

① 3.11.05
ת.א.נ.פ.

תוצאות - כל שלב וקבל תוצאה אחת צריך להגיש רק תוצאות אינדיבידואליות

4 התוצאות הנלוות נכתוב בהיכר
הציון יחסי עם 5 התוצאות הטובות ו-5 הכתמים הטובים
ציון מקורס - 80 אחת 100 תוצאות 100 כתמים

התחברות: נועה ניצן noamitzan@math.huji.ac.il

אתר באינטרנט - il.huji.ac.il - יש להתעדכן סאתר
בכל מה שקשור לקורס.

קבוצות - קבוצה של אברים $A = \{1, 2, 3\}$
קבוצה היא חייבת להכיל אברים מאותו סוג $F = \{a, b, 1, 3\}$
קבוצה מכילה כל אבר פעם אחת וסדר האברים לא משנה.
לכן $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 1, 2, 3\}$
קבוצה שאין בה אף אבר נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת $\emptyset$

הנה כמה קבוצות שיש להן שמות מיוחדים.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - רציונליים
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ - שלמים
 $\mathbb{Q}$ - רציונליים
 $\mathbb{R}$ - ממשיים

גודל של קבוצה נקרא מספר האברים בה $|A|$
 $|R| = \infty$ $|S| = 0$ $|\{1, 2, 3, 3, 3\}| = 3$

קבוצה יכולה גם להכיל קבוצה $|\{\{1, 2\}, 3\}| = 2$

ϵ - סימן השייכות. אם a שייך ל- A נכתוב $a \in A$
אם $B = \{\{1, 2\}, 3\}$ אז $1 \in B$ $3 \in B$ $\{1, 2\} \in B$

גורמים

תכונה α שתי סגורה $\beta \rightarrow \alpha$ (אז α הוא β)

אם α הוא β וסוגה α הוא β (כונה).

$\beta \leftrightarrow \alpha$ (אז α הוא β) אם $\beta \rightarrow \alpha$ ו $\alpha \rightarrow \beta$ (אז α הוא β).

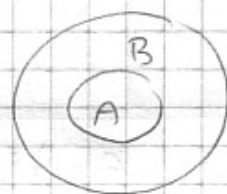
הסגורה α ו- β (כונה) אז α הוא β (כונה) יתרון.

הגדרה: אם A, B קבוצות אז $A = B$ אם $x \in A \leftrightarrow x \in B$

סימן הפניה: $A \subseteq B$ אם $x \in A$ אז $x \in B$ (אז $x \in B \leftarrow x \in A$)

ביאור: - זמן ציורו של $A \subseteq B$ קבוצה A היא קבוצה של B .

$A \subseteq B$ - A היא קבוצה של B



כל קבוצה A תמיד $\emptyset \subseteq A$ ו- $A \subseteq A$.

הכלה: A מוכלת מכל B אם $A \subseteq B$ ו $A \neq B$

כלומר קיים איבר $x \in B$ כך ש- $x \notin A$

יש כמה סכומים של סכומים

הכלה

הכלה

$\subseteq$

$\subseteq$

$\subsetneq$

$\subsetneq$

בקבוצה עם הסדר איננו $\mathbb{N}$ (אז $\mathbb{N}$ הוא קבוצה של $\mathbb{N}$)

קבוצה באמצעות תנאי: $A = \{x \mid x \text{ מקיים תנאי}\}$

דוגמה: $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 1000\} = \{1, 2, \dots, 1000\}$

$\{1, 4, 9, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : y^2 = x\} = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$

② איחוד

פעולה על קבוצות:

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

איחוד ①



$$A \cup \emptyset = A, A \cup A = A \quad \text{תכונות}$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{קומוטטיביות}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{אסוציאטיביות}$$

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

חיתוך ②



$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap A = A \quad \text{תכונות}$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{קומוטטיביות}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{אסוציאטיביות}$$

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

הפרד ③



$$A \setminus \emptyset = A, A \setminus A = \emptyset, A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \quad \text{תכונות}$$

$$A \setminus B \neq B \setminus A \quad \text{הרכיב לאו קומוטטיביות}$$

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

מכונה קרטזית ④

ההבדל בין לא סדר וקבוצה זה של איברים הוא

$$(a, b) \neq (b, a) \quad \text{שכאם סדר הפרקטור}$$

עליו גם הפעולה לא קומוטטיבית

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{2, 3, 4\}$$

$$\neq \begin{cases} A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\} \\ B \times A = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\} \end{cases}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \quad \text{יש להם 6}$$

כמתים:

$$A - V$$

$$E - \text{ק"מ}$$

$$\neg, \sim \text{ - לא (שלילה)}$$

צמחה ושלמות במתמטיקה:

$$\varphi = \forall x \in \mathbb{Z} \ x^2 \geq 0$$

הקריאה של הפסוק היא: ^{פסוק} "כל x שלילי, $x^2 \geq 0$ ".

$$\sigma = \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$$

$$\tau = \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n$$

$$\neg \varphi = \exists x \in \mathbb{Z} : x^2 < 0$$

שלילה של פסוקים:

$$\neg \sigma = \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1$$

השורה של פסוקים אפשר לקבוע אתה ושלילה של הפסוקים.
אם יש להם אנדרטה: כל פסוקים $\exists$ נאפק
ואחרים הפסוק כתובים הפסוק.

$$\neg \tau = \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : m \leq n$$

אם זה כתוב לפי האנדרטה, אתה נראה מה יצא:
קיים צד, כל של אבד אתה שלקח דא' אתה גזון ממנו
זה באמת הפיק מה שאתה τ - כל של אבד יס צד
של גזון ממנו

סכום ומכפלה:

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \quad \text{כאילו אופן} \quad \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j \quad \text{כאילו}$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{ב}$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{ב}$$

$$\sum_{i=1}^k c = (k-n+1)c \quad \text{כל} \quad \sum_{i=1}^n c = n \cdot c \quad \text{ב}$$

(3)

$$\sum_{i=3}^8 i = \sum_{j=1}^6 (j+2) = \sum_{j=1}^6 j + \sum_{j=1}^6 2 =$$

$$\begin{aligned} j &= i-2 \\ \Rightarrow i &= j+2 \end{aligned} \quad = \frac{8 \cdot 9}{2} + 8 \cdot 2$$

קבוצה נוספת לסדרים
סכמה של סדרות: $\frac{n}{2}(n+1)$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^n i$$

קצת תרגיל למחשבה:

$$\sum_{i=1}^n (a^i b^{2i}) = ab^2 + a^2 b^4 + \dots + a^n b^{2n}$$

אנחנו מנסים למצוא את הסכמה:

$$x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + \dots + x_1 x_2 x_3 \dots x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i x_j$$

אנחנו צריכים לשלב את שני הסדרים:

(1) הסדרים האנטיגרדיים: מוכיחים את הטענה של $n=1$

(2) צעד האנטיגרדי: מוכיחים כי עבור n ומוכיחים עבור $n+1$.

דוגמה:

$$1+3+\dots+(2n-1)=n^2$$

הוכחה: $n=1$ $\checkmark$ $1=1$ $n=1$ הסדרים האנטיגרדיים

$$n^2 = 1+3+\dots+(2n-1)$$

$$1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$$

$$= n^2$$

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

אם אנחנו רוצים להוכיח את הטענה באמצעות $2^n \times 2^n$ אפשר לעבוד עם $\oplus$

רק שיש לנו משהו אחר לא מוכיח

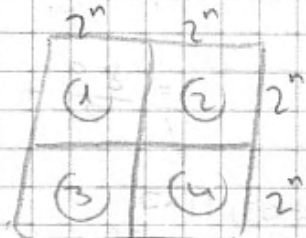
$$2^n \square$$

הוכחה נחשבת עבודה $\oplus$ בכוח שלטון (ליתר דיוק) לוח 2^n

נשתמש בלוח 2^{n+1}

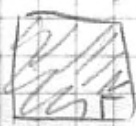
אם 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n

$$(2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1})$$



ואם 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n

(נשארים)
יחד, תחת



חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n



חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n

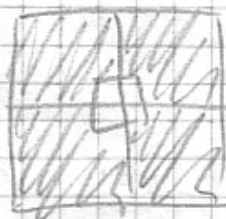


חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n



חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n

אם 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n



ואם 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n



ואם 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n

ואם 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n

אם 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n חלקי 2^n

שטון וזא לא ציך צעאל תאאל, אה יל מוחן 10:
לדור, אקטיוואט ושלמה

לא היה שום דבר במוחן אהתאט בשני. והמחן יתקיים בריבוע שזה
האחידה של בשלם הכאשונה
זה כאן אומיסט'קה

שלום שלום ראיון תאדחת קבוצות. יהיה נדבר על קבוצת א הקבוצות
התאקיות של קבוצה

האברה תה A קבוצה קבוצת התאקה של A , $2^A = P(A)$
אומידת אברה קבוצת כל תתי הקבוצות של A :
 $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$

(שם מ של A , $A \in 2^A$ ו $\emptyset \in 2^A$)
 $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ אברה $A = \{1,2\}$

האברה: האקסס התאונות, שלמסוח $\binom{n}{k}$ (קדי מ אה k) :
התאונות קה A באובל n , אה $A = \{1, \dots, n\}$
 $\binom{n}{k} = |\{B \subseteq A : |B| = k\}|$

כלומר, זהו מספר הידרכים אברה קבוצה באובל k אהתוק קבוצה
באובל n .

זה לא משנה אה איה קבוצתו (סתם, העיקר אהגודל שלם היא n .
אז אברה $n=2$ נסתם אהל הקבוצה אהט $A = \{1,2\}$ (אברה א-
 $\binom{2}{2} = 1$ $\binom{2}{1} = 2$ $\binom{2}{0} = 1$

אומידה $C = \{1,2,3,4\}$ $\binom{4}{2} = 6$ אה (ספוח כמה תתי קבוצות
באובל 2 יש א- C $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$
יש 6 תתי קבוצות $\binom{4}{2} = 6$

נוסחה למקדמים הבינומי:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

יש לזה היכרה קומבינטורית פשוטה אבל אנחנו לא נכנס לזה ערשו כי זה לא הנושא שלנו.

קל לראות שבדוגמה הקודמת הנוסחה נכונה $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

⊗ הבינום של ניוטון

נתפס נוסחה ד - $(a+b)^n$, כאופן $n \in \mathbb{N}$
נראה דרך דוגמאות ספציפיות

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

יש 3 דרכים לבחור 2 א-ים
יש 3 דרכים לבחור 2 א-ים מהטורים
יש דרך אחת לבחור 0 א-ים מהטורים

$$\Rightarrow (a+b)^3 = \binom{3}{3}a^3 + \binom{3}{2}a^2b + \binom{3}{1}ab^2 + \binom{3}{0}b^3$$

אנחנו מתמקדים בחישובים שלנו על a וזה בסדר כי ברור ש
שבוחים את a -ים הנקודות שלהם ולוקחים את b -ים
קבועים.

ערשו נוסה להביל קרה $(a+b)^4 = \dots + \binom{4}{3}a^3b + \dots$
כי דרך לבחור 3 א-ים מתוך 4 טורים.

ואז נאק עז השיל:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

5

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = 1 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot a \cdot 1 = b+a \quad \text{דוגמה:}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{לדוגמה:}$$

זה נובע מההיבט של $\binom{n}{k}$ (אם זה האופן שבו אנחנו בוחרים k מתוך n עצמים, אז זה אותו הדבר כמו לבחור $n-k$ מתוך n עצמים, כי כל אחד מהעצמים יכול להיות או ב- k או ב- $n-k$).

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{לדוגמה:}$$

הוכחה קומבינטורית: נניח שיש לנו n עצמים, ונבחר k מהם. נניח שיש לנו $n-1$ עצמים, ונבחר $k-1$ מהם. זהו אותו הדבר כמו לבחור k מתוך n עצמים, כי כל אחד מהעצמים יכול להיות או ב- $k-1$ או ב- k .

אם היוצאות עם $\binom{n-1}{k-1}$, כי כבר קבענו את $k-1$ מהעצמים, אז נשארו $n-k+1$ עצמים, ונבחר $k-1$ מהם. זהו אותו הדבר כמו לבחור k מתוך n עצמים, כי תורצנו את $k-1$ מהעצמים, אז נשארו $n-k+1$ עצמים, ונבחר $k-1$ מהם.

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{השלכה}$$

סקנות

$|A| = n$, כמה תתי קבוצות יש ל- A . אם נסתכל על ההצגה הבאה: (ספרי כמה קבוצות יש בגודל n , כמה בגודל 1 , כמה בגודל 2 וכן הלאה עד קבוצות בגודל n).

$$\Rightarrow |P(A)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{אם } a=b=1 \quad \text{(קבל)} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$



$$\Rightarrow |P(A)| = 2^n = 2^{|A|}$$

ההנחה קבוצה בינארית, n הוא יש יותר תתי קבוצות

האורז הוא או אפס?

תכל נראה שנת שמחה עם תלמידים n ותמיד יש מספר זהה של קבוצות האורז אי-האורז וקבוצות האורז האורז.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots$$

זה אנחנו נוטים לקבוצות האורז האורז תמיד אופ'יות

הסימן פלוס וקבוצות האורז אי-האורז אופ'יות הסימן מינוס.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \text{אם קבוצת האורז היא} - \text{אם קבוצת האורז היא}$$

(שים לב: ציבנו סמלית הפיכים של $a=-1$ ו $b=1$)

$$0 = ((-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow 0 = \text{אם קבוצת האורז היא} - \text{אם קבוצת האורז היא}$$

$$\Rightarrow \text{אם קבוצת האורז היא} = \text{אם קבוצת האורז היא}$$

האורז

ראינו בכיתה דרכה סוגים של חסמים. נעסיף בהם סדר.

האורז

אם $a \in M$ ו $a \in A$ אז $\max A$ אי-אפשר $a \in M$ ו $a \in A$ אז $\min A$ אי-אפשר

סדרה אם $A \subseteq \mathbb{R}$ יש אינפימום של A וסופ'ים

האורז נניח שיש סדרה של אינפימום: m ו M . הסימנים

האורז $m < M$. אם m אינפימום אז לא סתירה.

יש אינפימום וסופ'ים.

6)

טענה: אם A איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

הוכחה: נעבונן נקודה $a \in A$.

I) x איז א קאמפאקטא פאר $A \iff x$ איז א נאך-גראנדע פאר B (טענה הוכחה)

II) טענה קאמפאקטא, און B איז א נאך-גראנדע פאר A איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

ערשטע טענה: (ערשטע טענה)

אם $A \in \mathbb{N}$ און A איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

טענה: $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

הערה:

$A \subseteq \mathbb{R}$. x איז א קאמפאקטא פאר A אם $a \in A$ און $x \leq a$.

x איז א קאמפאקטא פאר A אם $a \in A$ און $x \geq a$.

אם $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

הערה: אין $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

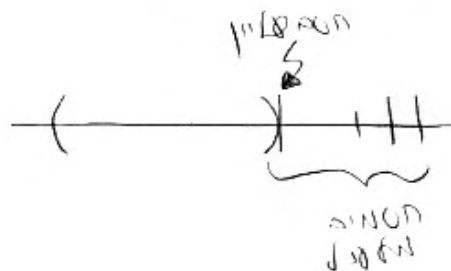
און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$ און $\mathbb{R}$ איז א קאמפאקטא פאר $\mathbb{R}$.

הצדקה:

תהי $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ חסומה מעל. $R \ni S$ נקרא חסם עליון ($\sup A$) אם S הוא חסם מעל אינפי.

ישירה מההצדקה נובע שחסם עליון הוא יחיד כי הוא אינפיוס של קבוצה ואם קיים אינפיוס אז הוא יחיד.



הצדקה: אם $M = \max A$ אז $M = \sup A$

דוגמה: $A = (-\infty, 1)$. $\sup A = 1$

* 1 הוא חסם מעל

* (ניה בסתירה) לכן $x < 1$ רק שלב $y \in A$ $x \geq y$.

(סתם של $x + \frac{1-x}{2}$, בחר ל- $x < x + \frac{1-x}{2} < 1$ ← $x + \frac{1-x}{2}$

לכן $A = \emptyset$ וסא סתירה.

הצדקה: $\inf A$ נקרא חסם תחתון של A

אם g הוא חסם מעל מקסימלי.

הרור שאם מקבוצה יש אינפיוס אז הוא גם החסם התחתון

של.

דוגמה:

איכסיוס: אם $\epsilon \in \mathbb{R}$ $\epsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n} < \epsilon$.

(סתם של $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ כן $\sup A = \max A = 1$

ל- A אין אינפיוס אבל יש לה שלב חסמים מעל.

(טען) ל- $\inf A = 0$.

הוכחה: 0 הוא חסם מעל כי לכל n $\frac{1}{n} > 0$ (ניה כשלוף)

א חסם מעל רק ל- $x < 0$. אבל איכסיוס קיים n

רק ל- $\frac{1}{n}$. לכן סתירה לרק ל- x חסם מעל. מלכ

15.11.05

תאריך:

חסם עליון: $A \neq \emptyset$ הוא חסם עליון של S הוא

חסם עליון אם לכל חסם עליון t של A $t \leq s$.

הערכה שקועה: חסם עליון s הוא חסם עליון אם לכל

$$0 < \varepsilon \text{ קיים } a \in A \text{ כך ש- } s - \varepsilon \leq a \leq s$$

חסם עליון קטן ביותר אם לכל חסם עליון x של A

מתקיים $x \leq g$. כאן g הוא חסם עליון של A הוא חסם

קטן ביותר אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $a \in A$ כך ש-

$$g \leq a \leq g + \varepsilon$$

דוגמה:

$$\sup A = \max A = 3 \quad A = \{2, 3\} \cup \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$A \nsubseteq \inf A = 1$$

דוגמה: $A = \{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ (שם ∞ שהערכה של האונדקס

הצומים יורדת והערכה של

האונדקסים האינסופיים עולה.

$$\sup A = \max A = \frac{1}{2} \quad \text{(האיבר השני) } \infty \text{ הוא המקסימום של הערכה היורדת}$$

$$\min A = \inf A = -1 \quad \text{(האיבר הראשון) } \infty \text{ הוא המינימום של הערכה היורדת}$$

$$\inf A = 1 \quad A = \{a^2 : a \in \mathbb{Q}, 1 < a < 2\}$$

הוכחה:

$$(1) \quad 1 < a^2 \quad 0 < 1 < a < 2 \quad \text{כל חסם עליון של } A$$

$$(2) \quad \text{י"י } 0 < \varepsilon. \quad [1 < a^2 \leq 1 + \varepsilon \text{ ו- } 1 < a < 2 \text{ כך ש-}] \quad \text{(נחפש)}$$

איבר מהערכה $a = 1 + \frac{1}{n}$, סומך צריך למצוא n שלם, כך ש-

$$1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{3}{n} \quad \text{אם } 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = (1 + \frac{1}{n})^2 \leq 1 + \varepsilon$$

$$\left[\frac{3}{\varepsilon} \right] \quad \text{אם } 1 + \frac{3}{n} \leq 1 + \varepsilon \text{ אז בטח } (1 + \frac{1}{n})^2 < 1 + \varepsilon, \text{ } n \text{ שלם קיים לאותו } \varepsilon$$

$$\text{קיים } n \in \mathbb{N} \text{ כך ש- } \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{(לארכימדי) } n \text{ שלם } a = 1 + \frac{1}{n}$$

הכרחי ש- $1 < a < 2$ אם $a \in \mathbb{Q}$ $a^2 \in A$ (ראו ש-)

$$a^2 = (1 + \frac{1}{n})^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{3}{n} < 1 + \varepsilon : a^2 \leq 1 + \varepsilon$$

$$(3) \quad 1 \in A \quad \text{חסם קטן ביותר של } A$$

הערה חשובה: כל מה שכתוב בסוגריים המרובעים הוא
המאמר מוסד. לא כותבים את זה בתרגיל, במבחן,
או בבוחן. ההנחה מסודרת ישר כותבים את זה
שבתכנון.

הערה עתידית:

$$(4) \quad A = \left\{ \frac{2n+3}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 2 - \frac{3}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (5)$$

לכן 1: הסדרה $a_n = \frac{2n+3}{n+3}$ היא סדרה עולה ממש,

$$\inf A = \min A = a_1 = \frac{5}{4}$$

$$\sup A = 2$$

הוכחה:

(I) 2 חסם מעל

(II) יהי $\varepsilon > 0$ (בחר $N \in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n+3} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ אזי

$$\sup A = 2 \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{n+3} \geq 2 - \varepsilon \quad \text{ע"פ (I)}$$

תכונה מתקיימת למעט כל הטבעיים אם היא מתקיימת

לכל הטבעיים למעט מס' סופי.

דוגמה:

$7 > n$ - במעט כל הטבעיים

$$1 = (-1)^n \text{ אינסוף טבעיים}$$

$$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} \text{ אינו הטח שלא כולם}$$

טענה: $A, B \neq \emptyset$ מיואמות $A \cap B \neq \emptyset$ $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

הוכחה: - $A \cap B$ לא ריקה וחטומה ($\sup$ ע"פ הוכחה) $\sup \leq \sup$ מוגדר

- נראה ש $\min\{\sup A, \sup B\}$ הוא חסם מעל של

$A \cap B$

- $\sup A$ חסם מעל. י"י $x \in A$ בפרט $x \in A \cap B$

- $\sup B$ חסם מעל. י"י $x \in B$ בפרט $x \in A \cap B$

מש"ל (I)

$$\Leftrightarrow x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$$

דוגמה: $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$

הוכחה:

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$$

הוכחה:

$$A \cdot B \neq \emptyset \iff A, B \neq \emptyset$$

$\sup A \sup B$ היא העליון גבול של $A \cdot B$ כי

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \exists z = ab \text{ שכן } z \in A \cdot B$$

$$ab \leq \sup A \sup B \iff b \leq \sup B, \forall a \in A$$

כלומר $\sup A \sup B$ הוא העליון גבול של $A \cdot B$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ כך ש-} ab \geq \sup A \sup B - \epsilon$$

$$ab \geq \sup A \sup B - \epsilon$$

$$a \geq \sup A - \epsilon_1, \forall a \in A \text{ שכן } \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\sup B}$$

$$b \geq \sup B - \epsilon_2, \forall b \in B \text{ שכן } \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{\sup A}$$

$$\Rightarrow ab \geq (\sup A - \epsilon_1)(\sup B - \epsilon_2) =$$

$$= \sup A \sup B - \epsilon_1 \sup B - \epsilon_2 \sup A + \epsilon_1 \epsilon_2 \geq$$

$$\geq \sup A \sup B - \epsilon_1 \sup B - \epsilon_2 \sup A =$$

$$= \sup A \sup B - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow ab \geq \sup A \sup B - \epsilon$$

$$\text{כלומר } \sup A \sup B \text{ הוא העליון גבול של } A \cdot B$$

☺

22.11.05
תאריך

המתחבר - 15 זיוג@math.huji.ac.il

הזרמה (חזרה) 3

1. $G = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ חסמה אחרת לכל $\delta > 0$

אם 1 היא חסמה אחרת - כל $n \leq 1$ $1 \in \sqrt{n}$

(ראו שהיא חסמה תחתונה כי לכל n $\sqrt{n} > 1$)

כל $\epsilon > 0$ קיים $a \in G$ כך ש $a < 1 + \epsilon$

לפי תרגיל 2 כל $n \geq 2$ $\sqrt{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ ייתכן $0 < \epsilon$

$\sqrt{n} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n-1} < \epsilon^2$ (אולימפיק) $\Leftrightarrow$ קיים n כך ש

מצאנו $\sqrt{n} - a \in G$ כך ש $a < 1 + \epsilon$ $\Leftrightarrow 1 = \inf G$

זהו גם המקסימום

$\sqrt{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ כל $\epsilon > 0$ קיים N כך ש $\sqrt{\frac{2}{N-1}} < \epsilon$

הפרט נקרא $\epsilon = \sqrt{2} - 1$ קיים n כל n

$\sqrt{N} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{N-1}} < 1 + \epsilon = \sqrt{2}$

$\sqrt{m} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{m-1}} \leq \sqrt{2}$ כל $m > N$ $\Leftrightarrow$

כל המקסימום $\sqrt{2}$ (הצורה היא $\max\{\sqrt{m}\}_{m=1}^N, \sqrt{2}\}$

2. A, B קבוצות אינפיריטיות $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$

$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ [3]

הוכחה: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Leftrightarrow A+B \neq \emptyset$ ייתכן S_A חסמה אחרת

כל $a \in A$ $b \in B$ $\Leftrightarrow$ S_B חסמה אחרת של B

$a+b \leq S_A + S_B$ $\Leftrightarrow$ $A+B$ חסמה אחרת $\Leftrightarrow$ קיים δ

חסמה תחתונה $\forall \epsilon > 0$ (ראו שהיא חסמה תחתונה) $a+b \in A+B$ כך ש $a+b < S + \epsilon$

קיים $a \in A$ כך ש $a < \inf A + \frac{\epsilon}{2}$ וקיים $b \in B$ כך ש $b < \inf B + \frac{\epsilon}{2}$

$\inf(A+B) = \inf A + \inf B \Leftrightarrow a+b < \inf A + \inf B + \epsilon \Leftrightarrow$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad \text{ל} \quad \text{נוכח באינדוקציה} \quad (6)$$

(היציג השני האחרון הוא)

$$\checkmark \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{עבור } n=1$$

נניח באינדוקציה את נכונות הטענה עבור n ונוכיח עבור $n+1$.

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)(2n+2)} \leq$$

ה"כ

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)}$$

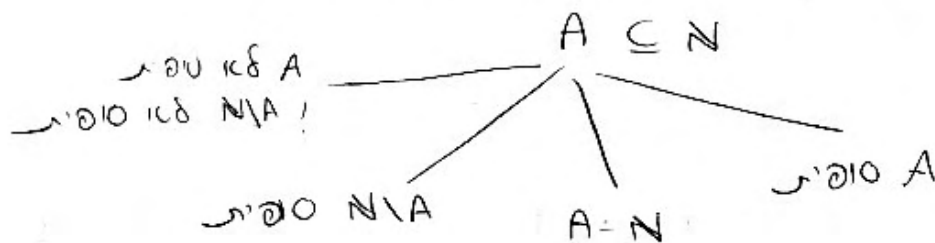
$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \quad \Leftrightarrow$$

$$(2n+1)\sqrt{3n+4} \leq (2n+2)\sqrt{3n+1} \quad \Leftrightarrow \sqrt{}$$

$$(2n+1)^2(3n+4) \leq (2n+2)^2(3n+1) \quad \Leftrightarrow \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow \text{משוואה פתוחה וזה יוצא שכן.}$$

איזה סוגי תת קבוצות יש ל N ?



$$(4) \quad n^3 - 10000 > 10n^2 - 10000 \quad \text{ואם נחזירים איברים} \quad 10000 > 10n^2 - 10n^2$$

עבור $n=1$ הטענה לא נכונה אבל עבור $n=100$ באינדוקציה

ל $(10n-10)^2 > 10n^2 - 10000$ עולה לבק אם הטענה מתקיימת

עבור איזה N אם היא מתקיימת על $N > 100$.

הטענה נכונה למשל עבור $N=100$ $\Leftrightarrow$ הטענה (כיום) (נח)

תמיד. כלומר $N \setminus A$ סופית.

סדרות

הגדרה: סדרה היא תאורה (פונקציה) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

דוגמאות

① אם a_n מספר סביר, אז $a_n \in \mathbb{R}$ לכל n
(סמן את הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)

② לכל $x \in \mathbb{R}$ קיימת הסדרה הקבועה $a_n = x$ לכל n

③ הסדרה ההרמונית $a_n = \frac{1}{n}$ $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

④ $a_n = (-1)^n$ $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ - עיסיתין

השדה חשובה: סדרה $\neq$ קבוצה

שדה הקבוצה אין סדר לאיברים והם גם לא יחידים

לחזור על עצמם. אבל עבור הסדרה הקבועה $a_n = 1$

קבוצת האיברים שלה היא $\{1\}$ וברור שלה גם אינו

שדה כמו $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

מה זה סדרה מתכנסת? (איד) לסדרה מתכנסת

לאיזה ערך אם כמעט כל האיברים קרובים מאוד

לערך הזה. ומה זה קרובים מאוד?

והגדרה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ו $\epsilon > 0$ $\exists r \in \mathbb{R}$. הסביבה של a בגודל

r (אוהדדי ברורים r שמרכזו a) היא

$$Br(a) = \{x : |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$$

תכונות של סביבות:

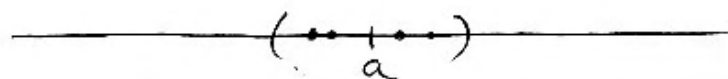
① באופן דו כיוון $a \in Br(a)$

② $a \in \{a\} \cap Br(a) \neq \emptyset$ $\forall r > 0$ לומר בסביבה של a

קיימים עיד (אנסוף) איברים ששונים ל- a .

③ אם $x \in Br(a)$ $\epsilon < r$ אז $x = a$

אין עוד מספר חוץ ל- a שנמצא בכל הסביבות של a .



אז עריוג קריב $\delta - a$ גשנע עריות סטביה של a .
 אדכמה קרוב (קבע ער סטביה).

אז יש סדרה, יש a ויש סביבה של a אזי
 יש כמה אויפציוג:

- (1) לא איברי (a_n) ב $B_r(a)$
- (2) לא איברי (a_n) מחוץ ל $B_r(a)$
- (3) מעבר סופי של איברי (a_n) מחוץ ל $B_r(a)$
- (4) מעבר סופי של איברי (a_n) בתוך $B_r(a)$
- (5) אינסוף איברים בתוך $B_r(a)$ ואינסוף איברים מחוץ ל $B_r(a)$.

הוצע שלנו לערוך יחיד של איברי הסדרה מלבד

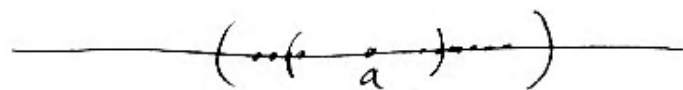
אולי מעבר סופי נמצאים ב $B_r(a)$

$\Leftrightarrow$ קיים N כך של $N > n$ $a_n \in B_r(a)$.

(זה די ברור אז יש מעבר סופי בתוך נבחר אולי

האינדקס האקסטרמי והוא יהיה N).

אבל יתכן עריוג של סביבה קטנה יותר ואז נכח
 עריוג האברים יהיו בה:



הערה: תפי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו $a \in \mathbb{R}$ a (הוא) גורל של

הסדרה (או הסדרה מתקשרת ל a) אם בכל סביבה של

a לא איברי הסדרה מלבד אולי מעבר סופי נמצאים

סטביה.

הערה ליה (טמן) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ או $a_n \rightarrow a$.

הכרטיס נחשב את זה בלפני מתמטיקה:

$$a_n \rightarrow a \iff \forall r > 0 \exists N \quad (n > N \rightarrow |a_n - a| < r)$$

* הוכחה: בדגם נמקדים r ונשתמש ב- ε

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |a_n - a| < \varepsilon$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

דוגמאות

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall n \ a_n = a$ (הוכחה בקלות) (1)
 הוכחה: יהי $0 < \varepsilon$. נבחר $N = 1$. לכל $n > 1$ נקבל $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ (2)

$a_n = \begin{cases} n & 1 \leq n \leq 10 \\ a & n > 10 \end{cases}$ (2)
 אם $a_n \rightarrow a$ פשוט נבחר ε . נבחר $N = 10$ ונקבל $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$

$a_n = \frac{1}{n}$ (3)
 $a_n \rightarrow 0$ (לדוגמה) $a_n = \frac{1}{n}$

יהי $0 < \varepsilon$. אולי N יהיה $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (לדוגמה) $a_n = \frac{1}{n}$

(2) $a_n \rightarrow 0 \iff |a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ נקבל $n > N$ נבחר $N = \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ (4)
 $a_n = \frac{1}{2^n}$ נבחר $N = (1 + \frac{1}{\varepsilon})$ ונקבל $n > N \implies \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

יהי $0 < \varepsilon$. נבחר $N = \frac{1}{\varepsilon}$ ונקבל $n > N \implies \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies |a_n - 0| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

משפט: יהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ו- $a \in \mathbb{R}$. אז $a_n \rightarrow a$ אם ורק אם $a_n - a \rightarrow 0$

$a_n - a \rightarrow 0$

הוכחה: ($\Leftarrow$) יהי $0 < \varepsilon$. נבחר N כך שלכל $n > N$ נקבל $|a_n - a| < \varepsilon$

אם $a_n \rightarrow a$ נבחר N כך שלכל $n > N$ נקבל $|a_n - a| < \varepsilon$

($\Rightarrow$) יהי $0 < \varepsilon$. נבחר N כך שלכל $n > N$ נקבל $|a_n - a| < \varepsilon$

(2) $a_n \rightarrow a \iff |a_n - a| = |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$

דוגמה: אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת אזי קיים δ סביבה יחידה.

פונקציה: נניח $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

ליתבונן ב $\epsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$, $a \neq b$.

קיים N_a כך שלכל $n > N_a$, $|a_n - a| < \epsilon$.

קיים N_b כך שלכל $n > N_b$, $|a_n - b| < \epsilon$.

$\Leftarrow$ ו' $N = \max(N_a, N_b)$, $n > N$

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n-b)| \leq$$

$$\leq |a-a_n| + |a_n-b| < 2\epsilon = |a-b|$$

אז $a=b$. $\Leftarrow$ סתירה !

(11)

29.11.05

תאריך:

הצורה (המשוואה) 4:

②

אין מנתשים יחידות של אותה של פונקציה f
 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^k - 1} = 1$ כלומר הפונקציה הזו מתכנסת.

אז רשימת עניינים של וקטור הקורס שמשפיעים הכי
 נכונה היא זה עם החלוקה הכי טובה וזה מה שמסתובב
 עליו במנהל של פונקציות אז על של

$$\frac{n+3}{2n+5} \approx \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n+5}{n^2-3} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

זה כמובן לא הוכחה פורמלית. האופן פורמלי אם $n \geq 2$
 $\frac{n+5}{n^2-3} < \frac{16}{n} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{n^2}{4} > n^2-3 \Leftrightarrow n+5 < 4n$

הגדרה סדרה מתכנסת אם $a \in \mathbb{R}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך
 של $n > N \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$

(הגדרה) סדרה של מתכנסת וקטור סדרה מתכנסת כלומר
 אם $a \in \mathbb{R}$ אז מתקיים $a_n \rightarrow a$

הכזה חשיב: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (a_n)$ מתכנסת

$\stackrel{\text{אם}}{\Leftrightarrow}$ הגבול הוא a

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a \Leftrightarrow (a_n)$ מתכנסת

$\stackrel{\text{אם}}{\Leftrightarrow}$ הגבול שונה מ- a

$\neg (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a) \Leftrightarrow (a_n)$ לא מתכנסת

$\stackrel{\text{אם}}{\Leftrightarrow}$ a_n מתכנסת לגבול שונה מ- a

באמצעות $a_n = n$ קל לראות של a לא מתקיים $a_n \rightarrow a$

חל וזה הסדרה לא חסומה וכל סדרה לא חסומה היא
 לא מתכנסת.

1. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 2. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 3. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 4. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 5. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 6. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 7. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 8. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 9. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.
 10. משפט (הנ"ל) a_n מתכנס ל- a אם ורק אם $a_n \rightarrow a$ ו- $\epsilon = 1$.

אס נאמט אים אן דעם $\theta = 0$ אים האט פארגע
אונזער אס פאר פארגע וואס
דאס וואס

13. הוכחה: $a_n = (-1)^n$ מתכנסת.
 הוכחה: נניח $l \neq 1$. אז $a_n \rightarrow l$ ייתכן כשל. וזהו.
 אם $l = 1$, אז $\varepsilon = |l - 1| = 0$. אזי קיים N כך שלכל $n < N$,
 $|a_n - l| < \varepsilon$. אבל תמיד קיים n כך ש- $a_n = 1$.
 ואם $|a_n - l| = \varepsilon$ אז
 נאמר אלן ε מתכן $l \neq 1$. וקבלנו סתירה להנחה.
 $\odot$ $l \in \mathbb{R}$ $a_n \rightarrow l$

$$\exists N \forall n > N |a_n - a| < \epsilon$$

- לכל n קיים ε כך ש $|a_n - a| < \varepsilon$
 הטענה הראשונה היא שיש דבר חשוב הוא נכונה תמיד.
 למשל ניקח $\varepsilon = |a_n - a| + 1$ בולט. שזה (כל מקרה) מתכנסת
 - לכל $\varepsilon > 0$ קיים n כך ש $|a_n - a| < \varepsilon$
 זהים לכל מקרה מתכנסת. למשל עבור $a = 1$ ו- $a_n = (-1)^n$
 היא (כיוון) אלו יצוים (a_n) לא מתכנסת
 אלו הנקודה הראשונה בקדמת הטענה הראשונה היא שכל ניקח.
 - לכל n קיים $\varepsilon > 0$ כך שכל $n > N$ $|a_n - a| < \varepsilon$
 נכונה וזהו כל מקרה (a_n) מתכנסת. למשל $a_n = (-1)^n$ כל
 נאשר לזה $\varepsilon = \max\{|a-1|, |a+1|\}$ ו- $|a_n - a| < \varepsilon$
 אלו (a_n) מתכנסת.

(13)

הגדרה: N יקראו $\epsilon > 0$ וכל $n > N$ (*). $|a_n - a| < \epsilon$
 זה דווקא ~~הפך~~ $a_n \rightarrow a$ כל n

יהי $n > N \Leftrightarrow 0 < \epsilon \leq |a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow$ זהו $n > N$

$a_n \rightarrow a$ כל n $\Leftrightarrow a_n = a$

נשים לב (אבל) לטענה של אר. יותר חזקה מההגדרה

של התכנסות. כל סדרה שלם a_n או (*) היא

מתכנסת אבל כל סדרה מתכנסת מקיפה את (*)

אך מתחילים עם שאלות?

אפשר להראות בהיבוע וכל אריתמטיקה לקבל
 $a_n^2 \rightarrow a^2 \Leftrightarrow a_n \rightarrow a$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

נבחר $n \geq 3$

$$\Rightarrow a-b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

לכן תהי (a_n) סדרה $a_n > 0$ כל n ו- $a_n \rightarrow a$
 אז $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$

הוכחה: נחלק לשני מקרים:

I: $a=0$ יהי $0 < \epsilon$. נחלק $a_n \rightarrow a$ וכל $n > N$ $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon^2$ כל $n > N$
 $|a_n| = \sqrt{a_n} < \epsilon$

II: $a > 0$ יהי $0 < \epsilon$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \cdot |\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} = \frac{|a_n - a|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \leq \frac{\sqrt{a} \epsilon}{\sqrt{a}} = \epsilon$$

כל $a_n \rightarrow a$ $\Leftrightarrow$ כל $n > N$ $|a_n - a| < \sqrt{a} \epsilon$

כל n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} = ? \quad \text{האם?}$$

$$1 < \frac{n+1}{n-1} < 2$$

$\Downarrow$

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} < \sqrt[n]{2} \rightarrow 1$$

לפי הסיק

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} = 1$$

$\Rightarrow$

$b_n \rightarrow b \quad a_n \rightarrow a \quad \text{אם } (b_n) \neq (a_n) \quad \text{אז } \lim (a_n + b_n) = a + b$
 $a_n b_n \rightarrow ab$
 $(\text{אם } b_n \neq 0) \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} = \frac{1}{6}$$

האם?
הוכחה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 - 5}{n^3}}{\frac{6n^3 + n^2}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{n^3}}{6 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{n^3}\right) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n^3}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 6 = 6 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{1}{n}\right) = 6$$

$$\text{אם } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} \rightarrow \frac{1}{6}$$

$$0 \leq \left(\frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} < \frac{1}{2}$$

$$\text{אם } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{אז } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} = \frac{1}{6}$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{אם } \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{אז } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} = \frac{1}{6}$$

(14)

$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ SK $a > 0$ אם : הוכחה
 $\sqrt[n]{a} > 1$ SK $a > 1$ הוכחה (ניתן)
 $\alpha_n > 0$ שכן $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$ (140)
 $a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n \alpha_n$ אם α_n קטן

$$\Rightarrow \frac{a-1}{n} \geq \alpha_n \geq 0 \rightarrow 0$$

$$0 \leftarrow \alpha_n \quad \text{אם } \leftarrow =$$

$$\sqrt[n]{a_n} = 1 + \alpha_n \rightarrow 1 + 0 = 1 \text{ מידית של } \sqrt[n]{a_n} \text{ וקטוריות}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \rightarrow 1 \quad \Leftarrow \frac{1}{a} > 1 \quad \Leftarrow a < 1 \text{ אם}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \rightarrow 1 \quad \Leftarrow$$

(:) $\lim_n$

(15)

6.12.05
ד"ר א. כ. ת

הצגת הבעיה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 2n + 1}{n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}}$$

(1) (2)

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$$

$$\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim (6 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}) = 6 + 2 \lim \frac{1}{n^2} + \lim \frac{1}{n^3} = 6$$

$$\lim (1 + \frac{1}{n}) = 1 + \lim \frac{1}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \lim \frac{6n^3 + 2n + 1}{n^3 + n^2} = \frac{6}{1} = 6$$

פונקציה צמודה

(a_n) ו- (b_n) שני סדרות, (a_n) מתכנסת ל- L ו- (b_n) מתכנסת ל- d .

אם $a_n \leq b_n$ לכל n , אז $L \leq d$.

אם $a_n \geq b_n$ לכל n , אז $L \geq d$.

$$\sqrt[n]{3^n + 4^n} > \sqrt[n]{4^n} = 4 \Leftarrow 3^n + 4^n > 4^n \quad n \text{ כל } (1)$$

$$\sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 4 \rightarrow 1 \cdot 4 = 4 \text{ בעתיד}$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$\sqrt[n]{3^n + 4^n} \rightarrow 4 \quad \text{פונקציה צמודה} \Leftarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^{n-1} \cdot (n+1)}{n^n} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{e^{(1-0)}} \cdot \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e^2}$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$0 \leq \sqrt{n^2+5} - n = \frac{(\sqrt{n^2+5}-n)(\sqrt{n^2+5}+n)}{\sqrt{n^2+5}+n} = \frac{n^2+5-n^2}{\sqrt{n^2+5}+n} = \frac{5}{\sqrt{n^2+5}+n} \leq \frac{5}{n} \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{n^2+5} - n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \leftarrow$$

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\sqrt{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = (5)$$

$$= \frac{(n+1-n) \sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}} \rightarrow 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1}} \rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{9b_n + 10} \quad , \quad b_1 > -\frac{10}{9} \quad (3)$$

אנחנו יודעים ש $b_n < 10$ באינדוקציה $b_1 < 10$

$$b_{n+1} = \sqrt{9b_n + 10} \leq \sqrt{9 \cdot 10 + 10} = 10 \quad n$$

$\Leftrightarrow$ הסדרה מוגבלת מעלית

אם $b_1 > 10$ אז הסדרה מוגבלת מעלית ומוגבלת מתחתית

$$\Leftrightarrow \text{קיים גבול} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9b_n + 10} =$$

$$l^2 \quad \lim (b_{n+1})^2 = \lim (9b_n + 10) =$$

$$9 \lim b_n + 10 = 9l + 10$$

$$\Rightarrow l^2 = 9l + 10 \Rightarrow l = 10$$

(1) אם (a_n) מתכנסת ל- a ו- $a > x$

אז $a > x$

הכלל (כיוון) $a_n = -2 + \frac{1}{n} > -2$

$$b_n \rightarrow L, \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$
$$(c_n - a_n) \rightarrow 0$$

$$c_n \rightarrow L \quad a_n \rightarrow L \quad \square$$

הוכחה על פניו:

$$a = \lim a_n \quad (NOS)$$

$$c = \lim c_n$$

$$\Rightarrow a = c = \lim a_n - \lim c_n =$$
$$= \lim (a_n - c_n) = 0$$

$$\Rightarrow c = a$$

$$c = a = L \quad \Leftarrow \text{אם נשקל הסגור}$$

זה לא נכון ל'א' ואכן
אם יש ל'א' דבר כזה
בהנחה

$$a = \lim a_n$$
$$c = \lim c_n$$

אם לתורה - זה שנתנו משפט וזה
קובענו שתורה זה לא אומר שזה (נכון)
(נניח) $-1 = 1 \quad \Leftarrow \quad 1 = (-1)^2 = (-1)^2 = 1$ - נכון
אבל לא נכון ל'א' -
אין דבר כזה הוכחה מוחלטת (אומרת שזה)

הנחת נכונה:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\Rightarrow a_n - c_n \leq b_n - c_n \leq c_n - c_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow b_n - c_n \rightarrow 0$$

$$c_n = (c_n - b_n) + b_n \quad \text{אבל}$$

$$\Rightarrow \lim c_n = \lim (c_n - b_n) + \lim b_n = 0 + L = L$$

האותו איש

$$a_n = (a_n - c_n) + c_n \rightarrow 0 + L = L$$

☺ $L \in \mathbb{N}$

גבולות חלקיים

אם עושים תת סדרה מסדרה?

נבחר אנטי איברי מסדרה:

$$a_n: (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

אם זה? חשב שנתר את האיברים של הסדרה
שבונים מופיעים בסדרה המקורית.

הסדרה: תפי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותפי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$

סדרה של מספרים טבעיים ועולה $\in \mathbb{N}$

הסדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת $a_{n_k} = a_k$ היא תת-

סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots \rightarrow \text{תת סדרה}$$

של (a_n)

(14)

$$(a_n) = (-1)^n \quad \text{זוגית}$$

$$(-1, 1, -1, 1, \dots)$$

יש הרבה דרכים לבנות את הסדרה:

$$- \quad n_k = k \rightarrow (-1, 1, -1, 1, \dots) = (a_n)$$

$$- \quad n_k = 2k \rightarrow (1, 1, 1, \dots)$$

$$- \quad n_k = 2k-1 \rightarrow (-1, -1, -1, -1, \dots)$$

$$- \quad n_k = 2k^2 \rightarrow (1, 1, 1, 1, \dots)$$

בדגש שיש סדרות, דבר שבעיני (אנחנו)
 לא שווה הוא לפרש אבותיו...

המשפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מסדר $a \in \mathbb{R}$ (הוא)
גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת גרסא סדרה של
 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל- a .

נחזור לזוגית שלנו:

$$a_{n_k} = (1, 1, 1, \dots) \quad n_k = 2k \quad \text{דבר} \quad (a_n) = (-1)^n$$

מתכנסת ל-1, ולכן הוא גבול חלקי של (a_n)

באופן דומה אם -1 גבול חלקי של (a_n)

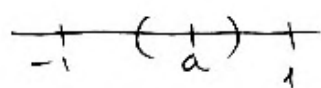
נראה שלא קיימת גבולות אחרים.

יהי $|a| \neq 1$ ונניח השלישי כי קיימת גרסא סדרה

$(b_k)_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל- a .

לכן K $b_k = 1$ או $b_k = -1$ ניקח $\{ |a-1|, |a+1| \}$ $0 < \varepsilon = \min$

$$|b_k - a| = \begin{cases} |1-a| & b_k = 1 \\ |1+a| & b_k = -1 \end{cases} \quad \text{לכן } \varepsilon < \begin{cases} |1-a| \\ |1+a| \end{cases}$$



$$|b_k - a| \geq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \text{אין משנה}$$

$$\Leftrightarrow \text{לא קיים גבול חלקי אחר!}$$

(11)

$$a_n = (1 \ 1 \ 2 \ 12 \ 3 \ 1234 \ 12345 \dots)$$

ברור שבין כל מספר לבין מספר אחר
 סדרה שהיא רדוקציה אחרת מספר $\Delta =$ קבוצה
 המכילה את כל המספרים N .

שאלה תהי (a_n) סדרה המתכנסת ל- a . אזי a
 הוא גבול חלקי של (a_n) והוא הגבול החלקי היחיד!
הוכחה:

למה זה גבול חלקי? נקח $a_n = a$ וכל $a_n = a$
 $a \leftarrow a_n \rightarrow a \leftarrow a$ גבול חלקי.
 למה זה גבול חלקי יחיד? (כאשר כל סדרה חלקית
 מתכנסת לאותו הגבול).

תהי (b_n) סדרה של (a_n) . יהי $\varepsilon > 0$. אז
 $a_n \rightarrow a$ ובהם שקיים N כך שלכל $n > N$
 $|a_n - a| < \varepsilon$. תהי (b_n) סדרה האנליקסית
 המתאימה ל- a_n . כלומר $b_n = a_n$.
 מתקיים $a_n \geq a$ כי (b_n) עולה. נסתח.
 $K = N$ אזי $K > K$

$$|b_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon$$

$$n \geq K > K = N$$

גם (c)

הוכחה בדאגת חשיב ל"ו" לא מתכנסת. למה
 קיים זה של גבולות חלקיים $\Delta =$ לא יתנו עתיד
 שיהיה מתכנסת.

(18)

משפט בולצאנו ויירשטראס (לפון BW):

תהי (a_n) סדרה חסומה אז קיימת ℓ (אנ)
לת סדרה מתכנסת.

מסקנה תהי (a_n) סדרה חסומה. (M)
 $L = \{a : a \text{ נקודה חלקית של } (a_n)\}$ קבוצה חסומה ולא ריקה.

$\Leftarrow$ קיימים $\sup L$ ו- $\inf L$.

הערה: תהי (a_n) סדרה חסומה ואפי' L קבוצת
הגבולות החלקיים של (a_n)

הגבול העליון של (a_n) הוא $\sup L$ וחסומה $\limsup a_n$
הגבול התחתון של (a_n) הוא $\inf L$ וחסומה $\liminf a_n$

הערות אב (a_n)

(1) $\liminf (a_n) \leq \limsup (a_n)$

(2) $\liminf a_n \leq a \leq \limsup a_n$ אם a נקיים

דוגמה סדרה (a_n) חסומה מתכנסת $\Leftrightarrow$

קיים לה גבול חלקי יחיד $\Leftrightarrow$

$\liminf a_n = \limsup a_n$

אנטידוגמה

כרגיל - $a_n = (-1)^n$ ברור לכל חסומה $L = \{-1, 1\}$

$\liminf a_n = -1 \neq \limsup a_n = 1$

ו (a_n) לא מתכנסת.

לסנה תהי (a_n) סדרה חסומה אז $\limsup a_n$

ו- $\liminf a_n$ הם גבולות חלקיים של (a_n) .

19) 13.12.05

ת. א. א. א.

הגדרה: (a_n) סדרה L חסומה קרויה הסכומית

החוק "ש" של א. ב. ג. ד. (a_n) הוא

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup L$$

$$A_n = (a_k)_{k=n}^{\infty} = (a_n, a_{n+1}, \dots) \text{ n ב.ס.}$$

$$S_n \geq S_{n+1} \Leftrightarrow \{A_n\} \supseteq \{A_{n+1}\} \quad S_n = \sup \{A_n\}$$

$$\inf \{S_n\} = \lim S_n = \limsup a_n \Leftrightarrow \text{חסומה יורדת } (S_n)$$

בעזרת (הקריאה):

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = ?$$

(1) (2)

$$\text{ראינו } (1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow e^{-1} < 1 \cdot e$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e^{-1} + 1}{2} < 1$$

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \leq \left(\frac{e^{-1} + 1}{2}\right)^n \rightarrow 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{כל סדרות} \quad \leftarrow$$

$$a_n^n \rightarrow 0 \text{ ש.כ. } |a_n| \rightarrow a < 1 \text{ לא } a \text{ ב.ס.}$$

$$a_n^n \rightarrow 0 \text{ ש.כ. } n \text{ ב.ס. } |a_n| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+5}{4n+1}\right)^n = ?$$

(3)

$$\left(\frac{4n+5}{4n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{4}{4n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{4}{4n+1}\right)^{\left(\frac{4n+1}{4} - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \left(\left(1 + \frac{4}{4n+1}\right)^{4n+1}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1 + \frac{4}{4n+1}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\downarrow e^4$$

$$\downarrow 1$$

$$\downarrow e^{4 \cdot \frac{1}{4}} = e$$

$$\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n \rightarrow e^4$$

האופן (2): אם (a_n) מנוכחית וזוהי ממש ושווה

למשל $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \rightarrow e$

אם b a_n שלמים אז $(1 + \frac{1}{n})^n$ של

ולכן ברור, אפשר להראות גם למקרה a_n - רציונלי
ללא שלמים

רצף: אם $a_n \rightarrow a$ ו- $b_n \rightarrow b \neq 0$ אז $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$

אנחנו לא צריכים להוכיח את זה (זה מוביל למשפט של

בונקרו - והוכחה אבל זה למעשה היה לנו

אם $b_n \rightarrow 0$ ו- $a_n \rightarrow a$ ואז $a_n^{b_n} \rightarrow 1$

אחרת זה יהיה לא ברור!!!

(3) $(0.9999 + \frac{1}{n})^n \rightarrow 0$ למה?

היה $n > 20000$ אז $0.9999 + \frac{1}{n} < 0.99995$

ואז $0 < (0.9999 + \frac{1}{n})^n < 0.99995^n \rightarrow 0$

(4) באותו אופן, n יכול להיות גם אינסופי

אי שוויון הממוצעים

אם $x_1, \dots, x_n \geq 0$ אז

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

הממוצע ההרמוני $\leq$ הממוצע הגאומטרי $\leq$ הממוצע האריתמטי

אנחנו לא נוכיח את אי השוויון אבל מאידך

20

3.1

$a, b > 0$

1.1

(3)

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$b_{n+1} \leq a_{n+1}$ קיבלנו כי $a_n, b_n > 0$ ולכן

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

↓

$$n \geq N \text{ הן } b_n \leq a_n$$

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$$

↓

$$n \geq 2 \text{ הן } a_n \geq b_n$$

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

קיבלנו כי $1 < n$

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

$$b_n \rightarrow b \text{ ו- } a_n \rightarrow a$$

$$a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a=b$$

↓

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\lim a_n + \lim b_n}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ b_n & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases} \quad b_n \rightarrow b \quad a_n \rightarrow a \quad (4)$$

$$c_n = (b_1, a_2, b_3, a_4, \dots)$$

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

המשוואות a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול

אם $a > 0$ אז $C_n = a^n$ ולכן (C_n) מתכנסת ל- a .

חישוב מקובלות

הרכה פסאמים משווים בין סדרות כדי לחשב מקובלות
 $a_n \rightarrow 0 \iff 0 < a_n < \frac{3}{4}$
 $a_n \rightarrow 0 \iff a_n \rightarrow \frac{1}{2}$

יש חוקים לאמנו כגון אנטי-טריקל
 גבולות.

אם הרכה פסאמים לא יכזב פשוט עתה נא
 וסדרה

במאמר
 תהי $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$ (אנדר)
 $b_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$
 ואז $\lim b_n = 0$ -

קיים N כך ש $a_n < \frac{3}{4}$ לכל $n > N$.

$$|b_n| = |a_1 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1 \cdot \dots \cdot a_N| \cdot |a_{N+1} \cdot \dots \cdot a_n| \leq$$

$$\leq |a_1 \cdot \dots \cdot a_N| \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} \rightarrow 0$$

כי $|a_1 \cdot \dots \cdot a_N|$ קבוע

$1 > q$ - סדרה הנצטת $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-N}$.

$$b_n \rightarrow 0 \iff |b_n| \rightarrow 0$$

סדרות אינסופיות

איזה סדרות לא מתכנסות אנחנו מכירים?

$$a_n = 1 \quad a_n = (-1)^n$$

אם אינן הן האנטינטיביות אחרת שלישית הן סדרות
הן מתכנסות באופן שונה.

הגדרה: תהי (a_n) סדרה (אחרת) של סדרה -

שואפת ל- ∞ אם לכל M קיים N כך שלכל

$$n > N \quad a_n > M \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

הגדרה: סביבה של ∞ היא קבוצה מהצורה $(\infty, M) = \{x : x > M\}$

הגדרה: $a_n \rightarrow \infty$ אם כל סביבה של ∞ (מצאם)
כחולת אברי הקבוצה.

הגדרה: סדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב אם

(a_n) סדרה מתכנסת או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

זו סדרה שמתכנסת במובן הרחב (יחסו) במובן הרחב
שלא יחיד, כלומר אם היא מתכנסת ל- ∞ או ל- $-\infty$ היא
לא יכולה להתכנס גם למשהו אחר.

אם (a_n) מתכנסת במובן הרחב אזי בדיוק אחת

מהאם מתקיימת

- (a_n) מתכנסת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

- סדרה מתכנסת היא חסומה, לריבוע זה לא נכון במובן.

- סדרה השואפת ל- ∞ לא חסומה (לרוב זה לא נכון).

לדוגמה $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$

משפט ה $\lim$ - תהייה (a_n) ו (b_n)
 סדרות כן ש $a_n \leq b_n$ הן נמנמן מסוים.
 אם $a_n \rightarrow \infty$ אזי $b_n \rightarrow \infty$
 אם $b_n \rightarrow -\infty$ אזי $a_n \rightarrow -\infty$

איתחול'קה

- אם $a_n \rightarrow \infty$ ו b_n חסומה אז $a_n + b_n \rightarrow \infty$
 - אם $a_n \rightarrow \infty$ ו $b_n \rightarrow \infty$ אז $a_n - b_n$ מתכנסת
 - אם (a_n) ו (b_n) סדרות כן ש $b_n \neq 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow C$
 אזי $a_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow b_n \rightarrow \infty$
 $a_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow C \neq 0$

סדרה שאינה מתכנסת, $\lim$ וכו' אפשר
 לכתוב למקרה של $\lim$ באופן הבא:
 איך יוצאים אם סדרה מתכנסת?

הגדרה: סדרה (a_n) נקראת סדרה קושי אם לכל $\varepsilon > 0$
 קיים N כן של $N > m, n$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$

לענף: אם (a_n) סדרה מתכנסת אז היא סדרת
 קושי.

אם ההפך (הנאמן), אזי $\lim$ שיוויון. זה מובילנו
 את זה בקיפה

סדוקט'ר: פשוט לא הבנתי את ההוכחה בקיפה אז
 ניצלתי את ההצמנות של אלוף אותך.

זו: אם, אתם לא תבינו את זה סוף, כי לא
 נואכתי את זה הוכחה.

(אם) (אם) (אם) (אם) (אם) (אם) (אם) (אם) (אם) (אם)

הוכחות

$L_a = \{a_n\}$ (3)
 $L_b = \{b_n\}$
 $L_c = \{a_n + b_n\}$

$\Rightarrow L_c \in L_a + L_b$
 $\Rightarrow \sup(L_a + L_b) \geq \sup(L_c)$

יתכן: $a_{n_k} + b_{n_k} = c_{n_k} \rightarrow c$ (c_{n_k}) מתכנסת
 $c = \lim a_{n_k} + \lim b_{n_k} \in L_a + L_b$ (a_{n_k}) - אולי מתכנסת
 $c \in L_a + L_b$

נניח, (a_{n_k}) חסומה ולכן קיים δ מתכנסת
 (a_{n_k}) לסימן a . (b_{n_k}) חסומה ולכן קיים
 δ מתכנסת לסימן b .

$c_{n_k} \rightarrow c$ $a_{n_k} \rightarrow a$
 $\Rightarrow a_{n_k} + b_{n_k} = c_{n_k}$
 $\Rightarrow L_a + L_b \ni a + b = c$

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a \iff a_n \rightarrow a$ (5)

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow 0 : \exists a=0$ (אולי עובד)

יתכן $0 < \epsilon$ $a_n \rightarrow 0$ קיים N כך ש
 $|a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ $n > N$
 לכל $n > N$, $M = |a_1 + \dots + a_n|$ $M < \frac{M}{n}$
 ולכן קיים N_2 כך ש
 $\frac{M}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ $n > N_2$
 כל $n > \max\{N, N_2\}$

$\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \left| \frac{a_1 + \dots + a_{N_1}}{n} \right| + \left| \frac{a_{N_1+1} + \dots + a_n}{n} \right| \leq$
 $\leq \left| \frac{a_1 + \dots + a_{N_1}}{n} \right| + \frac{|a_{N_1+1}| + \dots + |a_n|}{n} = \frac{M}{n} + \frac{|a_{N_1+1}| + \dots + |a_n|}{n} <$
 $< \frac{\epsilon}{2} + \frac{(n - N_1) \frac{\epsilon}{2}}{n} < \frac{\epsilon}{2} + 1 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
 $a=0$ $\Leftarrow$

$$d_n = a_n - a \quad (אָפּוּט) \quad a \neq 0$$

$$d_n \rightarrow 0 \quad \text{כאשר } n \rightarrow \infty \quad \text{אם } a_n \rightarrow a$$

$$\sum_{k=1}^n d_k \quad 0 \leftarrow \frac{d_1 + \dots + d_n}{n}$$

$$\frac{d_1 + \dots + d_n}{n} = \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_n - a)}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a$$

$$\text{אם } \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a \quad \text{אז } \frac{d_1 + \dots + d_n}{n} \rightarrow 0$$

$$d_n = \frac{1}{a_n} \quad \text{אם } a_n \neq 0 \quad \text{אז } \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

$$d_n = \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a} \quad \text{אם } a_n \rightarrow a \neq 0$$

$$\frac{d_1 + \dots + d_n}{n} \rightarrow \frac{1}{a} \neq 0 \quad \text{אם } \frac{1}{a} \neq 0$$

$$\frac{1}{\frac{d_1 + \dots + d_n}{n}} \rightarrow \frac{1}{1/a} = a$$

אם $a_n \rightarrow a \neq 0$ אז $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$

$$\frac{1}{\frac{d_1 + \dots + d_n}{n}} = \frac{n}{d_1 + \dots + d_n} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$



אם $a_n \rightarrow a \neq 0$ אז $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n} = \infty \quad \text{אם } n \geq 2$$

$$n \geq 2$$

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{4}$$

$$n > N \quad \text{אם } N > 4M \quad \text{אז } \frac{n!}{2^n} > M$$

$$a_n = \frac{n!}{2^n} > \frac{n}{4} > M$$

$$a > 1 \quad \text{אם } a > 1 \quad \text{אז } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

$$\left(\frac{1}{a} \right)^n \rightarrow 0 \quad \text{אם } \frac{1}{a} < 1 \quad \text{אז } \left(\frac{1}{a} \right)^n \rightarrow 0$$

$$\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0 \quad \text{אם } a > 1$$

$$a^n \rightarrow 0 \quad \text{אם } |a| < 1 \quad \text{אז } \frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0$$

$$\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0 \quad \text{אם } |a| < 1$$

$$\lim \frac{a^n}{n!}$$

②

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n}$$

לפיכך $n > 2a$

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \left[\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{(2a)+1} \right] \left[\frac{a}{(2a)+2} \cdot \frac{a}{n} \right] \leq \\ &\leq \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{(2a)+1} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-(2a+1)} \end{aligned}$$

2

אם $n > N$ אז $N > 2a$

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{N} \right) \left(\frac{a}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n} \right) \leq \\ &\leq \underbrace{\left(\frac{a}{N} \right)^N}_{\text{קבוע}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right)^{n-N}}_{\text{הולך לא 0}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

סיום

תהי (a_n) סדרה. אפשר להגדיר סכומים

$$a_1 + a_2$$

$$a_1 + a_2 + a_3$$

$$a_1 + \dots + a_n$$

בר שדה ובהם כל הסדרות האלה מתאחדים היטב (בהתאם לאקסיומת של ארכימדס).

הגדרה: תהי (a_n) סדרה סדירה בסכומים החלקיים

של (a_n) היא סדרה (S_n) המוגדרת על ידי

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

אם יורדים את (a_n) בלוח יורד גם (S_n)

ואם הפסקה הוא נכון.

לדוגמה יתהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אף ק"מ

סדרה (יחידה) (a_n) יק ש (s_n) היא סדרת הסכומים התקיים של (a_n) .

הוכחה: (הדיר) $a_1 = s_1$

י- $a_n = s_n - s_{n-1}$ עבור $n > 1$. (י)

המשפט יתהי (a_n) סדרה ויתהי (s_n) סדרת הסכומים התקיים שלה. אם (s_n) מתכנסת (כמובן הרחה) אף נסמן את גבולה ע"י הטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

(שתמשו גם בסיון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כדי לציג את סדרת הסכומים התקיים (s_n)).

המקרה היי אהיה לדבר על $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אם ראש הסדרה (s_n) לא מתכנסת. ונאמר ש $\sum a_n$ מתכנס במקום שהסדרה (s_n) מתכנסת.

פערות לבנות

למה $\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \in L\}$ אינה קבוצה גבולית התקיים של סדרה?

הוכחה 1

ע"י השלייה ש L היא קבוצה גבולית התקיים של (a_n) אף $0 \leq L \leq \liminf a_n = \inf a_n$. לפי טענה שאמנו בכיתה המבואר דרחתון של (a_n) הוא גבול חלקי של (a_n) פואי צדיק להתקיים $0 \in L$ אב $0 \notin L$. סתירה!

הוכחה 2

על מ $\frac{1}{m} \in L$ ולתקיי $a_m \rightarrow \frac{1}{m}$ אחרת קיים איבר a_m יק ש $\frac{1}{m} < a_m < \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$. קבוצת a_m יק ש $\frac{2}{m} < a_m < \frac{2}{m}$ אף $a_m \rightarrow 0$. פואי 0 גבול חלקי של (a_n) . סתירה!

חזרה על אריתמטיקה

דוגמה: יהי $|q| < 1$ ויהי $a_n = q^{n-1}$

אם n סדרה

$$S_n = \sum_{i=1}^n q^{i-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

(אפשר להוכיח את זה באינדוקציה)

$\Leftarrow (S_n)$ מתכנסת ומתקיים

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-q}$$

לפיכך $|q| < 1$ אם $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = \frac{1}{1-q}$

0 ויהי אם הסדרה $\sum a_n$ מתכנסת כי $a_n \rightarrow 0$

הוכחה: יהי S הגבול של S_n

אם $n < 1$

$$a_n = S_{n+1} - S_n$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$$

דוגמה: $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ מתבדר

מתקיים $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow e^{-1} \neq 0$

$\Leftarrow$ לא ייתכן שהסדרה מתכנסת.

דוגמה

עבור $|q| \geq 1$ הסדרה $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}$ מתבדרת ואם
 והאקורדל: לא שואף ל-0.

אם (S_n) סדרה מתכנסת אז היא סדרה קוסי

לפיכך $\forall \varepsilon > 0$ קיים N רק שלב $N > n > m$

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

אם $\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ סדרה קוסי

מתכנסת $\Leftrightarrow (S_n)$ סדרה קוסי: לפיכך $\forall \varepsilon > 0$ קיים N

רק שלב $N > n > m$
 $|a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$

אסטרטגיה:

(1) הטור ההדדני $\sum \frac{1}{n}$ מתכנס

(2) הטור $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

יש 2 פעולות ^{פסיכיות} שאפשר לעשות טורים:

- לחבר טורים

- להפוך טור במספר קבוע סקלר

כלל הסקלר

תהי (a_n) סדרה ו- $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ סדרה (S_n) סדרת

הסכומים התחלקים של (a_n) אזי סדרת הסכומים

התחלקיים של הסדרה (ra_n) היא (rS_n)

ולכן הטור $\sum a_n$ מתכנס ל- A אם ורק אם הטור

$\sum ra_n$ מתכנס ל- rA

$$\sum r a_n = r \sum a_n$$

חיבור טורים

תהינה (a_n) ו- (b_n) סדרות וזוהי

(S_n) ו- (T_n) סדרות הסכומים

התחלקיים שלהן בהתאמה.

תהי (C_n) הסדרה המוגדרת $C_n = a_n + b_n$

סדרת הסכומים התחלקיים של (C_n) היא $(S_n + T_n)$

אסטרטגיה אם הטורים $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים ל- A ו- B .

בהתאמה $\sum (a_n + b_n)$ מתכנס ל- $A+B$

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

25

הטור $\sum c_n = \sum (a_n + b_n)$ שווה הטור המחוקק

מהטור $(d_n) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$

מהן סדרות הסכומים החלקיים:

$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$ עבור (c_n)

$(a_1, a_1 + b_1, a_1 + b_1 + a_2, \dots)$ (d_n)

ולכן שונה!

דוגמה

$$b_n = (-1)^{n+1}$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

$$(b_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

$$(c_n) = (0, 0, 0, 0, \dots)$$

$$(d_n) = (-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, \dots)$$

הסכומים החלקיים:

$$(0, 0, \dots) \quad - \quad \text{עבור } (c_n)$$

$$(-1, 0, 1, 0, \dots) \quad - \quad (d_n) \quad \text{לא מתכנס!}$$

הערה: טור $\sum a_n$ הוא טור חיובי אם $a_n \geq 0$
הערה: אם $\sum a_n$ חיובי אז סדרת הסכומים החלקיים
אונטונית עולה

קריטריון ההשוואה יהיו $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ טורים חיוביים
בכך ש- $a_n \leq b_n$ (החל ממקום מסוים).
(א) אם $\sum b_n$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס
(ב) אם $\sum a_n = \infty$ אזי $\sum b_n = \infty$.

משקלה יהיו $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ סוגים חיוביים
 יק' $b_n \neq 0$ והחל ממקום מסוים ויהי $0 < \alpha \leq \beta$
 יק' $\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$ החל ממקום מסוים
 אזי הסוגים מתכנסים ומתפזרים יחד.

משקלה יהיו $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ סוגים חיוביים
 יק' לקיים (המקור) $\lim \frac{a_n}{b_n}$ וגדל חיובי ממשי, אזי
 הסוגים מתכנסים ומתפזרים יחד.

דוגמה $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ו- $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$\leftarrow \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ מתכנס כי $\sum \frac{1}{n}$ מתפזר.

לבחן השורש יהיו $\sum a_n$ סוג חיובי.
 (א) אם קיים $q < 1$ יק' $\sqrt[n]{a_n} < q$ החל ממקום מסוים
 אזי הסוג מתכנס
 (ב) אם $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ עבור אינסוף ת.י. אזי הסוג מתפזר.

לבחן ההנכס יהיו $\sum a_n$ סוג חיובי.
 (א) אם קיים $q < 1$ יק' $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ החל ממקום מסוים
 אזי הסוג מתכנס
 (ב) אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ החל ממקום מסוים אזי הסוג מתפזר.

הממוצע (a_n)

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

הממוצע החשבוני

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

הממוצע ההרמוני

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

הממוצע הגאומטרי

אם $a_n \rightarrow a$ אז מתקנה לכל n

$$\lim \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lim \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = \lim \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} = a$$

הזרות (תמיד) 8

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = a \quad \text{אם} \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \quad a_n > 0$$

(1)

$$b_n \rightarrow a \quad \text{אם} \quad \begin{cases} b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ b_1 = a_1 \end{cases} \quad \text{הוכחה (2*)}$$

$$\text{כפי} \quad \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} = a \quad \Leftarrow$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n} \rightarrow a$$

הכיון ההפוך לא מתקנה (בין) לכל (n) (n)

$$a_n = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$$

$$\text{אם} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2}{1} \quad \text{אז} \quad \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$$

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n^n}} \rightarrow 0 \quad \text{פונקציה (אולי) אולי}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{אם} \quad a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{הוכחה}$$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{n! (n+1) n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e \quad \text{כפי}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

סדרה

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \rightarrow ?$$

היא נכנסת ל

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \rightarrow 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \quad \Leftarrow$$

הגדרה: סדרה (a_n) היא סדרה קוסיקה אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים $|a_m - a_n| < \epsilon$ (2)

כל סדרה קוסיקה היא סדרה מתכנסת $\Leftarrow$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k^n \quad \text{כאשר} \quad 0 < k < 1 \quad (C)$$

כל $m > 0$

$$|a_{n+m} - a_n| = |(a_{n+m} - a_{n+m-1}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m |a_{n+i} - a_{n+i-1}| \leq \sum_{i=1}^m k^{n+i-1} =$$

$$= k^n \sum_{i=0}^{m-1} k^i \leq k^n \sum_{i=0}^{\infty} k^i = k^n \frac{1}{1-k}$$

$$\Leftarrow \frac{k^n}{1-k} \rightarrow 0 \quad |a_{n+m} - a_n| < \frac{k^n}{1-k} \quad \text{כל } n$$

$$\frac{k^n}{1-k} < \epsilon \quad n > N \quad \text{כל } \epsilon > 0 \quad \text{קיים } N \quad \text{כך שלכל } n > N$$

$$|a_{n+m} - a_n| < \epsilon \quad \Leftarrow$$

$$\text{כל } \epsilon > 0 \quad \text{קיים } N \quad \text{כך שלכל } n > N \quad |a_n - a_n| \leq \frac{k^n}{1-k} < \epsilon$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{כל } a_n \geq 0$$

הסדרה (S_n) מתכנסת ל- S אם ורק אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq S_n = \sum_{n=1}^n a_n \quad \text{כל } n$$

$\log$ כוונתו $\log_2$ כל מה שאנחנו חייבים לדעת
 כל'ה הוא $\log_2(a^b) = b \log_2 a$
 $\log_2(2^x) = x$

☺ ☺ ☺

עזרים

סדרה (a_n) יש לה סכמת סכומים חלקיים (S_n)
 אם S_n מתכנסת נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

תגובה טור $\sum a_n$ הוא טור חיובי אם $a_n \geq 0$ לכל n

דבור $0 < q < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$

ואם $\sum \frac{1}{n^2}$ טור מתכנס, אבל למה $0 < q < 1$
 רק ש $\frac{1}{n^2} \leq q^n$ החל מנקודה מסוימת.

קריטריון ההשוואה

אם $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ טורים חיוביים ק $0 < b_n < a_n$
 החל מנקודה מסוימת.

(א) אם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

(ב) אם $\sum a_n = \infty$ אז $\sum b_n = \infty$

צולחן אם $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ טורים חיוביים מתכנסים
 אז גם הטור $\sum \sqrt{a_n b_n}$ מתכנס. למה?

$\frac{1}{2}(\sum a_n + \sum b_n) =$ לפי גמ $= \sum \frac{a_n + b_n}{2}$

מתקיים $\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}$ מתקיים
 לפי קריטריון ההשוואה הטור $\sqrt{a_n b_n}$ מתכנס.

מסקנות

יהיו $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ טורים חיוביים.

(1) אם ק"מ $\beta \leq \alpha < \infty$ $\beta \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha$ יהיו $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים או שניהם מתפזרים.

(2) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ קיים והוא שווה לא 0, אז $\sum a_n$ מתכנס או שניהם מתפזרים.

דוגמאות

(1) $\sum \left(\frac{2^{n+1}}{4^{n-1}} \right)^n$ מתכנס $\frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2}$

ולכן $\left(\frac{2^{n+1}}{4^{n-1}} \right)^n \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n$ (החל מנקודה מסוימת).
הסדר $\sum \left(\frac{3}{4} \right)^n$ מתכנס ולכן קריטריון ההשוואה
עם הסדר $\sum \left(\frac{2^{n+1}}{4^{n-1}} \right)^n$ מתכנס.

(2) $\sum \left(\frac{2^n}{n} \right)^{-1}$ לא שואף ל-1 (נניח) $\frac{1}{4} = \sqrt[n]{\left(\frac{2^n}{n} \right)^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2^n}{n} \right)^{-1}}$ ולכן (החל מנקודה מסוימת)
 $\left(\sqrt[n]{\left(\frac{2^n}{n} \right)^{-1}} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$
ולכן קריטריון ההשוואה $\sum \left(\frac{2^n}{n} \right)^{-1}$ מתכנס.

מבחן השורש

יהיו $\sum a_n$ סדר חיובי.

(א) אם $\sqrt[n]{a_n} < q$ עבור $0 < q < 1$ יהיו $\sum a_n$ מתכנסים.

אם $\sqrt[n]{a_n} > 1$ מתפזרים.

(ב) אם $\sqrt[n]{a_n} > 1$ עבור אינסוף חזים אזי הסדר מתפזר.

מסקנה: אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ הסדר מתכנס ואם

$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ הסדר מתפזר.

$\sum \left(\frac{2n+1}{4n-1}\right)^n$ פאלי

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+1}{4n-1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$

הטור מתכנס $\Leftarrow$

מבחן ההפרש $\sum a_n$ יפה טור חיובי ממש

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ עבור $0 < q < 1$ הרי שהמקום מסוים

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ הרי שהמקום מסוים

אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ הרי שהמקום מסוים אסירי מתבדר

אנליזה

למה ב(ב) - זרק הרי המקום מסוים ולא מספק אנוס

נניח $a_n = \frac{1}{n^3}$ או $a_n = \frac{1}{n^2}$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{אם } n \text{ איז זיכר} \\ \frac{1}{n^2} & \text{אם } n \text{ איז זיכר} \end{cases}$$

אם $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ אז $\sum a_n$ מתכנס - אלא $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס
אם $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ אז $\sum a_n$ מתכנס - אלא $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^3 & \text{אם } n \text{ איז זיכר} \\ \frac{n^2}{(n+1)^3} & \text{אם } n \text{ איז זיכר} \end{cases}$$

אם n איז זיכר $\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{n^3}{(n+1)^2} \rightarrow \infty$ אלא $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 2$ אלא הטור מתכנס !!!

אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ הטור מתכנס

אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ הטור מתבדר

אנליזה $\sum \frac{a^n}{n!}$ $a_n = \frac{a^n}{n!}$ $a > 0$ אם

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0$$

הטור מתכנס $\Leftarrow$

$a_n = \frac{n! \cdot a^n}{n^n} \quad (n \geq 0), \quad a \neq e \quad \sum \frac{n! \cdot a^n}{n^n}$ צמח

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! a^n} = a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow \frac{a}{e}$

$\Leftarrow$ עבור $e < a$ הטור מתבדר } עבור $a = e$ מתן התנה
 עבור $a < e$ הטור מתכנס. } לא אומר לנו כלום אבל
 אפשר להוכיח בשיטה אחרת
 שלדני מתבדר

הנחה אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ אז $a_{n+1} \leq a_n q^n$
 $\Rightarrow \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq \sqrt[n]{a_n} \cdot \sqrt[n]{q^n} \rightarrow q$

אם a מתקיים מתן התנה מתקיימים מתן השורש

הריון ההפוך לא נכון! } $a_n = \begin{cases} q^{n+1} & \text{חשאי} \\ q^{n-1} & \text{חשאי} \end{cases}$ נסדר

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{חשאי} \\ q & \text{חשאי} \end{cases}$ מתן התנה

לא נותן לנו כלום. אז נסתכל, מתן השורש:

$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{q} \cdot q & \rightarrow q < 1 \\ \sqrt[n]{\frac{1}{q}} \cdot q & \rightarrow q > 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ הטור מתכנס!

משפט תהי (a_n) סדרה חיובית מונוטונית יורדת, אזי הטור $\sum a_n$
 מתכנס אם ורק אם הטור $\sum a_n^2$ מתכנס. (עמלה מוכיחים $\sum \frac{1}{n^2} \log n$ מתבדר)

דוגמה $a_n > 0$ לכל n אז $\sum a_n$ מתבדר. אז

הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

הוכחה: נחזק לכלי מקרים.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (נכון) אז $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ אז $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} \rightarrow 1$

אם לפי קריטריון ההשוואה הזקנוי b_n מתבדר.

(2) $\limsup a_n > 0$ תהי (a_{n_k}) תס $\epsilon > 0$ $a_{n_k} \rightarrow \epsilon > 0$

אזי $b_{n_k} \cdot \frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} \rightarrow \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \neq 0$ ואם $b_n \rightarrow 0$

אם $\sum b_n$ מתבדר אז לא (י)

תרגיל 8 - טאלי

תהי (a_n) סדרה חיובית ואם יק שיהיה $\sum a_n$ מתכנס

3 : $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס

- מקרה 1 : $\limsup a_n = 0$
 מקרה 2 : $0 \neq \limsup a_n < \infty$
 מקרה 3 : $\limsup a_n = \infty$

נמקרה 1 : קימא תס (a_{n_k}) יק $a_{n_k} \geq 1$ לכל k

5 כל $\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = \frac{1+a_{n_k}-1}{1+a_{n_k}} = 1 - \frac{1}{1+a_{n_k}} \geq$

$\geq 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

כלומר הסדרה $\frac{a_n}{1+a_n}$ לא שואף לאפס ולכן $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס

הערות לתרגיל 9

אבחון העצמי. תהי (a_n) סדרה חיובית. א. שלילי. אוטונומית יורדת
 כל הסדר $\sum a_n$ מתכנס אם הסדר $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^\alpha}$ $\alpha > 0$

$\log n$ אוטונומית עולה ב- n $\Leftrightarrow \log \log n$ אוטונומית ב- n
 $\alpha > 0 \Leftrightarrow (\log \log n)^\alpha$ אוטונומית ב- n
 $\Leftrightarrow \log(\log \log n)$ אוטונומית עולה
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\log(\log \log n)}$ אוטונומית יורדת $\Leftrightarrow$ ניקח את שטחם
 מאבחון העצמי

$\frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{n (\log n)^\alpha}$

ואם באופן קומה $\frac{1}{n (\log n)^\alpha}$ אוטונומית יורדת ולכן נשתמש
 מאבחון העצמי $\frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$
 $\Leftrightarrow$ הסדר מתכנס אם $\alpha > 1$, ולכן סדרה חיובית מתכנסת

אפשרותם לב שהמשפט האמתן העבוי האור
 לוג. לא מאד נח. לז' עאדל'ה עחשוק
 על דואמה אחרת שבה משתמשים במבחן העבוי:

לא סדרה (a_n) וסדרה $(|a_n|)$ חיובית ולכן
 הטור $\sum |a_n|$ חיובי.

בהצבה: טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum |a_n|$ מתכנס.
 אולם: טור מתכנס בהחלט מתכנס.

נמצא

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! - n^3} \quad (4)$$

עבור $n \geq 6$

$$\begin{aligned} n! - n^3 &= n(n-1)(n-2)(n-3)! - n^3 \geq \\ &\geq n(n-1)(n-2)6 - n^3 = n(6(n-1)(n-2) - n^2) \geq \\ &\geq n \cdot n^2 = n^3 \\ \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n! - n^3} \right| &= \frac{1}{n! - n^3} \leq \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

הטור $\sum \frac{1}{n^3}$ מתכנס ולכן מתכנסין ההשויא לב
 הטור $\sum \frac{1}{n! - n^3}$ מתכנס לפי הטור
 מתכנס בהחלט ופירו מתכנס

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}^{-1} \quad (3)$$

השויא לב שער ראיו כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \binom{2n}{n}^{-1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

מתכנס

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}^{-1} \ll \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

מתכנס בהחלט ופירו מתכנס

בהצבה: תה (a_n) סדרה חזקתית שואת עאפט
 לסי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ הוא טור עיניף.

(30)

משפט דיריכלי יהי $\sum (-1)^{n+1} a_n$ סדר דיריכלי ונניח כי $a_n \geq 0$
 אזי הסדר מתכנס ומחולקו S מקיים $0 \leq S \leq a_1$
 ולכן n מתקיים $(-1)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k > 0$
 $|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k| \leq a_{n+1}$ -

החזרת (1) לא כי סדר עשוי להיות מתחלפים מתכנס
 לא הסדר $\sum (-1)^{n+1}$ מתכנס

(2) צילת פאונסטינג (סמל של)

$$a_n \rightarrow 0 \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} & n=2k-1 \\ \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} & n=2k \end{cases}$$

$$\sum (-1)^{n+1} a_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

כל k

$$a_{2k-1} - a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}+1 - \sqrt{k+1}-1}{k+1-1} = \frac{2}{k}$$

לכן $S_{2n} = (a_1 + a_2) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
 וזה מתבדר - זה הסדר ההרמוני. לכן הסדר לא מתכנס.
 (3) זה א הטענה שיש לנו על הכנס סומרים וזה
 מספיק לרוב מספר קבוע של איברים שלהם הסומרים
 ונתחלים אבל אם המספר משתנה זה כבר לא טוב

$$\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}} = \infty$$

יהי $N^2 \leq n \leq (N+1)^2 - 1 = N^2 + 2N$ כל $N \in \mathbb{N}$
 $N \leq \sqrt{n} < N+1$

$$(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = (-1)^N \quad \text{או} \quad N = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

$$\left| \sum_{n=N^2}^{(N+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}} \right| = |(-1)^N| \left| \sum_{n=N^2}^{N^2+2N} \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=N^2}^{N^2+2N} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{(N+1)^2}} = \frac{1}{N+1} \quad \text{כל } N^2 \leq n \leq N^2 + 2N$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N^2}^{N^2+2N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2N \cdot \frac{1}{N+1} > 1$$

מה קיבלנו? אם N קיים $m = N^2 + 2N$

י"ק $|a_N + a_{N+1} + \dots + a_m| > 1$

לפי הסוד לא מקיים את הנאיגוטי (וכאן לא מתקן).

הם שני לייבנץ ופני מתקנים $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ ו $\sum \frac{(-1)^n}{n \log n}$

$$\sum (-1)^{n+1} \left(\frac{2^{n+1}}{n(n+1)} \right) = \sum (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (4)$$

$$= \sum (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ סדרה מונוטונית שאינה אפס ולפי הסוד (וכאן שר לייבנץ) מתקן.

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

הוכחה: $S_n = S_{n-1} + a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

$$= 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \rightarrow 1$$

אם $\sum a_n$ מתכנס

$$\left| \sum \frac{(-1)^{n+1} (2^{n+1})}{n(n+1)} - 1 \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2^{n+1})}{n(n+1)} \right| \leq a_{N+1}$$

ומכאן אפשר לבחור N כל

הערה: ידוע $\sum a_n$ היא סדרת חסום אם ורק אם הסכומים החלקיים מתכנסים.

משפט דיריכלי: אם (a_n) סדרה מונוטונית לא אפס $\delta > 0$ ו- $\sum b_n$ סדרת חסום ידועה אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הערות: ה"י $\sum (1-i)$ סדר חטים ולק
התכנות סדר אייבניץ (קבוצת מחשבים) דריטה.

איזה פעולות אפשר לעשות על סדרים?

- הוספת וקטור סמנים
- הוספת אפסים
- שינוי סדר הסכימה

לדוגמה: יהי $\sum a_n$ סדר מתכנס ויהי $\sum b_n$ סדר
המתקבל $\sum a_n b_n$ הווספת סמנים או ע'
הוספת אפסים, אזי הסדר $\sum a_n b_n$ מתכנס לאותו סכום.

הערות: הכיוון ההפוך לא חל בהכרח
למשל $1 = 1 + (-1) + (1-1) + \dots$ מתכנס
אבל הסדר המקורי $\sum (1-i)^n$ לא מתכנס.

יש שני תנאים לביטול אחיד להוציא סמנים:

משפט: יהי $\sum a_n$ סדר מתכנס שהתקבל מסדר $\sum a_n$
ע' הנסג סמנים רק שכל זוג סמנים יש איברים עם
אותו סימן אזי הסדר $\sum a_n$ מתכנס.

משפט: יהי $\sum a_n$ סדר מתכנס שהתקבל מסדר $\sum a_n$
ע' הנסג סמנים רק שכל זוג של סמנים יש מספר חטים
של מחברים מתקיימים $a_n \rightarrow 0$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.

משפט: אם $\sum a_n$ מתכנס בהתאם לזיגל סדר
המתקבל ממנו ע' שינוי הסכימה מתכנס בהתאם
לאותו סכום.

דוגמה $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ סדר איבריני ומתכנס בתנאי:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

(שלד אג סדר הסכימה)

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{4n-2}} + \dots$$

אם בשלילה הסדר החזל היה מתכנס גם אם קטן
המתקבל ע"י הנסחת סוגריים סביב $\frac{1}{\sqrt{4n-3}}$ וסביב
אברים היה מתכנס

(האבר הכללי של הסדר עם הסוגריים הוא

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{4n-2}} - \frac{1}{\sqrt{4n-4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

הסדר $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ מתכנס ולכן עם קריטריון
ההשוואה לסדרים חיוביים גם הסדר עם הסוגריים
מתכנס ולכן גם הסדר בלי הסוגריים מתכנס סתירה

משפט רימאן: אם $\sum a_n$ סדר מתכנס בתנאי:
א. $a_n \geq 0$ (סדר או אינסוף) אפשר ע"י שני
סדר הסכימה לקבל סדר המתכנס $\sum a_n$ ואפשר
ע"י שני סדר הסכימה לקבל סדר שלא מתכנס.

אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי א

אז הסדרים החיוביים שואף ל-0

סדרים האקדמיים השלילים שואף ל-0

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots \rightarrow \infty$$

$$S_n \rightarrow \infty \text{ ויהי } m = 3n+1 \text{ ו } n \in \{0,1,2\}$$

$$S_m \geq S_{3n} - |S_{3n+1}| - |S_{3n+2}| \geq$$

$$\geq S_{3n} - 2$$

פונקציות

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0
הגבול של f ב- x_0 (אם הוא קיים) מוגדר להיות

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$$

← זה מאוד חשוב! עקרים: x_0 -ים קרובים ל- x_0 , אבל לא x_0 עצמו וזהו להיות של f ככל שאומרת ב- x_0

אם $l = f(x_0)$ (אחר ש- f רציפה ב- x_0)

איפה ϵ ו- δ ? הם מתחבאים במילה הגבול:

$l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$ פירושו: לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - l| < \epsilon$
 נשים לב שהחלק של $|x - x_0| < \delta$ שיקדם לכל x שישאנו הגבול $x \neq x_0$.

חשוב: ϵ מונחת עלנו משמים. נשמור אותה אטור עליה
 דבר על δ . לכל ϵ צריך למצוא מה- δ שמחמם לנו זה לא חייב להיות ה- δ הכי טוב. מספיק להראות שיש אחד.

דוגמאות: (לחילובי ϵ - δ עלה איתמטיקה של אבנר)

הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x^3$ רציפה ב- $x_0 = \frac{1}{2}$

(1)

הורה נראה ל $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x^3 = \frac{1}{8}$ יהי $\epsilon > 0$ (בחר $\frac{\epsilon}{3}$, $\frac{\epsilon}{6}$, $\frac{\epsilon}{6}$)
 ואז לכל x המקיים $|x - \frac{1}{2}| < \delta$ מתקיים

$$|x^3 - \frac{1}{8}| = |(x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})| = |x - \frac{1}{2}| |x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

חצים לחסום אינשהו את $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ הבעיה היא לשא x
 גדול זה יכול להיות גדול אינסוף.

אנן נניח ש $\epsilon \geq 1$ זה בסדר כי לא חייבים לבחור את ה- δ הכי יעיל.

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \iff |x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}| \leq |x^2| + |\frac{1}{2}x| + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

$$|x^3 - \frac{1}{8}| = |x - \frac{1}{2}| |x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}| < \delta \cdot 3\frac{1}{4} \leq \varepsilon \iff$$

כל אופן זה לא נעשה כן

$$|x^3 - \frac{1}{8}| < \varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \cdot 3\frac{1}{4} = \varepsilon \quad \text{אם} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{3\frac{1}{4}} \\ \delta \cdot 3\frac{1}{4} < \varepsilon \quad \text{אם} \quad \delta = 1 \end{array} \right.$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \quad f(x) = x^3 \iff$$

(2) הנני ל. $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ נבחר $x_0 = 5$

הנחה: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(x_0)$ כלומר $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x-2} = \frac{8}{3}$

יהי $0 < \varepsilon$ (בחר $\frac{6}{5}\varepsilon$), נבחר δ כך ש-

ואם $\delta < 1$ $|x-5| < \delta$ המקיים

$$\left| \frac{x+3}{x-2} - \frac{8}{3} \right| = \left| \frac{3x+9-8x+16}{3(x-2)} \right| = \left| \frac{-5x+25}{3x-6} \right| = \frac{5}{3} |x-5| \left| \frac{1}{x-2} \right|$$

(אם) איננו גר δ נבחר δ מסוים את $|x-2|$

נניח $4 \leq x \leq 6 \iff |x-5| \leq 1$ כלומר $\delta \leq 1$

$$\Rightarrow 2 < x-2 < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x-2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x-2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+3}{x-2} - \frac{8}{3} \right| < \delta \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \delta \leq \varepsilon$$

משפט ארבעה: אם $\sum a_n$ מתכנס ו- (b_n) מונוטונית חסומה אז $\sum a_n b_n$ מתכנס

דוגמה: אם (b_n) לא מונוטונית זה לא נכון

$$\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{מתכנס כמובן}$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \quad \text{חסומה כמובן}$$

$$\sum \frac{1}{n} \quad \text{אבל מתפזר!}$$

2

(3) הוכיחו ש- $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$ רציפה ב-0.

הוכחה: נראה ש- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$

יהי $\varepsilon > 0$ (נבחר $\frac{\varepsilon}{14}$, $\frac{1}{2}$)

אז δ כך ש- $|x-0| = |x| < \delta$ מקיים

$$\left| \frac{x-1}{x^2+2x+1} + 1 \right| = \left| \frac{x-1+x^2+2x+1}{x^2+2x+1} \right| = \left| \frac{x^2+3x}{(x+1)^2} \right| = |x| \left| \frac{x+3}{(x+1)^2} \right|$$

(נניח $\delta \leq \frac{1}{2}$) (לאחר חישוב איתרנו ש-1 זהו δ מקורי)

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \text{אז}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x+3}{(x+1)^2} \right| = \underbrace{|x+3|}_{3\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left| \frac{1}{(x+1)^2} \right|}_{4} < 14$$

$$-\frac{1}{2} < x+1 < 1\frac{1}{2} \quad \leftarrow$$

$$\frac{1}{4} < (x+1)^2 < \frac{9}{4}$$

$$\frac{4}{9} < \frac{1}{(x+1)^2} < 4$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{(x+1)^2} \right| < 4$$

$$\Rightarrow |f(x) + 1| = |x| \left| \frac{x+3}{(x+1)^2} \right| < 14\delta \leq \varepsilon$$

כזאת סימנו ביטויים חדשים ε - δ . $\odot$

הוכיחו / הוכיחו

(1) אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 , אז $f^2(x) = [f(x)]^2$

רציפה ב- x_0

נכון: מראה של פונקציות רציפות היא רציפה

(2) אם $f^2(x)$ רציפה ב- x_0 , אז $f(x)$ רציפה ב- x_0



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{פונקציית סימן (שלדורה $\odot$)}$$

f רציפה ב-0, אז $f^2(x) \equiv 1$ והיא רציפה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{דוגמה 2:}$$

ראו f לא רציפה בשום נקודה (זה כמו פונקציה דיריכלה וכו')
 מה דוגמה טובה לפונקציה שהיא חסומה אבל לא רציפה
 באי f (נקודה) היא פה $f^2(x) \equiv 1$ רציפה!

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{פונקציה מוספר}$$

נראה ש $D(x)$ לא רציפה ב- $x_0 = 0$

הגדרת הרציפות: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \mid x - 0 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(0) \mid < \varepsilon$

השאלה: $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \mid x - 0 \mid < \delta \wedge \mid f(x) - f(0) \mid \geq \varepsilon$

(נבחר $\varepsilon = 1$ ואז $\delta > 0$ יש $x < \delta$ אירציונלי).

(נבחר מהרצפות של הפונקציה היא רציונלית) אז $\mid x - 0 \mid < \delta$

אבל $\varepsilon = 1 \geq \mid f(x) - f(0) \mid = \mid 1 - 0 \mid = 1$ ולכן $D(x)$ לא רציפה ב- $x_0 = 0$.

(3) אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 אז $g(x)$ רציפה

ב- x_0 אז $f \cdot g$ רציפה ב- x_0

נכון. זאת משום של פונקציה רציפה.

(4) אם $f(x)$ ו- $(f \cdot g)(x)$ רציפות ב- x_0 אז $g(x)$

רציפה ב- x_0

לדא נכון. נגד $g(x) = D(x)$, $f(x) \equiv 0$

אז $f \cdot g$ היא הפונקציה הקבועה. אבל g לא רציפה.

(5) אם $f(x)$, $(f \cdot g)(x)$ רציפות ב- x_0 ומונולי f יעיל

סביבה של x_0 שבה f לא מתאפסת אז g רציפה ב- x_0 .

זה נכון. נשים לב שמוסר f עולה ל- $f(x_0) + 0$ ואז מציפות

f נובע שיש סביבה של x_0 שבה f לא מתאפסת.

הדוגמה הבאה

(3) פונקציה $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ היא פונקציה $\sin$ אבל לא רציפה.

סדרה היא מקרה פרטי של פונקציה (a_n) היא סדרה

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a(n) = a_n \text{ ראשי}$$

L הוא גבול של a באנוס אם ראשי n "קרוב" לראשי a של $a(n)$ "קרוב" ל- L .
 עבור $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ זה דומה. L הוא גבול של f ב- x אם ראשי x "קרוב" ל- x אז $f(x)$ "קרוב" ל- L .

אחת התכונות של הממשיים היא שראשי להתקרב לכל מספר
 שיהיה משהו שאין באמצעיה למשל. u ו- v קרובים
 ל- s אז s הוא גבול.

לדוגמה: להתקרב ל- s בממשיים זה לא בעיה
 L הוא גבול של f ב- x אם ראשי x "קרוב" ל- x
 אז $f(x)$ "קרוב" ל- L .

רשומתי על גבול של סדרה ב- x לא היתה משמעות
 תרבותית לעצק של הגבול.

אם רשומתי על גבול של קוצה $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ יש לנו
 מושג - $f(x_0)$ אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ אז הגבול
 טוב. כאשר חוקן וזה ממש אותו פאזל הרצפתי.

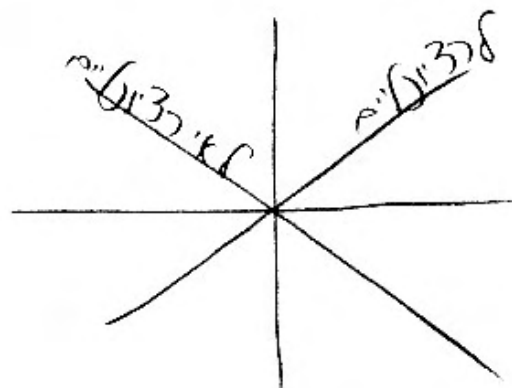
הגדרה: f רציפה ב- x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

דוגמה:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

עבור $x_0 = 0$ קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ואחריהם
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ וכן f רציפה ב- 0 .

קודם ננסה להבין איך נראה הפונקציה הזו



עכשיו אנחנו רוצים להבין את ההתנהגות של הפונקציה הזו.

יהי $\epsilon > 0$. נראה שיש $\delta > 0$ כך שכל $x \neq 0$ שמתקיים $|x| < \delta$ יהיה $|f(x)| < \epsilon$.
 כלומר, $|f(x)| = |x| < \delta = \epsilon$.
 כלומר, $|f(x)| = |x| < \delta = \epsilon$.

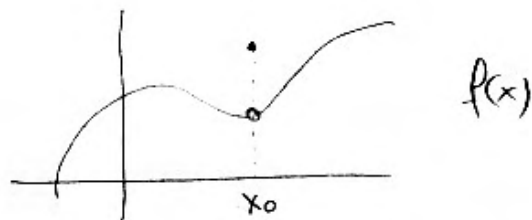
$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x| & x \in \mathbb{Q} \\ |f(x)| &= |-x| = |x| & x \notin \mathbb{Q} \end{aligned}$$

נראה שיש $x_0 \neq 0$ קרוב ל-0 שמתקיים $|f(x_n)| \rightarrow x_0$.
 כלומר, $|f(x_n)| = |x_n| \rightarrow x_0$.
 כלומר, $|f(x_n)| = |x_n| \rightarrow x_0$.
 כלומר, $|f(x_n)| = |x_n| \rightarrow x_0$.
 כלומר, $|f(x_n)| = |x_n| \rightarrow x_0$.

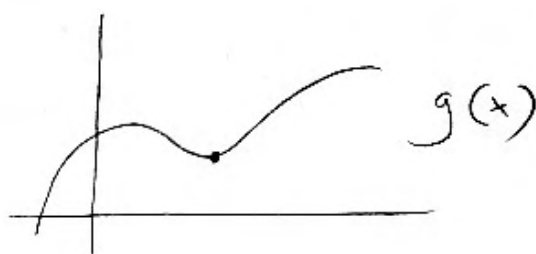
(35)

השסתמון $\lim$ סבורה אם לא היה קיים גבול
אז היו לנו כל מיני מקרים - אם הוא חסומה או
לא, אי ב איני דברים.

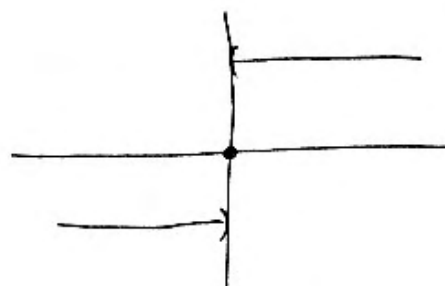
אם קורה בפיוק ציור 2 (ה) f לא רצפה ב- x_0 .
למה אי רציפות יס מין:
(1) אי רציפות סדקה קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ אבל
הוא שונה מ- $f(x_0)$



למה קוראים לזה סדקה? אפשר לטפל בזה:
גדר $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$ והיא רצפה ב- x_0



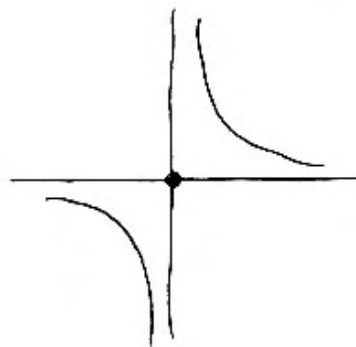
(2) אי רציפות מסת ראשון -
נושה קראת הפסוקים מצד-צדדים מין ומלמעלה
והם שונים אבל הם שונים:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(0-) = -1 \quad ; \quad f(0+) = 1 \quad \text{בדיוק}$$

(3) א"ר צ'פולר מ"ל :
 דפחור א"ר : אה"ק"ל ח"ר צ'רר
 ק"א א"ר ח"ר ח"ר



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ב"ר א"ר ח"ר ח"ר
 $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
 ח"ר ח"ר ח"ר ח"ר

ח"ר ח"ר ח"ר ח"ר
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
 ח"ר ח"ר ח"ר ח"ר
 $x_n \neq x_0$ - $x_n \rightarrow x_0$ - $f(x_n) \rightarrow L$

ח"ר ח"ר ח"ר ח"ר

(4) ח"ר ח"ר ח"ר ח"ר

$$g = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$$

24.1.06
ת. א. נ.

הגדרה: תהי $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $x_0 \in D$ נקרא f רציפה ב- x_0 אם קיים $\delta > 0$ כזה ש- $f(x) \rightarrow f(x_0)$ כאשר $x \rightarrow x_0$.

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה של x_0 ונאמר ש- f רציפה ב- x_0 אם (1) f רציפה ב- x_0 (2) f רציפה ב- x_0 (3) f רציפה ב- x_0 (4) f רציפה ב- x_0 (5) f רציפה ב- x_0 (6) f רציפה ב- x_0 (7) f רציפה ב- x_0 (8) f רציפה ב- x_0 (9) f רציפה ב- x_0 (10) f רציפה ב- x_0 (11) f רציפה ב- x_0 (12) f רציפה ב- x_0 (13) f רציפה ב- x_0 (14) f רציפה ב- x_0 (15) f רציפה ב- x_0 (16) f רציפה ב- x_0 (17) f רציפה ב- x_0 (18) f רציפה ב- x_0 (19) f רציפה ב- x_0 (20) f רציפה ב- x_0 (21) f רציפה ב- x_0 (22) f רציפה ב- x_0 (23) f רציפה ב- x_0 (24) f רציפה ב- x_0 (25) f רציפה ב- x_0 (26) f רציפה ב- x_0 (27) f רציפה ב- x_0 (28) f רציפה ב- x_0 (29) f רציפה ב- x_0 (30) f רציפה ב- x_0 (31) f רציפה ב- x_0 (32) f רציפה ב- x_0 (33) f רציפה ב- x_0 (34) f רציפה ב- x_0 (35) f רציפה ב- x_0 (36) f רציפה ב- x_0 (37) f רציפה ב- x_0 (38) f רציפה ב- x_0 (39) f רציפה ב- x_0 (40) f רציפה ב- x_0 (41) f רציפה ב- x_0 (42) f רציפה ב- x_0 (43) f רציפה ב- x_0 (44) f רציפה ב- x_0 (45) f רציפה ב- x_0 (46) f רציפה ב- x_0 (47) f רציפה ב- x_0 (48) f רציפה ב- x_0 (49) f רציפה ב- x_0 (50) f רציפה ב- x_0 (51) f רציפה ב- x_0 (52) f רציפה ב- x_0 (53) f רציפה ב- x_0 (54) f רציפה ב- x_0 (55) f רציפה ב- x_0 (56) f רציפה ב- x_0 (57) f רציפה ב- x_0 (58) f רציפה ב- x_0 (59) f רציפה ב- x_0 (60) f רציפה ב- x_0 (61) f רציפה ב- x_0 (62) f רציפה ב- x_0 (63) f רציפה ב- x_0 (64) f רציפה ב- x_0 (65) f רציפה ב- x_0 (66) f רציפה ב- x_0 (67) f רציפה ב- x_0 (68) f רציפה ב- x_0 (69) f רציפה ב- x_0 (70) f רציפה ב- x_0 (71) f רציפה ב- x_0 (72) f רציפה ב- x_0 (73) f רציפה ב- x_0 (74) f רציפה ב- x_0 (75) f רציפה ב- x_0 (76) f רציפה ב- x_0 (77) f רציפה ב- x_0 (78) f רציפה ב- x_0 (79) f רציפה ב- x_0 (80) f רציפה ב- x_0 (81) f רציפה ב- x_0 (82) f רציפה ב- x_0 (83) f רציפה ב- x_0 (84) f רציפה ב- x_0 (85) f רציפה ב- x_0 (86) f רציפה ב- x_0 (87) f רציפה ב- x_0 (88) f רציפה ב- x_0 (89) f רציפה ב- x_0 (90) f רציפה ב- x_0 (91) f רציפה ב- x_0 (92) f רציפה ב- x_0 (93) f רציפה ב- x_0 (94) f רציפה ב- x_0 (95) f רציפה ב- x_0 (96) f רציפה ב- x_0 (97) f רציפה ב- x_0 (98) f רציפה ב- x_0 (99) f רציפה ב- x_0 (100) f רציפה ב- x_0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

התבונן ב- $f(x) = \frac{1}{x}$ ב- $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{x-3}{x-4} \quad x \neq 2, 4 \quad \text{וב} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-2)} & x \neq 2, 4 \\ 0 & x = 2, 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{x-4} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{2-3}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x_n) = \frac{(x_n-2)(x_n-3)}{(x_n-4)(x_n-2)} = \frac{x_n-3}{x_n-4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2-3}{2-4} = \frac{1}{2}$$

לכן $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2} \neq f(2) = 0$ ולכן f אינו רציף ב- $x_0 = 2$.

$$f(x_n) = \frac{(x_n-2)(x_n-3)}{(x_n-4)(x_n-2)} = \frac{x_n-3}{x_n-4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4-3}{4-4} = \frac{1}{0}$$

לכן $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ אינו קיים ולכן f אינו רציף ב- $x_0 = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x(1-x^2)$$

(3)

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} g(1) & x > 0 \\ g(0) & x = 0 \\ g(-1) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) \equiv 0$$

אזיזה $\leftarrow$ נמצא בה נקודה

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & g(x) > 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \\ 0 & g(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1 \\ -1 & g(x) < 0 \Rightarrow x < -1 \vee 0 < x < 1 \end{cases}$$



ב- 0, 1, -1 נק' א' נמצא ונסתכל

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x+4} & x \leq 2 \\ ax+b & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

ברור שלב $x \neq 2$ יהיו e^{3x+4} , $ax+b$ נגזרים

תנאי תהיה f ו- g מתחברות ויש להם הסתייגות
 על x_0 ש- f נמצא ב- x_0 אלא g נמצא ב- x_0

לדבר $g(x) = e^{3x+4}$ נמצא בה x_0 $2 > x_0$
 קימה סתייגות x_0 יק' $g = f$ בסתייגות וחסר
 f נמצא ב- x_0

$$h(x) = ax+b \quad x > 2 \quad \text{יהיה נגזר}$$

(37)

דוגמה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה על ידי $f(x) = e^{10x}$.
 נבדוק את המעבר $x_0 = 2$ ונראה ש- f מתנהגת כמו $g(z) = e^{10}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = g(2) = e^{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = h(2) = 2a + b$$

אם $a = e^{10}$ ו- $b = 0$ אז f מתנהגת כמו $g(z) = e^{10}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = e^{10} = f(2)$$

כלומר f מתנהגת כמו $g(z) = e^{10}$.

(5) שאלה: איך נבדוק את המעבר $x_0 = 2$?



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

משפט: אם $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אז לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כזה ש- $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ עבור כל $x, y \in [a, b]$ המקיימים $|x - y| < \delta$.

דוגמה: $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ נתונה על ידי $f(x) = x$. נבדוק את המעבר $x_0 = 0$.
 נראה ש- f מתנהגת כמו $g(z) = z$.

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

אם $a = 0$ ו- $b = 0$ אז f מתנהגת כמו $g(z) = z$.
 נבדוק את המעבר $x_0 = 0$ ונראה ש- f מתנהגת כמו $g(z) = z$.

ה' אברהם: אם $f(0)=0$ או $f(1)=1$
 אזי ה' אברהם נכונה אחת $f(0)$ או $f(1)$
 נגדיר $g(x) = f(x) - x$ סוגי של פונקציה
 נצפה ולקח נצפה ומקיים $g(0) = f(0) > 0$
 $g(1) = f(1) - 1 < 0$ -

לפי המשפט של ויירשטראס
 $g(0) > 0 > g(1)$ קיים $x_0 \in [0, 1]$
 כזה ש $f(x_0) = g(x_0) = 0$ או $f(x_0) = x_0$
 כלל (c)

כלל: $x_0 \in [0, 1]$ כך ש $|3x_0^3 - x_0^2 - 2| < \frac{2}{10}$
 נגדיר $f(x) = 3x^3 - x - 2$ נצפה
 נשים לב שזה לא הפונקציה הראשונית:
 $f(0) = -2 < 0$
 $f(1) = 2 > 0$
 $f(\frac{1}{2}) = -\frac{11}{8} < 0$
 $f(\frac{3}{4}) = -\frac{11}{64} < -\frac{2}{10}$
 $\Rightarrow |3(\frac{3}{4})^3 - (\frac{3}{4})^2 - 2| = \frac{11}{64} < \frac{2}{10}$

רצו $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ נצפה אחידה $m > 0$
 כן $x \in (0, 1)$ ש $f(x) > m$
 כלל $f(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$

אם $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ נצפה אחידה $m > 0$
 אז $f(x) > m$ לכל $x \in [0, 1]$

הערה: f נצפה אחידה $f(x) \geq f(x_0)$ לכל $x \in [0, 1]$
 אז $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ לכל $x \in [0, 1]$

מקסימום $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in [0,1] \exists y, z : f(x) < \sqrt{|f(z)f(y)|}$$

אם f לא ירד

הוכחה: נניח f ירד. אם היא ממל

מקסימום ב x_0 . אם הייתי ק"מ y, z

$$f(x) < \sqrt{|f(z)f(y)|} \leq \sqrt{|f(x_0)|^2} = |f(x_0)|$$

בולבול אן (ט) אפ"ם

במקרה של סדרות $a_n \rightarrow \infty$ אם M

קיים N כך שלב $n > N$ $a_n > M$.

בפונקציות זה כמובן צומח:

הגדרה: תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $x_0 \in \mathbb{R}$

נאמר $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ אם M

קיים $\delta > 0$ כך שלב x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ $f(x) > M$.

הגדרה:

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונאמר $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ אם

לכל $\epsilon > 0$ קיים K כך שלב $x > K$

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

(זה בדיוק כמו ההגדרה של סדרות).

נאמר שיש להגדרות אלה

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם M קיים K כך

לכל $K > M$ $f(x) > M$

רצות בקצה שפה (הנ"ל)

δ רצות בקצה x_0 אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \delta$

יתכן לכל ε זיק דמיון של פונקציה נשלל.
 מן המעלה ה-2 של פונקציה $x_0 = 0$.

דוגמאות $0 < \varepsilon$

(1) $f(x) = 1$ לכל x בסביבת נקודת התאמה.

(2) $f(x) = x$ לכל $\varepsilon = \delta$ מתאים.

(3) $f(x) = x^2$ עבור $x_0 > 0$ כל δ .

$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2x_0 + 1}\right\}$ מתקיים לכל $|x - x_0| < \delta$ ש- $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$.

בדוגמאות (1), (2) אם לא היה תנאי $x_0 = 0$.
 ואילו בדוגמה (3) אם היה $x_0 = 0$ כל
 שמגדלים את x_0 זיק דמיון של פונקציה.
 אולם אנחנו נבדוק אם זה נכון.

הוכחה $\varepsilon = 1$ קיים δ שלם שלם x_0 .
 נניח בלתי-נכון קיים δ כזה.

נבחר $x_0 \in \mathbb{R}$

$x = x_0 + \delta$ כך ש- $|x - x_0| < \delta$ ויהי מתקיים

$|f(x_0) - f(x)| < 1$

$x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ מתקיים $|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$

אולם $|f(x) - f(x_0)| = |(x - x_0)(x + x_0)| =$

$= \frac{\delta}{2} \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$

סתירה $\odot$

(29)

על אופן זה האם יש פונקציה
אשר לא תהיה רציפה בנקודה x_0
היא x_0

המשפט: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בנקודה $x_0 \in D$ אם ורק אם
קיים $\delta > 0$ כזה שכל $x \in D$ המקיים $|x - x_0| < \delta$ מקיים
גם $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

המשפט: $f(x) = x$ רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$
וכן $f(x) = x^2$ רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$

לדוגמה: $f(x) = x^2$ רציפה בנקודה $x_0 = 1$
המשפט: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בנקודה $x_0 \in [0, 1]$
אם $\varepsilon > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל $x \in [0, 1]$ המקיים $|x - x_0| < \delta$ מקיים
גם $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(1) $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| |x + x_0| < \delta \cdot \varepsilon < \varepsilon$

משפט: פונקציה רציפה בנקודה x_0 היא רציפה בנקודה x_0
לדוגמה: $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בנקודה $x_0 = 1$
המשפט: $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בנקודה $x_0 = 1$

המשפט: $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בנקודה $x_0 = 1$
המשפט: $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בנקודה $x_0 = 1$

אם $\varepsilon = 1$ אז קיים $\delta > 0$ כזה שכל $x \in [0, 1]$ המקיים $|x - x_0| < \delta$ מקיים
גם $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
לדוגמה: $|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{x x_0} < \frac{\delta}{x x_0} < \varepsilon$

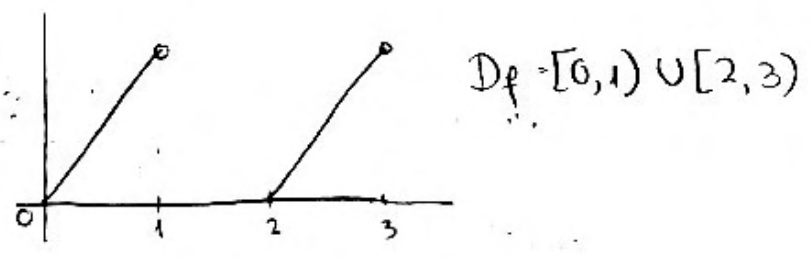
(2) $f(x) = \frac{1}{x}$

הצגה: תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ואם f מונוטונית
 הוכחה: נניח בהיפוך כי $f(a) < f(b)$ (נראה דומה כי $f(b) < f(a)$)
 מתקיים $a < x$ כזה כי $f(a) < f(x)$ אם כן, אם f מונוטונית
 יתכן ש $f(x) < f(a) < f(b)$: f רציפה ב $[x,b]$ רק אם
 אך הבנייה המקבילה לזו של f ב $[a,x]$ ו $f(b) < f(a)$ ובפרט
 מקבלים את העיקר $f(x) < f(a)$ בסתירה לנחת f
 נראה של $a < x < y < b$ מתקיים $f(x) < f(y)$
 אחת הן $x < y$ יתכן שמתקיים $f(a) < f(y) < f(x)$
 אבל שוב כן $a < x < y$ יתכן ש $f(x) < f(y) < f(a)$
 בסתירה לנחת f : (ט)

הצגה: הסמנים (רשומה) עבור $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$
 הוכחה: ניקח $a < \alpha < \beta < b$ נניח בהיפוך כי $f(\alpha) < f(\beta)$
 (נראה של $x < y$ מתקיים $f(x) < f(y)$ נניח בנפרד של
 יהיו $x < y$ יתכן ש $f(x) > f(y)$ (א שוויון הנק' בנחת) f
 אז f שווה רציפה ונחת בקטע $[\min\{\alpha, x\}, \max\{\beta, y\}]$
 ו α, β, x, y שייכים לקטע ולכן f לא מונוטונית על
 בסתירה לנחת f : (ט)

הצגה: פונק : $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (אפשרו קטע) רציפה
 והפירה היא מונוטונית

דוגמה: יש פונקציה רציפה והפירה אבל לא מונוטונית
 פשוט היא לא מונוטונית על קטע



הגדרה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ונקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

הגדרה: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת f רציפה בנקודה a אם

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

הגדרה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת f רציפה בנקודה a אם

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $(-\infty, -M]$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

הגדרה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת f רציפה בנקודה a אם

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

הגדרה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת f רציפה בנקודה a אם

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $(-\infty, -M]$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $(-\infty, -M]$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $(-\infty, -M]$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $(-\infty, -M]$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

אם $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $(-\infty, -M]$

הגדרה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת f רציפה בנקודה a אם

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f מקבלת ערך L על קטע $[M, \infty)$

(11)

למשפט 1.1.1: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $0 < \varepsilon$ כל ק"מ

אז קיימים δ_1, δ_2 כך ש-

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ מתייחס $|x - y| < \delta_1$ ו $x, y \in (a, c]$

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ מתייחס $|x - y| < \delta_2$ ו $x, y \in [c, b)$

אזי ק"מ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ כך ש-

$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$ מתייחס $|x - y| < \delta$

הערה: $|x - y| < \delta$ ו $x < c < y$ וק"מ

$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - c| < |x - y| < \delta \leq \delta_1$ מתייחס

$|f(c) - f(y)| < \varepsilon \Leftrightarrow |c - y| < \delta_2$

לכן $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$ (מקרה)

(5)

משפט 1.1.2: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a < c < b$

אז f היא רציפה ב- c ו $(a, c]$ ו $[c, b)$

וכן f היא רציפה ב- (a, b)

משפט 1.1.3: $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי f רציפה וק"מ

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ אז f היא רציפה ב- ∞

משפט 1.1.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי f רציפה וק"מ

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ו $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$

אז f היא רציפה ב- ∞ ו $-\infty$

משפט 1.1.5: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי f רציפה וק"מ

אז f היא רציפה ב- ∞ ו $-\infty$ ו D היא קבוצת

M וק"מ $x, y \in D$ מתייחס

$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$

(42)

הגדרת פונקציה המקיימת את תנאי הולצר
מסדר 1 כאשר Q היא מקיימת את תנאי הפעם

המקיימת $f(x) = x^2$ את תנאי הפעם בקטע
[0,1]

הולצר

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| |x + y| \leq 2|x - y|$$

באמצעות $f(x) = x$ מקיימת את תנאי הפעם בקטע

המקיימת את תנאי הולצר מסדר 2

אם קיבלנו M ש: $\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ יצאנו

הולצר יהיה $0 < \epsilon$ ונסמן $\delta = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

אם x, y הם נקודות $|x - y| < \delta$ מקיימים

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^{\alpha} < M \delta^{\alpha} = \epsilon$$

הולצר: אם f פונקציה רציפה במעלה

הולצר: $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה ב $[0,1]$ וכן הולצר

של f במעלה

יהיה $1 < M$ ויהיה $0 < x \neq y < \frac{1}{(2M)^2}$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > \epsilon$$

$$> \frac{1}{\frac{1}{2M} + \frac{1}{2M}} = M$$

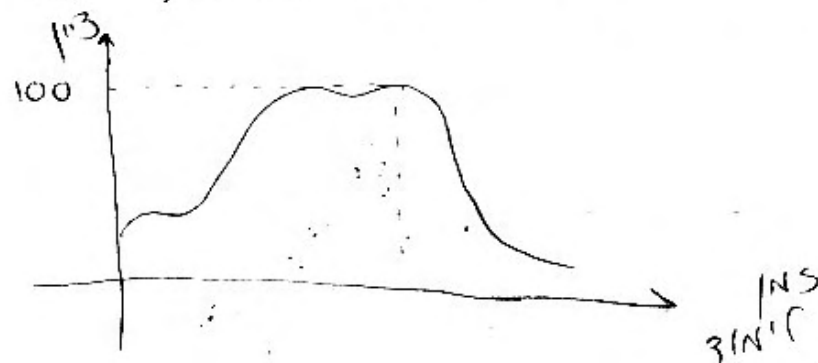
אם f מקיימת את תנאי הפעם

M אז יהיה נכון $M > 1$ מקיימת

אם מקיימת את תנאי הפעם

נגזרת

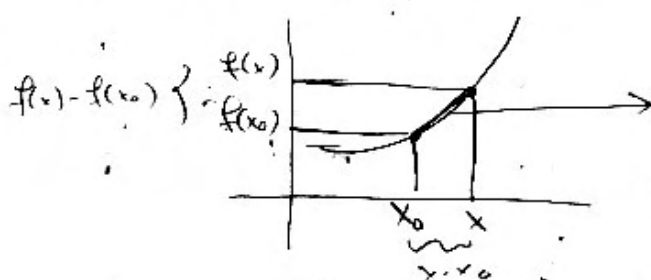
הרבה פעמים רואים ערכי של המינוח של המונח צי



הנגזרת תהי f' מידת המהירות של x_0

הנגזרת של f ב- x_0 היא המהירות

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{אם הוא קיים})$$



$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ המהירות

$$x_0 = 0 \quad f(x) = |x| \quad \text{נגזרת}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

אם הנגזרת של f ב- x_0 קיימת אז היא יחידה

(43)

2013

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{-h} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \cdot \underbrace{\frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h}}_{f'(x_0)} = 2f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

כלומר $2f'(x_0) + f'(x_0) = 3f'(x_0)$ היינו צריכים להוסיף את $f'(x_0)$ כדי לקבל את התוצאה הנכונה.

מסקנות

אם f, g הן פונקציות המוגדרות בקרבת x_0 ו- c קבוע.

- 1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- 2) $(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$
- 3) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- 4) $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

5) chain rule:

אם $f(x_0) = a$ ו- h היא פונקציה המוגדרת בקרבת a אז:

$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) f'(x_0)$$

3.10 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ תהי משפחה
 $\exists c \in (a, b)$ כזה ש- $f(c) = f(b)$
 קיים $a < c < b$ ו- $f'(c) = 0$

3.11 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ תהי משפחה
 $a < c < b$ ו- $f'(c) = 0$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

3.12 $p(x) = x^5 + x^3 + 10x$ - פונקציה
 מהי הנגזרת?

3.13 $p(x) = x^5 + x^3 + 10x$ - פונקציה
 מהי הנגזרת?
 $x < y$ ו- $f'(c) = 0$
 $0 < 5c^4 + 3c^2 + 10 = p'(c) = 0$
 מסתירה

3.14 x, y - ממשיים
 $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

3.15 $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ - הוכח

3.16 x, y - ממשיים
 $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$
 $\frac{|\arctan x - \arctan y|}{x - y} = f'(c) = \frac{1}{1+c^2} \leq 1$

$\Rightarrow |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

☺