ויהי $c<y<d$. נגדיר $g:=f-y$ $(g(t)=f(t)-y)$
g רציפה ב-I (אי"ת כי f רציפה) ומקיימת $g(a)=f(a)-y<0$, $g(b)=f(b)-y>0$. לפי משפט ערך הביניים ל-g ש"ר x כך ש$a<x<b$, $x\in I$ $\Leftarrow$ $g(x)=f(x)-y=0$ $\Leftarrow$ $f(x)=y$ משפט (11)

② **משפט:** תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי f חסומה ב-$[a,b]$.

② **משפט:** תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ אזי f מקבלת ב-$[a,b]$ הן ערך מקסימלי והן ערך מינימלי.

הגדרה: בהינתן $f:D_f\to\mathbb{R}$ (כאשר ש-f חסומה ב-D_f) ו-$A\subseteq D_f$ אם $f(A)$ קבוצה חסומה. במילים אחרות, ק"ו $k,K\in\mathbb{R}$ כך ש$k\le f(a)\le K$ לכל $a\in A$.

הוכחת משפט 1:

נתבונן ב $S\subseteq[a,b]$ מוגדרת ע"י $S=\{x\in[a,b]: f\text{ חסומה ב-}[a,x]\}$

$S\neq\emptyset$. S חסומה $\Rightarrow$ קיים $c=\sup S$

$a\in S$

צ"ל: $c=b$, ואז סיימנו, כי אז $b\in S$.

נניח: $c<b$ ונראה f חסומה ב-$[a,c]$ ואז $c\in S$ ו-$c<c$ סתירה.

הוכחת הטענה: יהי $\varepsilon>0$ אז $\exists\delta>0$ כך ש- $|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-\lim_{x\to c}f(x)|<\varepsilon$ (f חסומה בסביבה מנוקבת של c)

$\Rightarrow\exists M>0\ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\ |f(x)|<M$

מסקנה: אם f רציפה ב-c אז f חסומה בסביבה (של c) שמכילה את c.

במקרה שלנו: $a<c$ שקולה ל- $a<c-\frac{\delta}{2}$. לפי ההגדרה יש $\delta>0$ כך ש-f חסומה בקטע $(c-\delta,c+\delta)$. מכ"ל (ניתן לבחור δ כך ש- $a<c-\frac{\delta}{2}$)

יהי $a<d<c<e<c+\delta$ כך ש- $d\in S$.

f חסומה ב- $[a,d]$ כי $[d,e]\subseteq(c-\delta,c+\delta)$ f חסומה גם ב $[d,e]$

$\Rightarrow f$ חסומה ב $[a,e]$ (ההוכחה עשויה להיות שונה)

$\Rightarrow e\in S$ סתירה $\Rightarrow c=b$.

נראה ש $b\in S$. אותו f איננה חסומה ב- $[a,b]$. f רציפה ב-b ולכן קיים δ שמאלי כך שהמסקנה f חסומה בסביבה שמאלית של b. (f חסומה ב-$(b-\delta,b)$ $\exists\delta>0$).

$\sup S=b$. יהי $s\in S$ כך ש $b-\delta<s\leq b$. f חסומה ב- $[s,b]$ ו- $[a,s]\Rightarrow f$ חסומה ב- $[a,b]$.

משל ☺

(74) 12/06
אינפי'

שאריות מסכ

משפט: תהי f רציפה ב $[a,b]$. אז קיימים $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ כך ש $f(x_{max}) \geq f(x) \geq f(x_{min})$ לכל $a \leq x \leq b$.
(כלומר f מתמשת בין מקסימום ומינימום).

הוכחה: נפרק משפט הפונקציה f חסומה ב $[a,b]$ - במילים אחרות ($f([a,b])$ חסומה. יהי $M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ נניח בשלילה שלכל $x \in [a,b]$: $M > f(x)$. (תמונת מפונקציה $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ מקטע $[a,b]$. $g(x)$ מוגדרת כי $f(x) \neq M$. נראה שהפונקציה g רציפה ב $[a,b]$.
הגדרת $M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ - $\forall \varepsilon > 0$ קיים $x \in [a,b]$ כך ש $f(x) > M - \varepsilon \iff M - f(x) < \varepsilon \iff \frac{1}{M-f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} \iff g(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ אינה חסומה מלמעלה ב $[a,b]$ וזה בסתירה לעובדה ש g רציפה בקטע הסגור.
בדומה מראים קיום מינימום. (יהי $m = \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ נגדיר $h(x) = \frac{1}{m - f(x)}$ ומוכיחים על h. יופי ☺

☺ פונקציות מונוטוניות ☺

הגדרה: יהי f פונקציה ו- $D_f \supseteq A$. f תיקרא עולה ב- A אם $\forall x,y \in A$ כך ש $x < y$ מתקיים $f(x) \leq f(y)$. f יורדת אם $f(x) \geq f(y)$ ויורדת ממש אם $f(x) > f(y)$. f מונוטונית ב- A אם היא או עולה או יורדת בקטע זה.

משפט: תהי f מונוטונית עולה ב (a,b). אז $\forall x \in (a,b)$ קיימים $f(x^+) = \inf_{x<t<b}\{f(t)\}$, $f(x^-) = \sup_{a<t<x}\{f(t)\}$

הוכחה: S חסומה מלעיל כי $\forall x\in(a,b)\ \exists t>x>a.\ f(t)\in S$ ולכן $S\neq\emptyset$

יהי: $A=\sup S$

צ"ל: $\lim_{x\to a^+} f(x)=A$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon)$$

יהי $\varepsilon>0$. (תמונת מ' - ε - A). צ"ל קיים $a<x<s>a$

כך ש- $f(s)>A-\varepsilon$. יהי $\delta=s-x>0$.

$$a<x<t<s \Rightarrow f(t)\le f(s) \quad \text{מונוטוניות}$$

$$\Rightarrow A-\varepsilon<f(s)\le f(t)\le A<A+\varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(t)-A|<\varepsilon$$

מלוכלך קצת אבל יש לו את כל הנתונים. ☺

הוכחה: $f(-x)\le f(t)\le f(-y)$ ☺

$(**)$ יהי $x<t<y$ $\Rightarrow$

$(*)$ - מהנתון שהוכח

הוכחה: $f(x)\overset{(*)}{\le} f(-y)\overset{(**)}{\le} f(-x)\overset{(*)}{\le} f(y)$

מסקנה: מהוכח הנתון אם $a<x<y<b$

(35) 15.1.06
אינפי'

תכונות: תהי f עולה ב- (a,b) אזי לכל $x \in (a,b)$

קי"א $f(x+)$ ו- $f(x-)$ ומתקיים

$$f(x-) = \sup_{a<t<x} \{f(t)\} \le f(x) \le f(x+) = \inf_{x<s<b} \{f(s)\}$$

$$a < x < y < b \Rightarrow f(x-) \le f(x) \le f(x+) \le f(y) \le f(y-)$$

תוספת (תרגיל) אם f מוגדרת מעלה את קי"א $f(a+)$ ומתקיים

$f(a+) = \inf_{a<t} \{f(t)\}$. יתר על כן, אם f מוגדרת ב- a

$f(a) \ge f(a+)$.

אם f מוגדרת מעלה את קי"א $f(b-)$ ומתקיים $f(b-) = \sup_{t<b} \{f(t)\}$

יתר על כן, אם f מוגדרת ב- b אז $f(b) \le f(b-)$.

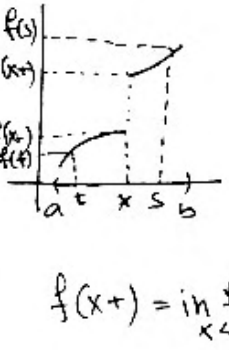
משפט יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ו- $f: I \to \mathbb{R}$ מונוטונית. אזי f

רציפה ב- I אמ"מ $f(I) = J$ קטע.

הוכחה:

($\Rightarrow$) f רציפה $\Rightarrow$ J קטע - כפי שכבר ראינו במשפט ערך הביניים.

($\Leftarrow$) נניח ש- f עולה ב- I.



תהי $x \in I$ נקודה פנימית אזי f אינה רציפה

ב- x אזי $f(x-) < f(x+)$. יהי $f(x-) < z < f(x+)$

לפי הגדרת הקבוצים $f(x-) = \sup_{a<t<x} \{f(t)\}$

אזי קי"ם $t < x$ כך ש- $f(t) \ge f(x-)$ כמו כן $f(x+) = \inf_{x<s<b} \{f(s)\}$

אזי קי"ם $s > x$ כך ש $f(s) \le f(x+)$.

לכן $f(t) \le f(x-) < z < f(x+) \le f(s)$. J קטע $\Leftarrow$ $z \in J$.

אזי קי"ם $y \in I$ כך ש $f(y) = z$. נסמן ש- $y = x$ וזו

תהיה סתירה. אותה אם $\exists x$ אזי $f(y) \ge f(x+) > z = f(y)$.

אם $x > y$ אז $z > f(x-) \ge f(y)$ וזו סתירה.

תרגיל: מהי הגדרת המשפט עבור נקודות קצה, אם ישנן.

נקודות אי רציפות

הגדרה: אם f אינה רציפה ב- $a \in D_f$ נאמר ש- a **נקודת אי רציפות** של f.

a תיקרא נק' אי רציפות **מסוג ראשון** אם קיימים $f(a^+)$ ו- $f(a^-)$ סופיים ושווים זה לזה $f(a^+) = f(a^-)$ נאמר שאי רציפות ב- a היא **סליקה** (removable).

אם אחד מבין הפונקציות הנ"ל אינו קיים או אי רציפות תיקרא **מסוג שני**.

דוגמאות

(1) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-x} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

נשים לב $1+x = \frac{1-x^2}{1-x}$

↓

סמן שיוון שאומר שלה נהיה כאשר הביטויים משני הצדדים מתאדים.

אז עבור הפונקציה נראה כך:

$a = 1$ היא נק' אי רציפות סליקה.

$f(1) = -1$

(2) $\operatorname{sgn}(x)$

ב- $a = 0$ יש אי רציפות מסוג ראשון

(3) $D(x) = y$ שמן פירוקה אינה רציפה בשל נקודה ואי רציפות היא מסוג שני.

הערה: אם f מונוטונית ב- I אז f (אם כלל) יש נקודות אי רציפות מסוג ראשון.

הערה: קבוצת נקודות הא' רציפות של f מונוטונית בקטע היא מנייה.

הוכחה: אם $x \in I$ נק' אי רציפות של f. נבחר $q(x) \in \mathbb{Q}$ כך ש $f(x^+) < q(x) < f(x^-)$.

נשים לב: אם y נק' אי רציפות אחת ולה נגזרת $g(y)$ מאותו אופן, אז אם $y > x$ אזי

$$f(-x) < g(x) < f(+x) < f(-y) < g(y) < f(+y)$$

$\Leftarrow g(x) < g(y) \Leftarrow$ מספר נקודות אי הרציפות של f הן לכל היותר בשוך הקבוצה $\mathbb{Q}$ שהיא בת מנייה. אשמ ☺

לכל קבוצה בת מנייה אפשר לבנות פונקציה מונוטונית שהיא אי רציפה בדיוק בנקודות אלה.

דוגמה:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

הגדרה: נאמר ש- $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ הינו הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל a אם

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

(כלומר אנו מדברים על הגדרה של גבול של סדרה).

מאופן אנלוגי ניתן לתת הגדרה לגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל $-\infty$.

משפט: $\lim_{x\to} f(x) = l \in \mathbb{R}$ אזי f סדרה (x_n) עם התכונות:

(i) $x_n \in D_f$
(ii) $x_n \to \infty$

מתכנסים $f(x_n) \longrightarrow l$

שאלה למחשבה: האם מספיק לבדוק תנאי סדרות אינסופיות

הגדרה (אומר ש- ∞ הוא גבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- a אזי

$$\forall Y \in \mathbb{R}\ (\exists \delta > 0)\ \forall x\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > Y$$

$-\infty$ אזי

$$\forall Y \in \mathbb{R}\ \exists X \in \mathbb{R}\ \forall x\ x > X \Rightarrow f(x) < Y$$

f הרכבת הפונקציות f

הרכבה פעמים יש תוצאה קיצונית בין שתי קבוצות.
איך מסמנים את זה מתמטית?

נניח שיש פונקציות f ו- g כאלה כך שפונקציית ההרכבה

אזי (i) $D_g = \mathrm{Im} f$

(ii) $D_f = \mathrm{Im} g$

(iii) לכל $x \in D_f$ $\quad g(f(x)) = x$

$y \in D_g$ $\quad f(g(y)) = y$

הגדרה פונקציה f תיקרא **הפיכה** אם קיימת g כך ש- $g : f$ גם היא פונקציה.

משפט: תהי f רציפה ועולה ממש (או יורדת ממש) בקטע I. אזי קיימת פונקציה g כך ש-

(i) $J = f(I)$ $D_g = I$ (ii) g היא הפוכה של f

(iii) g עולה ממש (או יורדת ממש) ב- J

(iv) g רציפה ב- J

הוכחה: משנו אין הוכחה כאן כלה. אנו נראה את זה אח"כ.

הפונקציות האקספוננציאליות

הגדרה לכל $a \neq 1$ $a > 0$ $a \in \mathbb{R}$ נגדיר $\exp_a$ כך:

$\exp_a(x) = a^x$ שמקיים

הוכחה נניח ש $a > 1$.

$\sup(a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x) = a^x = \inf(a^s : s \in \mathbb{Q}, s > x)$

נראה ש $\exp_a$ רציפה לכל x.

יהי $\varepsilon > 0$. קיימים $s > x > r$ כך ש $a^s - a^r < \varepsilon$

ויהי $\delta = \min\{x - r, s - x\}$

אזי לכל $t \in \mathbb{R}$, אם $x - \delta < t < x + \delta$ אז

$a^r < a^t < a^s \Rightarrow |a^t - a^x| < \varepsilon$. מש"ל ☺

17.01.06
אינפי'

משפט הקיום והיחידות של $\exp a$, $a>0$ הפיכה ב- $\mathbb{R}$.

מסמנים $\exp(x) := e^x$ הפיכה $\exp : \mathbb{R} \to J(=\mathbb{R}^+)$.

ראינו ש $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ אתקיים $x>0$ אז $e^x > x+1$ (מהטענות במשך האיברים הראשונים של הטור שהוא חיובי) $\Rightarrow$ מקריטריון ההשוואה (שגם הוכחנו) $\lim_{x\to\infty} e^x \geq \lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty$ (ובפרט $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$)

מה קורה ב- $-\infty$? נשים לב ש $e^x \cdot e^{-x} = 1 \Rightarrow$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. $1 \xrightarrow[-\infty\leftarrow x]{} 1$, $\infty \xrightarrow[-\infty\leftarrow x]{} e^{-x}$ (למה?) אם $x \to -\infty$

אז $-x \to \infty$ ו- $e^{-x} \to \infty$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{e^{-x}} = e^x \xrightarrow[-\infty\leftarrow x]{} 0$.

מה המסקנה? לפי הגרף ראינו מאיזה $\mathbb{R}^+$. מדוע? כי הגרף מתקבל רק מהנתונים!

הערה $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$ לכל $n>1$ ולכל $x>0$.

אם $x>0$ (ניתן לחלק ב- x^n):

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + x + 1}{x^n} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{x}{1} + \left(\frac{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + 1}{x^n}\right)$$

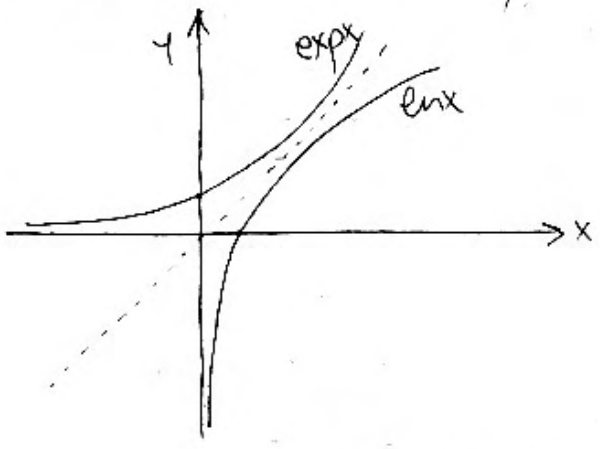
∞ $\frac{1}{(n+1)!}$

∞

מה זה אומר? $e^x \xrightarrow[\infty\leftarrow x]{} \infty$, $x^n \xrightarrow[\infty\leftarrow x]{} \infty$

אם ישנם $\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow[\infty\leftarrow x]{}$ זה מראה עוד שיעור אקסטרים באינפי' מהבה יותר משמעותי: מי גדל פוטנציאלי.

מהתיכון נזכור שאם פונקציות הן הופכיות ומשתקפים אחת
על אחת, הגרפים שלהן הן סימטריות באופן לאלכסון



הוכיחו שלכל $a,b>0$ מתקיים

$$e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\cdot e^{\ln b}=ab$$

$$\Rightarrow \ln e^{\ln a+\ln b}=\ln ab$$

$$\Rightarrow \ln a+\ln b=\ln ab$$

בדומה אנלוגית אפשר להראות

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

עוד נקודה מעניינת

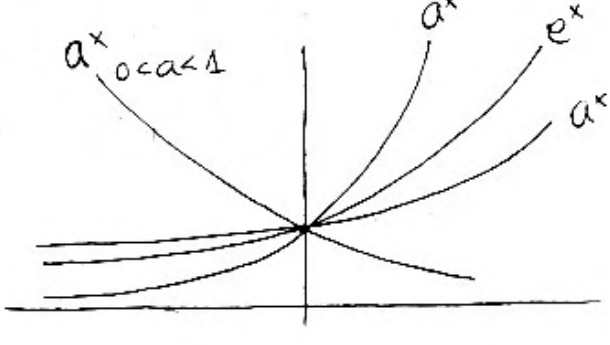
$$\lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$$

עתה נסתכל על פונקציות נוספות בבסיס כלשהו

$$\exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}=\exp(x\ln a)$$

מה אומר לנו שאפשר לעבוד עם exp ו- ln



את הפונקציה ההפוכה של $\exp_a$ מסמנים $\log_a$.

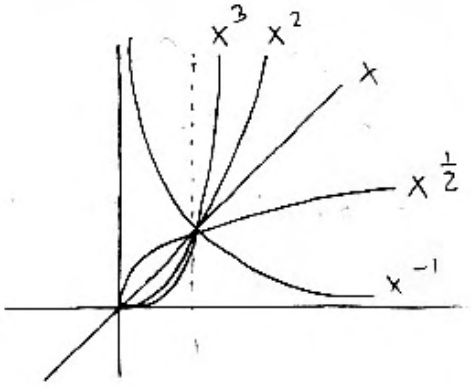
למשל $\log_a = \frac{\ln}{\ln a}$ - כלי שעוזר שם מאוד בגזירת.

(סתם לדוגמה) $p_a(x) = x^a$ $a \in \mathbb{R}$. אפשר אבל לרשום גם

$$p_a(x) = x^a = e^{a \ln x}$$

p_a רציפה כי היא הרכבה של פונקציות רציפות)

אם $a \neq 0$ p_a מונוטונית (מוכן החלק $a > 0$ ואם $a < 0$ יורדת)



רציפות במידה שווה

מה זה אומר ש- f רציפה ב- a?

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

מה זה אומר ש- f רציפה ב- A?

$$\forall a \in A \left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$$

את הקשר בין δ ו ε ואם ב- a שבו אנו עוסקים.

הגדרה: f תיקרא רציפה במידה שווה ב- A

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall x, a \in A \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

שינינו את הסדר של הכמתים. מה זה אומר? ב- δ

מספיק כותבים בדיוק δ שתלוי ב a:

$\forall A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x,y \; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

המחשה: נסתכל על הפונקציה הלינארית הבאה:

ראינו שאותו δ מתאים לכל נקודה במישור.
אבל פורמלית הלינארית בכלל לא משנה אפשר מסתכלים.

לעומת זאת הפונקציה הבאה:

אם $x>1$ אז $y=x$ מתאים
δ מקרן יותר ואת δ שלך
גם אותנו שלאותו ε
גם אותנו כאלו שלאותו ε

באופן כזה אם $y=\frac{1}{x}$
אנו רוצים במישור
כאן כבר שהולכים שאלה קרוב לאפס
δ קטן יותר.

אבל יש פה catch: לא משנה שאנחנו
נבחר כאן את מסתכלים על הקטע $[1,0)$
אבל אם מסתכלים על $(\infty, 1]$ $\frac{1}{x}$ קווקא כן רציפה
במישור. אנחנו רואים δ לפחות עם δ יותר, אבל
באופן כזה לא הכי קטן שיכול..

אבל הנקודה אכן היא שרציפות במישור אינה תלויה
בזה שהמרחק ביניהם - בעומק שלה, אלא גם
בתחום שלה!!!

הגדרה: תהי f פונקציה ממשית ב-A. אז:
f נקראת רציפה במ"ש ב-A $\iff$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y\in A\ (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

משפט: f מוגדרת ב-A אינה רציפה במ"ש ב-A $\iff$
$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x,y\in A\ (|x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq \varepsilon)$ (*)
שקול ל: $\exists \varepsilon>0$ וסדרות ב-A (x_n), (y_n) כך ש
$|f(x_n)-f(y_n)|\geq \varepsilon$! (**) אך $x_n-y_n\to 0$ מק"מ

הוכחה:
(* $\Rightarrow$ **) נניח $\varepsilon>0$ שעבורו $\delta_n=\frac{1}{n}$ ק"מ.
x_n, y_n כך ש- $|x_n-y_n|<\delta_n=\frac{1}{n}$ אבל $|f(x_n)-f(y_n)|\geq \varepsilon$
כלומר $x_n-y_n\to 0$ אבל $|f(x_n)-f(y_n)|\geq \varepsilon$.
(** $\Rightarrow$ *) בדיוק ההיפך מהנ"ל.
f רציפה במ"ש $\Rightarrow$ (x_n) מתכנסת $\Rightarrow$ (y_n) מתכנסת. $\Rightarrow$ ק"מ
ת"ס מתכנסות $x_{n_k}\to x$, $y_{n_k}\to y$ אזי $|x_{n_k}-y_{n_k}|\to 0$ (כי
$|x_{n_k}-y_{n_k}|<\delta_{n_k}\to 0$) $\Rightarrow$ $x=y$ (מדוע?)
מאידך מהנתון $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq \varepsilon$ אבל f רציפה בנקודה x
כלומר אם $|x-y|<\delta$ אזי $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
בדיוק ההיפך ממה שרשום את"ל. אבל זה בלתי אפשרי ☺

הדוגמה: $f(x)=x^2$ אינה רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

$x_n=n$ $\quad$ $y_n=n+\frac{1}{n}$

$x_n-y_n=\frac{1}{n}\to 0$

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|n^2-\left(n+\tfrac{1}{n}\right)^2\right|=\left|2+\tfrac{1}{n^2}\right|\geq 2$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ לעיל רציפה במ"ש בכל $\mathbb{R}$ כי עבור $\varepsilon=2$
אין δ כנ"ל.

משפט ③

טענה: אם f רציפה ב- $[a,b]$ אז f רציפה במ"ש.

הוכחה: בשביל השלילה, נניח ש- f אינה רציפה במ"ש ב- $[a,b]$. אז קיים $\varepsilon>0$ ו- (x_n), (y_n) ב- $[a,b]$ כך ש $x_n - y_n \to 0$ אבל $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$.
(x_n) חסומה ולכן יש לה ת"ס מתכנסת (x_{n_k}), נסמן: $x_{n_k} \to x$ ו- $x \in [a,b]$. טענה: $(y_{n_k}) \to x$.
להוכחה: אין סיבה שדווקא ש y_{n_k} מתכנסת בכלל.
אפשר לעשות טריק בסגנון דומה, נניח (y_{n_k}) מתכנסת. נרשום $(x_{n_k}) \to (x_{n_{k_\ell}})$ וכמובן $x \leftarrow x_{n_{k_\ell}}$. אבל $x_n - y_n \to 0$
$\Leftarrow 0 \longleftarrow y_{n_{k_\ell}} - x_{n_{k_\ell}} \Leftarrow x \leftarrow y_{n_{k_\ell}}$.
$x \leftarrow x_{n_{k_\ell}}$, $x \leftarrow y_{n_{k_\ell}} \Leftarrow$ לפי הרציפות
$f(x) \leftarrow f(x_{n_{k_\ell}})$, $f(x) \leftarrow f(y_{n_{k_\ell}})$ מצד אחד, מצד שני
$|f(x_{n_{k_\ell}}) - f(y_{n_{k_\ell}})| \geq \varepsilon$ אבל $f(x_{n_{k_\ell}}) - f(y_{n_{k_\ell}}) \to 0$ מהנתון.

הערות לגבי הרצה

- f רציפה ב- a אם $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

במשפטים, אפשר לרשום $a = \lim_{x \to a} x$

ואז נקבל

$$f(\lim_{x \to a} x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

מה שמתרחש פה זאת אומרת שאפשר להחליף את הסדר של פעולת הגבול עם פעולת הפונקציה (במקרה שהיא רציפה!) יש תלמידים בין הפעמים יבולע שהפעולות הפוכות.

- יש להבחין בין תכונות נקודתיות (בנקודה מסוימת שמקבלים) לגלובליות (בכל תחום ההגדרה)

שמקבלות רציפות בנקודה שמורות את תכונות סביבת הנקודה והראינו לעיל: למשל אם היא רציפה בנקודה ולפחות מינוי אחת היא חיובית בסביבה של הנקודה. אם היא רציפה בנקודה אז היא חסומה בסביבה שלה. בדיוק אותנו הרציפות מאפשר בתוכו את הטובדה שמה שקורה בנקודה מקרין גם בסביבה. אבל דרוש שהיה גם לא תמיד נכון. למשל אם פונקציה בנקודה ולפחות שווה שם 0 זה לא יוצר שבסביבה שלה היא אפס. אין מקבלים תכונות גלובליות? או שהפוך דורשה סוגים תכונות נקודתיות יותר, וזו שאנחנו עוסקים בתחום מאוד מיוחד. למשל, ראינו שאם היא רציפה בקטע סגור אז היא רציפה במ"ש.

בוא ראשון נתחיל בהערות!

תזכורת: פונקציה שמקיימת סדרות מתכנסות לסדרות מתכנסות
אלו היו לנו בגזירות. תשובה: $f(x)=x^2$ ב-$\mathbb{R}$.

משפט (ש) תהי f פונקציה ממ"ש בתחום הגדרתה A.
תהי (x_n) סדרת קושי. אזי $(f(x_n))$ סדרת קושי.

הערה: לא לנו טריוויאלי. אפשר היה לחשוב כי: f
כפונקציה רציפה במ"ש, בהכרח היא רציפה. x_n סדרת קושי
ולכן מתכנסת ובגלל הרציפות $f(x_n)$ מתכנסת
לגבול! ! לא נכון בהכרח, שכן x_n לא בהכרח
מתכנסת לגבול שהוא בתוך A. הטענה הבאה
נכונה כאשר אנחנו מדברים על A שהוא קטע
סתום (a,b) טענות כאלו אכן $A=[a,b]$ וקטע
הלכה: f רציפה במ"ש - טוען
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in A, \forall y\in A \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
יהי $\varepsilon>0$ ותהי (x_n) סדרת קושי ב-A. נוכיח
$(\exists \delta=\delta$ שפי רציפות במ"ש ב-A. עבור $\delta>0$ כזה
קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$|x_n-x_m|<\delta \Rightarrow n,m>N$ $\forall n,m$
(שפי נה ש(x_n) קושי) $\Leftarrow$ $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$
תזכורת: $f(x)=x^2$ ב-$\mathbb{R}$.

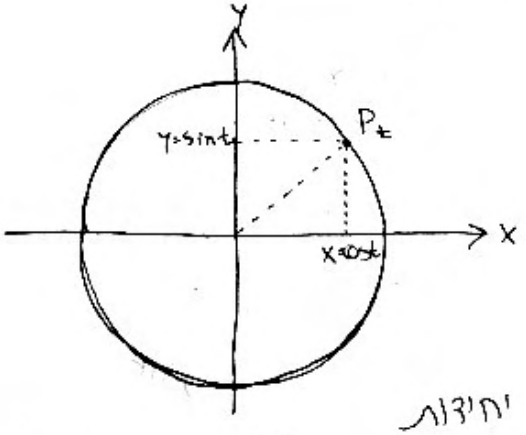
אולי במ"ש יותר הקדמה נוכל הרושם שפונק' כאו יכולה
שהיות רציפה במ"ש בקטע אינסופי אחת לה כאו נכון.
משל $f(x)=\frac{1}{x}$ רציפה במ"ש ב-$(0,1]$
אם $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במ"ש בתחום הגדרתה $\mathbb{R}^+$.

משפט: תהי f מוגדרת ורציפה ב (a,b).
אזי f רציפה במ"ש ב (a,b) אמ"מ
f ניתנת להרחבה רציפה ב $[a,b]$.

הוכחה:
($\Leftarrow$) זה טריוויאלי. אם יש הרחבה רציפה
g ל-$[a,b]$ אז לפי משפט קודם ההרחבה
רציפה במ"ש ב-$[a,b]$ ובפרט זה נכון ש f
רציפה אם נצמצם תלכ"ר (a,b) וזו f.

($\Rightarrow$) נראה שקושי רציף כאן.
ויהי $\varepsilon>0$ נתון. צריך למצוא $\delta>0$ כך ש
$\forall x,y \in (a,b)$ $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
הוא ש f רציפה במ"ש ב (a,b)
מהנתון $\exists \varepsilon>0$ יהי $\exists \delta>0$ שמבטיח שלכל
$a<x,y<a+\delta$, $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
אבל למה! אם $a+\delta-x>0$ ואם
$a+\delta-y>0$ אז $|x-y|<\delta$ ולכן מהנתון
$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. למעשה קיבלנו את
ההתנהגות של f אפילו קרוב ל a.
נגדיר $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $g(x)=\begin{cases} f(x) & a<x<b \\ \lim_{t\to a^+} f(t) & x=a \end{cases}$
g רציפה ב $[a,b]$ (למה?) ומתלכדת עם f ב (a,b).
משל"ש ☺

הגדרת הטריגונומטריות (סוף קדר)



יהי $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

מעגל היחידה.

(שאול את הנקודה $(0,1)$

מהיות $t \in \mathbb{R}$, אם $t>0$ (ע"פ

על מעגל היחידה מכיוון השעון מ- t יחידות

עד שנגיע לנקודה $P_t = P(t)$ אם $t<0$ (ע"פ מכיוון השעון.

(הכיוון החיובי הוא (עד כיוון השעון) . לאדיר

$\cos t \equiv x(P(t))$ הקואורדינטה ה-x -ית של P_t

$\sin t \equiv y(P(t))$ — " — y — " —

מהגדרה הזאת ומהיות הפיתוח הטריגונומטרי מתקיים אותנו לכתוב:

$$\cos(t+2\pi) = \cos t$$

$$\sin(t+2\pi) = \sin t$$

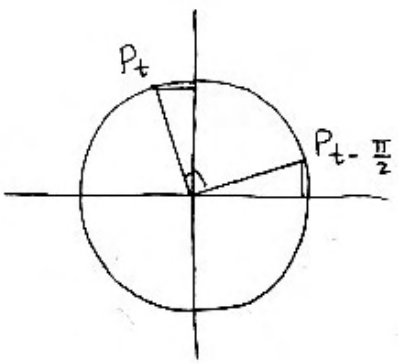
שזה אומר $P(t+2\pi) \equiv P(t)$ כי ההיקף של מעגל הוא 2π.

כמו כן, $x^2+y^2=1 \Rightarrow \cos^2 + \sin^2 = 1$.

כמו כן $\cos, \sin \leq 1$.

P_t ו- P_{-t} סימטריות מיחס לציר ה-x

$$\cos t = \cos(-t) \quad \text{(זוגיות)} \quad \Rightarrow \quad \sin(-t) = -\sin t \quad \text{(אי-זוגיות)}$$



מה ניתן לומר על

$$\sin t = \cos(t-\tfrac{\pi}{2})$$

$$\cos(s \pm t) = \cos s \cos t \mp \sin s \sin t$$

סיימנו מתפלסים.

C ו- S זוהמים בהשראת הקבוצות של טיילור עם טורים אף סיימנו מתפלסים.

אמנם $x^2 > 9$ אבל $x > 0$ עבור $x > \sqrt{9}$ אבל $n=1$

$$(n+2)(n+1) > x^2 \iff$$

עבור $x>0$: $\frac{x^n}{n!} > \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \iff \frac{n!}{x^n} > \frac{(n+2)!}{x^{n+2}}$

הם אכן מתכנסים סימן דלמבר, אבל מה עם המונוטוניות?

אי־שוויונים נרצים עוד שזה טור פיבונאצ'י. את

כדי להיות יותר בדוק עליך לאפיין את זה...

אפשר לקבוע זאת מהמשוואה $C(x) \geq 1$ ו- $C(x)^2 + S(x)^2 = 1$

נקבל $C(x-y) = C(x)^2 + S(x)^2 = 1$

ועל אם ב- (*) $y=x$ אז $x-y=0$ ואז

כמובן, כשנכון אם נגזרים $x=0$ נקבל $C(0)=1$.

— " — S — " — אי־זוגיות $S(-x) = -S(x)$

משום ש- C יש רק חלקות זוגיות $C(-x) = C(x)$

מתוך שקלוס של אריתמטיקה של טורים מתכנסים בהחלט

נוכל להוכיח

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y) \quad (*)$$

שנגזור פעם $\cos$ מתקיימת עבור $C(x)$ ו- $S(x)$.

אותנו לכך נוכיח את זה אחר אבל נראה שהתכונות

בפרט $C(x) = \cos x$ ו- $S(x) = \sin x$

מתבססים בהחלט לכן מתכנסים לכל x אחר.

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

נמצא בקבר שהטורים

(84)

(1) $x - \frac{x^3}{3!} < \underset{(\sin x)}{S(x)} < x$ $\Leftarrow$ (משפט הסנדוויץ')

(2) $1 - \frac{x^2}{2!} < \underset{(\cos x)}{C(x)} < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

(נניח שלפי הוכחה $\frac{\pi}{2} > x > 0$).

נחלק ב-x את (1) ונקבל

$$1 > \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{3!}$$

כאשר לפי סנדוויץ' $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

כי $x > 0$

אבל גם הפונקציה שלנו היא זוגית (או שמא אי-זוגית)

אם $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ אזי $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$.

כעת באותו אופן לפי cos:

$$\frac{x}{2!} > \frac{1-\cos x}{x} > \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

ומכאן משקלים של גבול $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

ו-(1) ו-(2) אפשר גם לקבל

$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin(0)$ $\Leftarrow$ sin רציפה ב-0

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos(0)$ $\Leftarrow$ cos רציפה ב-0

נשאר בעיה הקיימת שלנו - רצינו לדבר על π.

$\frac{\pi}{2} > 2 > 0 \Rightarrow$

$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = 1 - 2 + \frac{16}{24} < 0$

אבל $\cos 0 = 1 > 0$.



אבל! לפי משפט ערך הביניים קיים c בין

$\cos c = 0$. (נגדיר $\pi := 2\inf\{x\in\mathbb{R} : x>0, \cos x = 0\}$

כך שבין 0 ל-2 אין שורשים של cos רציפה!

אילו נקודות אי רציפות של $\cos$? נוסחת עזר

$$\lim_{y\to 0}\cos(x+y) = \cos x \lim_{y\to 0}\cos y - \sin x \lim_{y\to 0}\sin y = \cos x$$

$\Leftarrow$ $\cos$ רציפה בכל נקודה

ואיך עם רציפות $\sin$?

$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Leftarrow$ מהיום הפיתאגורי $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$.

אבל $\sin\frac{\pi}{2} > 0 \Leftarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\Rightarrow \cos(x-\tfrac{\pi}{2}) = \cos x\cos\tfrac{\pi}{2} + \sin x \sin\tfrac{\pi}{2} = \sin x$$

$\Leftarrow$ כעת $\sin$ הוא כמו $\cos$ אז גם $\sin$ רציפה.

מה עם המחזוריות שאיתה התחלנו את הסעיף הזה?

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi$$

מהנוסחאות של הכפל $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ -1

$\Rightarrow \cos 2\pi = \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi)$

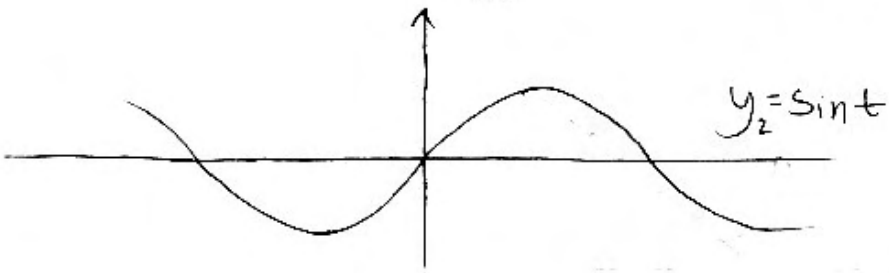
$$\cos\pi = \underbrace{\cos^2\tfrac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\sin^2\tfrac{\pi}{2}}_{1} = -1$$

$\sin(\pi) = \cos(\pi - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ← נזכיר שראינו

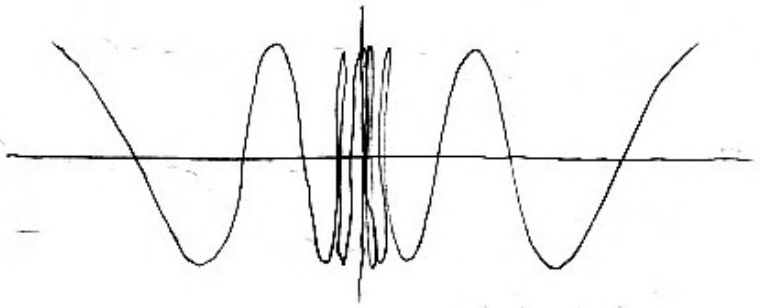
$\Rightarrow \cos 2\pi = +1$, $\sin(2\pi) = \cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$

$\Rightarrow \cos(x+2\pi) = \cos x$

נסתכל על הפונקציה $y_1 = \sin\frac{1}{x}$



והגרף של $y_1 = \sin\frac{1}{x}$ ומקבל ע"י כיווץ הגרף של y_2



שפונק' זו אינה אפס ב- $x = 0$. לאחר שהתמשנו מהגדרת הגבול של הגבה נסתכל על הסדרה $a_n = \frac{1}{n\frac{\pi}{2}}$

$$\sin\frac{1}{a_n} = \sin n\frac{\pi}{2} \to 1 \quad ; \quad a_n \to 0$$

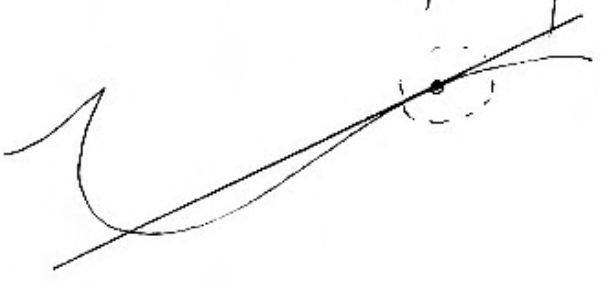
ונסתכל על $b_n = \frac{1}{n(\frac{3\pi}{2})} \to 0$ אבל $\sin\frac{1}{b_n} \to -1$

$\Rightarrow$ אין גבול. לאחר היא לא רציפה.

כאן יש, הפונקציה אינה רציפה במידה שווה ב- $(\infty, 0)$, למרות שהיא מתנהגת באזור ה- 0.

הגזירות

לפני כן, הייתה בעיה טכנית: איך נראה את הישר המשיק לעקומה נתונה:



אומרים לפי הסרטוט שלמעלה, אלא כאלה שניתן להבדיל אותם בקלות, למשל הקיום הוא גזל של פונקציה.

אומרים שהישר שיהיה הכי דומה ל f בסביבת הנקודה a שאנחנו מדברים עליה.

תהי f מוגדרת בקטע I והי $a\in I$.
עבור $x\neq a\in I$ נסתכל על

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

פיזיקלית מוגדר בסביבת אנקדטת של a, והוא מתאר את קצב השינוי של כל הגדלים שאנחנו יכולים להבין את $f(a)$. באופן טבעי נרצה לדעת אם יש גבול...

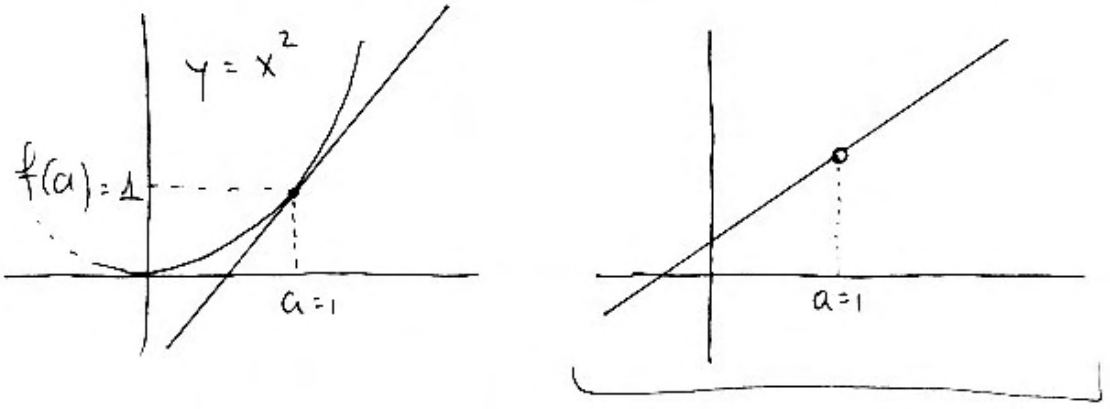
הגדרה: f תקרא גזירה ב- a (דיפרנציאבילית) אם קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. במקרה זה נסמנו ב: $f'(a)$ (דבוק מדין שמתוסית זה אחת)

הגדרה: אם a נקודת קצה של I אז נדרוש קיום הגבול הנ"ל בצד אחד.

סימון: מסמנים גם $Df(a)=f'(a)$

דוגמה: $f(x)=x^2$, $a=1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$



ה"ישום של הנגזרת" של הדוגמה:

נמצא $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

$$\Rightarrow f'(1)=2$$

הגדרה כללית:

נגזרת $\psi(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f-\psi(x)$ יש אי רציפות סליקה כי $x=1$.

$\Rightarrow$ ניתן להגדיר את $\psi(x)$ שגזירה.

משפט: f גזירה ב-a אמ"מ קיימת $\psi: I\to\mathbb{R}$ רציפה ב-a כך ש $f(x)-f(a)=\psi(x)(x-a)$

(87) 24.1.06
אינפי'

תיקון: $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ אין גבול כש $x=0$.

ניקח שתי סדרות

$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi} \longrightarrow 0$ $\quad f(x_n)\longrightarrow 1$

$y_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi} \longrightarrow 0$ $\quad f(y_n)\longrightarrow -1$

$\sin\frac{1}{x}\cdot D(x)$ הן תיקון מתאים עבור הדוגמאות שהובאו בתחילת הפרק. בשתיהן אין גבול ב-0. אבל מה ל-$\sin\frac{1}{x}\cdot x$ ומה ל-$D(x)\cdot x$ יש גבול ב-0 הן אינן מדוגמות שם, אבל אם נסתכל על $\sin\frac{1}{x^2}\cdot x^2$ ו-$D(x)\cdot x^2$ קשה אז כן...

תהי $f:I\to\mathbb{R}$ f גזירה ב-a אזי"א קיים הגבול
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ומה עם $(\frac{0}{0})$ כלל לופיטל אז הגבול שמי זו"ת מעלה שאם טיים של אבלות, אפשר ראן אם המונה ואם המכנה את אותם דברים!

משפט: תהי $f:I\to\mathbb{R}$ אזי f גזירה ב-a אזי"א קי"ם $\psi:I\to\mathbb{R}$ רציפה ב-a עם התכונה שלכל $x\in I$ $f(x)-f(a)=\psi(x)(x-a)$. במקרה זה $f'(a)=\psi(a)=\lim_{x\to a}\psi(x)$.

הוכחה:

($\Rightarrow$) נניח ש-f גזירה ב-a. כלומר קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. נגדיר $\psi:I\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$\psi(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\neq a\\ f'(a) & x=a\end{cases}$$

נשים לב ש-ψ רציפה ב-a (לפי הגדרה של $f'(a)$)

לכל $x = a$

$$0 = f(a) - f(a) = f(x) - f(a) = \varphi(a)(x-a) = f'(a)(a-a) = 0$$

לכל $x \neq a$

$$\varphi(x)(x-a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot x-a = f(x) - f(a)$$

($\Leftarrow$) נניח ש קי"מת $\varphi: I \to \mathbb{R}$ רציפה ב- a
ומקיימת ש $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a)$ לכל $x \in I$
נקבל ישירות ש- f גזירה ב- a.

לפי (*) $\quad \varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad x \neq a$

אבל φ רציפה ב- a ולכן קי"ם השוויון

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$$

ומש"ל (II)

דוגמאות

1) $n \in \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^n$ גזירה בכל $a \in \mathbb{R}$.

$$x^n - a^n = (x-a)\underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})}$$

$\varphi(x)$ מוגדרת שהיא רציפה. לפי יהלנד f גזירה.

$$\Rightarrow f'(a) = \varphi(a) = n a^{n-1}$$

2) $n \in \mathbb{N}$ $\quad g(x) = x^{-n}$ גזירה בכל $a \neq 0$

$$x^{-n} - a^{-n} = \frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n} = \frac{a^n - x^n}{(ax)^n} =$$

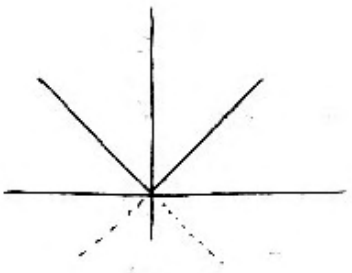
$$= (a-x)\frac{(a^{n-1} + a^{n-2}x + \ldots + ax^{n-2} + x^{n-1})}{a^n x^n} =$$

$$= (x-a)\underbrace{\left(-\frac{a^{n-1} + a^{n-2}x + \ldots + ax^{n-2} + x^{n-1}}{x^n a^n}\right)}$$

$\varphi(x)$ נומקן רציפה ב $a \neq 0$.

$$\Rightarrow g'(a) = -\frac{n a^{n-1}}{a^{2n}} = -n a^{-n-1}$$

אינטואיציה



$V(x) = |x|$ אינה גזירה ב- $a=0$.
אינטואיציה: יש שם שפיץ!
אבל מה אומר מתמטית?
מתקבלים מהלכות שונים שנראים. אבל
ניזון לוטקיות מגזירות תך דפדוף אל לה קוראים בטבר...

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x)$$

אומנם $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$

משפט אם f גזירה ב- a אזי f רציפה ב- a.
הוכחה: צ"ל ש"משפט הקודם קיימת ψ כך ש
$f(x)-f(a) = \psi(x)(x-a)$ ו- ψ רציפה ב- a.
$\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}\psi(x)\lim_{x\to a}(x-a) = \psi(a)\cdot 0 = 0$
$\Leftarrow$ f רציפה ב- a משפט ☺

הגדרה: f תיקרא **גזירה** ב- I אם f גזירה בכל $a\in I$.

אז כמובן אפשר להגדיר פונק' $g: I\to\mathbb{R}$ תהיה שלכל $a\in I$ מתקיים $g(a) = f'(a)$ ובאופן הפונק' הנגזרת של f.

אריתמטיקה של נגזרות תהינה f, g גזירות ב $a\in I$.

1. $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$
2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$
3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}$ אם $g(a)\neq 0$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$ אם $g(a)\neq 0$

הוכחה:

1. מוכיחים בכיתה
2. נראה שמתקיים בטענות $f(x)g(x) - f(a)g(a) =$

$$= (f(x)-f(a))g(a) + f(a)(g(x)-g(a)) + (g(x)-g(a))(f(x)-f(a)) =$$

$$= \psi(x)\,g(a)(x-a) + f(a)\psi(x)(x-a) + (a-x)(a-x)\psi(x)\psi(x) =$$

$$= \underbrace{\left[(a-x)\psi(x)\psi(x) + f(a)\psi(x) + g(a)\psi(x)\right]}_{\text{פ' גזירה ב-}a}(x-a) =$$

$\psi(x)$ גזירה

סכ' גזירות קבועה של פונ' גזירות

$\Rightarrow f(x)g(x)$ גזירה ב-a

$$(fg)'(a) = \psi(a) = \psi(a)g(a) + f(a)\psi(a) +$$

$$+ \psi(a)\psi(a)(a-a) = f'(a)g(a) + f(a)\psi'(a)$$

3. $\frac{1}{g(a)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g}(a) - \frac{1}{g}(x)$

אנו נפה בדיוק על הגדרה. מיוון לה מוגדר נגזרת של a.

מכיוון ש $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g}(a)$ נשר מוגדרין.

g גזירה ב-a $\Rightarrow$ g רציפה ב-a $\Rightarrow$

קיימת סביבה של a שבה $g(x) \neq 0$. $\Rightarrow \frac{1}{g}(x)$ נשר בסביבה.

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} = \frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)} = -\frac{g(x)-g(a)}{g(x)g(a)} =$$

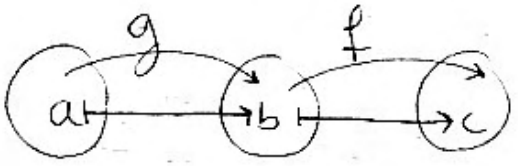
$$= \underbrace{\left[-\frac{\psi(x)}{g(x)g(a)}\right]}_{\text{רציפה ב-}a}(x-a) =$$

$\Rightarrow \frac{1}{g}(x)$ גזירה ב-a ! $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{\psi(a)}{g(a)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

$\psi(x)(x-a) = f(x)-f(a)$
$\psi(x)(a-x) = g(x)-g(a)$



משפט - כלל השרשרת



תהיינה g גזירה ב-a ו- f גזירה ב $b:=g(a)$
אזי $f\circ g$ גזירה ! - $g'(a)\cdot f'(g(a))$.

הערה: יהי $\psi(x)$ כך ש $g(x)-g(a)=\psi(x)(x-a)$ כאשר ψ רציפה ב- a
$f(y)-f(b)=\varphi(y)(y-b)$ כאשר φ רציפה ב- b

$$(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)=f(g(x))-f(g(a))=$$
$$=\varphi(g(x))(g(x)-g(a))=[\varphi(g(x))\psi(x)](x-a)$$

g גזירה ב- a $\Rightarrow$ g רציפה ב- a $\Rightarrow$ $\varphi(g(x))\psi(x)$ רציפה ב-a

$\Rightarrow$ $\varphi(g(x))\psi(x)$ רציפה ולכן שייכת לגבול.

$\Rightarrow$ $f\circ g$ גזירה ב- a ומתקיים

$$(f\circ g)'(a)=\varphi(g(a))\psi(a)=f'(g(a))g'(a)$$

מ.ש.ל ☺

נראה דוגמאות של כמה פונקציות:

ראשית נראה הדגמה אחרת של נגזרת - המוגדרת

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

נגדיר $h=x-a$ $\Leftrightarrow$ $x=a+h$ ואז

נקבל מהגדרה של גזירות

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(1) $\exp$ גזירה בכל $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^a(e^h-1)}{h}=e^a\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\ ?\ =0$$

כאשר $h>0$

הוכיח כי e^h מתכנס ל:

$$e^h = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{h}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}$$

עבור $h>0$ מתקיים $e^h > 1+h$ $\Leftarrow$ $\frac{e^h-1}{h} > 1$

בשקף הבא נראה כי

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{h}{n}\right)^i = 1+h+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{2!}+\ldots =$$

$$> 1+h+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{h^2}{2!}+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

$$> 1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\ldots+\frac{h^n}{n!} \quad \text{כי } n>3$$

$$\geq 1+h+h^2+\ldots+h^n$$

עבור $0<h<1$ מתקיים

$$\frac{e^h-1}{h} \leq 1+h+h^2+h^3+\ldots = \frac{1}{1-h}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{e^h-1}{h} \leq \frac{1}{1-h} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^h-1}{h} \xrightarrow{h\to 0^+} 1$$

כאשר $h<0$

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{e^h\left(1-e^{-h}\right)}{h} = e^h\left(\frac{e^{-h}-1}{-h}\right)$$

הגבול קיים כי זה רצף המקרה הקודם, שבו $-h>0$.

$e^h \to 1$ רציף $\Rightarrow$

$$\Leftarrow \frac{e^h-1}{h} \to 1$$

$\Rightarrow \exp' = \exp$. כעת $f(x)\equiv 0$ הוא פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל. הוכיח את הנגזרת.

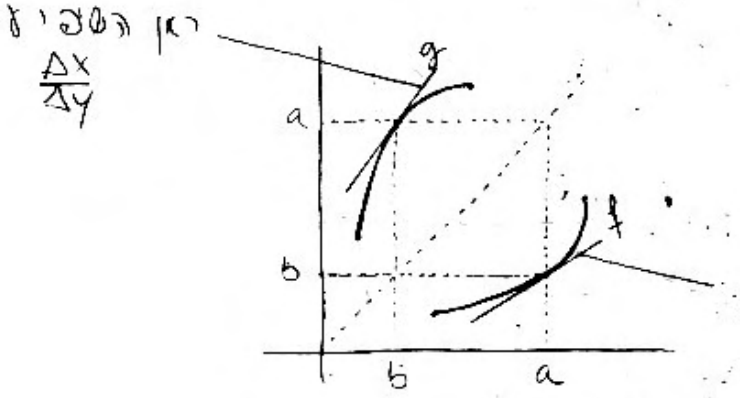
$$\sin'(a) = \lim \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin a\cosh+\cos a\sinh-\sin a}{h} =$$

$$= \sin a\left(\frac{\cosh-1}{h}\right) + \cos a\frac{\sinh}{h} = \cos a$$

(90) 26.01.06
אינפי'

f עבירות של הפונקציה ההופכית

אם שינוי של סביבת הנקודה גורם ל"מטריפ" אחרלשון. מיתוס לאלרגים: $x=y$.



הדגיר מצמין ש-
$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

כאשר


<u>Wishful thinking</u> - אם f ו-g גזירות אז
סכ' כלל השרשרת $(g\circ f)'(b) = f'(b)\,g'(f(b)) = f'(b)\,g'(a)$
$= f'(a)\,g'(b)$
$\Rightarrow \quad g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

<u>משפט</u> תהי $f: I \xrightarrow{\text{קשר}} \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע, גזירה ב-a
ומתקיים $f'(a) \neq 0$ אזי ש- $J = f(I)$ קטע
אזי ש- g הפוכה ל-f. אז $b = f(a)$
g גזירה ב-b ומתקיים $g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$.

<u>הוכחה:</u>
f הפוכה גזירה ב-a $\Rightarrow$ $f(x) - f(a) = \psi(x)(x-a)$
$\psi(x) \neq 0$ בסביבה של a, נתון $f'(a) \neq 0$ $\Rightarrow$
a ל. אזי $f(x) = y$, $g(y) = x$ ו- $f(a) = b$, $g(b) = a$
$g(y) - g(b) = x - a = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{\psi(x)}$ $\leftarrow$ מסדרים, $\psi(x) \neq 0$
$= \frac{1}{\psi(g(y))} \cdot (y-b)$
$\Rightarrow$ g גזירה ב-b כי g הפוכה ל- ψ הפוכה ב-a.
$g'(b) = \frac{1}{\psi(a)} = \frac{1}{f'(a)}$. מש"ל

דוגמאות 1) עוד נראה מדוע אכן $\ln$ יש $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ פונקציה שהיא הופכית ל-$\mathbb{R}^+$.

$\Leftarrow$ ההפכית שלה $\ln$ מקיימת את תחום ההגדרה

ומתקיים $\ln'(b) = \frac{1}{\exp'(a)} = \frac{1}{\exp'(\ln b)}$

$\exp$, a, b, $\ln$

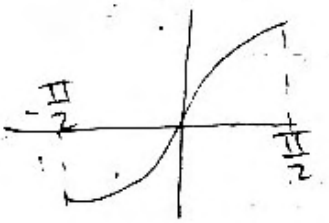
$= \frac{1}{\exp(\ln b)} = \frac{1}{b}$

$\exp: \exp$ $e^{\ln b}$: b

2) $\sin$ הצמצום של $\sin$ - $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ (כאן $\sin$ עולה מ--1 ל-1)

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ - תחום שבו $\sin$ עולה מ--1 ל-1.

$$\sin: [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$$



ניתן להוכיח בקלות שהפונקציה הזו גזירה בתחומה. $\arcsin$

$$\arcsin'(b) = \frac{1}{\sin'(\arcsin b)} = \frac{1}{\cos(\arcsin b)}$$

$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$\cos^2 = 1 - \sin^2 \Rightarrow \cos = \pm\sqrt{1-\sin^2}$

אבל בתחום שלנו ה-$\cos$ חיובי $\Rightarrow \cos = \sqrt{1-\sin^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin b)}} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

לכן גזירה ב-$b = \pm 1$ ובדיוק - הנ"ש לכך הוא $\cos(b) = 0$ ו-$\sin'(b) \neq 0$ אלו $b = \pm\frac{\pi}{2}$

יש כמה הערות:

1. זה נקרא abuse of language אבל נרשום

$$(\sin x)' = \cos x$$

כאשר לא ברור מהו, כי אם נקפיד תמיד לסמן את x על ידי משתנה מספר ונגדיר שפונקציה היא אפס אז נצטרך לרשום

$$\sin'(x) = \cos x$$

כאן הקפדנו לציין את ה-x שאליו מתייחס $\sin$.

2. סימון לייבניץ: $f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{x - t}$.

נסמן $\Delta t = t - x$.

$$\Delta f = f(t) - f(x)$$

ואז $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$.

ומסימון זה ברור ש- $\frac{d^n x^n}{dx} = n x^{n-1}$.

בכל אופן, אנחנו נשתמש בכל אחד מהסימונים, ויהיה נוח לפעמים להשתמש בזה ולפעמים בזה.

אז מה ראינו עד כה? $(x^n)' = n x^{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$

ואת כמה פעמים תשתמשו. $(e^x)' = e^x$

שכן נגזרת אפס היא $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

לפעמים מלוות קשה. $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

מה לגבי $(a^x)'$ כאשר $a \neq e$?

נשתמש בזהות הבאה - הצגה אלטרנטיבית.

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

$$\Rightarrow (a^x)' = (e^{x \ln a})'$$

לפי כלל השרשרת נקבל:

$$(e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

כלומר $(a^x)' = a^x \ln a$.

בדומה $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$

מה לגבי x^a ?

ובכן, מה לגבי $a \in \mathbb{R}$ כאשר x^a ?

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot a \frac{1}{x} = a x^{a-1}$$

☺ ——— ☺

הגדרה: $f: I \to \mathbb{R}$ מקבלת מקסימום (מינימום) מקומי ב- $a \in I$ אם קיים $\delta > 0$ כך ש-

(exists δ greater than zero such that)

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a))$$

משפט (פרמה): אם $f: I \to \mathbb{R}$ מקבלת מקסימום (או מינימום) מקומי ב- $a \in I$ ו- f גזירה שם, אז $f'(a) = 0$.

הוכחה: נניח ש- f מקבלת מקסימום ב- a.

אם $f'(a) > 0$ אז קיים $\delta > 0$ שבסביבת δ של a

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} > 0$$

אכן: $a-\delta < x < a \Rightarrow x-a < 0 \Rightarrow f(x) < f(a)$

$a < x < a+\delta \Rightarrow x-a > 0 \Rightarrow f(a) < f(x)$

מסקנה שגובה ש- f מקבלת מקסימום ב- a.

בדיוק דומה שלומים את המקרה $f(a) < 0$.

ובאופן דומה מוכיחים את המקרה שבו מינימום ב- a. ☺

נשים לב שהוכחה ראינו קודמת למה שקרא שהנקודה עליה בעליה.

היא עצם מהכרח עובה באופן כלל. היא יתלה להשתנות מאוד. אבל מה שפני a יקטן מ- a. $\left.\begin{array}{l}\text{במקרה ש } f(a) < 0\\ \text{במקרה ש } f(a) > 0\end{array}\right\}$ מאותו שאחרי a יגדל מ- a.

מאותו אופן שהנקודה יהיה יגלה טיבות נוספת בנקודה, אם $f(a) > 0$ ואם $f(a) < 0$.

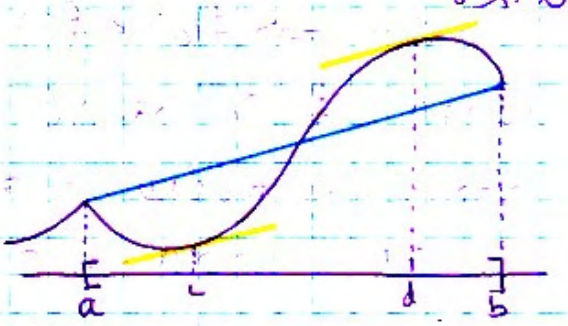
מסקנה: אם f רציפה ב $[a,b]$ אזי מובטחים שקיימות נקודות שבין a ל b בקטע $[a,b]$:

(i) נקודת קיצון שבין a ל b (היינו ש- f מתאפס שם)

(ii) נקודת סיום (היינו ש- f אינה מוגדרת).

(iii) נקודת שפה (הקצוות של הקטע)

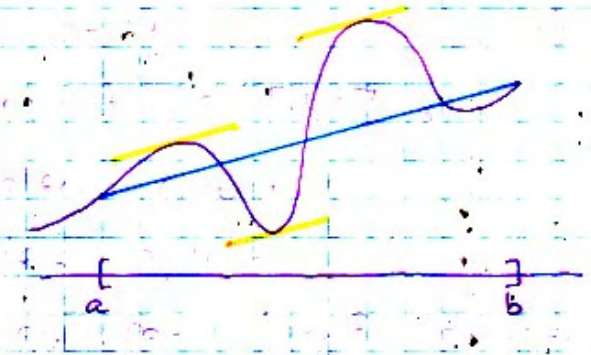
פרשנות גיאומטרית:



— בשפת המודל של הפונקציה במקטע הזה מצאנו אותנו לחשוב. שאם פונ' גזירה במקטע אז יש נקודה שבה השיפוע הוא השיפוע הממוצע.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

מודל היא תכונה גיאומטרית ולא הגבלת הנקודה היא תכונה נקודתית. נשים לב שהפונקציה הייתה וגזירה שהבחרנו אותה כך שהמודל היה לזה אפשר הנקודה c היא אחרת.



משפט רול (Rolle)

תהי f רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) אם $f(a)=f(b)$ אזי קיים $a<c<b$ כך ש $f'(c)=0$.

הוכחה: f רציפה ב $[a,b]$ לפי משפט מן הקיצון והמינימום נהנה מקיצון. מתקיים שאם שניהם בקצוות אז בפתח $f(a)=f(b)$ ש f קבועה אפשר לגזור ואפס בכל $a<c<b$ שהו נקודת קיצון הינה פנימית ולפי פרמה $f'(c)=0$ אחרת את הנקודה הנגזרת קיימת ואפס. אשל ☺

משפט לגראנג' (Lagrange)

תהי f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b). אזי קיים c כך ש- $a<c<b$ עבורו $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הוכחה:

(אם $b=a$ המשפט מתקיים באופן ריק)

נסתכל על הפונקציה העזר הבאה:

$$\psi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

ψ נגזרת מתנאי משפט ROLLE:

ψ רציפה ב- $[a,b]$ כי היא אריתמטיקה של פונקציות רציפות

ψ גזירה ב- (a,b) כי אריתמטיקה של פונקציות גזירות

וכן $\psi(a)=\psi(b)=0$.

$\Rightarrow$ קיים $a<c<b$ כך ש- $\psi'(c)=0$.

אבל $\psi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

כלומר $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

מש"ל ☺

פרשנות פיסיקלית:

יש לנו תנועה שעל אופנוע שנסע מת קואורדינטת $x=p(t)$ ונסתכל על $p(t)$ לאורך ציר.

x ←——— O

מיקומה התלקיק הפונקציה היא שני זמנים t_1, t_2 ועל $[t_2, t_1]$. המיקומים הם $p(t_1)-p(t_2)$ ההעתק הוא $\bar{v}=\frac{p(t_1)-p(t_2)}{t_1-t_2}$. אם נסתכל על המהירות הממוצעת $v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{p(t)-p(t_0)}{t-t_0}$ נקבל את המהירות הרגעית ב- t_0 אבל לאור הנגזרת $v(t)=\dot{p}(t)$ ובדרך דומה $a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{p}(t)$.

תחת פרשנות כזו, ניתן שנסענו מי-פה ת"א מהירות ממוצעת 90 קמ"ש. אבל משפט לגראנג' הוא רגע שבו נסענו מהירות 90 קמ"ש רגעית.

כאן משום מקום המהירות היא
אבל אז לא הבר סמיכות המשוואה הפרמטרית הפיסיקלית הלאו
התלמיד השאפתן היה רוצה להחיל את המשפט ל-f ו-g שוקדיות.

$$\begin{pmatrix} g'(c) \\ f'(c) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} g(b)-g(a) \\ f(b)-f(a) \end{pmatrix}$$

(הלמעלה) הוא באותו כיוון כמו הה שוקל.
נוסחים אם וקטור המהירות הוא קצת - $\begin{pmatrix} g(b)-g(a) \\ f(b)-f(a) \end{pmatrix}$
ניתן לפרש את הווקטור של המהירות שלה הינו
שהן שוקדיה של. הנמן $\begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

ניתן שיש תלקיק שמתנועע מישור ויש שתי אזור דינטור
שהן שוקדיה של. הנמן $\begin{pmatrix} g(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
למשפט של המשפט ראשון אפשר את התנועה מישור אפא מישר
בין הנתונים. פתרון: שיטה יש שירוש שהפה אחר:
ג'נה רגע שמו היחס בין המהירות הוא שיעור כמו ווים
מתקים ומסים בין מהירות. אם שרשום הת שיש
אז f ו- g מהירות; אבל יש פה יחסים בין
אינטואיציה: במקרה הפיסקס אם f ו- g מרחקים
ש $g(c)=0$ אבל זו סתירה להנחה.
ב- (a,b) אבל שפ משפטולם היה קיים $c\in(a,b)$ כך
ניח ש $g(a)=g(b)$. g רציפה ב- $[a,b]$ ולפיכך
הערה: שאלה מאתגר היטב בכלל?
אבל: קיים $a<c<b$ כך ש $\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$.
משפט קושי: תהינה g,f רציפות ב $[a,b]$ ואזירות
ב (a,b) ו- $g' \neq 0$ ב (a,b).

הערה לא חובה: ניתן להשתמש במשפט הערך הממוצע עבור f ו- g אפילו את קיום אותה c.

הוכחה: תהי

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x)-g(a)) \right]$$

φ כאן עומדת בתנאי משפט שארנו:
גזירה ב- (a,b) ואיברה בקטע $[a,b]$ ואיברה אותה אפסה

$\Leftarrow$ קיים $c \in (a,b)$ כך ש:

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$$

אפס

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = 0$$

אבל שים

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

$$\Leftarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

(II) משפט קושי.

הערה: משפט זה: f גזירה בקטע I. אבל f' תכונת ערך הביניים ב- I

הוכחה: נניח בה"כ ש: $f'(a) > 0$ ו- $a < b$, $a,b \in I$

צ"ל: $f'(x) > 0$ בקטע $[a,b]$.

$f'(b) > 0$ כאן $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$

$f'(a) > 0$ כאן $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$



מבחן 8

חלק א': 25 נק' להלכית משפטים מהדרגה הסטטיסטית, יש סיכוי טוב שהמשפט יהיה של קוש.

חלק ב': 2 תרגילים מתוך 3 מרות התרגילים שתשים מהלך ושגוי 50 נק'

חלק ג': 5 נק' x 7 שאלות אמרק אות

תזכורת: $f: I \to \mathbb{R}$ תכונת ערך הביניים (דרבו) אומרת שלכל $a, b \in I$ ולכל y בין $f(a)$ ל- $f(b)$ קיים c בין a לבין b כך ש- $f(c) = y$.

הפונקציה אינה רציפה. אבל האינו שפונקציות רציפות מקיימות את תכונת הביניים רציפות מקיימות.

משפט אם $f: I \to \mathbb{R}$, I קטע, והיא מקיימת את תכונת ערך הביניים ב- I.

פרשנות קינמטית: אם נסתכל את הגרף מיקומו של נקיק את מסלול קווי כפונה של הצמן. ואם אפשר לחשב את המהירות, אפילו אם היא לא רציפה, אפשר לצפות את המהירות במהלך הדרך: I הוא הקטע, איך שהוא קטע. לאו דווקא סגור פתוח, חצי סגור, מה שבא לנו.

הערה: שוקולד שניים נפגש תמר ונאמר - "אה, זאת כוכר את שלו. אגב, אינה קטעים..." ☺

הערה: שוקולד רציפה אך לא גזירה? הנה קיימת חיה כזאת?

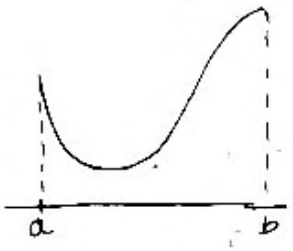
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הנגזרת לא רציפה ב- $x=0$ כי $\cos\frac{1}{x}$ אין גבול ב- 0...

הוכחה: (כיוון) נתון קיים c מקרה פרטי.

$I \ni a,b$, $b>a$ ו- $f'(b)>0>f'(a)$ נראה ש מקרה



כזה שקיים $b>c>a$ כך ש $f'(c)=0$.

זה $h>0$ כך ש $a<x\le a+h$ שקיים $b-a>h$

מתקיים $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ (כי אפשרי כי

הנגזרת שלילית מכך ש"מ: סמיכות כך ש $b-h\le x<b$

מתקיים $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$ (כי: אפשרי מאותה סיבה,

ואנו נקח אחר כ- h המינימלי- שמתאים לשני התנאים).

נגדיר: $\psi(t)=\frac{f(a+t)-f(a+h+t)}{h}\cdot\frac{(a+t)-(a+h+t)}{f(a+t)-f(a+h+t)}$

הפונק' הנ"ל מוגדרת את השיפוע המוצע $[a+t,a+h+t]$ –

וזו"א מוגדרת ל t כלשהו $0\le t\le b-a-h$ כלומר

$\psi(t)$ רציפה בקטע כי $f(a+t)$; $f(a+h+t)$ ומן הרכבה

של רציפות (כי f גזירה מכך רציפה)

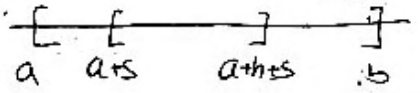
$$\psi(0)=\frac{f(a)-f(a+h)}{h}<0$$

כי נתון את h

$$\psi(b-a-h)=\frac{f(b)-f(b-h)}{h}>0$$

ψ רציפה בקטע ושונה מאפס בקצוות $\Rightarrow$ לפי

משפט קיים $b-a-h>s>0$ כך ש $\psi(s)=0$



אז לפי משפט רול, קיימת f בקטע $[a+s,a+h+s]$

קיים $b>s+h+a>c>s+a>a$ כך ש $f'(c)=0$

את המקרה הכללי נקבל תוך התבוננות ב $g(x)=f(x)-\alpha x$

משל ☺

שיעור 16

⊙ באנליזה נרצה לדבר על מושגים מאפיינים של פונקציות, כגון מונוטוניות, קמירות וכו'.

① תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה. אז:

(i) f קבועה ב-I אם $f \equiv 0$ ב-I.

(ii) f יורדת (עולה) ב-I אם $f \geq 0$ ב-I.

(iii) f עולה (ירידה) ב-I אם $f \geq 0$ ב-I.

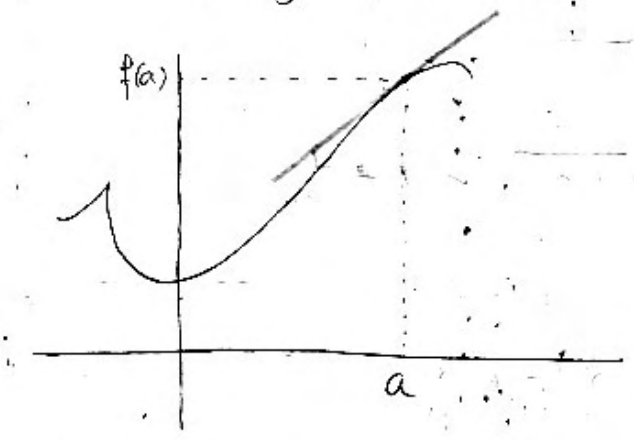
הערה:

(iii) יהיו $a, b \in I$, $a < b$. (בשיעור הבא נראה שמספיק לדרוש ש-f גזירה ב-$[a,b]$ ואז קיים c כך ש-$a < c < b$ כך ש-$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$)

$f(a) \leq f(b) \iff f(b) - f(a) \geq 0 \iff b - a > 0$ ☺

מאפיין דומה מתקיים גם עבור ירידה.

② קודמים סינאיים (important ; חשוב):



המשיק הוא הישר הכי קרוב למסגרת של a.

אם f גזירה ב-a. נגדיר $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ אז

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a)$$

$$f(x) \approx f(a) + \varphi(a)(x-a) \quad \text{אם } x \approx a$$

כלומר $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$

(למי שזוכר, זו ההתחלה של פולינום טיילור במסגרת הפרק הבא)

לפניכם נתונה קירוב עבור $\sqrt{1.01}$ יעזרו את אחד הסטודנטים

$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad f(1)=1$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1)=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(1.01)\approx f(1)+f'(1)(1.01-1)$$

$$=1+\frac{1}{2}(0.01)=1.005$$

$$f(1.01)\approx 1.005$$

מה השגיאה? את כה (את בסטטיסטיקה השגיאה...

(3) אפשר לכתוב נוסחה שיש השגיאה אם גם היינו מתמצאים מקירוב עבור בכלל? כמה היינו מסתבכים על קירוב מסוג זה?

$$1=\sqrt{1}\approx\sqrt{1.01}$$

$$\frac{\sqrt{1.01}-\sqrt{1}}{1.01-1}=\frac{1}{2\sqrt{c}} \qquad 1<c<1.01$$

$$1<\sqrt{c}<\sqrt{1.01}<\sqrt{1.21}=1.1$$

$$\frac{1}{2.2}<\frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{200}<\sqrt{1.01}-1<\frac{1}{220}$$

$$1+\frac{1}{200}>\sqrt{1.01}>1+\frac{1}{220}$$

התשובה היא שקשה לקירוב הגיאומטרי יותר טוב.

אבל הדרכים שאנו השיטה הוא חשוב מאוד!!!

(4) הוכיחו כי $(1+x)^n\geq 1+nx$ $\quad n\in\mathbb{N}$ $\quad x>-1$

נראה כי $(1+x)^\alpha\geq 1+x\alpha$ עבור $\alpha>1$ $\alpha\in\mathbb{R}$

$$d(x)=(1+x)^\alpha-(1+\alpha x)$$

$$d'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left[(1+x)^{\alpha-1}-1\right]$$

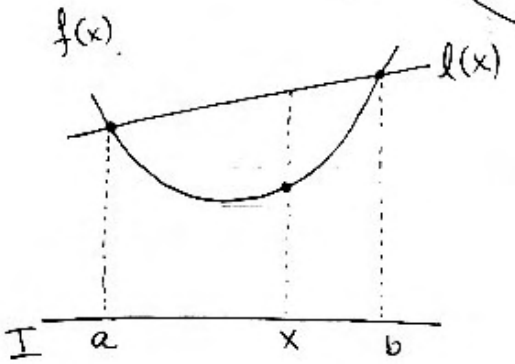
סימן הנגזרת $\quad \overset{-}{\longleftarrow}\overset{0}{\underset{-1}{\circ}}\overset{+}{\longrightarrow}$

$$\operatorname{sgn}\left((1+x)^{\alpha-1}-1\right)=$$

$\Rightarrow d$ מקבל מינימום מוחלט ב- $x=0$ $\quad d(0)\leq d(x)=0$

ואכן זה שווה בדיוק עבור כל α ... Shuttle

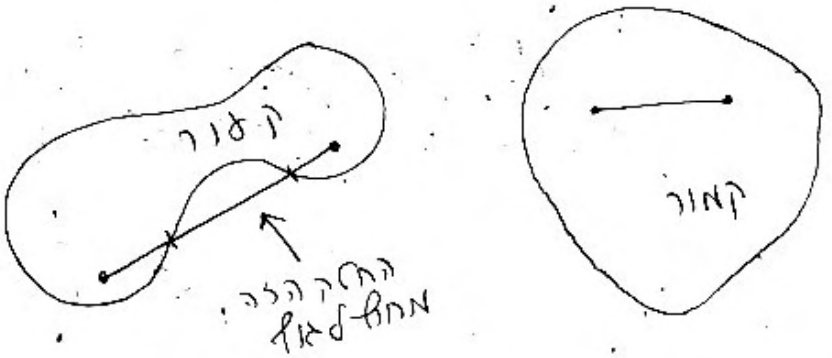
פונקציות קמורות
convex functions



מה זה גוף קמור / קעור?

גוף קמור הוא כזה שמתאר שתי נקודות שרירותיות בתוך הגוף, נמצאו הכל בתוך הגוף.

גוף קעור זה לא נכון



אם לא כתוב שיטוי הפונקציות כלום בתחילה של כל נקודות, הכוונה שמתאר אותן נמצאו **על** גבי הפונקציה.

יהי I קטע כלשהו ב-$\mathbb{R}$.

<u>הגדרה:</u> $f: I \to \mathbb{R}$ תיקרא קמורה ב-I אם לכל $a,b \in I$ ($a<b$) כך ש $a<x<b \Rightarrow f(x) < l(x)$

$y = l(x)$ הוא הפונקציה שהגרף שלה הוא הישר שעובר דרך $(a, f(a))$ ו- $(b, f(b))$

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$ או

$$l(x) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

- פונק' קמורה $\Leftrightarrow$ על כל קשת המשיק מונחת מעל הגרף
- פונק' קמורה $\Leftrightarrow$ הגרף שלה נקרא קשת
  מאחד הקצוות

והגדרות הבאות שקולות.

- הגדרה שקולה: פונק' קמורה אם על כל קטע סגור שבתחום הגדרתה הגרף
  מקסימום פתוח הפונק' חיבת להיות מתחת לקטע שמחבר
  שני קצוות הקטע.

שקולים.

הפונקציה לא חיבת להיות גזירה. היא יכולה להיות
גם כך:

(*) זו פשוט משוואת הישר שעובר דרך הנקודות $(a,f(a))$ ו- $(b,f(b))$. אנו רוצים להוכיח שאם
הגרף של f נמצא מתחת לישר (*) אז f קמורה. ואולם נראה שאם
הגרף של f נמצא מעל לישר (*) אז f קעורה.

$$\frac{x-a}{f(x)-f(a)} \overset{(***)}{\geq} \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \overset{(*)}{\geq} \frac{b-x}{f(b)-f(x)}$$

את זה אפשר לפתוח בצורה הבאה:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \Leftarrow \quad a<x<b$$

או באופן שקול

$$f(x) \leq f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

נניח ש-x נקח a ו-b בתוכו

תאיר אפשר לרשום $x=\alpha a+\beta b$ כאשר

$\alpha+\beta=1$ ו- $\alpha,\beta\geq 0$

x הוא ממוצע משוקלל של a ו-b או

שהוא קרוב אפיני של a ו-b.

צ"ל בדיוק אחרת לפני את הנאמר הקמירות מה לומר את

ההפך הוא $\alpha,\beta\geq 0$, $\alpha+\beta=1$

$$f(\alpha a+\beta b)\leq \alpha f(a)+\beta f(b)$$

או $\lambda\geq 0$ $f((1-\lambda)a+\lambda b)\leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$.

ב הדיאגרמה יעיל שקילות.

הערה יש הבדל שדומן בין פונקציות קמורות לפונקציות וגם

גם אופן, פונק' קמורה $\cup$ היא מת"י

ופונק' קעורה $\cap$ היא מלכה.

⑤ משפט $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים. f קמורה אמ"מ $f''\geq 0$.

④ משפט אם $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה אז f קמורה $\Leftrightarrow$ f' עולה.

③ משפט I קטע פתוח ו-$f:I\to\mathbb{R}$ קמורה אז $\forall x\in I$ קיימות נגזרות חד-צדדיות.

② משפט I קטע פתוח ו-$f:I\to\mathbb{R}$ קמורה אז f רציפה.

① משפט I קטע פתוח ו-$f:I\to\mathbb{R}$ קמורה $\forall$ אז f רציפה.

① (1) נובע מ- (2) אך נוכיח את (2)

② ראשית אומנם שיוויון בלה שקיבלנו שפונקציה. עבור x כלשהו x יהיו $t<x<s$ ב- I.

f קמורה אזי

$$\psi(t) := \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \le \frac{f(s)-f(x)}{s-x} =: \vartheta(s)$$

$\vartheta(s)$ שיק עלה וסומה מלמעלה ע"י $\psi(t)$.

$\Leftarrow$ קיים הגבול $\lim_{x \to s^-} \frac{f(s)-f(x)}{s-x} = f'_-(x)$

וכן בדומה הנגזרת. משמאל.

במקרה אנלוגי $\psi(t)$ יורד וחסומה מלמעלה ע"י $f(x)$ אזי קיים הגבול $\lim_{x \to t^+} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} = f'_+(x)$

כמו כן מתקיים שפה ש $f'_+(x) \ge f'_-(x)$.

③ ($\Leftarrow$) נניח f על קמורה. יהיו $x<t<s$ ב- I.

קמ: $x<t<s<y$ (שפשר כי לה קשר).

שפ' מתר = $[t,x]$ קיים $f'(s)$: $\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ כך ש

כמו כן קיים $y>t$ שפ' מתר ב $[t,y]$

כך ש $\frac{f(y)-f(t)}{y-t} = f'(y)$. אבל f גדלה:

$$\frac{f(y)-f(t)}{y-t} \ge \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \Leftarrow$$

כאמור f קמורה

השאר מושאר לקורא הנ"ש ל!