פרק א' (25%)

ענה על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. נסח והוכח את קריטריון קושי להתכנסות סדרות, כלומר את התנאי ההכרחי והמספיק להתכנסות סדרה שאינו מתייחס לגבול הסדרה. מותר להשתמש במשפטים על סדרות שאינם קשורים ישירות לקריטריון זה, אך יש כמובן לצטטם באופן מלא.

2. הוכח, ללא שימוש במשפט כלשהו על נגזרת, כי אם f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) ואם קיים $f(a)=f(b)$ אז קיים $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=0$.

פרק ב' (40%)

ענה על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. תהי (a_n) סדרה ו- $b\in\Re$. הוכח כי אם לכל $\epsilon>0$ ישנו גבול חלקי של (a_n) הנמצא בקטע $(b-\epsilon,b+\epsilon)$ אז b עצמו הוא גבול חלקי של (a_n).

4. עבור אילו ערכים של $\alpha,\beta\in\Re$, $0<\beta<\alpha$ מתכנס הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}-n^{\beta}}$ (הסבירו ונמקו בפירוט).

5. הוכח כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בכל תחום הגדרתה.

$f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$f'(0)=\frac{he^{\frac{1}{h^2}}}{h}=e^{\frac{1}{0}}\to\infty$

פרק ג' (35%)

ענה על כל השאלות. בכל שאלה יש לסמן תשובה נכונה אחת בלבד בטופס הנלוות.

1. תהי $g:\Re\to\Re$ פונקציה ונגדיר

$$f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{g(x)^2}} & g(x)\neq 0 \text{ אם} \\ 0 & g(x)=0 \text{ אם} \end{cases}$$

$\frac{f(h)-f(0)}{h}\to 0$

$f(h)\to f(0)$

אז בהכרח:

א. אם f גזירה ב-0 ו- $f'(0)=0$ אז $f(x)=0$ לכל x בסביבה מסויימת של 0.

ב. f גזירה בכל x בו g גזירה.

ג. f רציפה בכל x בו $g(x)=0$.

ד. f אינה רציפה באף $x\neq 0$ בו $g(x)=0$.

2. תהיינה A,B קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים שאינן מכילות את המספר 0. נסמן

$A-B=\{a-b\mid a\in A,b\in B\}$, $A\cdot B=\{a\cdot b\mid a\in A,b\in B\}$, $\frac{A}{B}=\{\frac{a}{b}\mid a\in A,b\in B\}$

איזו מן האפשרויות הבאות נכונה תמיד?

א. $A-B$ חסומה ומתקיים $\sup(A-B)=(\sup A)-(\inf B)$.

$\sup(A-B)=\sup(A)+\sup(-B)$

$\sup(-B)=-\inf(B)$

ב. $\sup(A\cdot B)=(\sup A)\cdot(\sup B)$.

ג. אם A קבוצה סופית אז לקבוצה $A\cdot B$ יש מקסימום.

ד. הקבוצה $\frac{A}{B}$ היא קבוצה חסומה ומתקיים $\sup\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{\sup A}{\inf B}$.

3. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור של מספרים חיוביים ו- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3}$ אז איזה מן הטורים הבאים איננו בהכרח מתכנס?

א. $\sum_{n=1}^{\infty}3^na_n$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3a_n$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}8^na_{2^n}$ (האינדקס כאן הוא 2^n)

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$

4. נתונה קבוצה $D\subseteq\Re$ חסומה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של איברי D. איזו טענה מבין הבאות נכונה תמיד?

א. אם D קבוצה סופית אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

ב. אם a גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אז גם $a\in D$.

ג. אפשרי שאוסף הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הוא בדיוק $\{\frac{1}{n}\mid n\in N\}$.

ד. אם כל תת סדרה מתכנסת של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-3 אז הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ עצמה מתכנסת.

גזירה ב-0 ⇐ רציפה באפס ⇐

$xe^{\frac{-1}{g(x)^2}}\xrightarrow[x\to 0]{}0$

$f' = -\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x} > 0$

5. תהי $f : \Re \to \Re$ גזירה. איזו טענה מבין הבאות נכונה תמיד.

~~א.~~ אם $f(x) > 0$ לכל x אז $f'(x) \geq 0$ עבור אינסוף x-ים.

ב. אם $f'(x)$ מקבלת רק ערכים רציונליים אז קיימים $a, b \in \Re$ כך שלכל x $f(x) = ax + b$.

~~ג.~~ אם $f(x) = f'(x)$ לכל x אז f מונוטונית ממש. $f(x)=e^x$ $f(x)=0$

~~ד.~~ אם f לא קבועה אז $f'(x) = 0$ רק עבור מספר סופי של x-ים. $\sin x$

6. תהיינה $(a_n), (b_n)$ סדרות כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ עם $a \in \Re$, ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס. אילו מבין הבאים איננו תנאי מספיק להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

$a_n \to a$
$\sum b_n < \infty$

א. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס בהחלט.

~~ב.~~ $a_n > 0$ ו- $b_n > 0$ לכל n.

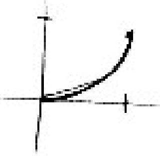
~~ג.~~ $a_{n+1} > a_n$ לכל $n > 20$.

ד. $a = 0$ ו- $|b_n| < \frac{1}{n}$ לכל n.

$b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ $\frac{1}{n\log n}$

7. מהי הטענה שהיא נכונה תמיד?

~~א.~~ קיים פתרון $x > 0$ למשוואה $x = \sin x$.



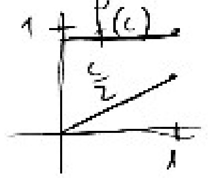
ב. אם $f : [0,1] \to [0,1]$ רציפה אז קיים $c \in [0,1]$ כך ש- $f(c) = c^2$.

~~ג.~~ אם $f : [0,1] \to [0,1]$ פונקציה רציפה אז גם הפונקציה g שתחומה $[0,1]$ והנתונה ע"י $g(x) = \left[\frac{1}{1+f(x)^2}\right]$ רציפה. ($[y]$ מסמן את הערך השלם של y).

~~ד.~~ אם $f : [0,1] \to [0,1]$ רציפה אז קיים $c \in [0,1]$ כך ש- $f(c) = \frac{c}{2}$.

$f(c) - c^2$
רציפה

בהצלחה!

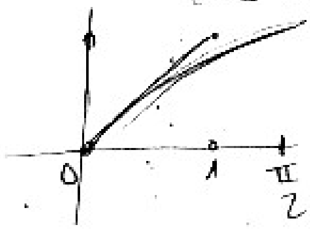


$f(c) - c^2 = 0$

$\sin x - x = 0$

$\frac{\cos nx}{n}$ $\left[\frac{1}{1+f(x)^2}\right]$

$\cos x$



$0 \leq f(x) \leq 1$
$\Downarrow$
$0 \leq f(x)^2 \leq 1$
$\Downarrow$
$1 \leq 1 + f(x)^2 \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+f(x)^2} \leq \frac{1}{1}$

תרגיל ז)

~~נניח כי יהיו f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ...~~

7. קריטריון קושי להתכנסות סדרות - תהי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. ~~...~~ תנאי מספיק והכרחי להתכנסות הסדרה הוא שלכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי כך שלכל m,n (טבעיים) מתקיים $|a_n-a_m|<\varepsilon$

א. הוכחת הכרחי - נניח שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. נראה שתנאי קושי מתקיים.

יהי $\varepsilon>0$. ~~...~~

~~...~~ ולכן קיים לה גבול. נסמנו ב- L. מספר ממשי יקרא גבול של סדרה אם ורק אם קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}$. ($\varepsilon>0$)

לכן, מאחר והנחנו כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ טבעי $|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ ($\varepsilon>0$).

נבחר $N<m,n$ טבעיים. נוכיח כי: $|a_n-a_m|<\varepsilon$

$$|a_n-a_m| = |a_n-L+L-a_m| \le |a_n-L|+|L-a_m|$$

(לפי אי-שוויון המשולש שאומר שלכל ממשיים a,b מתקיים $|a+b|\le|a|+|b|$)

$N<m,n$ הרי, לפי ~~...~~ ההנחה $|a_m-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ $|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Downarrow$

$$|a_n-L|+|L-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Downarrow$

$$|a_n-a_m|<\varepsilon$$

הראנו שתנאי קושי להתכנסות סדרה הכרחי: כלומר, אם הסדרה מתכנסת התנאי מתקיים.

ב. הוכחת מספיק - נניח שתנאי קושי להתכנסות סדרה מתקיים. כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי כך שלכל $N<n,m$ מתקיים $|a_n-a_m|<\varepsilon$

I. נראה שהסדרה חסומה. ~~...~~

נבחר $\varepsilon=1$, ~~...~~ קיים N כך שלכל $N<n,m$ מתקיים $|a_n-a_m|<1$. התנאי נכון עבור $N<m$ טבעי ועבור $N<N+1=n$.

לכן, לכל $N<m$ ~~...~~ מתקיים $|a_m-a_{N+1}|<1$

$\Downarrow$

~~...~~

$-1 < a_m - a_{N+1} < 1$

$a_{N+1}-1 < a_m < 1+a_{N+1}$ (לפי המשפט הקודם (המותנה))

נסמן $M=\max\{a_1,\dots,a_N,\ 1+a_{N+1}\}$

טענה - M הוא חסם מעל של הסדרה.

יהי p טבעי.
הוכחה - אם $p\le N$ אזי קיבלנו $a_p \le M$ כי M הוא מקסימום ~~כי...~~ ($M=\max(a_1,..a_p,..a_N,1+a_{N+1})$)

a_p כך ש $p\le N$ לפי הסדרה.

אחרת $N<p$ ולכן $a_p<1+a_{N+1}$ כפי ~~שהראינו~~ שהראינו מעלה, ולכן $a_p\le M$ עבור כל p

נסמן $m=\min(a_1,\dots,a_N,a_{N+1}-1)$

יהי q טבעי. נטען - אם q $m\le a_q$.

אם $q\le N$ אזי a_q ישנו בין $a_1..a_N$ ולפי הגדרת m $m\le a_q$.

אחרת $N<q$ ולפי המשפט המוקדם $a_{N+1}-1<a_q$

כלומר, הוכחנו שיש גם חסימה של הסדרה.

II נראה שהסדרה מתכנסת.

~~לפי משפט בולצנו ויירשטראס~~ ... סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת עבור סופי.

~~...~~ אזי קיימת תת סדרה מתכנסת

שנסמנה ב $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (~~...~~ האינדקסים של תת-הסדרה מונוטונית עולה ממש)

תת-הסדרה מתכנסת לגבול סופי שנסמנו ב- b. נראה כי גם (a_n) מתכנסת ל- b.

יהי $\varepsilon>0$

$a_{n_k}\to b$ ולכן, לפי הגדרת הגבול, קיים K_1 כך שלכל $K_1<k$ מתקיים $|a_{n_k}-b|<\frac{\varepsilon}{2}$

הסדרה מקיימת את תנאי קושי ולכן קיים N כך שלכל $n,m\ge N$ מתקיים $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$

קיים K_2 כך שלכל $K_2<k$ מתקיים $N<n_k$ (כי: את סדרת האינדקסים היא עולה ממש ולכן שואפת לאינסוף)

נבחר $K=\max\{k_1,k_2\}$. נבחר $t\ge K$ ~~...~~

~~...~~

סמוך הבא

~~...~~

יהי $n \geq N$ (כאמור $k > K$)

$$|a_n - b| = \cancel{|a_n + b - b - a|}\ |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - b|$$

$$\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - b|$$ באי-שוויון המשולש

ולכן $k > K$: $|a_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ (כי $a_{n_k} \to b$)

ולכן $n, n_k > N$ ~~N~~ מתקיים: $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (מכיוון ש-n, n_k גדולים מ-N, והסדרה סדרת קושי, כפי שבחרנו קודם)

$\Downarrow$

$$|a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\parallel$$

$$|a_n - b| < \varepsilon$$ לכל $n \geq N$ מתקיים

הוכחנו שלכל ε קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - b| < \varepsilon$.

ולכן הסדרה מתכנסת ל-b לפי הגדרת הגבול, ~~כלומר~~
מספיק ~~להראות שהסדרה~~ (כי לכל ε קיים N כך שלכל $n \geq N$ $|a_n - b| < \varepsilon$)

ולכן הוכחנו גם את הכיוון השני: אם הסדרה היא סדרת קושי אזי היא מתכנסת.

כלומר, הוכחנו שתנאי קושי הוא תנאי מספיק והכרחי להתכנסות סדרה.

~~[illegible]~~ (נעזר בהגדרה שהסדרה שואפת לגבול) ~~[illegible]~~ סביבת ε (של a_n)

של L-ש (יכול להיות) חוץ מ סדרה או בכל סביבת ε של L (כלומר בקטע

הסגור $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ נמצאים ∞ מאיברי הסדרה. ([illegible]) [illegible]

[illegible] ε [illegible] $|a_n - L| < \varepsilon$ [illegible] N [illegible]

נניח שבכל סביבת ε של b נמצאים אינסוף מאיברי הסדרה עבור כל $\varepsilon > 0$

יהי $\varepsilon > 0$ נסמן את הסביבה הקטע הפתוח $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

לפי הנתון, בקטע זה ~~[illegible]~~ יש גבול חלקי של (a_n) נקרא לו c.

נסמן $\eta = \min\{|b-\varepsilon-c|, |b+\varepsilon-c|\}$. ברור כי $\eta > 0$ (זה המרחק המינימלי).

c הוא גבול חלקי של הסדרה (a_n) ולכן לפי ההגדרה ~~[illegible]~~ לכל $\varepsilon' > 0$ ~~[illegible]~~

יש אינסוף איברי סדרה (a_n) בקטע הפתוח $(c-\varepsilon', c+\varepsilon')$

זה נכון בפרט עבור η. כלומר, ישנם אינסוף איברי סדרה (a_n)

בקטע $(c-\eta, c+\eta)$, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

לפי ההגדרה, η הוא המרחק בין c לבין הקצה הקרוב של $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ (כי הגדרנו את η להיות המרחק בין c לבין $b-\varepsilon$ ו-$b+\varepsilon$ ו-$c \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$)

אז, אם $c < b$ אז $b-\varepsilon \le c-\eta$ ([illegible])

ואם $c > b$ אז $c+\eta \le b+\varepsilon$

$$(c-\eta, c+\eta) \subset (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

כלומר, η ~~[illegible]~~ ש-$(c-\eta, c+\eta)$ מוכל בתוך $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ [illegible]

אז יש אינסוף איברי סדרה (a_n) בקטע $(c-\eta, c+\eta)$ אז גם בקטע $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

יש אינסוף מאיברי הסדרה (a_n), כי כל האיברים בקטע $(c-\eta, c+\eta)$ נמצאים בקטע $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

כלומר, הראינו שעבור כל $\varepsilon > 0$ יש אינסוף איברים ~~[illegible]~~ של הסדרה (a_n) בקטע

בקטע הפתוח $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, ולכן b עונה על הגדרת הגבול ולכן

b הוא גם גבול חלקי של הסדרה (a_n)

~~[illegible] $\varepsilon > 0$ [illegible]~~

~~[illegible] N [illegible] $|a_n - b| < \varepsilon$ [illegible] $a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ [illegible]~~

יש אינסוף איברים מהסדרה בקטע

~~[illegible]~~

המשך ב'

5. צ"ל כי הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בתחום הגדרתה.

פונקציה רציפה במידה שווה ~~בקטע~~ בתחום אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x,y בתחום, אם $|x-y|<\delta$ אזי $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$!

נוכיח ש- $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בתחום הגדרתה, כלומר, ב- $0\le x$

יהי $\varepsilon>0$

I. נסתכל על הקטע $[0,1]$. הפונקציה מוגדרת שם ורציפה שם.

עפ"י משפט "פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה שם במידה שווה" שלמדנו בכיתה

$\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[0,1]$ (כי היא רציפה בכל תחום הגדרתה

ובפרט ב- $[0,1]$). לכן קיים δ_1 כך שלכל $0\le x,y\le 1$ המקיימים

$|x-y|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

(נשתמש עם $\frac{\varepsilon}{2}$ במקום ה- ε)

II. נסתכל בקטע $[1,\infty)$. נבחר $\delta=\varepsilon$. יהיו $1\le x,y$, $|x-y|<\delta$

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right|$$

מותר, כי $x\ge 1$ אז $\sqrt{x}\ge 1$ (שורש פונקציה עולה עד מקום אחד = 1)

מותר, כי $y\ge 1$ אז $\sqrt{y}\ge 1$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 1+1>1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}<1$$ (מותר כי שני האגפים חיוביים כי $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ חיובי)

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < |x-y| < \delta = \varepsilon$$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ חיובי ולכן $\sqrt{x}+\sqrt{y}=|\sqrt{x}+\sqrt{y}|$

עפ"י הנחה

כלומר ~~הפונקציה~~ $\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $[1,\infty)$ (כי מצאנו δ

כך שלכל x,y בקטע "$|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$") ולכן קיים

δ_2 כך שאם $|x-y|<\delta_2$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

III. הראינו שהפונקציה רציפה במידה שווה בקטע $[0,1]$ ו- $[1,\infty)$.

כעת, עבור x ו- y שנמצאים בשני הקטעים השונים נראה ש- $\sqrt{x}$

רציפה במידה שווה. יש להראות שהפונקציה נכונה גם עבור x,y שנמצאים בקטעים שונים.

III. יהיו y,x. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $1 \le y$, $x < 1$

נבחר $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

אז יהיו $|x-y| < \delta$

$\delta < \delta_1$ וגם $\delta < \delta_2$ ולכן מתקיים $|x-y| < \delta_2$, $|x-y| < \delta_1$

הפונקציה מוגדרת עבור $x=1$, וכן $f(1)=1$.

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = |\sqrt{x}-f(1)+f(1)-\sqrt{y}| \underset{\text{א"ש המשולש}}{\le} |\sqrt{x}-1| + |1-\sqrt{y}|$$

$$x<1$$
$$\Downarrow$$
$$-x>-1$$
$$\Downarrow$$
$$y-x>y-1$$
$$\Downarrow$$
$$0<y-1<y-x<\delta<\delta_2$$

וגם

מתקיים: עבור $y \ge 1$ וכן שווה שייך לקטע $[1,\infty)$. כלומר שווה מתקיים $|y-1|<\delta_2$ ולכן $|f(y)-f(1)| = |f(y)-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ (לפי מה שהוכחנו קודם)

באותה דרך ולכל המרחק בין y ל-x שווה ל-1 קטן מהמרחק בין x ל-y. כלומר $0 < 1-x < y-x < \delta < \delta_1$

$x \le 1$ אז $1 \le 1$ ולכן שווה שייך לקטע $[0,1]$. מה שמ' ש- $|1-x|<\delta_1$ ולכן $|f(1)-\sqrt{x}| = |1-\sqrt{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$

(כפי שהוכחנו קודם) $\Longleftarrow$ הטענה מתקיימת לכל

$$|\sqrt{x}-1|+|1-\sqrt{y}| = |1-\sqrt{x}| + |\sqrt{y}-1| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon \ .$$

~~כלומר, המשפטים~~

כלומר, הראנו שלכל $\varepsilon>0$ שרירותי ניתן לבחור δ

($\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$) כך שאם $|x-y|<\delta$ ו:

1. עבור $x,y \in (0,1]$ $\qquad |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
2. $x,y \in [1,\infty)$, $\qquad |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
3. ~~x,y~~ $x\in[0,1]$, $y\in[1,\infty)$, $\qquad |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

עבור כל $x,y \in [0,\infty)$ (מתוך ההגדרה של $f(x)$)

אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

ולכן הראנו שזוהי לפי ההגדרה רציפות במידה שווה.

מ.ש.ל. f רציפה במידה שווה בתחום ההגדרה.

$\frac{19}{20}$