חשבון אינפיניטסימלי 1

המבחן מכה[1]

סוכם, עובד והוקלד[2] ע"י דינה זליגר
נקרא ותוקן ע"י רן מור וצבי רוט

מבוסס על הרצאותיו של מר איתמר צביק

סמסטר א', תשס"ו

[1] לחלקינו בשנית...
[2] בעמל רב...

תוכן העניינים

1. המספרים הממשיים

1.1. הגדרה אקסיומטית של המספרים הממשיים

מבחינה גאומטרית המספרים הממשיים הם הציר הממשי והם משהו שמאפשר לנו לעשות כל מיני מדידות. אבל היינו רוצים לעשות גם כל מיני פעולות עם המדידות האלה.

למספרים הממשיים, שמסומנים ע"י $\mathbb{R}$, יש כמה תכונות שנתייחס אליהן כאל אקסיומות.
על $\mathbb{R}$ מוגדרות שתי פעולות דו מקומיות:

1. *חיבור*: $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כך $(x,y)\mapsto x+y$
2. *כפל*: $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, כך $(x,y)\mapsto x\cdot y$

אשר מקיימות את התכונות הבאות, אשר נקראות **אקסיומות השדה**:

1. *אקסיומות החיבור*:
   1.1. <u>אסוציאטיביות</u>: לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים $a+(b+c)=(a+b)+c$
   1.2. <u>קומוטטיביות</u>: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $a+b=b+a$
   1.3. <u>קיום אפס</u>: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $a+0=a=0+a$
   1.4. <u>קיום נגדי</u>: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $a+(-a)=0=(-a)+a$
2. *אקסיומות הכפל*:
   2.1. <u>אסוציאטיביות</u>: לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
   2.2. <u>קומוטטיביות</u>: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $a\cdot b=b\cdot a$
   2.3. <u>קיום יחידה</u>: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $a\cdot 1=a=1\cdot a$
   2.4. <u>קיום הופכי</u>: לכל $0\neq a\in\mathbb{R}$ מתקיים $a\cdot a^{-1}=1=a^{-1}\cdot a$
3. *דיסטריביוטיביות*[3]: לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ [4]

בעיקרון כל קבוצה שמוגדרות עליה שתי פעולת שמקיימות את האקסיומות לעיל נקראת **שדה**. אבל אנחנו מדברים רק על הממשיים ובשדות באופן כללי נתעסק באלגברה לינארית.

<u>משפט 1.1.1</u>: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$. אם $a\neq 0$ אז קיים $x\in\mathbb{R}$ אחד ויחיד כך ש- $ax+b=c$.
<u>משמעות</u>: המשפט בעצם אומר שבשדה הממשים אנחנו יכולים לפתור כל משוואה לינארית בנעלם אחד באופן יחיד! ברור שאם $a=0$ לא קיים פתרון אלא אם $b=c$ ואז כל $x\in\mathbb{R}$ הוא פיתרון.
<u>הוכחה</u>:
ראשית נוכיח יחידות. נניח כי קיימים $x,x'\in\mathbb{R}$ כאלה. אזי בגלל טרנזיטיביות של יחס השוויון $ax+b=ax'+b$. כעת נבצע כל מיני פעולות שמתבססות על התכונות של הממשיים. באופן כללי, כל המעברים גם מסתמכים על הטרנזיטיביות של יחס השוויון.
קיים $-b$ ולכן $(ax+b)+(-b)=(ax'+b)+(-b)$
לפי אסוציאטיביות של החיבור: $ax+(b+(-b))=ax'+(b+(-b))$
לפי הגדרת הנגדי: $ax+0=ax'+0$
לפי הגדרת האפס: $ax=ax'$
$a\neq 0$ ולכן קיים a^{-1} ואז $a^{-1}(ax)=a^{-1}(ax')$

[3] החוק שמקשר בין פעולת החיבור לפעולת הכפל
[4] אגב, יש פה נקודה מעניינת שיש לשים לב אליה. במספרים הממשיים אנחנו יודעים מהו סדר פעולות החשבון, אבל אלה אקסיומות של השדה באופן כללי ולמעשה לביטוי הזה אין כל משמעות עד שאנחנו לא אומרים באיזה סדר יש לבצע את הפעולות. ובכן, בכל שדה אנחנו אומרים שמבצעים קודם את פעולת הכפל ולאחר מכן את החיבור.

לפי אסוציאטיביות של הכפל: $\left(a^{-1}a\right)x=\left(a^{-1}a\right)x'$

לפי הגדרת ההופכי: $1\cdot x=1\cdot x'$

לפי הגדרת היחידה $x=x'$.

כלומר, אם קיימים שני מספרים שמקיימים את הדרוש הם חייבים להיות שווים. במילים אחרות, אם קיים מספר כזה אז הוא יחיד.

כעת נראה שקיים מספר x שכזה. ראשית, כפי שכבר נאמר קיימים $-b,a^{-1}$ ולכן הביטוי $a^{-1}\left(c+\left(-b\right)\right)$ מוגדר. נשאיר לקורא להוכיח כי $x=a^{-1}\left(c+\left(-b\right)\right)$ מקיים את התכונה הדרושה. ☺

<u>מסקנות</u>:
1. האפס הוא יחיד
2. הנגדי הוא יחיד
3. היחידה היא יחידה
4. ההופכי הוא יחיד

<u>הוכחה</u>:
1. נסתכל במשוואה $x+b=b$. לפי משפט 1.1.1 קיים פיתרון יחיד למשוואה הזאת. ברור ש- $x=0$ הוא פיתרון. ולכן הוא יחיד.
2. נסתכל במשוואה $x+b=0$. $x=-b$ פותר אותה ולפי משפט 1.1.1 הפיתרון הוא יחיד.
3. נסתכל במשוואה $ax=a$. ברור ש- $x=1$ הוא פיתרון ולפי משפט 1.1.1 הוא יחיד.
4. נסתכל במשוואה $ax=1$ כאשר $a\neq 0$. ברור ש- $x=a^{-1}$ הוא פיתרון ולפי משפט 1.1.1 הוא יחיד. ☺

מהאקסיומות גם ניתן להוכיח כל מיני תכונות של איברים בשדות בכלל ושל הממשיים בפרט. נשאיר את ההוכחות לקורא:
1. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $0\cdot x=0$
2. אם $a,b\in\mathbb{R}$ ו- $ab=0$ אזי $a=0$ או $b=0$
3. לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left(-1\right)a=-a$
4. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $-\left(ab\right)=\left(-a\right)b=a\left(-b\right)$ וכן $\left(-a\right)\left(-b\right)=ab$

נסמן $a-b\equiv a+\left(-b\right)$ ואם $b\neq 0$ $\frac{a}{b}\equiv a\cdot b^{-1}$

לשדה הממשיים יש עוד תכונות שמבדילות אותו משדות אחרים. תכונות אלה מאפשרות לנו לסדר את הממשיים על הישר. תכונות אלה נקראות **אקסיומות הסדר**:
1. *טריכוטומיה:* לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיימת אחת ורק אחד מן האפשרויות הבאות: $a<b,a=b,b<a$
2. *טרנזיטיביות:* לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אם $a<b$ וגם $b<c$ אז $a<c$
3. לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אם $a<b$ אז $a+c<b+c$
4. לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אם $0<c$ ו- $a<b$ אז $ac<bc$

<u>הגדרה</u>: מספר $a\in\mathbb{R}$ ייקרא **חיובי** אם $0<a$. נסמן ב- $\mathbb{R}^{+}$ את קבוצת המספרים הממשיים החיוביים. ברור ש- $\mathbb{R}^{+}\subset\mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u>: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נאמר ש- $a\leq b$ אם $a<b$ או $a=b$.

<u>למה 1.1.2</u>: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. אם $a<b$ וגם $c<d$ אזי $a+c<b+d$

<u>הוכחה</u>: לפי אקסיומות הסדר אם $a<b$ אז $a+c<b+c$ ואם $c<d$ אז $b+c<b+d$. כעת מטרנזיטיביות $a+c<b+d$. ☺

<u>למה 1.1.3</u>: לכל $a\in\mathbb{R}$ $a<0$ אמ"מ $0<-a$.
<u>הוכחה</u>:
$(\Leftarrow)$ יהי $a\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<0$. אזי מאקסיומות הסדר והתכונות של שדה הממשיים $0=a+(-a)<0+(-a)=-a$. כלומר $0<-a$.
$(\Rightarrow)$ כעת יהי $a\in\mathbb{R}$ כך ש- $0<-a$. כעת כמו קודם $a=0+a<-a+a=0$ כלומר $a<0$. ☺

<u>משפט 1.1.4</u>:
1. $0<1$
2. אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ אז $a+b\in\mathbb{R}^+$
3. אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ אז $a\cdot b\in\mathbb{R}^+$

<u>הוכחה</u>:
1. בממשיים $1\neq 0$ ולכן לפי טריכוטומיה או ש- $0<1$ או ש- $1<0$. נניח בשלילה ש- $1<0$. אזי לפי למה 1.1.3 $0<-1$. ולפי אקסיומות הסדר $1=(-1)\cdot(-1)>(-1)\cdot 0=0$ כלומר $0<1$ וזו סתירה.
2. אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ פירושו של דבר ש- $0<a$ וגם $0<b$. אזי לפי למה 1.1.2 $0=0+0<a+b$ כלומר $0<a+b$ כלומר $a+b\in\mathbb{R}^+$.
3. אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ פירושו של דבר ש- $0<a$ וגם $0<b$. לכן ניתן לכפול לפי אקסיומות הסדר ונקבל $0=0\cdot b<a\cdot b$ כלומר $0<a\cdot b$ כלומר $a\cdot b\in\mathbb{R}^+$. ☺

לכל $a\in\mathbb{R}$ נסמן $a^2\equiv a\cdot a$.

<u>למה 1.1.5</u>: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $a^2\geq 0$. יתר על כן $a^2=0\Leftrightarrow a=0$.
<u>הוכחה</u>: בגלל הטריכוטומיה יש 3 אפשרויות:
- אם $a=0$ אז $a^2=a\cdot a=0\cdot 0=0$
- אם $0<a$ אז לפי משפט 1.1.4 $0<a\cdot a=a^2$
- אם $a<0$ אז לפי למה 1.1.3 $0<-a$ ואז $0\leq(-a)^2$. אבל לפי התכונות של שדה $(-a)(-a)=a\cdot a=a^2$ כלומר $0<a^2$.

כעת נניח ש- $0=a^2=a\cdot a$. אזי לפי התכונות של שדה $a=0$ או $a=0$. בכל אופן, $a=0$. ☺

<u>מסקנה 1.1.6</u>: בממשיים אין פיתרון למשוואה $x^2+1=0$.
<u>הוכחה</u>: יהי $x\in\mathbb{R}$. לפי למה 1.1.5 $0\leq x^2$. לפי אקסיומות הסדר $1=0+1\leq x^2+1$ אבל $0<1$ ולכן $0<x^2+1$. לפי טריכוטומיה לא יכול להתקיים $x^2+1=0$. ☺

1.2. המספרים הטבעיים ועיקרון האינדוקציה

<u>הגדרה</u>: קבוצה $S\subset\mathbb{R}$ תיקרא אינדוקטיבית אם היא **מקיימת** את התכונות הבאות:
1. $1\in S$
2. $x\in S \Leftarrow x+1\in S$

<u>דוגמאות</u>:
1. קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ היא אינדוקטיבית:
   1.1. לפי אקסיומה $1\in\mathbb{R}$
   1.2. בגלל הסגירות לחיבור לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x+1\in\mathbb{R}$
2. החיוביים $\mathbb{R}^+$ היא אינדוקטיבית:
   2.1. לפי משפט 1.1.4 $1\in\mathbb{R}^+$
   2.2. לפי אותו המשפט אם $x\in\mathbb{R}^+$ אז גם $x+1\in\mathbb{R}^+$
3. קבוצה סופית לא יכולה להיות אינדוקטיבית. בפרט הקבוצה הריקה $\varnothing$ אינה אינדוקטיבית.

<u>הגדרה</u>: $\mathbb{N}=\bigcap\limits_{\substack{S\subset\mathbb{R}\\ S\text{ is inductive}}} S$ ונקרא לקבוצה **המספרים הטבעיים**

<u>למה 1.2.1</u>: חיתוך של קבוצות אינדוקטיביות הינו קבוצה אינדוקטיבית.
<u>משמעות</u>: מאחר ש- $\mathbb{N}$ מוגדרת כחיתוך של קבוצות אינדוקטיביות היא אינדוקטייבת בעצמה.
<u>הוכחה</u>: יהיו $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ קבוצות אינדוקטיביות. אזי לפי ההגדרה לכל $\alpha\in A$ מתקיים $1\in S_\alpha$. לכן $1\in\bigcap\limits_{\alpha\in A}A_a$. כעת יהי $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in A}A_a$. אזי $x\in S_\alpha$ לכל $\alpha\in A$. אבל S_α אינדוקטיביות ולכן $x+1\in S_\alpha$ לכל $\alpha\in A$. כלומר $x+1\in\bigcap\limits_{\alpha\in A}A_a$. לכן $\bigcap\limits_{\alpha\in A}A_a$ אינדוקטיבית. ☺

<u>משפט 1.2.2</u>: אם $S\subset\mathbb{N}$ אינדוקטיבית אזי $S=\mathbb{N}$ [5]
<u>הוכחה</u>: $S\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ אינדוקטיבית. לכן $\mathbb{N}\subset S$ כי $\mathbb{N}$ היא חיתוך של כל הקבוצות אינדוקטיביות. לכן $\mathbb{N}=S$. ☺

<u>משפט 1.2.3</u> (**עקרון האינדוקציה**): עבור כל $n\in\mathbb{N}$ נתונה טענה $P(n)$. אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. $P(1)$ נכונה
2. אם $P(n)$ נכונה אז גם $P(n+1)$ נכונה

אז $P(n)$ נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.
<u>הוכחה</u>: נגדיר $S=\{n\in\mathbb{N}:P(n)\text{ is true}\}\subset\mathbb{N}$. נראה ש- S קבוצה אינדוקטיבית:
1. נתון ש- $P(1)$ נכונה. לכן $1\in S$
2. נניח ש- $n\in S$. כלומר $P(n)$ נכונה. אזי לפי הנתון $P(n+1)$ נכונה, כלומר $n+1\in S$.

הראנו שמתקיימות התכונות של קבוצה אינדוקטיבית ולכן S היא קבוצה אינדוקטיבית. אבל לפי משפט 1.1.2 $S=\mathbb{N}$. כלומר $P(n)$ נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$. ☺

העוצמה של האינדוקציה היא שהיא מאפשרת להוכיח אינסוף טענות ע"י הסתכלות במקרה אחד בלבד.

<u>דוגמה</u>: נוכיח כי $1+2+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$ אכן מתקיים $1=\frac{1}{2}(1+1)$

הנחת האינדוקציה: נניח כי נכון ש- $1+2+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

צעד האינדוקציה: נוכיח ש- $1+2+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)}{2}((n+1)+1)$:

$$1+2+...+n+(n+1)\overset{IH}{=}\frac{n}{2}(n+1)+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=$$
$$=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)}{2}(n+2)=\frac{(n+1)}{2}((n+1)+1)$$

מכאן שהטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי $x\in\mathbb{R}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $\begin{cases}x^n=x & n=1\\ x^{n+1}=x^n\cdot x & 1<n\end{cases}$

[5] זה הניסוח הפורמלי של הטענה ש- $\mathbb{N}$ היא בעצם הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר.

<u>משפט 1.2.4</u>:
1. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $1\le n$
2. לכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים $m+n\in\mathbb{N}$
3. לכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים $m\cdot n\in\mathbb{N}$
4. לכל $1<n\in\mathbb{N}$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $m+1=n$
5. לכל $m,n\in\mathbb{N}$ אם $n<m$ אזי $m-n\in\mathbb{N}$
6. לכל $n\in\mathbb{N}$ לא ייתכן שקיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $n<m<n+1$

<u>הוכחה</u>:
1. תהי $P(n)$ הטענה ש- $1\le n$. ברור ש- $P(1)$ נכונה שהרי $1=1$. כעת נניח ש- $P(n)$ נכונה, כלומר ש- $1\le n$. אבל $0<1$ ולכן $1=0+1\le n+1$. כלומר $P(n+1)$ נכונה. לכן $P(n)$ נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.
2. מושאר כתרגיל לקורא
3. מושאר כתרגיל לקורא
4. תהי $S=\{1\}\cup\{m+1:m\in\mathbb{N}\}$. נראה ש- S אינדוקטיבית ומכאן תנבע הטענה. לפי ההגדרה $1\in S$. נניח כעת ש- $n\in S$.
   - אם $n=1$ אזי לפי ההגדרה $1+1\in S$ כאשר $m=1$, והרי $1\in\mathbb{N}$.
   - אם $1<n$ אזי קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $n=m+1$ (כי זו ההגדרה של הקבוצה). ואז $(m+1)+1=n+1$. אבל לפי סעיף (2) $m+1\in\mathbb{N}$ ולכן $n+1\in S$.

   כלומר S אינדוקטיבית ולכן $S=\mathbb{N}$.
5. תהי $P(m)$ הטענה שאם $n<m$ אזי $m-n\in\mathbb{N}$. הטענה $P(1)$ מתקיימת באופן ריק, שכן לפי סעיף (1) לא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n<1$. כעת נניח ש- $P(m)$ נכונה ונראה ש- $P(m+1)$ נכונה. יהי $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n<m+1$. נרצה להראות ש- $(m+1)-n\in\mathbb{N}$. $n<m+1$ כלומר $n-1<m$. ולכן לפי הנחת האינדוקציה $m-(n-1)\in\mathbb{N}$. אבל $m-(n-1)=(m+1)-n$. כלומר $(m+1)-n\in\mathbb{N}$. לכן $P(m)$ נכונה לכל $m\in\mathbb{N}$.
6. נניח בשלילה שקיימים $m,n\in\mathbb{N}$ כאלה. כלומר $n<m<n+1$. אזי $m-n<1$. לפי (5) $m-n\in\mathbb{N}$ וזאת סתירה ל-(1). ☺

<u>למה 1.2.5</u>: לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$

<u>הוכחה</u>: נגדיר $S=\{n\in\mathbb{N}:x^m\cdot x^n=x^{m+n}\}$. נראה שלכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $m\in\mathbb{N}$ זוהי קבוצה אינדוקטיבית ומכאן תנבע הטענה.
1. לפי הגדרה לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $m\in\mathbb{N}$ $x^m\cdot x^1=x^m\cdot x=x^{m+1}$. לכן $1\in S$.
2. נניח ש- $n\in S$. כלומר $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$.

$$x^m\cdot x^{n+1}\overset{def}{=}x^m\cdot\left(x^n\cdot x\right)=\left(x^m\cdot x^n\right)\cdot x\overset{IH}{=}x^{m+n}\cdot x\overset{def}{=}x^{(m+n)+1}=x^{m+(n+1)}$$

   ולכן $n+1\in S$.

כלומר S אינדוקטיבית ולכן $S=\mathbb{N}$. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי $S\subset\mathbb{R}$. איבר $m\subset S$ ייקרא **מינימום** של S אם לכל $s\in S$ מתקיים $m\le s$.

<u>למה 1.2.6</u>: אם המינימום קיים אז הוא יחיד.
<u>הוכחה</u>: תהי $S\subset\mathbb{R}$ ויהיו $m,m'\in S$ מינימה. אזי לכל $s\in S$ $s\le m,s\le m'$. אבל בפרט $m,m'\in S$ ולכן $m'\le m,m\le m'$. לכן $m=m'$. ☺

<u>משפט 1.2.7</u> (**עיקרון הסדר הטוב ב-** $\mathbb{N}$): תהי $\varnothing\ne S\subset\mathbb{N}$. אזי ל- S קיים איבר מינימלי.
<u>הוכחה</u>: אם $1\in S$ אזי לפי משפט 1.2.4 1 מינימלי ב- S. אחרת נניח בשלילה שלא קיים איבר מינימלי ב- S. תהי $I=\{n\in\mathbb{N}:\forall s\in S\ \ n<s\}$. נראה ש- S אינדוקטיבית:
1. ברור ש- $1\in I$.

2. נניח ש- $n \in I$. אם $n+1 \notin I$ אז קיים $s \in S$ כך ש- $s \le n+1$. ל- S אין איבר מינימלי ולכן קיים $t \in S$ כך ש- $n < t < s \le n+1$. אבל זה בסתירה למשפט 1.2.4. לכן $n+1 \in I$.

כלומר I אינדוקטיבית ולכן $I = \mathbb{N}$. אבל $I \cap S = \varnothing$ וזאת סתירה לכך ש- $S \ne \varnothing$. לכן ל- S יש איבר מינימלי. ☺

יש כמה אי שוויונים חשובים מאוד שנשתמש בהם רבות.

<u>משפט 1.2.7</u> (**אי שוויון ברנולי**). לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x > -1$ מתקיים $1+nx \le (1+x)^n$

<u>הערה</u>: שוויון כמובן מתקיים במקרה ש- $x=0$ או ש- $n=1$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על n. תהי $A = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1+nx \le (1+x)^n \right\}$. נראה ש- A אינדוקטיבית ומכאן תנבע הטענה.

1. ברור ש- $1 \in A$ שהרי $1+x \cdot 1 = 1+x = (1+x)^1$.
2. נניח ש- $n \in A$ כלומר $1+nx \le (1+x)^n$. אזי

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \overset{IH}{\ge} (1+nx)(1+x) = \\ &= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \underset{n,x^2 \ge 0}{\ge} 1+(n+1)x\end{aligned}$$

כלומר $n+1 \in A$.

לכן A אינדוקטיבית ולכן $A = \mathbb{N}$. ☺

<u>משפט 1.2.8</u> (**הבינום של ניוטון**): לכל $a,b \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

את ההוכחה תמצאו בקורס מתמטיקה דיסקרטית.

<u>מסקנה 1.2.9</u>: לכל $x > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \ge \frac{n(n-1)}{2}x^2$

<u>הוכחה</u>: נסתכל על $(1+x)^n$. לפי הבינום של ניוטון נוכל לכתוב

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots+x^n \underset{x \ge 0}{\ge} \frac{n(n-1)}{2}x^2$$ ☺

אגב, בצורה זהה ניתן גם להוכיח את אי שוויון ברנולי בהסתמך על הבינום של ניוטון.

1.3. אקסיומת השלמות

עד כאן ראינו כל מיני תכונות של המספרים הטבעיים. בפרט ראינו שלא תמיד אם מחסרים מספרים טבעיים התוצאה גם היא מספר טבעי. לשם כך יש לנו את המספרים השלמים $\mathbb{Z}$. שם ניתן לחסר ולחבר כמה שבא לנו ותמיד נישאר בתוך השלמים. הרציונליים מוגדרים כמנות של כל השלמים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z}, n \ne 0 \right\}$. קל לבדוק שזהו שדה סדור ולא נעשה זאת במסגרת זו. אבל גם ברציונליים חסר לנו משהו. למשל, אם היינו רוצים לעשות התאמה קתולית בין הרציונליים לבין ציר המספרים היינו בבעיה. אמרנו שהציר מייצג מדידות. למשל אנחנו יכולים למדוד את האורך של האלכסון של ריבוע שצלעו 1. האורך הזה הוא $\sqrt{2}$. אבל אבוי לנו!

<u>משפט 1.3.1</u>: לא קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש- $q^2 = 2$.

<u>הוכחה</u>: כל רציונלי q ניתן להציג בצורה $\frac{m}{n}$ כאשר $m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. כמו כן ניתן להניח ש- $\frac{m}{n}$ היא הצורה המצומצמת של q. אז נניח ש- $2 = q^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$. אזי $2n^2 = m^2$. לכן m^2 זוגי. ולכן גם m זוגי. כלומר ניתן לרשום $m = 2l$ כאשר $l \in \mathbb{Z}$. אזי $2 = \frac{(2l)^2}{n^2} = \frac{4l^2}{n^2}$. אזי $n^2 = 2l^2$ ולכן n זוגי. אבל זה עומד בסתירה לכך של- m ו- n זרים. לכן לא קיים q כזה. ☺

המשפט הזה מאוד חשוב משום שהוא אומר שברציונליים יש לנו חורים!!!

אקסיומת השלמות: יהיו $L, U \subset \mathbb{R}$ לא ריקות אשר מקיימות $L \leq U$[6]. אזי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $l \leq c \leq u$ לכל $l \in L, u \in U$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה $S \subset \mathbb{R}$ תיקרא **חסומה מלמעלה** (**מלמטה**) אם קיים $\mu \in \mathbb{R}$ אשר מקיים $x \leq \mu$ ($\mu \leq x$) לכל $x \in S$. במקרה זה μ ייקרא **חסם מלמעלה** (**מלמטה**) של S.

<u>דוגמאות</u>:
1. הקבוצה $S = \{0\}$ חסומה הן מלמעלה והן מלמטה. למשל כל $u \in \mathbb{R}^+$ הוא חסם מלמעלה ואילו כל $l \in \mathbb{R}^-$ הוא חסם מלמטה.
2. קבוצת השליליים $\mathbb{R}^-$ חסומה מלמעלה ע"י 0 למשל. ואילו קבוצת החיוביים $\mathbb{R}^+$ חסומה מלמטה גם היא ע"י 0.
3. $\varnothing$ חסומה הן מלמעלה והן מלמטה ע"י כל מספר ממשי. טוב, זה עניין פורמלי פדנטי, פשוט כי אין איברים בכלל בקבוצה הריקה אז ההגדרות מתקיימות באופן ריק.
4. $\mathbb{R}^+$ אינה חסומה מלמעלה שהרי לכל $x \in \mathbb{R}^+$ מאקסיומות הסדר נובע $x < x+1 \in \mathbb{R}^+$.

<u>הגדרה</u>: $\mu \in \mathbb{R}$ ייקרא **חסם עליון** (**תחתון**) של $S \subset \mathbb{R}$ אם מתקיימים התנאים הבאים:
1. לכל $x \in S$ מתקיים $x \leq \mu$ ($\mu \leq x$)
2. לכל $\xi \in \mathbb{R}$ שמקיים $x \leq \xi$ ($\xi \leq x$) לכל $x \in S$ מתקיים $\mu \leq \xi$ ($\xi \leq \mu$)

במילים אחרות, חסם עליון (תחתון) הוא חסם מלמעלה (מלמטה) מינימלי (מקסימלי).
אם s חסם עליון מסמנים $s = \sup S$ ואם i חסם תחתון מסמנים $i = \inf S$.

<u>משפט 1.3.2</u> (**תכונת החסם העליון (התחתון)**):
תהי $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$ חסומה מלמעלה (מלמטה). אזי ל- S יש חסם עליון (תחתון).
<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה של קבוצה חסומה מלמעלה. המקרה של קבוצה חסומה מלמטה נעשה באופן אנלוגי.
תהי U קבוצת כל החסמים מלמעלה של S. $U \neq \varnothing$ כי נתון ש- S חסומה מלמעלה. ברור ש- $S \leq U$. אזי לפי אקסיומת השלמות קיים $c \in \mathbb{R}$ שמקיים $x \leq c \leq u$ לכל $x \in S, u \in U$. נטען ש- $c = \sup S$.
- $x \leq c$ לכל $x \in S$ לפי הגדרת c
- $c \leq u$ לכל $u \in U$ לפי הגדרת c.

לכן לפי הגדרה c הוא חסם עליון. ☺

<u>הערות</u>:
1. תכונת החסם אינה מבטיחה קיום מינימום או מקסימום:
   1.1. לא תמיד החסם התחתון נמצא בתוך הקבוצה. למשל $\inf \mathbb{R}^+ = 0 \notin \mathbb{R}^+$
   1.2. ולא תמיד החסם התחתון נמצא מחוץ לקבוצה, למשל $\inf \mathbb{N} = 1 \in \mathbb{N}$

[6] כלומר כל האיברים של L קטנים או שווים לאיברים של U.

2. נבין מדוע חשוב שהקבוצה לא תהיה ריקה. הרי קבוצת החסמים מלמעלה של הקבוצה הריקה היא כל הממשיים והם לא חסומים מלמטה, אז לא נוכל למצוא את החסם מלמעלה המינימלי. באותות אופן קבוצת החסמים מלמטה של הקבוצה הריקה היא כל הממשיים אשר אינם חסומים מלמעלה ולכן לא קיים חסם מלמטה מקסימלי...

<u>משפט 1.3.3</u>: החסם העליון (התחתון) הוא יחיד

<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה של חסם עליון. ההוכחה למקרה של חסם תחתון מתבצעת באופן אנלוגי.
תהי $S\subset\mathbb{R}$ ויהיו $s,s'\in\mathbb{R}$ שמקיימים את הגדרת החסם העליון. כלומר, לכל $x\in S$ מתקיים $x\le s,s'$.
וכן לכל חסם מלמעלה u מתקיים $s,s'\le u$. אבל מכאן ש- $s\le s', s'\le s$. כלומר $s=s'$. ☺

<u>משפט 1.3.4</u>: תהי $\varnothing\ne X\subset\mathbb{R}$ וחסומה מלמעלה (למטה). אזי הטענות הבאות שקולות:
1. $s=\sup X$ ($i=\inf S$)
2. א. לכל $x\in X$ מתקיים $x\le s$ ($i\le x$)
ב. אם $l<s$ ($i<l$) אזי קיים $x\in X$ כך ש- $l<x\le s$ ($i\le x<l$)
3. א. לכל $x\in X$ מתקיים $x\le s$ ($i\le x$)
ב. לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $x\in X$ אשר מקיים $s-x<\varepsilon$ ($x-i<\varepsilon$)

<u>הוכחה</u>: נוכיח רק את המקרה של חסם עליון. ההוכחה של המקרה של החסם התחתון מתבצעת באופן אנלוגי.
($1\Leftarrow 2$) נניח $s=\sup X$. אזי לפי ההגדרה מתקיים שלכל $x\le X$ $x\le s$. כעת יהי $l<s$. נניח בשלילה שלכל $x\in X$ $x\le l$. כלומר l חסם מלמעלה של X. אזי $s<l$ בסתירה להנחה.
($2\Leftarrow 3$) יש רק להראות ש-2ב גורר את 3ב. יהי $0<\varepsilon$. אזי $s-\varepsilon<s$. לכן לפי ההנחה קיים $x\in X$ כך ש- $s-\varepsilon<x\le s$. כלומר $s-x<\varepsilon$.
($3\Leftarrow 1$) יש להראות שלכל $u\in\mathbb{R}$ שמתקיים ש- $x\le u$ לכל $x\in X$ מתקיים $s\le u$. יהי u כזה אך נניח בשלילה ש- $u<s$. אזי $0<s-u$. לכן קיים $x\in X$ כך ש- $s-x<s-u$ כלומר $u<x$ בסתירה לכך ש- s מקיים $x\le s$ לכל $x\in X$. ☺

<u>למה 1.3.5</u>: יהיו $L,U\subset\mathbb{R}$ לא ריקות כך ש- $L\le U$. אזי $\sup L\le\inf U$

<u>הוכחה</u>: ראשית נעיר מדוע בכלל קיימים $\sup L,\inf U$. נתון שהקבוצות לא ריקות. וכן נתון ש- $L\le U$.
כלומר L חסומה מלמעלה ע"י כל איברי U ואילו U חסומה מלמטה ע"י כל איברי L. לכן לפי משפט 1.3.2 קיימים החסם העליון והחסם התחתון של U,L בהתאמה.
נסמן $i=\inf U, s=\sup L$. נניח בשלילה כי $i<s$. אזי קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $i<c<s$. כעת לפי משפט 1.3.4 קיים $u\in U$ כך ש- $i\le u<c$ וקיים $l\in L$ כך ש- $c<l\le s$. לכן נקבל ש- $u<l$ בסתירה לכך ש- $L\le U$. ☺

<u>משפט 1.3.6</u> (**הלמה היסודית**): יהיו $L,U\subset\mathbb{R}$ לא ריקות כך ש- $L\le U$. אזי התנאים הבאים שקולים:
1. קיים מספר $c\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $l\le c\le u$ לכל $u\in U, l\in L$.
2. $\sup L=\inf U$
3. לכל $0<\varepsilon$ קיימים $l\in L$ ו- $u\in U$ כך ש- $u-l<\varepsilon$

<u>הוכחה</u>: ראשית נעיר כמו קודם שקיימים $\sup L,\inf U$ לפי משפט 1.3.2. נסמן $s=\sup L, i=\inf U$.
($1\Leftarrow 2$) לפי למה 1.3.5 מתקיים $s\le i$. נניח בשלילה ש- $s<i$. אזי לכל $u\in U, l\in L$ מתקיים $l\le s<i\le u$ בסתירה להנחה. לכן $s=i$. יתר על כן, ברור ש- $c=i=s$.
($2\Leftarrow 3$) יהי $0<\varepsilon$. אזי לפי משפט 1.3.4 קיים $u\in U$ כך ש- $u-i<\frac{\varepsilon}{2}$ וכן קיים $l\in L$ כך ש- $s-l<\frac{\varepsilon}{2}$,
אבל $i=s$ ולכן $i-l<\frac{\varepsilon}{2}$. נחבר את שני אי השוויונים ונקבל $u-l=(u-i)+(i-l)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
($3\Leftarrow 1$) נניח שקיימים c,c' כך ש- $l\le c<c'\le u$ לכל $l\in L, u\in U$. אזי לכל $l\in L, u\in U$ $c'-c<u-l$.
נבחר $0<\varepsilon<c'-c$. קיימים אז $l\in L, u\in U$ כך ש- $u-l<\varepsilon<c'-c$. וזאת סתירה. ☺

נשים לב לכמה תכונות מעניינות של חסמים עליונים ותחתונים. אם A,B קבוצות לא ריקות וחסומות אזי:

1. $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$
2. אם $A\cap B\neq\varnothing$ אז $\sup(A\cap B)\le\min\{\sup A,\sup B\}$
3. $\inf(A+B)=\inf A+\inf B, \sup(A+B)=\sup A+\sup B$
4. $\inf(A-B)=\inf A-\sup B$
5. אם A,B חיוביות אז $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$

1.4. שורשים שלמים של מספרים ממשיים

<u>למה 1.4.1</u>: לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים

1. $a^n<b^n \Leftrightarrow 0\le a<b$
2. $(ab)^n=a^nb^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

<u>הוכחה</u>: מושארת כתרגיל לקורא – באינדוקציה על n.

<u>משפט 1.4.2</u>: יהי $0<y$. אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $0<x\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $x^n=y$.

<u>הערה</u>: הדרישה ש- y חיובי באה להבטיח שיהיה מוגדר גם שורש זוגי.

<u>הוכחה</u>: ראשית נראה את היחידות. נניח שקיימים $x,x'\in\mathbb{R}$ עם התכונה הנדרשת. בה"כ $x<x'$. אזי לפי למה 1.4.1 $x^n<(x')^n$ בסתירה להנחה. לכן $x=x'$.

כעת נראה שקיים x כנדרש. נניח ש- $1<y$. אם $y=1$ אז $x=1$. אם $y<1$ אזי נסתכל על $1<\frac{1}{y}$. אם קיים $z\in\mathbb{R}$ שמקיים $z^n=\frac{1}{y}$ אזי $y=\frac{1}{z^n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n$. נוכיח אם כן, למקרה שבו $1<y$. כמו כן נניח ש- $1<n$ אחרת נבחר $x=y$.

נגדיר שתי קבוצות: $L=\{0\le l\in\mathbb{R}: l^n\le y\}, U=\{0\le u\in\mathbb{R}: y\le u^n\}$. ברור ש- $1\in L, y\in U$ ולכן הקבוצות לא ריקות. כמו כן, לכל $u\in U, l\in L$ מתקיים $l^n\le y\le u^n$ ולכן $l\le u$. כלומר $L\le U$. לכן קיימים $s=\sup L, i=\inf U$. נראה ש- $i=s$: נניח ש- $s<i$ אזי קיים c כך ש- $s<c<i$. אבל $0\le s$ ולכן $0<c$. נתבונן ב- c^n:

- אם $c^n=y$ אז $c\in L\cap U$. כלומר $c\le s$ וגם $i\le c$ וזו סתירה להנחה.
- אם $c^n<y$ אז $c\in L$ ו- $c\le s$ וזו סתירה.
- אם $y<c^n$ אז $c\in U$ ו- $i\le c$ וזו סתירה.

בכל מקרה קיבלנו סתירה. לכן $i=s$ ולפי הלמה היסודית קיים $x\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $l\le x\le u$ לכל $u\in U, l\in L$. x זה הוא $\sup L=\inf U$.

טענת עזר: לכל $0<\varepsilon$ קיימים $u\in U, l\in L$ כך ש- $u^n-l^n<\varepsilon$.

הוכחה: ידוע ש- $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+...+ba^{n-2}+a^{n-1}\right)$. אם $0\le a<b$ אזי $b^n-a^n<(b-a)nb^{n-1}$. בהינתן $0<\varepsilon$ קיימים $u\in U, l\in L$ כך ש- $u-l<\frac{\varepsilon}{n(y+1)^{n-1}}$. ניתן להניח ש- $u<y+1$. אזי $(u-l)nu^{n-1}<(u-l)n(y+1)^{n-1}$. אבל אז

$$u^n-l^n<(u-l)nu^{n-1}<(u-l)n(y+1)^{n-1}<\frac{\varepsilon}{n(y+1)^{n-1}}\cdot n(y+1)^{n-1}=\varepsilon.$$ ☺

נחזור כעת להוכחת המשפט. נטען ש- $y = x^n$. נניח בשלילה שלא. אם $y > x^n$ אז משום שלכל $l \in L, u \in U$ $l \le x \le u$ נקבל ש- $l^n \le x^n < y \le u^n$ ואז $y - x^n < u^n - l^n$ וזו סתירה כי יכולנו לבחור $0 < \varepsilon < y - x^n$. באותו אופן, אם $y < x^n$ נקבל ש- $x^n - y < x^n \le u^n$ ואז $x^n - y < u^n - l^n$ בסתירה. לכן חייב להתקיים $x^n = y$. ☺

אם $n \in \mathbb{N}$ ו- $0 < x, y \in \mathbb{R}$ מקיימים ש- $y = x^n$ נסמן $x = y^{1/n}$.

<u>מסקנה 1.4.3</u>: אם $x, y \in \mathbb{R}^+$ ו- $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $x^m = y^m$ אזי $x = y$.
<u>הוכחה</u>: לפי המשפט הקודם קיים y' יחיד שמקיים $(y')^m = y^m$. ברור ש- y מקיים זאת. וכן x מקיים את הדרוש עבור x^m. אבל $x^m = y^m$. לכן $x = y$. ☺

1.5. ארכימדיות וצפיפות הרציונליים בממשיים

<u>משפט 1.5.1</u> (**ארכימדיות של $\mathbb{N}$ ב- $\mathbb{R}$**): $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ אינה חסומה מלמעלה.
<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש- $\mathbb{N}$ חסומה מלמעלה. אזי לפי תכונת החסם העליון, קיים $s = \sup \mathbb{N}$. לפי משפט 1.3.4 קיים $n \in N$ כך ש- $s - 1 < n \le s$ כלומר $s < n+1$. אבל לפי משפט 1.2.4 $n+1 \in \mathbb{N}$ וזה בסתירה לכך ש- s חסם עליון של $\mathbb{N}$. ☺

<u>מסקנה 1.5.2</u>: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

<u>הוכחה</u>: בגלל הארכימדיות של $\mathbb{N}$ ב- $\mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > \frac{1}{\varepsilon}$. כלומר $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ☺

<u>משפט 1.5.3</u>: בהינתן $0 < x \in \mathbb{R}$ לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $y < xn$.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים $y \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $nx \le y$. אזי $n \le \frac{y}{x}$. אבל זאת סתירה לארכימדיות של $\mathbb{N}$ ב- $\mathbb{R}$. ☺

<u>משפט 1.5.4</u> (**צפיפות של $\mathbb{Q}$ ב- $\mathbb{R}$**): לכל $x, y \in \mathbb{R}$ אם $x < y$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש- $x < q < y$.
<u>הוכחה</u>: אם $x = 0$ המשפט נובע ממסקנה 1.5.2. אם $x < 0 < y$ ברור שהמשפט נכון. אם $x < y \le 0$ נוכל להסתכל על $0 \le -y < -x$. לכן נוכל להניח בה"כ ש- $0 < x < y$. כעת עלינו למצוא $n, m \in \mathbb{R}$ כך ש- $0 < x < \frac{m}{n} < y$ או באופן שקול לכך ש- $nx < m < ny$. $0 < y - x$ ולכן לפי משפט 1.5.3 קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n(y - x) > 1$ כלומר $nx + 1 < ny$. נסתכל על הקבוצה $S = \{l \in \mathbb{N} : nx < l\}$. בגלל הארכימדיות הקבוצה הזאת אינה ריקה. ולפי עיקרון הסדר הטוב קיים לה איבר מינימלי שנסמנו m והוא מקיים $nx < m$. כעת, אם $m = 1$ אזי $nx < 1 < nx + 1 < ny$. אם $1 < m$ אזי $m - 1 \in \mathbb{N}$. אבל m הוא המינימלי ולכן $m - 1 \le nx$. כלומר $m \le nx + 1 < ny$ או $nx < m < ny$. ☺

1.6. ערך מוחלט

<u>הגדרה</u>: נגדיר פונקציה $|\ |:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא: לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר $|x|=\begin{cases} x & 0\le x \\ -x & x<0 \end{cases}$. נאמר ש- $|x|$ הוא **הערך המוחלט** של x.

תכונות של פונקצית הערך המוחלט: לכל $x\in\mathbb{R}$
1. חיוביות: $0\le|x|$
2. סימטריה: $|x|=|-x|$
3. $-|x|\le x\le|x|$

<u>משפט 1.6.1</u>: לכל $0<r\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x|\le r\Leftrightarrow -r\le x\le r$

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח $|x|\le r$ אזי $-r\le-|x|\le x\le|x|\le r$

($\Rightarrow$) נניח ש- $-r\le x\le r$. אם $0\le x$ אז $|x|=x\le r$. אם $x<0$ אז $|x|=-x\le r$. בכל אופן $|x|\le r$. ☺

<u>מסקנה 1.6.2</u>: לכל $0<r\in\mathbb{R}$ ולכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x-a|\le r\Leftrightarrow a-r\le x\le a+r$

כעת ניתן לבטא את הצפיפות של הרציונליים בממשיים באופן הבא: לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש- $|x-q|<\varepsilon$.

<u>משפט 1.6.3</u> (**אי שוויון המשולש**): לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x+y|\le|x|+|y|$

<u>הערה</u>: יש שוויון אם $x=y=0$ או כאשר x ו- y שווי סימן.

<u>הוכחה</u>: $-|x|\le x\le|x|,-|y|\le y\le|y|$ ולכן $-(|x|+|y|)=-|x|-|y|\le x+y\le|x|+|y|$. לפי משפט 1.6.1 $|x+y|\le|x|+|y|$. ☺

<u>מסקנה 1.6.4</u>: לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\big||y|-|x|\big|\le|y-x|$

<u>הוכחה</u>: $y=(y-x)+x$ ולכן לפי אי שוויון המשולש $|y|\le|y-x|+|x|$. כלומר $|y|-|x|\le|y-x|$. באותו אופן $x=(x-y)+y$ ולכן $|x|\le|x-y|+|y|$ או $-|y-x|\le|y|-|x|$. ולכן לפי משפט 1.6.1 $\big||y|-|x|\big|\le|y-x|$. ☺

1.7. קטעים

<u>הגדרה</u>: $I\subset\mathbb{R}$ תיקרא **רווח** אם מתקיים התנאי הבא: לכל $a,b\in I$ אם $a<c<b$ אזי $c\in I$.

על ציר הממשיים יש 9 סוגי קטעים: עבור $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ נגדיר:
1. קטעים חסומים:
   1.1. $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\le b\}$
   1.2. $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\}$
   1.3. $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\}$
   1.4. $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$

2. קטעים לא חסומים
   2.1. $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$
   2.2. $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\}$
   2.3. $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:a<x\}$
   2.4. $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}:x\le b\}$
   2.5. $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}:x<b\}$

משפט 1.7.1: $I\subset\mathbb{R}$ רווח אמ"מ I קטע.
לא נוכיח את המשפט הזה אבל החשיבות שלו היא בזה שרווח הוא מושג שאפשר לדבר עליו בכל קבוצה סדורה ולא רק בממשיים. למשל ברציונליים מושג הרווח לא מתלכד עם מושג הקטע. למשל תת הקבוצה $\left\{q\in\mathbb{Q}:0\le q<\sqrt{2}\right\}\subset\mathbb{Q}$ היא כמובן רווח ב- $\mathbb{Q}$ אבל לא נוכל למצוא $b\in\mathbb{Q}$ כך ש- $\left\{q\in\mathbb{Q}:0\le q<\sqrt{2}\right\}=(0,b)$. זה נובע מכך שברציונליים אין שלמות!

1.8. חזקות

1.8.1. חזקות עם מעריכים שלמים

יהיו $a\in\mathbb{R}$ ו- $n,m\in\mathbb{N}$. ניתן להראות בקלות, ע"י אינדוקציה למשל ש-

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$
$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$
$$a^{m\cdot n}=\left(a^m\right)^n$$

למעשה את השוויון הראשון ראינו כבר בפרק על עיקרון האינדוקציה.

1.8.2. חזקות עם מעריכים רציונליים

כאשר דיברנו על שורשים שלמים של הממשיים הגדרנו עבור $a\in\mathbb{R}^+$ $\ y=a^{1/n}\Leftrightarrow y^n=a$ והוכחנו כי קיים $y\in\mathbb{R}^+$ יחיד שמקיים זאת.

הגדרה: יהי $r=\frac{k}{n}\in\mathbb{Q}$ כאשר $k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$. נגדיר $a^r=\left(a^{1/n}\right)^k=a^{k/n}$.

טענה 1.8.2.1: ההגדרה של חזקה רציונלית מוגדרת היטב.
הוכחה: יש להראות שאם קיימות שתי הצגות שונות למספר $r\in\mathbb{Q}$ אזי תוצאת החזקה זהה. נניח $\frac{p}{q}=r=\frac{k}{n}$. אזי $m\equiv kq=np$. נסמן $x=\left(a^{1/n}\right)^k,\ y=\left(a^{1/q}\right)^p$. אזי

$$x^m=\left(\left(a^{1/n}\right)^k\right)^m=\left(\left(a^{1/n}\right)^k\right)^{np}\underset{k,n,p\in\mathbb{Z}}{=}\left(a^{1/n}\right)^{knp}=\left(a^{1/n}\right)^{nkp}=\left(\left(a^{1/n}\right)^n\right)^{kp}\overset{def}{=}a^{kp}$$

$$y^m=\left(\left(a^{1/q}\right)^p\right)^m=\left(\left(a^{1/q}\right)^p\right)^{kq}\underset{p,k,q\in\mathbb{Z}}{=}\left(a^{1/q}\right)^{pkq}=\left(a^{1/q}\right)^{qkp}=\left(\left(a^{1/q}\right)^q\right)^{kp}\overset{def}{=}a^{kp}$$

כלומר $\left(\left(a^{1/n}\right)^k\right)^m=\left(\left(a^{1/q}\right)^p\right)^m$ ולכן $\left(a^{1/n}\right)^k=\left(a^{1/q}\right)^p$. ☺

<u>משפט 1.8.2.2</u>: אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ ו- $r,s\in\mathbb{Q}$ אז

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$$
$$\left(a\cdot b\right)^r=a^r\cdot b^r$$
$$\left(a^r\right)^s=a^{r\cdot s}$$

1.8.3. חזקות עם מעריכים ממשיים

יהי $a\in\mathbb{R}^+$. נרצה להגדיר a^x לכל $x\in\mathbb{R}$ כך שיתקיימו כל התכונות שאנחנו מכירים עבור $x\in\mathbb{Q}$.

נסתכל ראשית על המקרה ש- $1<a$. נגדיר שתי קבוצות:

$$L_a\left(x\right)=\left\{a^r:r\in\mathbb{Q},r<x\right\}$$
$$U_a\left(x\right)=\left\{a^t:t\in\mathbb{Q},x<t\right\}$$

ברור ש- $\varnothing\neq L_a\left(x\right),U_a\left(x\right)\subset\mathbb{R}^+$ וכן $L_a\left(x\right)\leq U_a\left(x\right)$. אזי נוכל לסמן $i=\inf\left(U_a\left(x\right)\right),s=\sup\left(L_a\left(x\right)\right)$.
כמו כן $s\leq i$.

<u>טענה 1.8.3.1</u>: תחת הסימונים קודם, $i=s$.
<u>הוכחה</u>: יש להראות שלכל $0<\varepsilon$ קיימים $r<x<t$ כך ש- $a^t-a^r<\varepsilon$. יהי $0<\varepsilon$. ניתן לבחור $r<x<t$ כך ש- $t-r<\frac{1}{n}$ כאשר n הוא כזה שמבטיח ש- $a^{1/n}-1<\frac{\varepsilon}{s}$ (קיים כזה כי $\inf\left\{a^{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=1$). אזי $a^t-a^r=a^r\left(a^{t-r}-1\right)\leq s\left(a^{t-r}-1\right)<s\left(a^{1/n}-a\right)<s\cdot\frac{\varepsilon}{s}=\varepsilon$. כעת לפי הלמה הבסיסית $i=s$. ☺

<u>הגדרה</u>: נגדיר $i=\exp_a\left(x\right)=s$

נשים לב שבהוכחה של הטענה לא השתמשנו כלל בכך ש- x הוא אי רציונלי ולכן ניתן להשתמש בהגדרה הזו גם עבור $x\in\mathbb{Q}$. לכן גם נתנו שם אחר למה שהתקבל. אבל עכשיו נראה שבמקרה ש- $x\in\mathbb{Q}$ שתי ההגדרות מתלכדות.

<u>משפט 1.8.3.2</u>: יהי $x\in\mathbb{Q}$. אזי $a^q=\exp_a\left(q\right)$.
<u>הוכחה</u>: אם $r<q$ אז $a^r<a^q$ ולכן $s\leq a^q$ שהרי a^q הוא חסם מלמעלה של $L_a\left(q\right)$. אם $q<t$ אז $a^q<a^t$ ולכן $a^q\leq i$. לכן $s\leq a^q\leq i$ כלומר $a^q=\exp_a\left(q\right)$. ☺

נזכור שעד כה הגדרנו רק עבור $1<a$.

<u>הגדרה</u>: אם $a=1$ אז $a^x=a$. אם $0<a<1$ אז $1<\frac{1}{a}$ ונגדיר $a^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

<u>משפט 1.8.3.3</u>: יהיו $x<y$. אם $1<a$ אז $a^x<a^y$ ואם $0<a<1$ אז $a^y<a^x$.
<u>הוכחה</u>: יהיו $x<p<q<y$ כאשר $p,q\in\mathbb{Q}$. אם $1<a$ אז $a^x\leq a^p<a^q\leq a^y$.
אם $0<a<1$ נתבונן ב- $\frac{1}{a}$ ונקבל את הדרוש. ☺

מכאן גם קל לקבל את אותם חוקי החזקות כמו ברציונליים:

<u>משפט 1.8.3.4</u>: אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ ו- $x,y\in\mathbb{R}$ אז

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$
$$\left(a\cdot b\right)^x=a^x\cdot b^x$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{x\cdot y}$$

<u>הוכחה:</u>

נניח ש- $1<a$. אזי בגלל מה שאנחנו יודעים עבור הרציונליים $L_a\left(x\right)\cdot L_a\left(y\right)\subset L_a\left(x+y\right),U_a\left(x\right)\cdot U_a\left(y\right)\subset U_a\left(x+y\right)$ ולכן $a^xa^y\le a^{x+y},a^{x+y}\le a^xa^y$ כלומר $a^xa^y=a^{x+y}$. אם $a=1$ הטענה מיידית. אם $0<a<1$ נסתכל ב- $\frac{1}{a}$. אז

$a^xa^y=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}\left(\frac{1}{a}\right)^{-y}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-(x+y)}=a^{x+y}$.

נשאיר את השאר לקורא. ☺

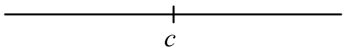
2. סדרות

2.1. הגדרת הסדרה

<u>הגדרה</u>: **סדרה** ב- $\mathbb{R}$ היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מסמנים $f(n)=f_n$. את כל הסדרה כולה מסמנים בכל מיני דרכים. למשל, $(f_1,f_2,f_3,\dots)=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f_n)_{n=1}^{\infty}=(f_n)$

<u>דוגמאות</u>:

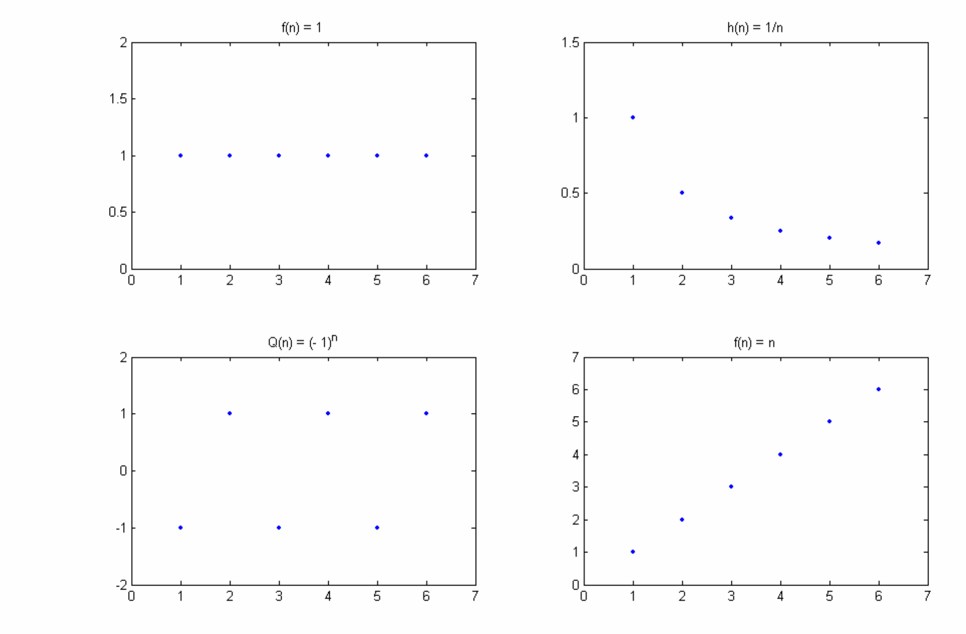
1. סדרה קבועה: $f_n\equiv c\in\mathbb{R}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.



2. הסדרה ההרמונית: $h_n=\frac{1}{n}$
3. סדרה הנדסית: עבור $q\in\mathbb{R}$ קבוע $q_n=q^n$. בפרט עבור $q=-1$ נקבל סדרה נוירוטית משהו $Q_n=(-1)^n$ אשר עוברת מ- -1 ל- 1 לסירוגין.

<u>הערות</u>:

1. יש ספרים שמציינים סדרה בסוגריים מסולסלים כך $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ אבל זה סימון מבלבל משהו כי בסדרה יש חשיבות רבה לסדר של האיברים. יש להבדיל בין קבוצה איברי הסדרה $\{f_n\}$ לבין הסדרה עצמה (f_n) . למשל $(Q_n)=\{-1,1,-1,1,-1,\dots\}$ אבל $\{Q_n\}=\{-1,1\}$.
2. לא תמיד אפשר למצוא נוסחה מפורשת לאיבר ה- n-י של הסדרה. למשל, אין נוסחה למספרים הראשוניים, וכך אם נגדיר $P_n=n^{th}$ prime ברור ש- $(P_n)=(2,3,5,7,11,13,17,\dots)$ אבל לא נוכל לרשום נוסחה מתאימה.[7]
3. אנחנו רגילים לחשוב על פונקציות בצורה גרפית ואפשר גם לצייר גרף של סדרה. אבל יש לזכור שמה שמבדיל סדרה מסתם פונקציה אחרת הוא שתחום ההגדרה שלה הוא המספרים הטבעיים בלבד – וזהו תחום בדיד. לכן הגרפים שנוכל לצייר יהיו בדידים גם הם, כלומר יהיו חורים בתחום!



[7] ואם היינו יכולים, היינו מפורסמים מאוד...

2.2. גבול של סדרה

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) סדרה ב-$\mathbb{R}$. נאמר ש-(a_n) מתכנסת ל-$l\in\mathbb{R}$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|a_n-l|<\varepsilon$. במקרה זה מסמנים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ או $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}l$ או כשברורה הכוונה $a_n\to l$.

בשפה מתמטית נרשום את ההגדרה באופן הבא:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \left(\forall n>N\ \ |a_n-l|<\varepsilon\right)$$

בעצם מבחינה אינטואיטיבית מה שההגדרה הזאת אומרת שאם סדרה מתכנסת לגבול מסויים אז נוכל להתקרב לגבול הזה ע"י איברי הסדרה בכל דיוק שנרצה.

<u>דוגמה</u>: נטען ש-$h_n=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. צריך להראות שמתקיים $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \left(\forall n>N\ \left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\right)$. יהי $0<\varepsilon$. לפי ארכימדיות קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{\varepsilon}<N$. כעת לכל $N<n$ מתקיים $\frac{1}{\varepsilon}<N<n$ ולכן $\frac{1}{n}<\varepsilon$ וזה בדיוק מה שרצינו, שהרי $\frac{1}{n}=\left|\frac{1}{n}-0\right|$.

<u>דוגמה</u>: נטען ש-$\frac{1}{2^n}\to 0$. יהי $0<\varepsilon$. ויהי לפי ארכימדיות $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{\varepsilon}<N$. ניתן להוכיח באינדוקציה שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<2^n$ ולכן $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}$. אזי לכל $N<n$ מתקיים $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$.

<u>דוגמה</u>: נטען ש-$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\to 0$.

<u>שלא לציטוט</u>: אנחנו מעוניינים למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon$. ננקוט בשיטה שנוהגים בה הרבה בכל מה שקשור לשורשים – מכפלה בצמוד!

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\underset{\sqrt{n+1}>\sqrt{n}}{\underset{\downarrow}{<}}\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$$

לכן $n>\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$. ואת זה אנחנו יודעים להשיג באמצעות הארכימדיות.

<u>פורמלית</u>: יהי $0<\varepsilon$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ לפי ארכימדיות כך ש-$\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2<N$. אזי

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}\underset{\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2<N<n\Rightarrow\frac{1}{2\varepsilon}<\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon}{\underset{\downarrow}{<}}\varepsilon$$

כעת משהבנו מה זה אומר סדרה מתכנסת נבין מה זה סדרה שלא מתכנסת לגבול מסויים. נרשום את השלילה של ההגדרה:

$$\lim_{n\to\infty}a_n\neq l\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \left(\exists n>N\ \ |a_n-l|\geq\varepsilon\right)$$

כלומר בשביל להראות שסדרה (a_n) לא מתכנסת לאיזה מספר l צריך למצוא $0<\varepsilon$ כך שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $N<n$ כך ש-$|a_n-l|\geq\varepsilon$. זה אומר שלמעשה לעולם לא נוכל להתקרב ל-l בדיוק שעולה על ε זה שמצאנו.

<u>דוגמה</u>: נראה ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\neq 1$. ניקח $\varepsilon=\frac{1}{2}$. לכל $2<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|\frac{1}{n}-1\right|=1-\frac{1}{n}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. לכן לכל $N\in\mathbb{N}$ שנבחר תמיד יהיה $N<n$, למשל $N+1$ שיקיים $\left|\frac{1}{n}-1\right|\geq\frac{1}{2}$.

<u>דוגמה</u>: ל- $a_n=(-1)^n$ אין גבול.

<u>הוכחה</u>: ראשית נראה ש- $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\neq 1$. יהי $\varepsilon=1$. ויהי $N\in\mathbb{N}$. נסתכל על $N<n$ איזוגי. אזי $\left|(-1)^n-1\right|=|-1-1|=2\geq 1$. לכן $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\neq 1$. באופן דומה מראים ש- $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\neq -1$.

כעת יהי $l\in\mathbb{R}$ כך ש- $l\neq 1, l\neq -1$ ויהי $\varepsilon=\min\{|l-1|,|l+1|\}$. ברור ש- $0<\varepsilon$ ו- ε זה הוא המרחק המינימלי בין איברי הסדרה לבין l. ברור שלעולם לא נוכל להתקרה ל- l למרחק קצר יותר מ- ε, כלומר $|a_n-l|\geq\varepsilon$ לכל $n\in\mathbb{N}$. לכן אף $l\neq 1,-1$ לא יכול להיות הגבול. וגם הראנו שהגבול אינו 1 או -1. לכן הסדרה כלל לא מתכנסת. ☺

<u>הגדרה</u>: סדרה (a_n) תיקרא **מתכנסת** אם קיים $l\in\mathbb{R}$ כך ש- $l=\lim_{n\to\infty}a_n$. אחרת נאמר ש- (a_n) **מתבדרת**.

<u>הגדרה</u>: תהי $P(n)$ טענה לגבי המספר $n\in\mathbb{N}$.

- נאמר ש- $P(n)$ **נכונה תמיד** אם היא נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$
- נאמר ש- $P(n)$ **נכונה כמעט תמיד** אם קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $P(n)$ נכונה כל $N<n$
- נאמר ש- $P(n)$ **נכונה באופן שכיח** אם היא נכונה לאינסוף $n\in\mathbb{N}$, כלומר לכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $N<n$ כך ש- $P(n)$ נכונה.

<u>דוגמאות</u>:

- הטענה $P(n)\equiv n\geq 1$ נכונה תמיד
- הטענה $P(n)\equiv n\geq 30$ נכונה כמעט תמיד
- הטענה $P(n)\equiv p$ is prime נכונה באופן שכיח.

ברור שכל טענה שנכונה תמיד נכונה גם כמעט תמיד וכל טענה שנכונה כמעט תמיד נכונה באופן שכיח.

<u>למה 2.2.1</u>: יהיו $P(n),P'(n),Q(n),Q'(n),R(n),R'(n)$ טענות כך ש- $P(n),P'(n)$ נכונות תמיד, $Q(n),Q'(n)$ נכונות כמעט תמיד ו- $R(n),R'(n)$ נכונות באופן שכיח. אזי:

1. $P(n)\wedge P'(n)$ נכונה תמיד
2. $Q(n)\wedge Q'(n)$ נכונה כמעט תמיד
3. $P(n)\wedge Q(n)$ נכונה כמעט תמיד
4. $P(n)\wedge R(n)$ נכונה באופן שכיח
5. $Q(n)\wedge R(n)$ נכונה באופן שכיח

ההוכחה מושארת לקורא כתרגיל. למעשה זה די מובן מאליו. נשים לב שהטענה $R(n)\wedge R'(n)$ אינה בהכרח נכונה באופן שכיח. בדקו שאתם מבינים למה...

תחת הניסוחים החדשים ניתן לרשום את הגדרות הגבול באופן שונה:

- נאמר ש- l הוא הגבול של (a_n) אם לכל $0<\varepsilon$ הטענה $|a_n-l|<\varepsilon$ נכונה כמעט תמיד.
- נאמר ש- l אינו הגבול של (a_n) אם קיים $0<\varepsilon$ כך שהטענה $|a_n-l|\geq\varepsilon$ נכונה באופן שכיח.

<u>למה 2.2.2</u>: יהי $x \in \mathbb{R}^+$ כך שלכל $0 < \varepsilon$ מתקיים $x < \varepsilon$. אזי $x = 0$.
<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש- $0 < x$. אזי יהי $x \le \varepsilon$. אבל אז $x = x \ge \varepsilon$ בסתירה להנחה. ☺

<u>משפט 2.2.3</u> **(יחידות הגבול)**: תהי (a_n) כך ש- $a_n \to l$ וגם $a_n \to l'$. אזי $l = l'$.

<u>הוכחה</u>: יהי $0 < \varepsilon$. נניח בה"כ $l \le l'$. אזי $0 \le l - l'$. אזי הטענות $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ו- $|a_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$ נכונות כמעט תמיד ולכן $\left(|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(|a_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$ נכונה כמעט תמיד. לכן הטענה $l - l' = (l - a_n) + (a_n - l') \overset{TI}{\le} |a_n - l| + |a_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ נכונה כמעט תמיד. כעת מלמה 2.2.2 $l - l' = 0$ כלומר $l = l'$. ☺

2.3. משפחות של סדרות

<u>הגדרה</u>: סדרה (a_n) תיקרא **חסומה** אם $\{a_n\}$ חסומה. כלומר אם קיימים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $m \le a_n \le M$.

<u>הגדרה</u>:
- נסמן ב- $\mathcal{C}$ את קבוצת הסדרות המתכנסות[8]
- נסמן ב- $\mathcal{B}$ את קבוצת הסדרות החסומות[9]
- נסמן ב- $\mathcal{N}$ את קבוצת הסדרות השואפות לאפס[10]

<u>משפט 2.3.1</u>: $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$
<u>הוכחה</u>: תהי $a_n \in \mathcal{C}$. אזי קיים $l \in \mathbb{R}$ כך ש- $a_n \to l$. יהי $\varepsilon = 1$. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n$ מתקיים $|a_n - l| < \varepsilon = 1$. כעת נסתכל על הקבוצה $\{a_n\}_{n=1}^{N}$. זו קבוצה סופית ולכן היא חסומה. יהיו $m' = \min_{1 \le n \le N}\{a_n\}, M' = \max_{1 \le n \le N}\{a_n\}$. כעת כאמור לכל $N < n$ מתקיים $|a_n - l| < 1$ כלומר $l - 1 \le a_n \le l + 1$. יהיו $m = \min\{l-1, m'\}, M = \max\{M', l+1\}$. ברור ש- $m \le a_n \le M$ לכל $n \in \mathbb{N}$. כלומר $a_n \in \mathcal{B}$. ☺

נשים לב שההכלה כאן היא במובן החזק. ברור שיש סדרות חסומות אשר אינן מתכנסות. למשל הסדרה $(-1)^n$.

<u>משפט 2.3.2</u>: $\mathcal{N} \cdot \mathcal{B} \subset \mathcal{N}$
<u>הוכחה</u>: תהיינה $b_n \in \mathcal{B}$, $a_n \in \mathcal{N}$. כלומר קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|b_n| \le M$ וכן לכל $0 < \varepsilon$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon$.
אם $M = 0$ אזי $b_n \equiv 0$ וברור ש- $a_n \cdot b_n \equiv 0 \to 0$.
אחרת $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \le |a_n| \cdot M$. החל מ- N מסויים $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ ולכן הטענה $|a_n b_n| \le |a_n| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ נכונה כמעט תמיד.
בכל אופן, קיבלנו ש- $a_n \cdot b_n \in \mathcal{N}$. ☺

---
[8] $\mathcal{C}$onverge
[9] $\mathcal{B}$ounded
[10] $\mathcal{N}$ull

<u>דוגמה</u>: $\frac{\sin n}{n}=\sin n\cdot\frac{1}{n}\to 0$ שהרי $-1\le\sin n\le 1$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ואילו ראינו כבר ש- $\frac{1}{n}\to 0$.

<u>משפט 2.3.3</u> (**משפט סזרו**): אם $x_n\to 0$ אז $\frac{x_1+...+x_n}{n}\to 0$

<u>הוכחה</u>: יש להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $M\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>M$ מתקיים $\left|\frac{x_1+...+x_n}{n}\right|<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$. $x_n\to 0$ ולכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $n>N$. מאחר שהסדרה מתכנסת, היא גם חסומה, ונניח שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|x_n|<K$. יהי לפי ארכימדיות $M>\frac{2NK}{\varepsilon}$. אזי עבור $n>M$ נקבל

$$\left|\frac{x_1+...+x_n}{n}\right|=\left|\frac{x_1+...+x_N}{n}+\frac{x_{N+1}+...+x_n}{n}\right|\le\left|\frac{x_1+...+x_N}{n}\right|+\left|\frac{x_{N+1}+...+x_n}{n}\right|<$$
$$<\frac{NK}{n}+\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{NK}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

וזה בדיוק מה שרצינו. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) סדרה.

- נגדיר את **סדרת הממוצעים** (b_n) ע"י $b_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$
- נגדיר את **סדרת הממוצעים ההרמוניים** (c_n) ע"י $c_n=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$
- נגדיר את **סדרת הממוצעים הגאומטריים** (d_n) ע"י $d_n=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$.

<u>משפט 2.3.4</u>: תהי (a_n) כך ש- $a_n\to a$. אזי

1. סדרת הממוצעים מתכנסת ל- a
2. אם $a_n\ne 0$ ו- $a\ne 0$ אזי סדרת הממוצעים ההרמוניים מתכנסת ל- a
3. אם $0<a_n$ אזי סדרת הממוצעים הגאומטריים מתכנסת ל- a.

הוכחנו את המשפט בתרגיל וההוכחה נעזרת במשפט סזרו ובאי שוויון הממוצעים.
נעיר רק שאם סדרת ממוצעים אינה מתכנסת אין הדבר מעיד על כך שהסדרה אינה מתכנסת. למשל, נגדיר $a_n=(-1)^n$. סדרה זו אינה מתכנסת אבל סדרת הממוצעים שלה מתכנסת לאפס.

<u>טענה 2.3.5</u>: תהי (a_n) סדרה חיובית. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to a$ אזי $\sqrt[n]{a_n}\to a$.

הוכחנו את הטענה הזו בתרגיל בשימוש במשפט הקודם. גם כאן הכיוון ההפוך אינו נכון. למשל נסתכל על הסדרה $(1,2,1,2,1,2,1,...)$. לא קיים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ משום שלסדרה (b_n) המוגדרת ע"י $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיימים שני גבולות חלקיים שונים - $\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$. אבל ברור ש- $\sqrt[n]{a_n}\to 1$.

<u>טענה 2.3.6</u>: תהי (a_n) סדרה חיובית. אזי

1. אם קיים $0<k<1$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|a_{n+1}-a_n|\le k^n$ אזי הסדרה מתכנסת.
2. אם קיים $0<q<1$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|a_{n+2}-a_{n+1}|\le q|a_{n+1}-a_n|$ אזי הסדרה מתכנסת.

2.4. אריתמטיקה של גבולות

<u>משפט 2.4.1</u> (**משפט הסנדוויץ'**): יהיו $(a_n),(b_n),(c_n)$ סדרות אשר מקיימות $a_n \le b_n \le c_n$ כמעט תמיד. כמו כן $a_n \to L$ וגם $c_n \to L$. אזי $b_n \to L$.

<u>הוכחה</u>: $a_n \to L$ וגם $c_n \to L$ ולכן בהינתן $0<\varepsilon$ $|a_n - L| < \varepsilon$ ו- $|c_n - L| < \varepsilon$ כמעט תמיד. כלומר כמעט תמיד מתקיים $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$ וכמעט תמיד מתקיים $L-\varepsilon < c_n < L+\varepsilon$. לכן הטענה $L-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L+\varepsilon$ נכונה כמעט תמיד. כלומר $|b_n - L| < \varepsilon$ נכונה כמעט תמיד. משמע $b_n \to L$.
☺

<u>דוגמאות</u>:

1. לכל $|q|<1$ $q^n \to 0$.

<u>הוכחה</u>: עבור $q=0$ הטענה ברורה. נסתכל כעת במקרה ש- $0<q<1$. אזי $1<\frac{1}{q}$. כלומר קיים $0<h$ כך ש- $1+h=\frac{1}{q}$. לפי אי שוויון ברנולי $1+nh \le (1+h)^n = \left(\frac{1}{q}\right)^n = \frac{1}{q^n}$. לכן $0 \le q^n \le \frac{1}{1+nh}$. אבל ברור ש- $0 \to 0$ ואילו $\frac{1}{1+nh} \to 0$ גם היא (קל להוכיח את זה). לכן לפי משפט ה- במקרה ש- $0<q<1$ מתקיים $q^n \to 0$. מה קורה אם $-1<q<0$? אזי $0 \leftarrow -|q|^n = -|q^n| \le q^n \le |q^n| = |q|^n \to 0$ ולכן לפי משפט ה- $q^n \to 0$ גם במקרה ש- $-1<q<0$. ☺

2. לכל $|q|<1$ $nq^n \to 0$.

<u>הוכחה</u>: נשתמש באי השוויון $(1+x)^n \ge \frac{n(n-1)}{2}x^2$. כמו קודם עבור $q=0$ הטענה טריוויאלית. נסתכל אם כן על המקרה שבו $0<q<1$. אז $1<\frac{1}{q}$ וקיים $0<h$ כך ש- $1+h=\frac{1}{q}$. לכן $\frac{1}{q^n} = (1+h)^n \ge \frac{n(n-1)}{2}h^2$. כלומר $0 \le nq^n \le \frac{1}{\frac{(n-1)}{2}h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$. קל להראות ש- $\frac{2}{(n-1)h^2} \to 0$ ולכן לפי משפט ה- במקרה ש- $0<q<1$ $nq^n \to 0$. במקרה ש- $-1<q<0$ הטענה מתקבלת באופן דומה לדוגמה הקודמת. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי $x \in \mathbb{R}$. נגדיר את **פונקציית הסימן**
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

<u>למה 2.4.2</u>: אם $b_n \to b \neq 0$ אזי $\operatorname{sgn} b_n = \operatorname{sgn} b$ כמעט תמיד.

<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה ש- $0<b$. ההוכחה למקרה השני מתבצעת באופן דומה. יהי $0<\varepsilon=\frac{b}{2}$. אזי $|b_n - b| < \frac{b}{2}$ כמעט תמיד, כלומר $0<\frac{b}{2}<b_n<\frac{3b}{2}$ כמעט תמיד. ☺

<u>למה 2.4.3</u>: אם $b_n \to b \neq 0$ אזי $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ חסומה.

<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה ש- $b > 0$. ההוכחה למקרה השני מתבצעת באופן דומה. יהי $0 < \varepsilon = \frac{b}{2}$. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n$ $|b_n - b| < \frac{b}{2}$, או באופן שקול $0 < \frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}$. אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\min\left\{\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_N}, \frac{2}{3b}\right\} \leq b_n \leq \max\left\{\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_N}, \frac{2}{b}\right\}$. ☺

<u>משפט 2.4.4</u>: יהיו $(a_n),(b_n)$ כך ש- $a_n \to a, b_n \to b$ ו- $a < b$. אזי $a_n < b_n$ כמעט תמיד.

<u>הוכחה</u>: יהי $0 < \varepsilon = \frac{b-a}{2}$. אזי $|a_n - a| < \frac{b-a}{2}$ וגם $|b_n - b| < \frac{b-a}{2}$ כמעט תמיד. כלומר $\frac{a+b}{2} = a + \frac{b-a}{2} > a_n > a - \frac{b-a}{2} = \frac{a-b}{2}$ וגם $\frac{2b-a}{2} = b + \frac{b-a}{2} > b_n > b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$ נכונות כמעט תמיד. בפרט כמעט תמיד $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$. ☺

<u>משפט 2.4.5</u>: יהיו סדרות $b_n \to b, a_n \to a$ כך שמתקיים $a_n < b_n$ כמעט תמיד. אזי $a \leq b$.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש- $b < a$. אז לפי משפט 2.4.4 $b_n < a_n$ כמעט תמיד. וזו סתירה. ☺

<u>למה 2.4.6</u>: תהי (x_n) סדרה. אזי $x_n \to 0$ אמ"מ $|x_n| \to 0$.

הוכחה:

($\Leftarrow$). צריך להראות שלכל $0 < \varepsilon$ מתקיים כמעט תמיד - $\big||x_n| - |0|\big| = |x_n| < \varepsilon$. אבל זה נכון משום ש- $x_n \to 0$. כלומר לכל $0 < \varepsilon$ כמעט תמיד $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $|x_n| \to 0$. אבל $0 \leftarrow -|x_n| \leq x_n \leq |x_n| \to 0$ ולכן לפי משפט ה- $x_n \to 0$. ☺

<u>משפט 2.4.7</u>: יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש- $a_n \to a, b_n \to b$. אזי:

1. $a_n + b_n \to a + b$
2. $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
3. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ אם המנות מוגדרות.

<u>הוכחה</u>: יהיו $(a_n),(b_n)$ כנ"ל.

1. יהי $0 < \varepsilon$. אזי $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ כמעט תמיד. אזי $|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \overset{TI}{\leq} a_n - a + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ כמעט תמיד. כלומר $a_n + b_n \to a + b$.
2. נשים לב שמתקיים $a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a) \cdot b + a \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot (b_n - b)$. לפי הסעיף הקודם $a_n - a \to 0, b_n - b \to 0$. לכן לפי משפט 2.3.2 $(a_n - a) \cdot b \to 0, a \cdot (b_n - b) \to 0, (a_n - a) \cdot (b_n - b) \to 0$. ולפי למה 2.4.6 $|(a_n - a) \cdot b| \to 0, |a \cdot (b_n - b)| \to 0, |(a_n - a) \cdot (b_n - b)| \to 0$ ולכן לפי הסעיף הקודם $|(a_n - a) \cdot b| + |a \cdot (b_n - b)| + |(a_n - a) \cdot (b_n - b)| \to 0$. כעת נשתמש במשפט ה-:

$0 \leftarrow 0 \leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |(a_n - a) \cdot b| + |a \cdot (b_n - b)| + |(a_n - a) \cdot (b_n - b)| \to 0$ ולכן $|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \to 0$.

לפי למה 2.4.6 $a_n\cdot b_n-a\cdot b\to 0$ ולפי הסעיף הקודם
$a_n\cdot b_n=\left(a_n\cdot b_n-a\cdot b\right)+a\cdot b\to 0+a\cdot b=a\cdot b$.

3. מספיק להוכיח ש- $\frac{1}{b_n}\to\frac{1}{b}$ והמקרה הכללי נובע מהסעיף הקודם. לפי למה 2.4.3 הסדרה $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ חסומה, נניח ע"י L. יהי $0<\varepsilon$. אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ $\left|b_n-b\right|<\frac{\varepsilon\cdot|b|}{L}$. כעת
$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b-b_n}{b_n\cdot b}\right|=\frac{1}{\left|b_n\cdot b\right|}\left|b_n-b\right|\le\frac{L}{|b|}\cdot\left|b_n-b\right|<\frac{L}{|b|}\cdot\frac{\varepsilon\cdot|b|}{L}=\varepsilon$. ☺

<u>למה 2.4.8</u>: תהי (x_n) סדרה. אזי $x_n^2\to 0\Leftrightarrow x_n\to 0$.
ההוכחה מושארת כתרגיל לקורא.

<u>דוגמאות</u>:

1. אם $0<a$ אז $\sqrt[n]{a}\to 1$.

<u>הוכחה</u>: אם $a=1$ הטענה ברורה. בה"כ $1<a$. אחרת $1<\frac{1}{a}$ ואז $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\to 1$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות נקבל $\sqrt[n]{a}\to 1$. נניח אם כן ש- $1<a$. אזי $1<a^{1/n}$. לכן לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $0<h_n$ כך ש- $1+h_n=a^{1/n}$. כעת לפי אי שוויון ברנולי $1+nh_n\le\left(1+h_n\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$. לכן $0\le h_n\le\frac{a-1}{n}\to 0$. לכן לפי משפט ה-🥪 $h_n\to 0$. כעת לפי אריתמטיקה של גבולות $\sqrt[n]{a}=1+h_n\to 1$. ☺

2. $\sqrt[n]{n}\to 1$.

<u>הוכחה</u>: $1<\sqrt[n]{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן קיים $0<h_n$ כך ש- $1+h_n=\sqrt[n]{n}$. כעת לפי מסקנה 1.2.9 $n=\left(1+h_n\right)^n\ge\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$. ולכן $0\le h_n^2\le\frac{2}{n-1}\to 0$ ולפי משפט ה-🥪 $h_n^2\to 0$. כעת לפי למה 2.4.8 $h_n\to 0$. לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\sqrt[n]{n}\to 1$. ☺

2.5. סדרות מונוטוניות

<u>הגדרה</u>: נאמר שסדרה (a_n) **עולה** אם $a_n\le a_{n+1}$ תמיד ו**עולה ממש** אם $a_n<a_{n+1}$ תמיד. באופן דומה נאמר שהסדרה **יורדת** אם $a_{n+1}\le a_n$ תמיד ו**יורדת ממש** אם $a_{n+1}<a_n$ תמיד.
בכל מקרה נאמר שהסדרה **מונוטונית**. נסמן ב- $\mathcal{M}$ את קבוצת הסדרות המונוטוניות.

<u>משפט 2.5.1</u>: $\mathcal{M}\cap\mathcal{B}\subset\mathcal{C}$

<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה ש- (a_n) חסומה ועולה. באופן דומה מוכיחים עבור שאר המקרים. הקבוצה $\{a_n\}$ חסומה ובפרט היא חסומה מלמעלה והיא כמובן אינה ריקה, לכן קיים לה חסם עליון שנסמנו $a=\sup\{a_n\}$. נטען ש- $a=\lim_{n\to\infty}a_n$. יהי $0<\varepsilon$. אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $a-a_N<\varepsilon$. לכן $a-\varepsilon<a_N$.
באינדוקציה ניתן להראות שמאחר ש- (a_n) סדרה עולה, לכל $N<n$ $a_N\le a_n$. לכן לכל $N<n$ $a-\varepsilon<a_N\le a_n$ כלומר $a-a_n<\varepsilon$. אבל אז $\left|a_n-a\right|=a-a_n<\varepsilon$. ☺

<u>משפט 2.5.2</u> (**הלמה של קנטור**[11]): תהיינה $(a_n),(b_n)$ כך ש- $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$. אזי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a\le b$ ולכל $a\le x\le b$ מתקיים שלכל $n\in\mathbb{N}$ $a_n\le x\le b_n$. יתר על כן, אם $b_n-a_n\to 0$ אזי קיים $c\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $a_n\le c\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

<u>הערה</u>: בעצם אנחנו מסתכלים פה על סדרה של קטעים שהם אחד בתוך השני (ומכאן השם הלועזי של המשפט). יש חשיבות רבה לכך שהקטעים הם סגורים. ומה שהמשפט אומר שבהינתן סדרה כזאת החיתוך האינסופי של הקטעים הוא לא ריק. כשמדובר בקטעים פתוחים, זה כבר לא עובד. למשל $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\varnothing$.

<u>הוכחה</u>: $\{a_n\}$ עולה וחסומה (ע"י b_1) ו- $\{b_n\}$ יורדת וחסומה (ע"י a_1). לכן לפי משפט 2.5.1 הן מתכנסות ל- $a=\sup\{a_n\}, b=\inf\{b_n\}$ בהתאמה. כמו כן מאחר ש-תמיד $a_n\le b_n$ לפי משפט 2.4.5 $a\le b$. אזי ברור שאם $a\le x\le b$ אז $a_n\le a\le x\le b\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

כעת, אם $b_n-a_n\to 0$ נניח שקיימים c,c' כך ש- $a_n\le c<c'\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. אזי $a<b$ וזה לא יכול להיות. לכן קיים c יחיד שמקיים את הדרוש. ☺

2.6. סדרות חלקיות וגבולות חלקיים

<u>הגדרה</u>: תהי (x_n) סדרה ותהי (n_k) סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים $n_1<n_2<\dots<n_k<\dots$. אזי הסדרה (y_k) המוגדרת ע"י $y_k=x_{n_k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$ תיקרא **סדרה חלקית** או **תת סדרה** של (x_n). במקרה זה נסמן $(x_{n_k})\lhd(x_n)$.[12]

<u>דוגמה</u>: נסתכל על הסדרה $(1,2,3,4,\dots,n,\dots)$. כל אלה:

$$(2,4,6,8,\dots)$$
$$(1,3,5,7,\dots)$$
$$(2,3,5,7,11,\dots)$$
$$(1,4,8,19,20,\dots)$$

הן תת סדרות אבל למשל $(3,2,5,3,7,6,\dots)$ אינה תת סדרה, משום שהאיברים חייבים להופיע באותו סדר שהם מופיעים בסדרה המקורית!

<u>משפט 2.6.1</u> (**משפט הירושה**): תהי (x_n) סדרה ו-(x_{n_k}) סדרה חלקית שלה. אזי

1. אם $(x_n)\in\mathcal{B}$ אזי $(x_{n_k})\in\mathcal{B}$
2. אם $(x_n)\in\mathcal{N}$ אזי $(x_{n_k})\in\mathcal{N}$
3. אם $(x_n)\in\mathcal{C}$ אזי $(x_{n_k})\in\mathcal{C}$. יתר על כן, אם $x_n\to x$ אזי $x_{n_k}\to x$
4. אם $(x_n)\in\mathcal{M}$ אזי $(x_{n_k})\in\mathcal{M}$ באותו הכיוון ולכל הפחות באותה עוצמה.

<u>הוכחה</u>:

1. אם $(x_n)\in\mathcal{B}$ אז $\{x_n\}$ חסומה. אבל $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ ולכן גם $\{x_{n_k}\}$ חסומה. כלומר $(x_{n_k})\in\mathcal{B}$.
2. אם $(x_n)\in\mathcal{N}$ כלומר $x_n\to 0$ אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|x_n|<\varepsilon$. לפי ארכימדיות ניתן לבחור K כך ש- $N<n_K$ (n_k) סדרה עולה ממש. ולכן לכל $K<k$ $N<n_k$. לכן $|x_{n_k}|<\varepsilon$. כלומר $(x_{n_k})\in\mathcal{N}$.

---

[11] Nested Interval Property

[12] זה לא סימון פורמלי ואף אחד חוץ מהקבוצה של צביק לא מכיר אותו

3. אם $(x_n)\in\mathcal{C}$ אזי $x_n\to x$. ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות $(x_n-x)\in\mathcal{N}$. לפי הסעיף הקודם $(x_{n_k}-x)\in\mathcal{N}$. כלומר $x_{n_k}-x\to 0$ וכעת לפי אריתמטיקה של גבולות $x_{n_k}=(x_{n_k}-x)+x\to x$.
4. נוכיח עבור המקרה ש-(x_n) מונוטונית עולה. את שאר המקרים מוכיחים באופן דומה. אז נניח כי (x_n) מונוטונית עולה. אזי $x_n\le x_m$ לכל $n\le m$. (n_k) עולה ממש ולכן $n_k<n_{k+1}$ ומכאן ש-$x_{n_k}\le x_{n_{k+1}}$. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי (x_n) סדרה. נגדיר את ה-m-**זנב** שלה כך: $x^{(m)}=(x_n)_{n=m+1}^{\infty}=(x_{m+1},x_{m+2},\ldots)$.

למעשה m-זנב של סדרה ההוא תת סדרה אשר בה $n_k=m+k$. כלומר $x_n^{(m)}=x_{n+m}$. ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(m)}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. זה גם די הגיוני כי התנהגות אסימפטוטית של סדרה לא מושפעת ממספר סופי של איברים בהתחלה שלה.

<u>הגדרה</u>: תהי (x_n) סדרה. איבר x_n ייקרא **פסגה** אם $x_m\le x_n$ לכל $n\le m$.

<u>משפט 2.6.2</u>: לכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית.
<u>הוכחה</u>: תהי (x_n) סדרה. אזי יש שתי אפשרויות:
- ל-(x_n) יש אינסוף פסגות. יהי $n_1\in\mathbb{N}$ כך ש-x_{n_1} פסגה. כעת נגדיר באופן רקורסיבי. נניח שבחרנו $n_1<n_2<\ldots<n_k$ כך ש-$x_{n_k}\le\ldots\le x_{n_2}\le x_{n_1}$. כעת יהי $n_k<n_{k+1}$ כך ש-$x_{n_{k+1}}$ פסגה (קיים כזה כי יש אינסוף פסגות). אזי $x_{n_{k+1}}\le x_{n_k}$. ולכן (x_{n_k}) מונוטונית יורדת.
- אחרת יש ל-(x_n) מספר סופי של פסגות. לכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ x_n אינו איבר פסגה. יהי $N<n_1$ ויהי $n_1<n_2$ כך ש-$x_{n_1}<x_{n_2}$. כעת נמשיך באופן רקורסיבי: נניח שבחרנו $n_1<n_2<\ldots<n_k$ כך ש-$x_{n_1}\le x_{n_2}\le\ldots\le x_{n_k}$. כעת יהי $n_k<n_{k+1}$ כך ש-$x_{n_k}\le x_{n_{k+1}}$ (יש כזה כי אחרת x_{n_k} היה פסגה). קיבלנו ש-(x_{n_k}) מונוטונית עולה. ☺

<u>מסקנה 2.6.3</u> (**משפט בולצאנו ויירשטראס**): לכל סדרה חסומה יש סדרה חלקית מתכנסת.
<u>הוכחה</u>: לפי משפט 2.6.2 לכל סדרה קיימת סדרה מונוטונית. לפי משכפט 2.6.1 אם סדרה חסומה אז גם תת הסדרה שלה חסומה. אבל סדרה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת. ☺

<u>הגדרה</u>: המספר $p\in\mathbb{R}$ ייקא **גבול חלקי** של הסדרה (x_n) אם קיימת לה תת סדרה (x_{n_k}) כך ש-$x_{n_k}\to p$.

אם הסדרה (x_n) חסומה אזי לפי משפט בולצאנו ויירשטראס קיימת לה תת סדרה מתכנסת ולכן קבוצת הגבולות החלקיים אינה ריקה. נגביל אם כך את הדיון שלנו לגבולות חלקיים של סדרות חסומות. תהי $(x_n)\in\mathcal{B}$. נסמן $S=\left\{p\in\mathbb{R}:\exists(x_{n_k})\lhd(x_n)\ \ x_{n_k}\to p\right\}$. מאחר ש-$(x_n)\in\mathcal{B}$ $S\neq\varnothing$.

<u>דוגמאות</u>:
1. אם $a_n=(-1)^n$ אז $S=\{-1,1\}$
2. אם $b_n=\frac{1}{n}$ אז $S=\{0\}$ שהרי זו סדרה מתכנסת ולכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול.

3. נסתכל על הסדרה[13]:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

כלומר כל המספרים מהצורה $\frac{1}{n}$ מופיעים בה אינסוף פעמים ורשומים בסדר אלכסוני כזה...

<u>טענה</u>: $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$.

<u>הוכחה</u>: נניח שיש גבול חלקי x שהוא לא מהצורה $\frac{1}{n}$. אזי קיים n יחיד כך ש-$\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$. יהי כעת $0<\varepsilon<\min\left\{x-\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}-x\right\}$. לא קיים K כך שלכל $K<k$ $\left|\frac{1}{n_k}-x\right|<\varepsilon$ שהרי אין שום n_k כך שהוא בין n לבין $n+1$. ☺

4. נראה דוגמה מעניינת שמראה איך סדרות וגבולות חלקיים יכולים להשתגע קצת לפעמים. נסתכל על המלבן הזה:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

באופן הזה אנחנו יכולים לרשום את כל מספרים הרציונליים החיוביים ויתר על כן, הם יופיעו בסדרה הזאת אינסוף פעמים. זאת אכן סדרה כי הרציונליים הם בני מנייה אז אפשר להציג אותם בתור סדרה. אבל כל מספר אי רציונלי ניתן להצגה כגבול של סדרה רציונלית, כלומר כגבול של תת סדרה של המלבן הזה. אז במקרה זה $S=\mathbb{R}$ שהיא אינה בת מניה...

<u>משפט 2.6.4</u>: תהי $(x_n)\in\mathcal{B}$. $p\in S$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ הטענה $p-\varepsilon<x_n<p+\varepsilon$ נכונה באופן שכיח.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$ נניח $p\in S$. אזי קיימת סדרה חלקית (x_{n_k}) כך ש-$x_{n_k}\to p$. כלומר לכל $0<\varepsilon$ קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $K<k$ $|x_{n_k}-p|<\varepsilon$ כלומר התכונה $p-\varepsilon<x_{n_k}<p+\varepsilon$ נכונה כמעט תמיד ביחס לאינדקס k. אבל בהינתן $N\in\mathbb{N}$ לפי ארכימדיות קיים $\max\{N,n_K\}<n$ ולכן $n_K<n$ ולכן $p-\varepsilon<x_n<p+\varepsilon$ נכונה באופן שכיח.

$(\Rightarrow)$ נניח ש לכל $0<\varepsilon$ הטענה $p-\varepsilon<x_n<p+\varepsilon$ נכונה באופן שכיח, כלומר קיימים אינסוף $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$p-\varepsilon<x_n<p+\varepsilon$. יהי $\varepsilon=1$ ויהי n_1 כך ש-$p-1<x_1<p+1$. נמשיך באופן רקורסיבי. נניח שבחרנו $n_1<n_2<\ldots<n_k$ כך ש-$p-\frac{1}{i}<x_{n_i}<p+\frac{1}{i}$ לכל $1\le i\le k$. יהי $\varepsilon=\frac{1}{k+1}$. מאחר ש-$p-\varepsilon<x_n<p+\varepsilon$ שכיחה נוכל לבחור $n_k<n_{k+1}$ כך ש-$p-\frac{1}{k+1}<x_{n_{k+1}}<p+\frac{1}{k+1}$. כך נקבל סדרה חלקית (x_{n_k}) כך ש-$p-\frac{1}{k}<x_{n_k}<p+\frac{1}{k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$. עכשיו לפי משפט ה-🥪 $x_{n_k}\to p$. ☺

---

[13] זו דוגמה חשובה. אני חושבת שראיתי אותה באחד המבחנים בשאלות האמריקאיות...

2.7. גבולות עליונים וגבולות תחתונים

ראינו שאם (x_n) חסומה אז $S\neq\varnothing$. כמו כן ברור ש- S חסומה. לכן יש לה חסם עליון וגם חסם תחתון שנסמנם $l=\inf S, u=\sup S$. יתר על כן, ברור שמתקיים $l\le u$.

הגדרה: תהי $(x_n)\in\mathcal{B}$ ותהי S קבוצת הגבולות החלקיים שלה. נאמר ש- $l=\inf S$ הוא **הגבול התחתון** של (x_n) ו- $u=\sup S$ הוא **הגבול העליון** של (x_n). במקרה זה נסמן $\liminf x_n=l, \limsup x_n=u$.

למה 2.7.1: תהי $\varnothing\neq X\subset\mathbb{R}$ חסומה מלמעלה (למטה). אזי קיימת סדרה (x_n) ב- X כך ש- $x_n\to\sup X$ ($x_n\to\inf X$).
הוכחה: נוכיח עבור המקרה ש- X חסומה מלמעלה. את המקרה השני מוכיחים בצורה דומה. ראשית נעיר שמאחר ש- X לא ריקה וחסומה מלמעלה קיים לה $\sup X$ ונסמנו u. יהי $\varepsilon=1$. קיים $x_1\in X$ כך ש- $|x_1-u|=u-x_1<1$. נמשיך ברקורסיה. נניח שבחרנו $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$ כך ש- $|x_i-u|<\frac{1}{i}$ לכל $1\le i\le n$. כעת יהי $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$. קיים $x_{n+1}\in X$ כך ש- $|x_{n+1}-u|=u-x_{n+1}<\frac{1}{n+1}$. קיבלנו סדרה (x_n) כך ש- $0\le|x_n-u|=u-x_n<\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. לכן $|x_n-u|\to 0$ כלומר $x_n\to u$. ☺

משפט 2.7.2: תהי $(x_n)\in\mathcal{B}$. אזי $\liminf x_n, \limsup x_n\in S$.
הוכחה: נוכיח רק ש- $\liminf x_n\in S$. את החלק השני מוכיחים בצורה דומה. נסמן $l=\liminf x_n$ נרצה להראות שקיימת סדרה חלקית (x_{n_k}) כך ש- $x_{n_k}\to l$. $l=\inf S$. לפי למה 2.7.1 קיימת (p_n) ב- S כך ש- $p_n\to l$. יהי $\varepsilon=1$ ויהי n_1 כך ש- $p_1-1<x_{n_1}<p_1+1$ (לפי משפט 2.6.4). נפעל בצורה רקורסיבית. נניח שבחרנו $n_1<\dots<n_k$ כך ש- $p_i-\frac{1}{i}<x_i<p_i+\frac{1}{i}$ לכל $1\le i\le k$. יהי $\varepsilon=\frac{1}{k+1}$ ונבחר $n_k<n_{k+1}$ כך ש- $p_{k+1}-\frac{1}{k+1}<x_{n_{k+1}}<p_{k+1}+\frac{1}{k+1}$ (זה אפשרי כי התכונה שכיחה). קיבלנו תת סדרה (x_{n_k}) כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $p_k-\frac{1}{k}<x_{n_k}<p_k+\frac{1}{k}$. לפי משפט ה-🥪 ואריתמטיקה של גבולות $x_{n_k}\to l$. ☺

משפט 2.7.3: תהי $(x_n)\in\mathcal{B}$. אזי התנאים הבאים שקולים:
1. $l=\liminf x_n$
2. עבור l לכל $0<\varepsilon$ מתקיים:
   2.1. הטענה $x_n<l+\varepsilon$ נכונה באופן שכיח
   2.2. הטענה $l-\varepsilon<x_n$ נכונה כמעט תמיד

הוכחה:
$(1\Rightarrow 2)$ נניח $l=\liminf x_n$. בפרט הוא גבול חלקי. יהי $0<\varepsilon$. לפי משפט 2.6.4 הטענה $l-\varepsilon<x_n<l+\varepsilon$ נכונה באופן שכיח. כעת נניח בשלילה ש- $l-\varepsilon<x_n$ אינה נכונה כמעט תמיד. כלומר $x_n\le l-\varepsilon$ שכיחה. אז קיימת תת סדרה (x_{n_k}) כך ש- $x_{n_k}\le l-\varepsilon$. לפי משפט הירושה (x_{n_k}) חסומה ולכן לפי משפט בולצאנו ויירשטראס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $(x_{n_{k_l}})$, נניח $x_{n_{k_l}}\to s$ ומתקיים $s\le l-\varepsilon$.
אבל זה בסתירה להנחה ש- $l=\liminf x_n$ שהוא הגבול החלקי הקטן ביותר.

(1⇐2) מהנתון לכל $0<\varepsilon$ הטענה $l-\varepsilon<x_n<l+\varepsilon$ שכיחה. לכן לפי משפט 2.7.4 l הוא גבול חלקי של x_n. נניח שקיים גבול חלקי אחר $l'<l$. יהי $0<\varepsilon=\frac{l-l'}{2}$. מצד אחד, הטענה $x_n<l'+\frac{l-l'}{2}=\frac{l+l'}{2}$ שכיחה ומצד שני $\frac{l+l'}{2}=l-\frac{l-l'}{2}<x_n$ נכונה כמעט תמיד. וזו סתירה. לכן לא קיים $l'<l$ כזה. ☺

נסתכל על הקבוצה $T_n=\{x_n,x_{n+1},...\}$. זאת קבוצה לא ריקה ומאחר שאנחנו דנים רק בסדרות חסומות גם הקבוצה חסומה. לכן קיימים $s_n=\sup T_n, i_n=\inf T_n$. ברור ש- $T_{n+1}\subset T_n$. ולכן $i_n\le i_{n+1}\le s_{n+1}\le s_n$. הפלא ופלא, אם נתייחס לסדרות $(s_n),(i_n)$ נגלה שאנחנו נמצאים בתנאי הלמה של קנטור. יהיו אז $s=\inf\{s_n\}, i=\sup\{i_n\}$ ואז $i_n\le i\le s\le s_n$. במקרה הזה נטען:

<u>משפט 2.7.4</u>: $i=\liminf x_n$

<u>הסבר</u>: מה שאנחנו אומרים פה הוא בעצם שהגבול התחתון של סדרה הוא החסם העליון של החסמים התחתונים של הקבוצות שמוגדרות ע"י הזנבות של הסדרה המקורית.

<u>הוכחה</u>: נרצה להראות שמתקיימים התנאים של משפט 2.7.3. יהי $0<\varepsilon$. אזי:

נראה ש- $x_n<i+\varepsilon$ נכונה באופן שכיח. נניח בשלילה ש- $x_n\ge i+\varepsilon$ כמעט תמיד. כלומר קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $x_n\ge i+\varepsilon$. אבל לכל $n\in\mathbb{N}$ $x_n\in T_n$ ולכן $i+\varepsilon\le x_n$ שהרי i חסם מלמטה של T_n ובפרט של T_N. לכן $i+\varepsilon\le i_N$ וזו סתירה כי $i=\sup\{i_n\}$.

נראה ש- $i-\varepsilon<x_n$ נכונה כמעט תמיד. נזכור ש- $i=\sup\{i_n\}$. לכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $i-i_N<\varepsilon$ כלומר $i-\varepsilon<i_N$. אבל $i_N=\inf T_n$ ואמרנו שלכל $N<n$ $i_N\le i_n$. לכן הטענה $i-\varepsilon<x_n$ נכונה כמעט תמיד.

לפי משפט 2.8.3 $i=\liminf x_n$. ☺

זהו זמן טוב להעיר שאת כל המשפטים שהוכחנו עד כה ניתן לנסח ולהוכיח באופן אנלוגי גם עבור הגבול העליון.

<u>משפט 2.7.4</u>: תהי $(x_n)\in\mathcal{B}$. אזי $(x_n)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\liminf x_n=\limsup x_n$

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח $x_n\to x$. אזי לפי משפט הירושה לכל תת סדרה (x_{n_k}) מתקיים $x_{n_k}\to x$ ולכן $S=\{x\}$ ולכן $\limsup x_n=\liminf x_n=x$.

($\Rightarrow$) נניח כי $\limsup x_n=\liminf x_n=x$. אזי $S=\{x\}$. יהיו s_n,i_n כמו קודם. ברור ש- $i_n\le x_n\le s_n$. אבל הראנו ש- $s_n\to\liminf x_n, i_n\to\limsup x_n$. לכן לפי משפט ה- נקבל את הטענה. ☺

נעיר הערה חשובה ביותר. אם לסדרה (x_n) קיים $S=\{x\}$ זה ממש לא אומר שהסדרה מתכנסת. זה אומר שכל תת סדרה שלה שכן מתכנסת היא מתכנסת לאותו הגבול. אבל בכלל לא נתון לנו ש- (x_n) עצמה מתכנסת. זה מה שאנחנו מחפשים...

<u>טענה 2.7.5</u>: תהיינה $(a_n),(b_n)\in\mathcal{B}$. אזי $\limsup(a_n+b_n)\le\limsup a_n+\limsup b_n$.

הוכחנו טענה זו בתרגיל.

2.8. סדרות קושי

<u>הגדרה</u>: סדרה (x_n) תיקרא **סדרת קושי** אם היא מקיימת את התנאי הבא: לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<m,n$ מתקיים $|x_n-x_m|<\varepsilon$. או בכמתים:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}\ \ \forall m,n\ \ \left(N<m,n\Rightarrow|x_n-x_m|<\varepsilon\right)$$

<u>משפט 2.8.1</u>: תהי (x_n) סדרה. אזי $(x_n)\in\mathbb{C}$ אמ"מ (x_n) סדרת קושי.

<u>הערה</u>: $\mathbb{R}$ הוא מה שנקרא מרחב שלם. מרחב שלם הוא מרחב שבו כל סדרת קושי מתכנסת. בגלל צפיפות הרציונליים בממשיים קיימת סדרת של רציונליים (x_n) שמתכנסת ל- $\sqrt{2}$ שאיננו רציונלי.

(x_n) סדרת קושי בהיותה מתכנסת. אם מסתכלים על (x_n) כסדרה ב- $\mathbb{Q}$ היא עדיין סדרת קושי אך לא קיים לה גבול. לכן $\mathbb{Q}$ איננו מרחב שלם והמשפט הזה איננו נכון שם.

<u>אינטואיציה</u>: בסה"כ המשפט הוא די הגיוני כי תנאי קושי אומר שבכל דיוק שנבחר החל ממקום מסויים האיברים בסדרה לא מתרחקים אחד מהשני יותר מהדיוק הזה. אז כנראה שהם מתכנסים לאיזה משהו.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח $x_n\to x$. יהי $0<\varepsilon$. אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<m,n$ מתקיים $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2},|x_m-x|<\frac{\varepsilon}{2}$.

כעת $\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}>|x_m-x|+|x_n-x|\overset{TI}{\leq}|(x_n-x)+(x-x_m)|=|x_n-x_m|$.

($\Rightarrow$) נניח שמתקיים תנאי קושי. נראה שהסדרה חסומה. יהי $\varepsilon=1$. אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<m,n$ מתקיים $|x_n-x_m|<1$. יהי אז $m=N+1$ ואז לכל $N<n$ מתקיים $|x_n-x_{N+1}|<1$ כלומר $x_{N+1}-1<x_n<x_{N+1}+1$. לכן $\min\{x_1,...,x_N,x_{N+1}-1\}\leq x_n\leq\max\{x_1,...,x_N,x_{N+1}+1\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$, כלומר הסדרה חסומה.

לכן לפי משפט בולצאנו ויירשטראס קיימת לה תת סדרה (x_{n_k}) מתכנסת. נניח $x_{n_k}\to x$. יהי $0<\varepsilon$. אזי קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שאם $K<k$ אז $|x_{n_k}-x|<\frac{\varepsilon}{2}$. מצד שני מאחר שמדובר בסדרת קושי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $N<m,n$ אז $|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$. יהי k כך ש- $K<k$ וגם $N<n_k$ (זה אפשרי כי (n_k) עולה ממש). אזי לכל $N<n$ יתקיים $\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}>|x_{n_k}-x|+|x_n-x_{n_k}|\overset{TI}{\leq}|(x_n-x_{n_k})+(x_{n_k}-x)|=|x_n-x|$. ☺

2.9. סדרות לא חסומות וגבולות אינסופיים

<u>הגדרה</u>: נאמר שהסדרה (x_n) **שואפת לאינסוף** אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $N<n$ אז $M<x_n$. במקרה זה נסמן $x_n\to+\infty$.

בצורה דומה נאמר שהסדרה (x_n) **שואפת למינוס אינסוף** אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $N<n$ אז $x_n<M$. במקרה זה נסמן $x_n\to-\infty$.

<u>הגדרה</u>: תהי סדרה (x_n). אם הסדרה מתכנסת לגבול סופי נאמר שהיא **מתכנסת במובן הצר**. אם $x_n\to+\infty$ או $x_n\to-\infty$ נאמר שהיא **מתכנסת במובן הרחב**.

<u>דוגמאות</u>:

1. $a_n=n\to+\infty$
2. הסדרה $b_n=(-1)^n n$ אינה שואפת לא לאינסוף ולא למינוס אינסוף. אם סדרה שואפת לאינסוף אז החל ממקום מסויים כל איבריה יהיו חיוביים ואם סדרה שואפת למינוס אינסוף אז החל ממקום

מסויים כל איבריה יהיו שליליים. כאן אף אחת מהאפשרויות האלה לא מתקיימת, משום שהאיברים הם חיוביים ושליליים לסירוגין.

3. הסדרה $C=(1,0,3,2,5,4,7,6,...)$ אינה מונוטונית ובכל זאת שואפת לאינסוף...

נביא עכשיו כמה משפטים ללא הוכחה. ההוכחות פשוטות ביותר!

<u>משפט 2.9.1</u>: יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש- $a_n \le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

- אם $a_n \to +\infty$ אז $b_n \to +\infty$
- אם $b_n \to -\infty$ אז $a_n \to -\infty$

<u>משפט 2.9.2</u> (**אריתמטיקה של גבולות אינסופיים**): x הוא גבול סופי של סדרה. אזי

$$x+(\pm\infty)=\pm\infty$$
$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)$$
$$x\neq 0 \Rightarrow x\cdot(\pm\infty)=\operatorname{sgn} x\cdot(\pm\infty)$$

נעיר שלא ידוע דבר על המצב $+\infty+(-\infty)$ והן לא על המצב $0\cdot\infty$. למשל:

- $n+(-n)\to 0$ אבל $2n+(-n)\to\infty$ ו- $n+(-2n)\to-\infty$
- $\frac{1}{n}\cdot n\to 1$ אבל $\frac{1}{n^2}\cdot n\to 0$ ו- $\frac{1}{n}\cdot n^2\to\infty$

<u>משפט 2.9.3</u>: אם $0<x_n$ אזי $x_n\to\infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n}\to 0$

<u>מסקנה 2.9.4</u>: אם $x_n\neq 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי

$$\frac{1}{x_n}\to 0 \Leftrightarrow |x_n|\to\infty$$
$$\frac{1}{|x_n|}\to\infty \Leftrightarrow x_n\to 0$$

<u>משפט 2.9.5</u>: אם (x_n) סדרה מונוטונית עולה (יורדת) ואינה חסומה מלמעלה (מלמטה) אז $x_n\to+\infty$ ($x_n\to-\infty$).

<u>משפט 2.9.6</u>: אם $x_n\to\infty$ אזי לכל תת סדרה $x_{n_k}\to\infty$

<u>משפט 2.9.7</u>: לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

<u>הוכחה</u>: תהי סדרה (x_n). הראנו שיש לה תת סדרה מונוטונית. אם היא חסומה אז היא מתכנסת במובן הצר. אחרת יש לה גבול אינסופי. ☺

נשים לב שאם יש לסדרה תת סדרה ששואפת לאינסוף אז כל מה שנוכל להגיד על הסדרה המקורית הוא שהיא אינה חסומה. אך לא בהכרח היא שואפת לאינסוף. למשל הסדרה $(1,0,2,0,3,0,4,0,...)$.

<u>משפט 2.9.8</u>: לכל סדרה שאינה חסומה מלמעלה (למטה) יש סדרה חלקית ששואפת לאינסוף (למינוס אינסוף).

<u>הגדרה</u>: אם $S\subset\mathbb{R}$ אינה חסומה מלמעלה (למטה) נאמר ש- $\sup S=+\infty$ ($\inf S=-\infty$).

<u>הגדרה</u>: אם (x_n) אינה חסומה מלמעלה (למטה) אז $\limsup x_n = +\infty$ ($\liminf x_n = -\infty$).

<u>משפט 2.9.9</u>: $x_n \to l$ אמ"מ $l = \limsup x_n = \liminf x_n$ ו- l כאן על תקן גבול במובן הרחב.

<u>הוכחה</u>: את המקרה ש- $l \in \mathbb{R}$ סופי כבר ראינו. אחרת:

($\Leftarrow$) אם $x_n \to +\infty$ אז $\{x_n\}$ אינה חסומה ולכן לפי הגדרה $\limsup x_n = +\infty$. נראה ש- $\liminf x_n = +\infty$.

$x_n \to +\infty$ ולכן $i_n \to +\infty$ ואז $\liminf x_n = \lim i_n = +\infty$.

($\Rightarrow$) אם $\liminf x_n = +\infty$ אז $\lim i_n = +\infty$ ואז $x_n \to \infty$. ☺

3. טורים

3.1. הגדרת הטור

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) נגדיר את **סדרת הסכומים החלקיים** שלה (s_n) באופן הבא: $s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$.

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) סדרה ו- (s_n) סדרת הסכומים החלקיים שלה. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נקרא **הטור המתאים** לסדרה ו- a_n הוא **האיבר ה-** n**-י** של הטור. אם (s_n) מתכנסת ל- s נאמר ש- (a_n) **סכימה** ונרשום $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s$. אם (s_n) מתבדרת נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **מתבדר**.

<u>דוגמאות</u>:

1. הטור ההנדסי $a_n=q^n$. ידוע ש- $s_n=\sum_{i=0}^{n}a_i=\frac{1-q^n}{1-q}$. כעת יש כמה אפשרויות:

1.1. $q=0$ אז $a_n\equiv 0$ וברור ש- $s_n\equiv 0\to 0$. לכן $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=0$.

1.2. $q\neq 0$. גם כאן יש כמה אפשרויות:

1.2.1. $|q|<1$ אז ראינו כבר ש- $q^n\to 0$ וכעת לפי אריתמטיקה של גבולות $s_n\to\frac{1}{1-q}$ כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-q}$.

1.2.2. $q=1$. אז $a_n=1$ ו- $s_n=n+1$ וברור שהטור מתבדר.

1.2.3. $1<q$ וראינו שבמקרה זה $q^n\to\infty$. לכן $s_n\to\infty$ והטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר.

1.2.4. $q\le -1$ במקרה זה הטור מתנדנד. ובפרט במקרה ש- $a_n=(-1)^n$ נקבל $s_n=\begin{cases}-1 & n\text{ is odd}\\ 0 & n\text{ is even}\end{cases}$ שזו סדרה שכמובן אינה מתכנסת.

2. $a_n=n$. אז אנחנו יודעים שסדרת הסכומים החלקיים היא $s_n=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n-1)}{2}$ והיא מתבדרת כמובן. לכן $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\infty$.

3. הטור הטלסקופי $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. נשים לב ש- $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. ואז

$$s_n=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

4. הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר!

5. ניתן להוכיח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אמ"מ $1<p$.

נשים לב שלפעמים התחלנו לסכום מ- 0 ולפעמים מ- 1. זה בכלל לא משנה וברור שאיבר אחד לא משפיע על התכנסות או התבדרות של טור ובו אינסוף איברים. במקרה של התכנסות זה רק מוסיף קבוע לסכום הסופי.

3.2. תנאי הכרחי להתכנסות

<u>משפט 3.2.1</u> (**הקריטריון של קושי**): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n<m$ מתקיים $\left|a_{n+1}+...+a_m\right|<\varepsilon$.

ההוכחה היא ישירה ומסתמכת על קריטריון קושי להתכנסות של סדרות כאשר מפעילים אותו על סדרת הסכומים החלקיים של (a_n).

<u>משפט 3.2.2</u>: אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $a_n\to 0$.

<u>הערה</u>: זהו רק תנאי הכרחי אך הוא לא מספיק כלל וכלל. למשל $\frac{1}{n}\to 0$ אבל הטור ההרמוני מתבדר!!

<u>הוכחה א'</u>: יהי $0<\varepsilon$. לפי תנאי קושי יהי N כך שאם $N<n<m$ אזי $\left|a_{n+1}+...+a_m\right|<\varepsilon$. נבחר $N<n$ ו- $N<m=n+1$. אז $\left|a_{n+1}\right|<\varepsilon$ כלומר $a_{n+1}\to 0$ אבל מכאן ברור ש- $a_n\to 0$. ☺

<u>הוכחה ב'</u>: אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז סדרת הסכומים החלקיים (s_n) מתכנסת. נניח $s_n\to s$. אבל קל לראות ש- $a_{n+1}=s_{n+1}-s_n$ וכעת לפי אריתמטיקה של גבולות $a_{n+1}\to s-s=0$ ולכן $a_n\to 0$. ☺

<u>טענה 3.2.3</u>: תהי (a_n) סדרה חיובית יורדת כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. אזי $na_n\to 0$.

<u>הוכחה</u>: הסדרה יורדת ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $na_n\le a_1+...+a_n$. כעת יהי $m<n$ אזי באותו אופן $ma_n\le a_1+...+a_m$. אזי $(n-m)a_n\le s_n-s_m$. כלומר $na_n\le s_n-s_m+ma_n$. בהינתן $0<\varepsilon$ יהיו $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ אשר מבטיחים לפי קריטריון קושי ש- $\left|s_n-s_m\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ אם $N_1<n,m$ ו- $ma_n<\frac{\varepsilon}{2}$ אם $N_2<n$. אזי עבור כל $N_1,N_2<n$ נקבל $na_n<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. ☺

3.3. טורים חיוביים

<u>הגדרה</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור. נאמר ש- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ מתכנס.

<u>משפט 3.3.1</u>: אם $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>הערה</u>: חשוב לשים לב שלא מדובר פה בשקילות. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אין הדבר אומר שהטור גם מתכנס בהחלט. למשל, לא הוכחנו את זה עדיין אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ מתכנס ואילו הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right|$ מתבדר.

<u>הוכחה</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \le m$ מתקיים $\left| |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| \right| = |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$. אבל אז $|a_{n+1} + \ldots + a_m| \overset{TI}{\le} |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$. כלומר מתקיים קריטריון קושי להתכנסות עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ולכן הטור מתכנס. ☺

<u>הגדרה</u>: נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי אם מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ ש- $0 < a_n$.

ברור שסדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא סדרה מונוטונית עולה. אם נזכור שסדרה מונוטונית עולה וחסומה היא מתכנסת נקבל שאם סדרת הסכומים החלקיים של טור חיובי היא חסומה, אזי הטור מתכנס.

<u>*משפט* 3.3.2</u> (**מבחן ההשוואה**[14]): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ טורים חיוביים. אזי:

1. אם $a_n \le c_n$ כמעט תמיד ו- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $d_n \le a_n$ כמעט תמיד ו- $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

<u>הוכחה</u>:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מקיים את תנאי קושי להתכנסות. יהי $\varepsilon > 0$. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \le m$ מתקיים $c_{n+1} + \ldots + c_m = |c_{n+1} + \ldots + c_m| < \varepsilon$. בה"כ N זה גם גדול מאותו N' שהחל ממנו $a_n \le c_n$. אזי $|a_{n+1} + \ldots + a_m| = a_{n+1} + \ldots + a_m \le c_{n+1} + \ldots + c_m < \varepsilon$. ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. נניח בשלילה ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אבל אז לפי סעיף (1) גם $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ מתכנס. בסתירה לנתון. ☺

<u>*טענה* 3.3.3</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אמ"מ $1 < p$.

<u>הוכחה</u>: זהו טור חיובי. נראה שסדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה במקרה ש- $1 < p$. מספיק להראות ש- $s_{2^k - 1}$ חסומה שהרי בהינתן $n \in \mathbb{N}$ תמיד ניתן למצוא k כך ש- $n < 2^k - 1$. נניח אם כן ש- $1 < p$ ונסתכל על סדרת הסכומים החלקיים:

---

[14] Comparison Test

$$s_{2^1-1}=s_1=\frac{1}{1^p}\le 1$$
$$s_{2^2-1}=s_3=\frac{1}{1^p}+\overbrace{\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}}\le 1+\frac{2}{2^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}$$
$$s_{2^3-1}=s_7=\frac{1}{1^p}+\overbrace{\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}}+\overbrace{\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}}\le 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^2}$$
$$\vdots$$
$$s_{2^k-1}=\sum_{n=1}^{2^k-1}\frac{1}{n^p}\le 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\ldots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}$$

את אי השוויון האחרון ניתן להוכיח באינדוקציה. כעת ניתן לזהות שם סדרה הנדסית עם $q=\frac{1}{2^{p-1}}$, $q=\frac{1}{2^{p-1}}<1 \Leftarrow p>1$ ולכן היא מתכנסת. אזי

$$s_{2^k-1}=\sum_{n=1}^{2^k-1}\frac{1}{n^p}\le 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\ldots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}<\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{i-1}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}.$$

כלומר קיבלנו שסדרת הסכומים החלקיים חסומה ולכן מתכנסת.

כעת עבור $p\le 1$ מתקיים $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתבדר. ☺

<u>משפט 3.3.4</u> (**מבחן ההשוואה הגבולי**): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ טורים חיוביים ממש. אזי:

1. אם $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
2. אם $0=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u>

1. אם $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ אז קיימים $0<\alpha<\beta$ כך ש- $0<\alpha<\frac{a_n}{c_n}<\beta$ כמעט תמיד. אזי $\alpha c_n<a_n<\beta c_n$. כעת אם $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\beta c_n$ מתכנס (נוכיח את זה עוד מעט) ולכן לפי מבחן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. מצד שני, אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אזי לפי משבן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha c_n$ מתכנס ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס.
2. נניח $0=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$. יהי $\varepsilon=1$. אזי כמעט תמיד מתקיים $0<\frac{a_n}{c_n}=\left|\frac{a_n}{c_n}\right|<1$. כלומר $0<a_n<c_n$. לכן לפי מבחן ההשוואה אם $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. ☺

<u>משפט 3.3.5</u> (**מבחן המנה**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי. ויהיו $u=\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n},l=\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}$. אזי:

1. אם $u<1$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס
2. אם $1<l$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

<u>הוכחה:</u>

1. יהי $u<q<1$. אזי $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ כמעט תמיד. לכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$. אזי

$$a_{N+1} < a_N q$$
$$a_{N+1}+\ldots+a_{N+m} < a_N\sum_{i=1}^{m} q^i < a_N\sum_{i=1}^{\infty} q^i \quad \text{ולכן} \quad a_{N+2} < a_{N+1}q < a_N q^2$$
$$\vdots$$
$$a_{N+m} \le a_N q^m$$

אבל זה טור הנדסי מתכנס. לכן, סדרת הסכומים החלקיים של (a_n) חסומה ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. יהי $1<\alpha<l$. אזי $\alpha < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ כמעט תמיד. כלומר $0<\alpha a_n < a_{n+1}$ כמעט תמיד ולכן לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות ש- $a_n \to 0$. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. ☺

נשים לב שמבחן המנה לא נותן לנו הכרעה כאשר הגבולות החלקיים הם 1. למשל:

- אם $a_n=\frac{1}{n}$ אז $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
- אבל אם $a_n=\frac{1}{n^2}$ אז $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ אבל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>משפט 3.3.6</u> (**מבחן השורש**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. ויהי $u=\limsup\sqrt[n]{a_n}$. אזי:

1. אם $u<1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס
2. אם $1<u$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

<u>הוכחה</u>:

1. יהי $0\le u<q<1$. אז $\sqrt[n]{a_n}<q$ כמעט תמיד. ולכן $a_n<q^n$ כמעט תמיד. כעת לפי מבחן ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. יהי $1<\alpha<u$. אז $\alpha<\sqrt[n]{a_n}$ שכיח. לכן $1<\alpha^n<a$ שכיח ולכן לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות של טורים ומכאן ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. ☺

<u>משפט 3.3.7</u> (**מבחן העיבוי**): תהי (a_n) חיובית מונוטונית יורדת. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>: נסמן

$$s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$$
$$t_k = a_1+2a_2+4a_4+\ldots+2^k a_{2^k}$$

אם $n<2^k$ אז $s_n \le a_1+(a_2+a_3)+\ldots+\left(a_{2^k}+\ldots+a_{2^{k+1}-1}\right)\le a_1+2a_2+\ldots+2^k a_{2^k}=t_k$.

אם $2^{k+1}<n$ $s_n \ge a_1+a_2+(a_3+a_4)+\ldots+\left(a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}\right)\ge \frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+4a_8+\ldots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}t_k$.

לסיכום, קיבלנו $\begin{cases} n<2^k & 0\le s_n\le t_k \\ 2^{k+1}<n & 0\le t_k\le 2s_n \end{cases}$.

לכן אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז (s_n) חסומה ולכן (t_k) חסומה ו- $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

ואילו אם $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס אז (t_k) חסומה ולכן (s_n) חסומה ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ☺

<u>משפט 3.3.8</u> (**מבחן רבה**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי כך שקיימים $1<\alpha$ ו- $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\ge\alpha$. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>דוגמאות:</u>

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{\left(2^n\right)^p}$ מתכנס. נסמן $q=\frac{1}{2^{p-1}}$ ונקבל שבעצם יש לבדוק מתי $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ מתכנס. אבל זה קורה אמ"מ $0<q<1$ כלומר $1<2^{p-1}$ כלומר $0<p-1$ או $1<p$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אמ"מ $1<p$. וזה גם מה שקיבלנו קודם בקצת יותר מאמץ...
2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\ln 2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}$ מתכנס אבל טור זה מתבדר כי הוא בעצם הטור ההרמוני.
3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ מתכנס אמ"מ מתכנס $\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\left(\ln 2^n\right)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(n\ln 2\right)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln 2\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}$ וטור זה מתכנס.

3.4. על שאריות וזנבות

<u>הגדרה:</u> יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. הטור $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ ייקרא ה- m**-זנב** שלו. נסמן את $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ ע"י r_m.

<u>אזהרה:</u> זה **לא** ה- m-זנב של סדרת הסכומים החלקיים!! סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ היא $s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$ ואילו סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ היא $t_n=\sum_{i=m+1}^{m+n}a_i$. נשים לב שמתקיים $t_n=s_{m+n}-s_m$.

<u>משפט 3.4.1</u>:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ל- S אזי $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ מתכנס לכל $m\in\mathbb{N}$ ומתקיים $s_m+r_m=S$.
2. אם קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ל- S ומתקיים $s_m+r_m=S$.

<u>הוכחה:</u>

1. נשתמש בסימונים מקודם. $t_n=s_{m+k}-s_m$. נתון ש- $s_n\to S$. אזי $s_{m+k}\to S$ ואז $t_k\to S-s_m=r_m$.
2. מאריתמטיקה של גבולות $s_{m+k}=t_k+s_m\to r_m+s_m$. לכן $s_{m+k}\to S$. ☺

3.5. טורים עם סימנים מתחלפים

משפט 3.5.1 (**משפט לייבניץ**): תהי (x_n) חיובית ממש, מונוטונית יורדת ממש ומתכנסת לאפס. אזי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ מתכנס. לסכום s שמקיים $0<s<x_1$.

הוכחה: נגדיר שתי סדרות חדשות (a_n) ו-(b_n) באופן הבא:

$$\begin{aligned}
&a_1 = s_2 = x_1 - x_2 && b_1 = s_1 = x_1\\
&a_2 = s_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 && b_2 = s_3 = x_1 - x_2 + x_3\\
&\vdots && \vdots\\
&a_n = s_{2n} && b_n = s_{2n-1}
\end{aligned}$$

נטען שהסדרות החדשות עומדות בתנאים של הלמה של קנטור.

נראה ש-(a_n) מונוטונית עולה:

$$\begin{aligned}
a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow 0 < a_{n+1} - a_n\\
&\Leftrightarrow 0 < s_{2n+2} - s_{2n}\\
&\Leftrightarrow 0 < s_{2n} + x_{2n+1} - x_{2n+2} - s_{2n}\\
&\Leftrightarrow 0 < x_{2n+1} - x_{2n+2}\\
&\Leftrightarrow x_{2n+2} < x_{2n+1}
\end{aligned}$$

והרי אי השוויון האחרון נכון כי הסדרה (x_n) יורדת.

באופן דומה נראה כי (b_n) יורדת:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} < b_n &\Leftrightarrow 0 < b_n - b_{n+1}\\
&\Leftrightarrow 0 < s_{2n-1} - s_{2n+1}\\
&\Leftrightarrow 0 < s_{2n-1} - s_{2n-1} + x_{2n} - x_{2n+1}\\
&\Leftrightarrow 0 < x_{2n} - x_{2n+1}\\
&\Leftrightarrow x_{2n+1} < x_{2n}
\end{aligned}$$

והרי זה נכון כי (x_n) יורדת.

כעת נראה ש-$a_n<b_n$:

$$\begin{aligned}
a_n < b_n &\Leftrightarrow 0 < b_n - a_n\\
&\Leftrightarrow 0 < s_{2n-1} - s_{2n}\\
&\Leftrightarrow 0 < s_{2n-1} - s_{2n-1} + x_{2n}\\
&\Leftrightarrow 0 < x_{2n}
\end{aligned}$$

וזה נכון שהרי (x_n) סדרה חיובית.

יתר על כן $b_n-a_n=x_{2n}\to 0$ ולכן לפי משפט קנטור קיים $0<x_1-x_2=a_1<s<b_1=x_1$ אחד ויחיד אשר מקיים $a_n\to s$ וגם $b_n\to s$. יהי $0<\varepsilon$. אזי כמעט תמיד מתקיים $|s_{2n}-s|<\varepsilon$ וגם $|s_{2n-1}-s|<\varepsilon$. לכן מתקיים כמעט תמיד $|s_n-s|<\varepsilon$. ☺

מסקנה 3.5.2: בתנאי משפט לייבניץ, ה-m זנב של הטור $\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=r_m$ מתכנס ומתקיים $|r_m|<a_{m+1}$ ו-$0<(-1)^m r_m$.

3.6. אריתמטיקה של טורים

נביא כמה טענות טריוויאליות ללא הוכחה:

משפט 3.6.1 (**אריתמטיקה של טורים**): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים. אזי

1. חיוביות: אם $0 \le a_n$ אז $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. מונוטוניות: אם $a_n \le b_n$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
3. לינאריות:
   - 3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$
   - 3.2. $k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (ka_n)$

3.7. טורים עם איברים כלליים

משפט 3.7.1 (**הלמה של אבל**): יהיו סדרות $(a_n),(b_n)$ ו- $1 < m < n$. אזי

$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m - \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1}$ כאשר $B_k = \sum_{i=1}^{k-1} b_i$.

הוכחה: בהינתן סדרה (c_k) נגדיר $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$. תחת סימון זה נקבל $\Delta B_k = B_{k+1} - B_k = b_k$ ו- $\Delta(a_k B_k) = a_{k+1}B_{k+1} - a_k B_k = (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} + (B_{k+1} - B_k) a_k = (a_{k+1} - a_k) B_{k+1} + b_k a_k$.

לכן $\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1}B_{k+1} - a_k B_k) = \sum_{k=m}^{n} ((a_{k+1} - a_k) B_{k+1} + b_k a_k)$. כעת נסכם ונקבל:

$$\left.\begin{array}{l}
\cancel{a_{m+1}B_{m+1}} - a_m B_m \\
\cancel{a_{m+2}B_{m+1}} - \cancel{a_{m+1}B_{m+1}} \\
\cancel{a_{m+3}B_{m+1}} - \cancel{a_{m+2}B_{m+2}} \\
\vdots \\
\cancel{a_n B_n} - \cancel{a_{n-1}B_{n-1}} \\
a_{n+1}B_{n+1} - \cancel{a_n B_n}
\end{array}\right\} = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m$$

כלומר $a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m = \sum_{k=m}^{n} ((a_{k+1} - a_k) B_{k+1} + b_k a_k)$ או $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m - \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1}$.

☺

משפט 3.7.2 (**קריטריון דיריכלה**): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חסום ו- (a_n) סדרה חיובית מונוטונית שואפת לאפס.

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>: נסמן $B_n=\sum_{i=1}^{n-1}b_i$. יהי $M\in\mathbb{R}$ כך ש- $|B_n|\le M$ לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים כזה שהרי הטור חסום). יהי $0<\varepsilon$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $|a_n|=a_n<\frac{\varepsilon}{2M}$ לכל $N<n$. אזי לכל $N<m<n$ יתקיים לפי הלמה של אבל ואי שוויון המשולש $\left|\sum_{k=m}^{n}a_kb_k\right|\le M\left(|a_{n+1}|+|a_m|+\left|\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)\right|\right)\le 2Ma_m<2M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$. ☺

<u>דוגמה</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\alpha$ עבור $0<\alpha<2\pi$: $\sum_{n=1}^{N}\cos n\alpha=\left|\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right|\le\frac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. לכן לפי קריטריון דיריכלה הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}$ מתכנס.

<u>מסקנה 3.7.3</u> (**קריטריון אבל**): אם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס ו- (a_n) מונוטונית וחסומה אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>: אם (a_n) מונוטונית וחסומה אז היא מתכנסת. נניח ש- $a_n\to a$. אזי $a_n-a\to 0$. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס ולכן חסום. לפי קריטריון דיריכלה $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n$ מתכנס. אבל $a_nb_n=(a_n-a)b_n+ab_n$. לכן לפי אריתמטיקה של טורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. ותהי (n_k) סדרה מונוטונית עולה ממש של טבעיים ו- $n_0=1$. נגדיר $b_k=\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i$. נאמר ש- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ התקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ע"י **הכנסת סוגריים**.

<u>משפט 3.7.4</u> (**חוק הצירוף**): אם טור מתכנס וסכומו S אזי לאותו סכום יתכנס כל טור שמתקבל מהראשון ע"י הכנסת סוגריים.

<u>הוכחה</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$ ויהי $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור שהתקבל ע"י הכנסת סוגריים. נסמן את סדרת הסכומים החלקיים שלו $t_k=\sum_{n=1}^{k}b_n$. נשים לב ש- $t_k=b_1+...+b_k=a_1+...+a_{n_k}=s_{n_k}$. (n_k) עולה ממש ולכן (s_{n_k}) סדרה חלקית של (s_n). הנחנו ש- (s_n) מתכנסת ל- S אבל כל תת סדרה שלה גם היא מתכנסת לאותו גבול. כלומר $t_k=s_{n_k}\to S$. כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=S$. ☺

<u>משפט 3.7.5</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור מתכנס שהתקבל מטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ע"י הכנסת סוגריים כך שכל האיברים בתוך הסוגריים בעלי אותו סימן. אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ולאותו סכום כמו $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

<u>הוכחה</u>: נסמן ע"י s_n ו- $\tilde{s}_n$ את הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ושל $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ בהתאמה. היות וסימני האיברים בכל סוגריים זהים, נקבל שעבור n בין המספרים n_{k-1} ו- n_k , s_n תהיה מונוטונית ולכן נמצאת בין $s_{n_k-1}=\tilde{s}_{k-1}$ ו- $s_{n_k}=\tilde{s}_k$. כלומר לכל $0<\varepsilon$ קיים N_0 כך שלכל $N_0<k$ מתקיים $|\tilde{s}_k-\tilde{s}|<\varepsilon$ ו- $|s_{n_k-1}-\tilde{s}|=|s_{k-1}-\tilde{s}|<\varepsilon$. לכן $|s_n-\tilde{s}|<\varepsilon$ כלומר $s_n\to\tilde{s}$. ☺

<u>הגדרה</u>: נאמר שהסדרה (b_n) מתקבלת ע"י **שינוי סדר** בסדרה (a_n) אם קיימת $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל כך ש- $b_n = a_{p(n)}$.

<u>משפט 3.8.6</u> (**חוק החילוף**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס. אם (b_n) התקבלה ע"י שינוי סדר של (a_n) אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>הוכחה</u>: תהי p תמורה כך ש- $b_n = a_{p(n)}$. בהינתן $n\in\mathbb{N}$ קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $\{p(1),...,p(n)\}\subset\{1,...,k\}$. נסמן $t_n = b_1+...+b_n = a_{p(1)}+...+a_{p(n)}$. אזי $t_n \le s_k \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. קיבלנו ש- (t_k) חסומה ולכן מתכנסת. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נשים לב ש- (a_n) מתקבלת מ- (b_n) ע"י שינוי סדר ע"י התמורה p^{-1} ואז באותות אופן נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ☺

<u>למה 3.8.7</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט. נסמן $P_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}, N_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} P_n, \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ מתכנסים ומתקיים $S=P-N$ כאשר $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n, P=\sum_{n=1}^{\infty} P_n, N=\sum_{n=1}^{\infty} N_n$. ולהפך, אם $\sum_{n=1}^{\infty} P_n, \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ מתכנסים אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$ נתון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. נשים לב שאם $0<a_n$ אז $0<P_n=a_n$ ו- $N_n=0$ ואם $a_n<0$ אז $0<N_n=-a_n$ ו- $P_n=0$. בכל אופן $P_n\le|a_n|$ ו- $N_n\le|a_n|$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} P_n, \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ מתכנסים, נניח ל- P,N בהתאמה. נשים לב שמתקיים $a_n = P_n - N_n$. ואז מאריתמטיקה של טורים $S=P-N$.

$(\Rightarrow)$ נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = P, \sum_{n=1}^{\infty} N_n = N$. נשים לב שמתקיים $|a_n| = P_n + N_n$. אזי מאריתמטיקה של טורים מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = P+N$. ☺

<u>משפט 3.8.7</u> (**משפט החילוף**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט. ויהי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור שהתקבל ע"י שינוי סדר של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>הוכחה</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} P_n, \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ שהם טורים חיוביים מתכנסים. נשים לב שמתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n - \sum_{n=1}^{\infty} N_n$. אבל לפי חוק החילוף

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{p(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_{p(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n + \sum_{n=1}^{\infty} N_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ ☺

<u>הגדרה</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

<u>משפט 3.8.8</u> (**משפט רימן**): אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז לכל $s \in \mathbb{R}$ קיים סידור כלשהו לאיברי הטור $b_n = a_{p(n)}$ כך ש- $s = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.8. מכפלה של טורים

איך כופלים טורים? כופלים כל איבר בכל איבר ומסכמים. נוצרת מן טבלה אינסופית כזאת של איברים ונשאלת השאלה איך מסכמים את האיברים שבה.במקרה זה סדר הסכימה משנה. יש שני סדרי סכימה חשובים:

1. בריבועים:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \cdots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$(a_0b_0, a_0b_1, a_1b_1, a_1b_0, a_0b_2, a_1b_2, \ldots)$$

2. באלכסון (סידור קושי):

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \cdots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$(a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_0b_2, a_1b_1, a_2b_0, \ldots)$$

<u>משפט 3.8.1</u>: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים בהחלט עם סכומים a ו- b בהתאמה. נגדיר $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ [15]. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס ל- c ומתקיים $c = ab$.

<u>הוכחה</u>: נסדר את איברי מכפלת הטורים בסדר כלשהו ונקבל $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$. נראה שטור זה מתכנס בהחלט. נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים שלו:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left|a_{i_k} b_{j_k}\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \le ab$$

כלומר סדרת הסכומים החלקיים חסומה ולכן הטור מתכנס בהחלט. לפי חוק החילוף טור המכפלה מתכנס לסכום שאינו תלוי בסדר האיברים ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס לאותו סכום. אם $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ אז לפי אריתמטיקה של גבולות $s_n t_n \to ab$. נשים לב ש $s_n t_n$ הוא סכום חלקי שמתאים לסידור הריבועים. לכן $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = ab$. ☺

[15] זהו סידור קושי

3.9. מספרים עשרוניים

יהיו $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $0 \le a_1, ..., a_n < 10$. מסמנים $a_0.a_1...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} ... + \frac{1_n}{10^n}$. כל מספר ממשי אפשר להציג בצורה הזאת.

יהי $a \in \mathbb{R}$. קיים מספר שלם אחד ויחיד $[a] \in \mathbb{Z}$ אשר מקיים $a_0 \equiv [a] \le a < [a] + 1$. כלומר

$$0 \le a - a_0 < 1$$

$$0 \le 10(a - a_0) < 10$$

קיים $a_1 \in \mathbb{Z}$ אחד ויחיד כך ש- $0 \le a_1 \le 9$ שמקיים $a_1 \le 10(a - a_0) < a_1 + 10$. כלומר

$$\frac{a_1}{10} \le a - a_0 < \frac{a_1}{10} + 1$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \le a < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

$$a_0.a_1 \le a < a_0.a_1 + \frac{1}{10}$$

נמשיך באותו אופן ובכל שלב נקבל $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $0 \le a_1, ..., a_n \le 9$ ו- $a_0.a_1...a_n \le a < a_0.a_1...a_n + \frac{1}{10^n}$.

נמשיך לעשות את זה אינסוף פעמים ונקבל את מה שנקרא **הצגה עשרונית של** a. a הינו הגבול של סדרת הקירובית העשרוניים, כלומר $a = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. הטור הזה מתכנס כי ניתן להשוות אותו עם טור הנדסי עם $q = \frac{1}{10} < 1$ ...

נשים לב שיכול להיות מספר ממשי שיש לו שתי הצגות עשרוניות. אם זה כך אז באחת החל ממקום מסויים יש רק אפסים, ובשנייה החל מאותו מקום יש רק תשעיות. למשל $0.1254699... = 0.01254700...$.

4. הכל אודות e

4.1. הגדרת המספר e

<u>משפט 4.1.1</u> (**אי שוויון הממוצעים**): יהיו $0 \le a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. אזי

$$\overbrace{\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}}^{\text{Harmonic Average}} \le \overbrace{\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}}^{\text{Geometric Average}} \le \overbrace{\frac{a_1+\dots+a_n}{n}}^{\text{Arithmetic Average}}$$

ההוכחה מושארת לקורא כתרגיל והיא גם מופיעה באתר הקורס.

<u>טענה 4.1.2</u>: הסדרה המוגדרת ע"י $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת.

<u>הוכחה</u>: אם נראה ש- (a_n) עולה וחסומה אז לפי משפט 2.5.1 נקבל שהיא מתכנסת.

נראה שהיא עולה: נשתמש באי שוויון הממוצעים. יהיו $a_1=\dots=a_n=1+\frac{1}{n}$ ו- $a_{n+1}=1$. אזי לפי אי שוויון הממוצעים $\sqrt[n+1]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}} \le \frac{a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$, כלומר

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1} \le \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\dots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

נעלה את שני האגפים בחזקת $n+1$ ונקבל את הדרוש: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

נראה שהסדרה חסומה: לשם כך נשתמש בבינום של ניוטון. נפתח את הביטוי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ לפי הנוסחה ונקבל:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \binom{n}{0}\cdot\frac{1}{n^0}+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n^1}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+\dots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}=$$
$$=1+1+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{3!}+\dots+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(n-1)}{n}\cdot\frac{1}{n!}=$$
$$=1+1+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}+\dots+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-(n-1)}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}<$$
$$\underset{1-\frac{k}{n}<1}{<} 1+1+1\cdot1\cdot\frac{1}{2!}+1\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{3!}+\dots+1^n\cdot\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\underset{n!>2^{n-1}}{<}1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$
$$\underset{\sum_{i=0}^{n-1}q^i=\frac{1-q^n}{1-q}}{=} 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

כלומר הסדרה חסומה. יתר על כן, עבור $1<n$ מתקיים $a_1=2<a_n<3$. יש לשים לב שהשתמשנו כאן באי שוויון $n!>2^{n-1}$ אשר קל להוכיח אותו באינדוקציה.

לכן הסדרה מתכנסת. ☺

<u>הגדרה</u>: נסמן $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

עוד נדון במספר e רבות בהמשך.

5. פונקציות ממשיות

5.1. הגדרת מושג הפונקציה

<u>הגדרה</u>: בהינתן שתי קבוצות של עצמים A,B **פונקציה** f מ- A ל- B היא התאמה שמתאימה לכל איבר $a\in A$ איבר אחד ויחיד $b\in B$. נסמן $f:A\to B$ ו- $f(a)=b$. כאשר $A,B\subset\mathbb{R}$ נאמר שזו **פונקציה ממשית**. הקבוצה A נקראת **התחום** של f ואילו הקבוצה B נקראת **הטווח** של f.

<u>הגדרה</u>: **גרף** של פונקציה ממשית $f:A\to B$ הוא הקבוצה $G_f=\{(x,y):x\in A,y\in B,f(x)=y\}\subset\mathbb{R}^2$.

<u>הגדרה</u>: נאמר שפונקציה $f:A\to B$ היא **חד-חד-ערכית** (חח"ע) אם לכל $a,b\in A$ אם $f(a)=f(b)$ אז $a=b$. נאמר שהפונקציה **על** B אם לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.

<u>דוגמאות</u>:
1. כפי שכבר אמרנו כשדיברנו על סדרות, סדרות הן פונקציות ממשיות התחום שלהן הוא המספרים הטבעיים והטווח הוא המספרים הממשיים.
2. הפונקציה הקבועה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $f(x)\equiv c$ עבור איזה $c\in\mathbb{R}$.
3. עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $p_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $p_n(x)=x^n$.
4. עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $r_n(x)=\sqrt[n]{x}$. לא ציינו במפורש את תחום ההגדרה של הפונקציה. מקבול שכאשר הפונקציה נתונה ע"י נוסחה תחום ההגדרה שלה הוא תחום ההגדרה של הנוסחה. במקרה זה, התחום תלוי בזוגיות של n.
5. עבור $a\in\mathbb{R}^+$ נגדיר $\exp_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $\exp_a(x)=a^x$.
6. פונקציית הסימן $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$
7. פונקציית דיריכלה שעוד נדון בה בהמשך $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

5.2. רציפות של פונקציות

<u>הגדרה</u>: קבוצה $U\subset\mathbb{R}$ תיקרא **סביבה** של $a\in\mathbb{R}$ אם קיים קטע פתוח I כך ש- $a\in I\subset U$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f:A\in\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה של $a\in\mathbb{R}$. נאמר ש- f **רציפה** ב- a אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

נשים לב שכדי שהתנאי הזה בכלל יהיה מוגדר צריכים להתקיים כמה תנאים:
1. כדי לכתוב $f(a)$ הפונקציה צריכה להיות מוגדרת ב- a.
2. כדי לכתוב $f(x)$ הפונקציה צריכה להיות מוגדרת ב- x. אז למעשה זו דרישה כפולה:
   2.1. ה- δ צריך להיות מספיק קטן כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת בכל $(a-\delta,a+\delta)$

2.2. וגם מספיק קטן כדי שיתקיים $\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon$
כלומר ה- δ תלוי גם ב- a וגם ב- ε.

דוגמאות:
1. הפונקציה הקבועה רציפה בכל תחום ההגדרה שלה. זה טריוויאלי.
2. נסתכל על $s(x)=x^2$. נטען שהיא רציפה ב- $a=0$. יהי $0<\varepsilon$. נבחר $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ ואז בוודאי שאם $|x|<\delta$ אזי $\left|s(x)-s(0)\right|=\left|x^2\right|<\varepsilon$.
3. נטען ש- $s(x)$ רציפה בכל $a\in\mathbb{R}$. יהי $0<\varepsilon$. יהי $0<\delta<\min\left\{1,\frac{1}{1+2|a|}\right\}$. אזי אם $|x-a|<\delta$ אז $|x-a|<1$ וכן $|x+a|=|x-a+2a|\le|x-a|+2|a|<1+2|a|$ ואז נקבל את הדרוש:
$$\left|x^2-a^2\right|=|x-a||x+a|<\left(1+2|a|\right)|x-a|<\varepsilon$$
4. פונקצית הזהות $Id(x)=x$ רציפה לכל $a\in\mathbb{R}$. לכל $0<\varepsilon$ נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז אם $|x-a|<\delta=\varepsilon$ אז כמובן $\left|Id(x)-Id(a)\right|=|x-a|<\varepsilon$.

מה זה אומר ש- f אינה רציפה ב- a? נכתוב על השלילה של ההגדרה:
$$\exists\varepsilon>0\ \ \forall\delta>0\ \ |x-a|<\delta\wedge\left|f(x)-f(a)\right|\ge\varepsilon$$

דוגמה: נסתכל על הפונקציה $g(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & 0<x\end{cases}$. אינטואיטיבית זה די ברור שהיא אינה רציפה ב- $a=0$.
יהי $\varepsilon=1$. אזי לכל $0<\delta$ אם $0<x<\delta$ אז $g(x)=1$ ואז $g(x)-g(0)=1-0\ge 1=\varepsilon$.

נשים לב שאם בתחום ההגדרה של הפונקציה יש נקודות מבודדות אז הפונקציה תמיד רציפה בהן. שהרי לא נוכל למצוא סביבה שבה לא יתקיים התנאי של הרציפות.

5.3. גבול של פונקציה בנקודה

הגדרה: קבוצה אשר מכילה קטע פתוח שמכיל את a אך לא מכילה את a עצמה תיקרא **סביבה מנוקבת** של a.

הגדרה (**הגדרת הגבול לפי קושי**): תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. $l\in\mathbb{R}$ ייקרא **גבול** של f ב- a אם מתקיים התנאי הבא:
$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$$
במקרה זה מסמנים $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

משפט 5.3.1: אם קיים הגבול של f ב- a אזי הוא יחיד.

דוגמה: נסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. כפי שכבר ציינו, כאשר הפונקציה נתונה ע"י נוסחה התחום שלה הוא התחום שבו מוגדרת הנוסחה. לכן $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

נראה ש- $\lim_{x\to1} f(x)=2$. יהי $0<\varepsilon$. נבחר $\delta=\varepsilon$. אזי אם $0<|x-1|<\delta$ אז $|f(x)-2|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$. כעת נוכל להרחיב את ההגדרה של $f(x)$ לפונקציה רציפה ב- 2 ומוגדרת על כל הישר: $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$.

<u>משפט 5.3.2</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a. אזי f רציפה ב- a אמ"מ $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$.

<u>הגדרה</u> (**הגדרת הגבול לפי היינה**): תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. $l\in\mathbb{R}$ ייקרא **גבול** של f ב- a אמ"מ לכל סדרה שמקיימת התנאים:

1. $x_n\in D_f$
2. $x_n\neq a$
3. $x_n\to a$

מתקיים $f(x_n)\to l$. במקרה זה מסמנים $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

<u>משפט 5.3.3</u>: הגדרת הגבול לפי קושי שקולה להגדרת הגבול לפי היינה.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- $\lim_{x\to a} f(x)=l$ לפי קושי. אזי לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל x שמקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-l|<\varepsilon$. כעת תהי סדרה (x_n) אשר מקיימת את כל התנאים הנחוצים. יהי $0<\varepsilon$ ויהי אותו $0<\delta$ שמתאים לו לפי הגדרת הגבול של קושי. אזי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|x_n-a|<\delta$. אבל $a\neq x_n\in D_f$ ולכן $|f(x_n)-l|<\varepsilon$. כלומר $f(x_n)\to l$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $\lim_{x\to a} f(x)=l$ לפי הגדרת היינה. ונניח שלא מתקיים התנאי מהגדרת קושי של הגבול. אזי קיים $0<\varepsilon$ כך שלכל $0<\delta$ קיים x כך ש- $0<|x-a|<\delta$ וגם $|f(x)-l|\geq\varepsilon$*. עבור ε זה נבחר סדרה של δ-ות כך $\delta_n=\frac{1}{n}$ ונבנה סדרה (x_n) באופן הבא: לכל δ_n נתאים x_n לפי (*) כך ש- $0<|x_n-a|<\delta_n$[16] וגם $|f(x_n)-l|\geq\varepsilon$. אבל לפי משפט ה- $x_n\to a$, כלומר (x_n) מקיימת את תנאי הגדרת הגבול של היינה אבל $f(x_n)\not\to l$. ☺

<u>משפט 5.3.4</u> (**קריטריון קושי**): $\lim_{x\to a} f(x)=l$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל x,y שמקיימים $0<|x-a|<\delta, 0<|y-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- $\lim_{x\to a} f(x)=l$. אזי בהינתן $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל x אם $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ ולכל y אם $0<|y-a|<\delta$ אז $|f(y)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$. אזי עבור אותו ε ואותו δ אם $0<|x-a|<\delta, 0<|y-a|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-l|+|f(y)-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

($\Rightarrow$) נניח שקריטריון קושי מתקיים. נסתכל בסדרה (x_n) עם התכונות הבאות:

1. $x_n\in D_f$
2. $x_n\neq a$
3. $x_n\to a$

---

[16] למעשה צריך להקפיד פה ש- (δ_n) תהייה קטנה מספיק כדי שעדיין נהיה בתוך תחום ההגדרה אבל זה לא בעיה כי ניתן להקטין אותן כמה שצריך.

ברור שקיימת סדרה כזאת שכן הפונקציה מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. כעת נסתכל על $(f(x_n))$. נראה שזו סדרת קושי. יהי $0<\varepsilon$ ויהי $0<\delta$ שמתאים לו לפי תנאי המשפט. משום ש- $x_n \to a$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $0<|x_n-a|<\delta$. כעת אם $N<n,m$ אז $0<|x_n-a|<\delta, 0<|x_m-a|<\delta$. לכן לפי קריטריון קושי $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. קיבלנו ש- $(f(x_n))$ סדרת קושי ולכן מתכנסת, נניח $f(x_n)\to l$. נראה ש- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. יהי $0<\varepsilon$. קיים $N'\in\mathbb{N}$ כדש לכל $N'<n$ מתקיים $|f(x_n)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$. יהי $0<\delta$ המתאים ל- ε לפי קריטריון קושי. $x_n\to a$ ולכן קיים $N''\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N''<n$ מתקיים $0<|x_n-a|<\delta$ ואז לפי הקריטריון $|f(x)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$. יהי $N=\max\{N',N''\}$ ויהי $N<n$ קבוע. יהי $x\in D_f$ כך ש- $0<|x-a|<\delta$. אזי $|f(x)-l|\le|f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. ☺

<u>משפט 5.3.5</u>: אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\neq 0$ אזי לכל $q<l$ קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $q<f(x)$.

<u>הוכחה</u>: יהי $q<l$. נתבונן ב- $0<\varepsilon=l-q$. קיים $0<\delta$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-l|<\varepsilon$. כלומר $q=l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon=2l-q$. ☺

5.4. פעולות עם פונקציות

ע"י שימוש בהגדרת הגבול של היינה נין מיידית לקבל כמה תוצאות עבור פונקציות בהסתמך על מה שכבר הוכחנו עבור סדרות.

<u>משפט 5.4.1</u> (**אריתמטיקה של גבולות**): נניח שקיימים $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x)$. אזי:

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. אם $g(x)\neq 0$ ו- $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ אזי $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

<u>משפט 5.4.2</u> (<u>משפט ה-🥪</u>): יהיו $f(x),g(x),h(x)$ פונקציות כך ש- $f(x)\le g(x)\le h(x)$ בסביבה מנוקבת כלשהי של a. אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ אזי $l=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

<u>משפט 5.4.3</u> (**כלל ההצבה**): אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$
2. קיימת סביבת מנוקבת של a כך ש- $g(x)\neq b$
3. $\lim\limits_{x\to b} f(x)=l$

אז $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=l$

<u>הוכחה</u>: יהי $0<\varepsilon$. לפי תנאי (3) קיים $0<\gamma$ כך שלכל y אם $0<|y-b|<\gamma$ אז $|f(y)-l|<\varepsilon$. לפי תנאי (2) יהי $0<\delta_1$ כך שלכל x כך ש- $0<|x-a|<\delta_1$ מתקיים $g(x)\neq b$. עבור γ לפי תנאי (1) קיים $0<\delta_2$ כך שלכל x אם $0<|x-a|<\delta_2$ אז $|g(x)-b|<\gamma$. כעת יהי $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. אזי לכל x אם $0<|x-a|<\delta$ אז $0<|g(x)-b|<\gamma$ ולכן $|f(g(x))-l|<\varepsilon$. כלומר $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=l$. ☺

5.5. גבולות חד צדדיים

הגדרה: תהי $a\in\mathbb{R}$. **סביבה ימנית מנוקבת** של a היא קטע מהצורה $(a,a+\delta)$. **סביבה שמאלית מנוקבת** של a היא קטע מהצורה $(a-\delta,a)$ עבור $0<\delta$ כלשהו.

הגדרה: $l\in\mathbb{R}$ הוא **הגבול מימין של** f **כאשר** a **שואף ל-** a **מימין** אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ 0<x-a<\delta\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$$

במקרה זה מסמנים $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$.

$l\in\mathbb{R}$ הוא **הגבול משמאל של** f **כאשר** a **שואף ל-** a **משמאל** אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ 0<a-x<\delta\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$$

במקרה זה מסמנים $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$.

דוגמה: נסתכל על הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & 0<x\end{cases}$. די ברור כאן ש- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$.

משפט 5.5.1: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$ אמ"מ לכל (x_n) שמקיימת:

1. $x_n\in D_f$
2. $a<x_n$
3. $x_n\to a$

מתקיים $f(x_n)\to l$.

ההוכחה כאן טריוויאלית כי בעצם כבר הוכחנו מקרה כללי יותר. באותו האופן מנוסח המשפט למקרה של גבול שמאלי.

משפט 5.5.2: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקדת של a. אזי $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ אמ"מ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

משפט 5.5.3: תהי f מוגדרת בסביבה (לא מנוקדת) של a. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל x אם $|x-a|<\delta$ אז $\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon$
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$
3. לכל (x_n) כך ש- $x_n\to a$ מתקיים $f(x_n)\to f(a)$

הגדרה: נאמר ש- f **רציפה מימין ב-** a אם $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$.

משפט 5.5.4: f רציפה ב- a אמ"מ f רציפה ב- a גם מימין וגם משמאל.

5.6. רציפות בקטע

<u>הגדרה</u>: פונקציה f תיקרא **רציפה בקטע** $A\subset D_f$ אם f רציפה ב-a לכל $a\in A$. f תיקרא **רציפה** אם f רציפה ב-D_f.

<u>משפט 5.6.1</u> (**משפט האפסים של ויירשטראס**): תהי f רציפה בקטע I ויהיו $a,b\in I$. אם $f(a)\cdot f(b)<0$ אזי קיים $c\in I$ בין a לבין b כך ש-$f(c)=0$.

<u>הוכחה</u>: בה"כ $a<b$ ו-$f(a)<0<f(b)$. נפעל בצורה רקורסיבית. יהיו $a_0=a,b_0=b$. נסתכל ב-$f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$. אם $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)=0$ סיימנו. כעת נניח שהגדרנו $a_0\le a_1\le\ldots\le a_n\le b_n\le\ldots\le b_1\le b_0$. נסתכל על $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$. אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ סיימנו. אחרת $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\neq 0$. אם $0<f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ נגדיר $a_{n+1}=a_n,b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$. אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0$ נגדיר $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=b_n$. אם התהליך לא נפסק נעמוד בתנאי הלמה של קנטור, שכן $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$. יהי $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$a_n\le c\le b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. לפי הלמה של קנטור $a_n\to c,b_n\to c$. בגלל הרציפות של f $f(a_n)\to f(c),f(b_n)\to f(c)$. אבל $f(a_n)<0$ ולכן $f(c)\le 0$ ואילו $0<f(b_n)$ ולכן $0\le f(c)$. לכן $f(c)=0$. ☺

<u>מסקנה 5.6.2</u> (**משפט ערך הביניים**): תהי f רציפה בקטע I. אזי $J=f(I)$ הינו קטע.

<u>הוכחה</u>: יש להראות שלכל $c,d\in J$ ולכל $c<y<d$ קיים $x\in I$ כך ש-$f(x)=y$.

יהיו $c,d\in J$ ונניח בה"כ $c<d$. אזי קיימים $a,b\in I$ כך ש-$c=f(a),d=f(b)$. בה"כ נניח ש-$a<b$.

יהי $c<y<d$. ותהי $g=f-y$. g רציפה ב-I כי היא הפרש של פונקציות רציפות וכן היא מקיימת $g(a)=f(a)-y<0,g(b)=f(b)-y>0$. לפי משפט האפסים של ויירשטראס קיים $x\in I$ כך ש-$f(x)-y=g(x)=0$. לכן $f(x)=y$. ☺

הגדרה: בהינתן $f:D_f\to\mathbb{R}$ נאמר ש-f חסומה ב-$A\subset D_f$ אם $f(A)$ קבוצה חסומה.

<u>משפט 5.6.3</u> (**משפט החסימות**): תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי f חסומה ב-$[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: נתבונן ב-$S\subset[a,b]$ המוגדרת ע"י $S=\{x\in[a,b]: f \text{ is bounded in } [a,x]\}$. ברור ש-$a\in S$ ולכן $S\neq\varnothing$. לכן קיים $c=\sup S$. נטען ש-$c=b$, ויתר על כן $b\in S$.

למה: אם קיים $\lim_{x\to c}f(x)=l$ אזי קיימת סביבה מנוקבת של c שבה f חסומה.

הוכחה: יהי $\varepsilon=1$. קיים $0<\delta$ כך שאם $0<|x-c|<\delta$ אז $|f(x)-l|<1$. כלומר $l-1<f(x)<l+1$ כלומר f חסומה בסביבת δ מנוקבת של c. ☺

מסקנה: אם f רציפה ב-c אזי f חסומה בסביבה כלשהי של c.

נחזור לטענה. נניח בשלילה ש-$c<b$. לפי הלמה יהי $0<\delta$ כך ש-f חסומה בקטע $(c-\delta,c+\delta)$. בה"כ ניתן להניח ע"י הקטנת δ ש-$a<c-\delta<c<c+\delta<b$. יהיו $c-\delta<d<c<e<c+\delta$. f חסומה ב-$[a,d]$ כי $d\in S$. f חסומה גם ב-$[d,e]$ כי $[d,e]\subset(c-\delta,c+\delta)$. לכן f חסומה ב-$[a,e]$ אבל $c<e$ בסתירה לכך ש-$c=\sup S$. לכן $c=b$.

כעת נראה ש-$b\in S$. f רציפה ב-b ולכן לפי המסקנה חסומה בסביבת δ מנוקבת שמאלית של b. $b=\sup S$. יהי $s\in S$ כך ש-$b-\delta<s\le b$. f חסומה ב$0[a,s]$ וב-$[s,b]$ לכן f חסומה ב-$[a,b]$. ☺

<u>משפט 5.6.4</u>: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי f מקבלת ב- $[a,b]$ הן ערך מקסימלי והן ערך מינימלי.
<u>הוכחה</u>: לפי משפט החסימות f חסומה ב- $[a,b]$. יהי $M=\sup f([a,b])$. נניח בשלילה שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)<M$. נתבונן בפונקציה $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$ בקטע $[a,b]$. $g(x)$ מוגדרת כי $M\neq f(x)$. לפי אריתמטיקה של פונקציות רציפות עם g רציפה ב- $[a,b]$. היות ו- $M=\sup f([a,b])$ אז לכל $0<\varepsilon$ קיים $x\in[a,b]$ כך ש- $M-\varepsilon<f(x)<M$. כלומר $0<M-f(x)<\varepsilon$ ולכן $\frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{M-f(x)}=g(x)$. כלומר g אינה חסומה מלמעלה ב- $[a,b]$ בסתירה למשפט החסימות. לכן קיים $x\in[a,b]$ כך ש- $f(x)=M$. בצורה דומה מראים שגם המינימום מתממש ע"י הסתכלות בפונקציה $h(x)=\frac{1}{f(x)-m}$. ☺

5.7. פונקציות מונוטוניות

<u>הגדרה</u>: יהיו f פונקציה ו- $A\subset D_f$. f תיקרא **מונוטונית עולה** ב- A אם לכל $x,y\in A$ אם $x<y$ אז $f(x)\leq f(y)$. f **מונוטונית עולה ממש** אם באותם התנאים $f(x)<f(y)$. f תיקרא **מונוטונית יורדת** אם $f(y)\leq f(x)$ **ומונוטונית יורדת ממש** אם $f(y)<f(b)$. נאמר ש- f **מונוטונית** אם היא מקיימת אחד מהתנאים הנ"ל.

<u>משפט 5.7.1</u>: תהי f מונוטונית עולה ב- (a,b). לכל $x_0\in(a,b)$ קיימים $\lim_{x\to x_0^+}f(x),\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ ומתקיים
$\sup f((a,x_0))=\lim_{x\to x_0^-}f(x)\leq f(x_0)\leq\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\inf f((x_0,b))$.
<u>הוכחה</u>: יהי $x_0\in(a,b)$ ונגדיר $S=\{f(t):a<t<x_0\}$. S אינה ריקה והיא חסומה מלמעלה. יהי אז $A=\sup S$. נראה ש- $A=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$. יהי $0<\varepsilon$. נתבונן ב- $A-\varepsilon$. קיים $a<s<x_0$ כך ש- $A-\varepsilon<f(s)\leq A$. יהי $0<\delta=x_0-s$. אם $0<x_0-t<\delta$ אז $s<t<x_0$ ולכן $f(s)\leq f(t)$. לכן $A-\varepsilon<f(s)\leq f(t)\leq A<A+\varepsilon$ כלומר $|f(t)-A|<\varepsilon$.
בצורה דומה מראים את שאר האי שוויונים. ☺

<u>מסקנה 5.7.2</u>: באותם התנאים אם $a<x_0<y_0<b$ אז

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)\leq f(x)\leq\lim_{x\to x_0^+}f(x)\leq\lim_{x\to y_0^-}f(x)\leq f(y)\leq\lim_{x\to y_0^+}f(x)$$

<u>משפט 5.7.3</u>: יהי $I\subset\mathbb{R}$ קטע ו- $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית. אזי f רציפה ב- I אמ"מ $J=f(I)$ קטע.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) הכיוון הזה הוא בעצם משפט ערך הביניים.
($\Rightarrow$) בה"כ נניח ש- f עולה ב- I. את המקרים האחרים מוכיחים בצורה דומה. תהי $x_0\in I$ נקודה פנימית. נניח ש- f לא רציפה ב- x_0. אזי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)<\lim_{x\to x_0^+}f(x)$. יהי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)<z<\lim_{x\to x_0^+}f(x)$. לפי המשפט הקודם $\sup f((a,x_0))=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$. אז קיים $t<x_0$ כך ש- $f(t)\leq\lim_{x\to x_0^-}f(x)$. כמו כן $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\inf f((x_0,b))$ אז קיים $x_0<s$ כך ש- $\lim_{x\to x_0^+}f(x)\leq f(s)$. לכן $f(t)\leq\lim_{x\to x_0^-}f(x)<z<\lim_{x\to x_0^+}f(x)\leq f(s)$. J קטע ולכן $z\in J$. אזי קיים $y\in I$ כך ש- $z-f(y)$. נטען

ש- $y=x$ וזו תהיה סתירה. אחרת, אם $x<y$ אז $f(y)<z<\lim_{x\to x_0^+} f(x)\le f(y)$. אם $y<x$ אז $f(y)\le \lim_{x\to y^+} f(x)\le \lim_{x\to x_0^-} f(x)<z$ וזו סתירה.

מושאר כתרגיל להראות את נכונות המשפט גם עבור נקודות קצה, אם ישנן. ☺

5.8. נקודות אי רציפות

הגדרה: אם f אינה רציפה ב- a נאמר ש- a **נקודת אי רציפות** של f.

a תיקרא **אי רציפות מסוג ראשון** אם קיימים $\lim_{x\to a^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)$. במקרה המיוחד ש- $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$ נאמר שהאי רציפות ב- a היא **סליקה**.

אם אחד מבין הגבולות החד צדדיים אינו קיים אי הרציפות תיקרא **מסוג שני**.

דוגמאות:

1. אי רציפות סליקה: נסתכל על הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$. נשים לב שאם $x\neq 1$ אז $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ וברור שאי הרציפות ב- 1 היא סליקה.
2. אי רציפות מסוג ראשון: ל- $\operatorname{sgn}(x)$ יש אי רציפות ממין ראשון ב- 0. שהרי $\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1, \lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$.
3. אי רציפות מסוג שני: פונקציית דיריכלה אינה רציפה באף נקודה וכל אי הרציפויות מסוג שני.

נשים לב שאם f מונוטונית בקטע I אזי ל- f יכולות להיות רק אי רציפויות מסוג ראשון.

טענה 5.8.1: קבוצת נקודות האי רציפות של f מונוטונית בקטע הינה בת מניה.

הערה: ונשים לב שלכל קבוצה בת מניה אפשר לבנות פונקציה מונוטונית שהיא לא רציפה בדיוק בנקודות אלה.

הוכחה: אם $x_0\in I$ נקודת אי רציפות של f נבחר $q(x_0)\in\mathbb{Q}$ כך ש- $\lim_{x\to x_0^-} f(x)<q(x_0)<\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. אם $y_0\in I$ נקודת אי רציפות אחרת ונבחר לה $q(y_0)$ באותו אופן אז אם $x_0<y_0$ אזי $\lim_{x\to x_0^-} f(x)<q(x_0)<\lim_{x\to x_0^+} f(x)\le \lim_{x\to y_0^-} f(x)<q(y_0)<\lim_{x\to y_0^+} f(x)$. כלומר $q(x)<q(y)$. לכן מספר נקודות אי הרציפות של f הן לכל היותר כגודל הקבוצה $\mathbb{Q}$ והיא בת מניה. ☺

5.9. גבולות אינסופיים וגבולות באינסוף

הגדרה: נאמר ש- $l\in\mathbb{R}$ הינו הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- ∞ אם

$$\forall\varepsilon>0\ \exists x_0\ \ \forall x>x_0\ \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

באופן דומה מגדירים גבול של $f(x)$ ב- $-\infty$.

משפט 5.9.1: $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ אמ"מ לכל סדרה (x_n) כך ש- $x_n\in D_f$ ו- $x_n\to\infty$ מתקיים $f(x_n)\to l$.

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- ∞ הוא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- a אם

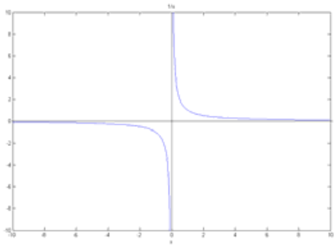
$$\forall y\in\mathbb{R}\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow y<f(x)$$

<u>דוגמה</u>: נסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ שמוגדרת על $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

במקרה זה ברור שמתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\qquad\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty\qquad\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$



5.10. פונקציות הפוכות

<u>הגדרה</u>: זוג של פונקציות f ו- g תיקראנה **זוג של פונקציות הפוכות** אם:

1. $\operatorname{Im} f=D_g$
2. $\operatorname{Im} g=D_f$
3. לכל $x\in D_f$ $g(f(x))=x$ ולכל $y\in D_g$ $f(g(y))=y$.

<u>הגדרה</u>: פונקציה f תיקרא **הפיכה** אם קיימת g כך ש- f ו- g זוג של פונקציות הפוכות.

<u>משפט 5.10.1</u>: תהי f רציפה ועולה (יורדת) ממש בקטע I. אזי קיימת פונקציה g כך ש-

1. $J=D_g=f(I)$
2. g הפוכה של f
3. g עולה (יורדת) ממש ב- J
4. g רציפה ב- J

5.11. רציפות במידה שווה

<u>הגדרה</u>: f תיקרא **רציפה במידה שווה** (במ"ש) ב- A אם

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \exists x,y\ \ |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

ההבדל בין רציפות לרציפות במידה שווה הוא שכשפונקציה רציפה במידה שווה ה- δ תלוי רק ב- ε ולא ב-נקודה שבה אנחנו מדברים. כמו כן רציפות במידה שווה היא לא תכונה נקודתית, אלא אפשר לדבר על רציפות במידה שווה רק בקטע.

ברור גם שאם פונקציה רציפה במידה שווה בקטע אז היא בפרט רציפה בו.

<u>משפט 5.11.1</u>: פונקציה f המוגדרת ב- A אינה רציפה שם במ"ש אמ"מ קיים $\varepsilon>0$ וסדרות ב- A $(x_n),(y_n)$ אשר מקיימות $x_n-y_n\to 0$ אבל $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\geq\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- f אינה רציפה במ"ש. אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x,y\in A$ כך ש- $|x-y|<\delta$ אבל $\left|f(x)-f(y)\right|\geq\varepsilon$. יהי ε כזה. נבחר סדרה $\delta_n=\frac{1}{n}$. לכל n מתאימים x_n,y_n כמו למעלה. אזי $|x_n-y_n|<\delta_n=\frac{1}{n}$ ולכן $x_n-y_n\to 0$. אבל $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\geq\varepsilon$ תמיד.

($\Rightarrow$) A חסומה ולכן $\{x_n\},\{y_n\}$ חסומות. לכן קיימות להן תת סדרות מתכנסות $x_{n_k}\to x,y_{n_l}\to y$. מאחר ש- $x_n-y_n\to 0$ גם $x_{n_k}-y_{n_k}\to 0$. לכן לכל $\delta>0$ מתקיים $\left|x_{n_k}-y_{n_k}\right|<\delta$ החלק מ- K כלשהו. לכן $|x-y|<\delta$ אבל $\left|f\left(x_{n_k}\right)-f\left(y_{n_k}\right)\right|\geq\varepsilon$ כלומר $\left|f(x)-f(y)\right|\geq\varepsilon$. ☺

<u>דוגמה</u>: $f=x^2$ אינה רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$. נסתכל על $x_n=n,y_n=n+\frac{1}{n}$. ברור ש- $x_n-y_n\to 0$. אבל $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|=\left|n^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right|=\left|-2-\frac{1}{n^2}\right|\geq 2$ לכן אם נבחר למשל $\varepsilon=2$ נקבל לפי המשפט הקודם ש- f אינה רציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$.

<u>משפט 5.11.2</u>: אם f רציפה ב- $[a,b]$ אזי היא רציפה שם במ"ש.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש- f אינה רציפה במ"ש ב- $[a,b]$. אזי קיים $\varepsilon>0$ ו- $(x_n),(y_n)$ ב- $[a,b]$ כך ש- $x_n-y_n\to 0$ אבל $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\geq\varepsilon$. (x_n) חסומה ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $\left(x_{n_k}\right)$ $x_{n_k}\to x$ ו- $x\in[a,b]$. $\left(y_{n_k}\right)$ חסומה ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $\left(y_{n_{k_l}}\right)$. $\left(x_{n_{k_l}}\right)$ תת סדרה של $\left(x_{n_k}\right)$ ולכן $x_{n_{k_l}}\to x$. אבל $x_n-y_n\to 0$ ולכן $x_{n_{k_l}}-y_{n_{k_l}}\to 0$ ולכן $y_{n_{k_l}}\to x$. בגלל הרציפות של f נקבל ש- $f\left(x_{n_{k_l}}\right)\to f(x)$ ו- $f\left(y_{n_{k_l}}\right)\to f(x)$. ולכן $f\left(x_{n_{k_l}}\right)-f\left(y_{n_{k_l}}\right)\to 0$. וזה בסתירה לכך ש- $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\geq\varepsilon$. ☺

<u>משפט 5.11.3</u>: אם f רציפה במ"ש ב- A אזי לכל סדרת קושי (x_n) ב- A גם $f(x_n)$ סדרת קושי.

<u>הערה</u>: המשפט לא נכון בכיוון ההפוך. אם פונקציה מעבירה סדרות קושי לסדרות קושי אין הדבר אומר שהפונקציה רציפה במ"ש. למשל הפונקציה $f(x)=x^2$ מעבירה סדרות מתכנסות לסדרות מתכנסות, בגלל אריתמטיקה של גבולות, אבל ראינו כבר שהיא לא רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>: f רציפה במ"ש. כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x,y שמקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים גם $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$. יהי $\varepsilon>0$ ותהי (x_n) סדרת קושי ב- A. יהי δ המתאים ל- ε לפי הרציפות במ"ש. עבור δ זה קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n,m$ מתקיים $|x_n-x_m|<\delta$. לכן $\left|f(x_n)-f(x_m)\right|<\varepsilon$. כלומר $f(x_n)$ סדרת קושי. ☺

<u>משפט 5.12.4</u>: תהי f מוגדרת ורציפה ב- (a,b). אזי f רציפה במ"ש ב- (a,b) אמ"מ f ניתנת להרחבה רציפה ב- $[a,b]$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נראה שקריטריון קושי להתכנסות מתקיים בשני הקצוות ואז קיים הגבול ולכן נוכל להרחיב את ההגדרה. נוכיח לצד השמאלי ואת הצד הימני מוכיחים בצורה דומה. יש להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<x-a<\delta,0<y-a<\delta$ אז $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$. היות ש- f רציפה במ"ש על (a,b) בהינתן ε יהי δ המתאים לו לפי הרציפות במ"ש. אז אם $a<x,y<b$ ו- $|x-y|<\delta$ אז $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$. אבל

אם $0<x-a<\delta$ וגם $0<y-a<\delta$ אז $|x-y|<\delta$ ולכן מתקיים קריטריון קושי. כלומר קיים הגבול החד צדדי השמאלי. ☺

5.12. הפונקציות הטריגונומטריות

<u>הגדרה:</u>

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נעיר שלכל $x\in\mathbb{R}$ הטורים האלה מתכנסים בהחלט לפי מבנה המנה.

המסקנות המיידיות מהדרה זו הן אלה:

1. $\cos 0=1$
2. $\cos(-x)=\cos x$
3. $\sin 0=0$
4. $\sin(-x)=-\sin(x)$

בעזרת חישוב מכפלת קושי של הטורים ניתן להגיע לתוצאה ש- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$.
כמו כן ניתן להוכיח ש- $\cos x$ היא פונקציה רציפה.

בעזרת פונקציית ה- $\cos$ מוגדירים את המספר $\frac{\pi}{2}$. זהו המספר הראשון אחרי 0 שמקיים $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

6. הנגזרת

6.1. הגדרת הנגזרת

<u>הגדרה</u>: פונקציה f המוגדרת ב- I תיקרא **גזירה** ב- a אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. במקרה זה נסמן את הגבול ע"י $f'(x)$.
אם a נקודת קצה של I אז נדרוש קיום הגבול החד צדדי בלבד.

<u>דוגמה</u>: האם קימת הנגזרת של $f(x)=x^2$ ב-$a=1$? נבדוק לפי ההגדרה:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\xrightarrow[x\to 1]{}2$$

לכן $f'(1)=2$.

<u>משפט 6.1.1</u>: f גזירה ב- a אמ"מ קיימת $\varphi:I\to\mathbb{R}$ רציפה ב- a כך ש-$\varphi(x)(x-a)=f(x)-f(a)$ ואז $\varphi(a)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=f'(a)$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- f גזירה ב- a. אזי קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. נגדיר $\varphi:I\to\mathbb{R}$ באופן הבא:
$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\neq a\\ f'(a) & x=a\end{cases}$. φ זו רציפה ב- a לפי הגדרת $f'(a)$. כעת, עבור $x=a$ נקבל $0=f(a)-f(a)=f(x)-f(x)=\varphi(a)(x-a)=f'(a)(a-a)=0$ ועבור $x\neq a$ נקבל $\varphi(x)(x-a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=f(x)-f(a)$.

($\Rightarrow$) נניח שקיימת $\varphi:I\to\mathbb{R}$ כנ"ל. נראה ש- f גזירה ב- a. לפי הגדרת φ מתקיים לכל $x\neq a$ ש-$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. אבל φ רציפה ב- a ולכן קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. ☺

<u>דוגמאות</u>:

1. יהי $n\in\mathbb{N}$. הפונקציה $f(x)=x^n$ גזירה בכל $a\in\mathbb{R}$.
$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-1}+a^{n-1}\right)$. נסמן $\varphi(x)=x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-1}+a^{n-1}$ והיא בוודאי רציפה. לכן f גזירה ב- a ומתקיים $f'(a)=\varphi(a)=na^{n-1}$.
2. יהי $n\in\mathbb{N}$. אזי $g(x)=x^{-n}$ גזירה בכל $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}x^{-n}-a^{-n}&=\frac{1}{x^n}-\frac{1}{a^n}=\frac{a^n-x^n}{(ax)^n}=\\&=(a-x)\frac{a^{n-1}+a^{n-2}x+\ldots+ax^{n-2}+x^{n-1}}{a^nx^n}=\\&=(x-a)\left(-\frac{a^{n-1}+a^{n-2}x+\ldots+ax^{n-2}+x^{n-1}}{a^nx^n}\right)\end{aligned}$$

נסמן $\varphi(x)=-\dfrac{a^{n-1}+a^{n-2}x+...+ax^{n-2}+x^{n-1}}{a^n x^n}$ והיא בוודאי רציפה לכל $a\neq 0$. לכן $g'(a)=-\dfrac{na^{n-1}}{a^{2n}}=-na^{-n-1}$.

3. $f(x)=|x|$ אינה גזירה ב- $x=0$. קל לבדוק שהנגזרות החד צדדיות אינן שוות.

<u>משפט 6.1.2</u>: אם f גזירה ב- a אזי f רציפה ב- a.

<u>הוכחה</u>: לפי משפט קודם קיימת φ רציפה ב- a כך ש- $f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$. אזי $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}(x-a)=\varphi(a)\cdot 0=0$. כלומר f רציפה ב- a. ☺

<u>הגדרה</u>: f תיקרא **גזירה** ב- I אם f גזירה לכל $a\in I$.

6.2. כללי גזירה

<u>משפט 6.2.1</u> (**אריתמטיקה של נגזרות**): תהיינה f,g גזירות ב- $a\in I$. אזי

1. $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$
2. $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$
3. אם $g(a)\neq 0$ אז $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=-\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$
4. אם $g(a)\neq 0$ אז $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

<u>הוכחה</u>: תהיינה $\varphi,\psi:I\in\mathbb{R}$ כך ש- $\varphi(x)(x-a)=f(x)-f(a),\psi(x)(x-a)=g(x)-x(a)$ והן רציפות ב- a.

1. מושאר כתרגיל קורא
2. נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}&f(x)g(x)-f(a)g(a)=\\&=(f(x)-f(a))g(a)+f(a)(g(x)-g(a))+(g(x)-g(a))(f(x)-f(a))=\\&=\varphi(x)g(a)(x-a)+\psi(x)f(a)(x-a)+\varphi(x)\psi(x)(x-a)(x-a)=\\&=(x-a)\left[\varphi(x)g(a)+\psi(x)f(a)+\varphi(x)\psi(x)(x-a)\right]\end{aligned}$$

$\varphi(x)g(a)+\psi(x)f(a)+\varphi(x)\psi(x)(x-a)$ כמובן פונקציה רציפה ולכן $f(x)g(x)$ גזירה ב- a ומתקיים $(fg)'(a)=\varphi(a)g(a)+\psi(a)f(a)+\varphi(a)\psi(a)(a-a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$.

3. $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)-\left(\dfrac{1}{g}\right)(a)=\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{g(a)}$. $g(a)\neq 0$. g גזירה ב- a ולכן רציפה בה ולכן קיימת סביבה של a שבה $g(x)\neq 0$. לכן הביטוי לעיל מוגדר. כעת נחשב את הנגזרת:

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}=\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}=-\frac{g(a)-g(a)}{g(x)g(a)}=\left[-\frac{\psi(x)}{g(x)g(a)}\right](x-a).$$

$-\dfrac{\psi(x)}{g(x)g(a)}$ רציפה ב- a ולכן $\dfrac{1}{g(x)}$ גזירה ב- a ו- $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=-\dfrac{\psi(a)}{g(a)g(a)}=-\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.

4. נובע ישירות מהסעיפים הקודמים. ☺

<u>משפט 6.2.2</u> (**כלל השרשרת**): תהיינה g גזירה ב- a ו- f גזירה ב- $b=g(a)$. אזי $f\circ g$ גזירה ב- a ומתקיים $(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$.

<u>הוכחה</u>: תהי ψ רציפה ב- a כך ש- $g(x)-g(a)=\psi(x)(x-a)$ ותהי φ רציפה ב- b כך ש- $f(y)-f(b)=\varphi(y)(y-b)$. אזי

$(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)=f(g(x))-f(g(a))=\varphi(g(x))(g(x)-g(a))=\left[\varphi(g(x))\psi(x)\right](x-a)$.

לפי כלל ההרכבה $\varphi(g(x))\psi(x)$ רציפה ב- a ולכן $f\circ g$ גזירה ב- a ומתקיים $(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$. ☺

6.3. נגזרת של פונקציה הפוכה

<u>משפט 6.3.1</u>: תהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה הפיכה בקטע, גזירה ב- a ומקיימת $f'(a)\neq 0$. תהי g הפונקציה ההפוכה שלה. אז g גזירה ב- $b=f(a)$ ומתקיים $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.

<u>הוכחה</u>: f גזירה ב- a ולכן קיימת $\varphi:I\to\mathbb{R}$ רציפה ב- a כך ש- $f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$.

$\varphi(a)\neq 0$ ולכן $\varphi(x)\neq 0$ בסביבה של a. אם $g(y)=x$ ו- $f(x)=y$ ו- $g(b)=a$ ו- $f(a)=b$ אז

$\frac{1}{\varphi(g(y))}\cdot(y-b)=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)}=x-a=g(y)-g(b)$. $\frac{1}{\varphi(g(y))}$ רציפה ב- b כי g רציפה ב- b ו-

φ רציפה ב- a. לכן g גזירה ב- b ו- $g'(b)=\frac{1}{\varphi(a)}=\frac{1}{f'(a)}$. ☺

לסיכום נרשום נגזרות של כמה פונקציות:

$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	$\sin'x=\cos x$
$\left(e^x\right)'=e^x$	$\cos'x=-\sin x$
$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$\arcsin'x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln'x=\frac{1}{x}$	$\arccos'x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a'x=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$	$\arctan'x=\frac{1}{1+x^2}$

6.4. משפטי ערך ממוצע

<u>הגדרה</u>: $f:I\to\mathbb{R}$ מקבלת **מקסימום** (**מינימום**) **מקומי** ב- $a\in I$ אם קיים $0<\delta$ כך ש-לכל $x\in(a-\delta,a+\delta)$ מתקיים $f(x)\le f(a)$ ($f(a)\le f(x)$).

<u>משפט 6.4.1</u> (**משפט פרמה**): אם $f:I\to\mathbb{R}$ מקבלת מקסימום (מינימום) בנקודה פנימית $a\in I$ ו- f גזירה בה, אזי $f'(a)=0$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- f מקבלת מקסימום ב- a.

אם $f'(a)>0$ אזי קיים $\delta>0$ כך שבסביבת δ של a מתקיים $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$. אזי אם $a-\delta<x<a$ אז $x-a<0$ ו-$f(x)<f(a)$. אם $a<x<a+\delta$ אז $x-a>0$ ו-$f(x)>f(a)$. וזו סתירה. בצורה דומה שוללים את המקרה ש-$f'(a)<0$. ☺

המסקנה מהמשפט זה היא שאם f רציפה ב-$[a,b]$ אזי המועמדים לנקודות קיצון של f ב-$[a,b]$ הם:

1. נקודות קריטיות של f שבהן f' מתאפסת
2. נקודות סינגולריות היכן ש-f' אינה מוגדרת
3. נקודות שפה – הקצוות של $[a,b]$.

<u>משפט 6.4.2</u> (**משפט רול**): תהי f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). אם $f(a)=f(b)$ אזי קיים $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=0$.

<u>הוכחה</u>: f רציפה ב-$[a,b]$ ולכן מממשת הן מקסימום והם מינימום מוחלטים. אם שניהם בקצוות אז בגלל ש-$f(a)=f(b)$ אז f קבועה ולכן נגזרתה מתאפסת ולכל $a<c<b$ $f'(c)=0$. אחרת אחת מנקודות הקיצון הינה פנימית ולפי משפט פרמה הנגזרת מתאפסת. ☺

<u>משפט 6.4.3</u> (**משפט לגרנז'**): תהי f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). אזי קיים $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>הוכחה</u>: נסתכל על הפונקציה $\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$. נטען שפונקציה זו עומדת בתנאי משפט רול: לפי אריתמטיקה של פונקציות רציפות רציפות היא רציפה ב-$[a,b]$ ולפי אריתמטיקה של נגזרות היא גזירה ב-(a,b). כמו כן קל לראות ש-$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. לכן קיים $a<c<b$ כך ש- $\varphi'(c)=0$. אבל $\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ולכן $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ☺

<u>משפט 6.4.4</u> (**משפט קושי**): תהיינה f,g רציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b) וכן $g'\neq 0$ ב-(a,b) ו- $g(a)\neq g(b)$. אזי קיים $a<c<b$ כך ש- $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>הוכחה</u>: תהי $\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)\right]$. פונקציה זו עומדת בתנאי משפט לגרנז'. לכן קיים $a<c<b$ כך ש- $\varphi'(c)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$. אבל $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=0$ ומצד שני $\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$. לכן $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. ☺

<u>משפט 6.4.5</u>: תהי f גזירה בקטע I. אזי ל-f' תכונת ערך הביניים ב-I.
<u>משמעות</u>: המשפט הזה מאוד חשוב כי הוא בעצם אומר שלא כל פונקציה יכולה להיות נגזרת. למשל פונקציית הסימן לא יכולה להיות נגזרת של פונקציה אחרת כי היא לא מקיימת את תכונת ערך הביניים.
<u>הוכחה</u>: נניח קודם ש-$a,b\in I$, $a<b$ ו-$f'(a)<0$ ו-$f'(b)>0$. נסתכל על $[a,b]$ ונראה שקיים $a<c<b$ כך ש-$f'(c)=0$. $f'(a)<0$ ולכן קיימת סביבה ימנית של a כך שאם $a<x\leq a+h$ מתקיים $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$. $f'(b)>0$ ולכן קיימת סביבה שמאלית של b כך שאם $b-h\leq x\leq b$ אז

$0<\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ (ברור גם שקיים h משותף, פשוט ניקח את המינימלי שמקיים זאת). נגדיר פונקציה $\varphi(t)=\frac{f(a+h+t)-f(a+t)}{(a+h+t)-(a+t)}=\frac{f(a+h+t)-f(a+t)}{h}$. פונקצית זו מוגדרת בקטע $[a+t,a+h+t]$ כלומר כל עוד $0\le t\le(b-a)-h$. כמו כן היא רציפה שם לפי אריתמטיקה של פונקציות רציפות. כעת נשים לב ש- $\varphi(0)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$ ו- $\varphi(b-a-h)=\frac{f(b)-f(b-h)}{h}>0$. כעת לפי משפט ערך הביניים קיים $0<s<b-a-h$ כך ש- $\varphi(s)=0$. עכשיו לפי משפט רול עבור f בקטע $[a+s,a+h+s]$ קיים $a<a+s<c<a+h+s<b$ כך ש- $f'(c)=0$.

את המקרה הכללי נקבל תוך התבוננות בפונקציה $g(x)=f(x)-\gamma x$. ☺

נספח א – הגדרות

<u>הגדרה</u>: תהי X קבוצה ועליה מוגדרות שתי פעולות דו-מקומיות: חיבור $+:X\times X\to X$ וכפל $\cdot:X\times X\to X$

אם מקיימות את התכונות הבאות, אשר נקראות **אקסיומות השדה**:

4. *אקסיומות החיבור*:
   4.1. <u>אסוציאטיביות</u>: לכל $a,b,c\in X$ מתקיים $a+(b+c)=(a+b)+c$
   4.2. <u>קומוטטיביות</u>: לכל $a,b\in X$ מתקיים $a+b=b+a$
   4.3. <u>קיום אפס</u>: לכל $a\in X$ מתקיים $a+0=a=0+a$
   4.4. <u>קיום נגדי</u>: לכל $a\in X$ מתקיים $a+(-a)=0=(-a)+a$
5. *אקסיומות הכפל*:
   5.1. <u>אסוציאטיביות</u>: לכל $a,b,c\in X$ מתקיים $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
   5.2. <u>קומוטטיביות</u>: לכל $a,b\in X$ מתקיים $a\cdot b=b\cdot a$
   5.3. <u>קיום יחידה</u>: לכל $a\in X$ מתקיים $a\cdot 1=a=1\cdot a$
   5.4. <u>קיום הופכי</u>: לכל $0\neq a\in X$ מתקיים $a\cdot a^{-1}=1=a^{-1}\cdot a$
6. *דיסטריביוטיביות*[17]: לכל $a,b,c\in X$ מתקיים $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ [18]

אז הקבוצה X נקראת **שדה**.

<u>הגדרה</u>: **אקסיומות הסדר** הן:

5. *טריכוטומיה*: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיימת אחת ורק אחד מן האפשרויות הבאות: $a<b,a=b,b<a$
6. *טרנזיטיביות*: לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אם $a<b$ וגם $b<c$ אז $a<c$
7. לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אם $a<b$ אז $a+c<b+c$
8. לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אם $0<c$ ו-$a<b$ אז $ac<bc$

<u>הגדרה</u>: מספר $a\in\mathbb{R}$ ייקרא **חיובי** אם $0<a$. נסמן ב-$\mathbb{R}^+$ את קבוצת המספרים הממשיים החיוביים. ברור ש-$\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u>: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נאמר ש-$a\le b$ אם $a<b$ או $a=b$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה $S\subset\mathbb{R}$ תיקרא אינדוקטיבית אם היא **מקיימת** את התכונות הבאות:

3. $1\in S$
4. $x\in S \Leftarrow x+1\in S$

<u>הגדרה</u>: $\mathbb{N}=\bigcap_{\substack{S\subset\mathbb{R}\\ S\text{ is inductive}}} S$ ונקרא לקבוצה **המספרים הטבעיים**

<u>הגדרה</u>: יהי $x\in\mathbb{R}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $\begin{cases} x^n=x & n=1\\ x^{n+1}=x^n\cdot x & 1<n\end{cases}$

<u>הגדרה</u>: תהי $S\subset\mathbb{R}$. איבר $m\subset S$ ייקרא **מינימום** של S אם לכל $s\in S$ מתקיים $m\le s$.

---

[17] החוק שמקשר בין פעולת החיבור לפעולת הכפל

[18] אגב, יש פה נקודה מעניינת שיש לשים לב אליה. במספרים הממשיים אנחנו יודעים מהו סדר פעולות החשבון, אבל אלה אקסיומות של השדה באופן כללי ולמעשה לביטוי הזה אין כל משמעות עד שאנחנו לא אומרים באיזה סדר יש לבצע את הפעולות. ובכן, בכל שדה אנחנו אומרים שמבצעים קודם את פעולת הכפל ולאחר מכן את החיבור.

<u>הגדרה</u>: **אקסיומת השלמות**: יהיו $L,U\subset\mathbb{R}$ לא ריקות אשר מקיימות $L\le U$[19]. אזי קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$l\le c\le u$ לכל $l\in L, u\in U$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה $S\subset\mathbb{R}$ תיקרא **חסומה מלמעלה** (**מלמטה**) אם קיים $\mu\in\mathbb{R}$ אשר מקיים $x\le\mu$ $(\mu\le x)$ לכל $x\in S$. במקרה זה μ ייקרא **חסם מלמעלה** (**מלמטה**) של S.

<u>הגדרה</u>: $\mu\in\mathbb{R}$ ייקרא **חסם עליון** (**תחתון**) של $S\subset\mathbb{R}$ אם מתקיימים התנאים הבאים:
3. לכל $x\in S$ מתקיים $x\le\mu$ $(\mu\le x)$
4. לכל $\xi\in\mathbb{R}$ שמקיים $x\le\xi$ $(\xi\le x)$ לכל $x\in S$ מתקיים $\mu\le\xi$ $(\xi\le\mu)$

במילים אחרות, חסם עליון (תחתון) הוא חסם מלמעלה (מלמטה) מינימלי (מקסימלי).
אם s חסם עליון מסמנים $s=\sup S$ ואם i חסם תחתון מסמנים $i=\inf S$.

<u>הגדרה</u>: נגדיר פונקציה $|\ |:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא: לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר $|x|=\begin{cases}x & 0\le x\\ -x & x<0\end{cases}$. נאמר ש-$|x|$ הוא **הערך המוחלט** של x.

<u>הגדרה</u>: $I\subset\mathbb{R}$ תיקרא **רווח** אם מתקיים התנאי הבא: לכל $a,b\in I$ אם $a<c<b$ אזי $c\in I$.

<u>הגדרה</u>: יהי $r=\frac{k}{n}\in\mathbb{Q}$ כאשר $k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$. נגדיר $a^r=\left(a^{1/n}\right)^k=a^{k/n}$.

<u>הגדרה</u>: נגדיר $i=\exp_a(x)=s$

<u>הגדרה</u>: אם $a=1$ אז $a^x=a$. אם $0<a<1$ אז $1<\frac{1}{a}$ ונגדיר $a^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

<u>הגדרה</u>: **סדרה** ב-$\mathbb{R}$ היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מסמנים $f(n)=f_n$. את כל הסדרה כולה מסמנים בכל מיני דרכים. למשל, $(f_1,f_2,f_3,\ldots)=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f_n)_{n=1}^{\infty}=(f_n)$

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) סדרה ב-$\mathbb{R}$. נאמר ש-(a_n) מתכנסת ל-$l\in\mathbb{R}$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|a_n-l|<\varepsilon$. במקרה זה מסמנים $\lim_{n\to\infty}a_n=l$ או $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}l$ או כשברורה הכוונה $a_n\to l$.
בשפה מתמטית נרשום את ההגדרה באופן הבא:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \left(\forall n>N\ \ |a_n-l|<\varepsilon\right)$$

<u>הגדרה</u>: סדרה (a_n) תיקרא **מתכנסת** אם קיים $l\in\mathbb{R}$ כך ש-$l=\lim_{n\to\infty}a_n$. אחרת נאמר ש-(a_n) **מתבדרת**.

<u>הגדרה</u>: תהי $P(n)$ טענה לגבי המספר $n\in\mathbb{N}$.
- נאמר ש-$P(n)$ **נכונה תמיד** אם היא נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$
- נאמר ש-$P(n)$ **נכונה כמעט תמיד** אם קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$P(n)$ נכונה כל $N<n$

[19] כלומר כל האיברים של L קטנים או שווים לאיברים של U.

- נאמר ש- $P(n)$ **נכונה באופן שכיח** אם היא נכונה לאינסוף $n \in \mathbb{N}$, כלומר לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $N < n$ כך ש- $P(n)$ נכונה.

<u>הגדרה</u>: סדרה (a_n) תיקרא **חסומה** אם $\{a_n\}$ חסומה. כלומר אם קיימים $m, M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $m \le a_n \le M$.

<u>הגדרה</u>:
- נסמן ב- $\mathcal{C}$ את קבוצת הסדרות המתכנסות[20]
- נסמן ב- $\mathcal{B}$ את קבוצת הסדרות החסומות[21]
- נסמן ב- $\mathcal{N}$ את קבוצת הסדרות השואפות לאפס[22]

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) סדרה.

- נגדיר את **סדרת הממוצעים** (b_n) ע"י $b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$
- נגדיר את **סדרת הממוצעים ההרמוניים** (c_n) ע"י $c_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$
- נגדיר את **סדרת הממוצעים הגאומטריים** (d_n) ע"י $d_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$.

<u>הגדרה</u>: יהי $x \in \mathbb{R}$. נגדיר את **פונקציית הסימן** $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \end{cases}$

<u>הגדרה</u>: נאמר שסדרה (a_n) **עולה** אם $a_n \le a_{n+1}$ תמיד **ועולה ממש** אם $a_n < a_{n+1}$ תמיד. באופן דומה נאמר שהסדרה **יורדת** אם $a_{n+1} \le a_n$ תמיד **ויורדת ממש** אם $a_{n+1} < a_n$ תמיד.
בכל מקרה נאמר שהסדרה **מונוטונית**. נסמן ב- $\mathcal{M}$ את קבוצת הסדרות המונוטוניות.

<u>הגדרה</u>: תהי (x_n) סדרה ותהי (n_k) סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. **אזי** הסדרה (y_k) המוגדרת ע"י $y_k = x_{n_k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$ תיקרא **סדרה חלקית** או **תת סדרה** של (x_n). במקרה זה נסמן $(x_{n_k}) \triangleleft (x_n)$.[23]

<u>הגדרה</u>: תהי (x_n) סדרה. נגדיר את ה- m-**זנב** שלה כך: $x^{(m)} = (x_n)_{n=m+1}^{\infty} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$.

<u>הגדרה</u>: תהי (x_n) סדרה. איבר x_n ייקרא **פסגה** אם $x_m \le x_n$ לכל $n \le m$.

<u>הגדרה</u>: המספר $p \in \mathbb{R}$ ייקא **גבול חלקי** של הסדרה (x_n) אם קיימת לה תת סדרה (x_{n_k}) כך ש- $x_{n_k} \to p$.

---

[20] $\mathcal{C}$ onverge

[21] $\mathcal{B}$ ounded

[22] $\mathcal{N}$ull

[23] זה לא סימון פורמלי ואף אחד חוץ מהקבוצה של צביק לא מכיר אותו

<u>הגדרה</u>: תהי $(x_n)\in\mathcal{B}$ ותהי S קבוצת הגבולות החלקיים שלה. נאמר ש- $l=\inf S$ הוא **הגבול התחתון** של (x_n) ו- $u=\sup S$ הוא **הגבול העליון** של (x_n). במקרה זה נסמן $\liminf x_n=l, \limsup x_n=u$.

<u>הגדרה</u>: סדרה (x_n) תיקרא **סדרת קושי** אם היא מקיימת את התנאי הבא: לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<m,n$ מתקיים $|x_n-x_m|<\varepsilon$. או בכמתים:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\ \left(N<m,n\Rightarrow|x_n-x_m|<\varepsilon\right)$$

<u>הגדרה</u>: נאמר שהסדרה (x_n) **שואפת לאינסוף** אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $N<n$ אז $M<x_n$. במקרה זה נסמן $x_n\to+\infty$.
בצורה דומה נאמר שהסדרה (x_n) **שואפת למינוס אינסוף** אם לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $N<n$ אז $x_n<M$. במקרה זה נסמן $x_n\to-\infty$.

<u>הגדרה</u>: תהי סדרה (x_n). אם הסדרה מתכנסת לגבול סופי נאמר שהיא **מתכנסת במובן הצר**. אם $x_n\to+\infty$ או $x_n\to-\infty$ נאמר שהיא **מתכנסת במובן הרחב**.

<u>הגדרה</u>: אם $S\subset\mathbb{R}$ אינה חסומה מלמעלה (למטה) נאמר ש- $\sup S=+\infty$ ($\inf S=-\infty$).

<u>הגדרה</u>: אם (x_n) אינה חסומה מלמעלה (למטה) אז $\limsup x_n=+\infty$ ($\liminf x_n=-\infty$).

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) נגדיר את **סדרת הסכומים החלקיים** שלה (s_n) באופן הבא: $s_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$.

<u>הגדרה</u>: תהי (a_n) סדרה ו- (s_n) סדרת הסכומים החלקיים שלה. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נקרא **הטור המתאים** לסדרה ו- a_n הוא **האיבר ה-n-י** של הטור. אם (s_n) מתכנסת ל- s נאמר ש- (a_n) **סכימה** ונרשום $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s$. אם (s_n) מתבדרת נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **מתבדר**.

<u>הגדרה</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור. נאמר ש- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

<u>הגדרה</u>: נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור חיובי אם מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$ ש- $0<a_n$.

<u>הגדרה</u>: יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. הטור $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ ייקרא ה-m-**זנב** שלו. נסמן את $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ ע"י r_m.

<u>הגדרה</u>: יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. ותהי (n_k) סדרה מונוטונית עולה ממש של טבעיים ו- $n_0=1$. נגדיר $b_k=\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}a_i$. נאמר ש- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ התקבל מהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ע"י **הכנסת סוגריים**.

<u>הגדרה</u>: נאמר שהסדרה (b_n) מתקבלת ע"י **שינוי סדר** בסדרה (a_n) אם קיימת $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל כך ש- $b_n=a_{p(n)}$.

<u>הגדרה</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

<u>הגדרה</u>: נסמן $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

<u>הגדרה</u>: בהינתן שתי קבוצות של עצמים A,B **פונקציה** f מ- A ל- B היא התאמה שמתאימה לכל איבר $a\in A$ איבר אחד ויחיד $b\in B$. נסמן $f:A\to B$ ו- $f(a)=b$. כאשר $A,B\subset\mathbb{R}$ נאמר שזו **פונקציה ממשית**. הקבוצה A נקראת **התחום** של f ואילו הקבוצה B נקראת **הטווח** של f.

<u>הגדרה</u>: **גרף** של פונקציה ממשית $f:A\to B$ הוא הקבוצה $G_f=\{(x,y):x\in A,y\in B,f(x)=y\}\subset\mathbb{R}^2$.

<u>הגדרה</u>: נאמר שפונקציה $f:A\to B$ היא **חד-חד-ערכית** (חח"ע) אם לכל $a,b\in A$ אם $f(a)=f(b)$ אז $a=b$. נאמר שהפונקציה **על** B אם לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה $U\subset\mathbb{R}$ תיקרא **סביבה** של $a\in\mathbb{R}$ אם קיים קטע פתוח I כך ש- $a\in I\subset U$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f:A\in\mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה של $a\in\mathbb{R}$. נאמר ש- f **רציפה** ב- a אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

<u>הגדרה</u>: קבוצה אשר מכילה קטע פתוח שמכיל את a אך לא מכילה את a עצמה תיקרא **סביבה מנוקבת** של a.

<u>הגדרה</u> (**הגדרת הגבול לפי קושי**): תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. $l\in\mathbb{R}$ ייקרא **גבול** של f ב- a אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

במקרה זה מסמנים $\lim_{x\to a} f(x)$.

<u>הגדרה</u> (**הגדרת הגבול לפי היינה**): תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. $l\in\mathbb{R}$ ייקרא **גבול** של f ב- a אמ"מ לכל סדרה שמקיימת התנאים:

4. $x_n\in D_f$
5. $x_n\neq a$
6. $x_n\to a$

מתקיים $f(x_n)\to l$. במקרה זה מסמנים $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

<u>הגדרה</u>: תהי $a\in\mathbb{R}$. **סביבה ימנית מנוקבת** של a היא קטע מהצורה $(a,a+\delta)$. **סביבה שמאלית מנוקבת** של a היא קטע מהצורה $(a-\delta,a)$ עבור $0<\delta$ כלשהו.

<u>הגדרה</u>: $l\in\mathbb{R}$ הוא **הגבול מימין של** f **כאשר** a **שואף ל-** a **מימין** אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ 0<x-a<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

במקרה זה מסמנים $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

$l\in\mathbb{R}$ הוא **הגבול משמאל של** f **כאשר** a **שואף ל-** a **משמאל** אם מתקיים התנאי הבא:

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0 \;\; 0<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

במקרה זה מסמנים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- f **רציפה מימין ב-** a אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

<u>הגדרה</u>: פונקציה f תיקרא **רציפה בקטע** $A\subset D_f$ אם f רציפה ב- a לכל $a\in A$. f תיקרא **רציפה** אם f רציפה ב- D_f.

<u>הגדרה</u>: יהיו f פונקציה ו- $A\subset D_f$. f תיקרא **מונוטונית עולה** ב- A אם לכל $x,y\in A$ אם $x<y$ אז $f(x)\le f(y)$. f **מונוטונית עולה ממש** אם באותם התנאים $f(x)<f(y)$. f תיקרא **מונוטונית יורדת** אם $f(y)\le f(x)$ **ומונוטונית יורדת ממש** אם $f(y)<f(b)$. נאמר ש- f **מונוטונית** אם היא מקיימת אחד מהתנאים הנ"ל.

<u>הגדרה</u>: אם f אינה רציפה ב- a נאמר ש- a **נקודת אי רציפות** של f.
a תיקרא **אי רציפות מסוג ראשון** אם קיימים $\lim\limits_{x\to a^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. במקרה המיוחד ש-
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ נאמר שהאי רציפות ב- a היא **סליקה**.
אם אחד מבין הגבולות החד צדדיים אינו קיים אי הרציפות תיקרא **מסוג שני**.

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- $l\in\mathbb{R}$ הינו הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- ∞ אם

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists x_0 \;\; \forall x>x_0 \;\; |f(x)-l|<\varepsilon$$

באופן דומה מגדירים גבול של $f(x)$ ב- $-\infty$

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- ∞ הוא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל- a אם

$$\forall y\in\mathbb{R} \;\; \exists \delta>0 \;\; \forall x \;\; 0<|x-a|<\delta \Rightarrow y<f(x)$$

<u>הגדרה</u>: זוג של פונקציות f ו- g תיקראנה **זוג של פונקציות הפוכות** אם:

4. $\operatorname{Im} f=D_g$
5. $\operatorname{Im} g=D_f$
6. לכל $x\in D_f$ $g(f(x))=x$ ולכל $y\in D_g$ $f(g(y))=y$.

<u>הגדרה</u>: פונקציה f תיקרא **הפיכה** אם קיימת g כך ש- f ו- g זוג של פונקציות הפוכות.

<u>הגדרה</u>: f תיקרא **רציפה במידה שווה** (במ"ש) ב- A אם

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \delta>0 \;\; \exists x,y \;\; |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

<u>הגדרה</u>:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

<u>הגדרה</u>: פונקציה f המוגדרת ב- I תיקרא **גזירה** ב- a אם קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. במקרה זה נסמן את הגבול ע"י $f'(x)$.
אם a נקודת קצה של I אז נדרוש קיום הגבול החד צדדי בלבד.

<u>הגדרה</u>: f תיקרא **גזירה** ב- I אם f גזירה לכל $a\in I$.

<u>הגדרה</u>: $f:I\to\mathbb{R}$ מקבלת **מקסימום** (**מינימום**) **מקומי** ב- $a\in I$ אם קיים $0<\delta$ כך ש-לכל $x\in(a-\delta,a+\delta)$ מתקיים $f(x)\le f(a)$ ($f(a)\le f(x)$).

נספח ב' – משפטים, טענות ולמות

משפט 1.1.1: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$. אם $a\neq 0$ אז קיים $x\in\mathbb{R}$ אחד ויחיד כך ש- $ax+b=c$.

מסקנות:

1. האפס הוא יחיד
2. הנגדי הוא יחיד
3. היחידה היא יחידה
4. ההופכי הוא יחיד
5. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $0\cdot x=0$
6. אם $a,b\in\mathbb{R}$ ו- $ab=0$ אזי $a=0$ או $b=0$
7. לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $(-1)a=-a$
8. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים $-(ab)=(-a)b=a(-b)$ וכן $(-a)(-b)=ab$

למה 1.1.2: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. אם $a<b$ וגם $c<d$ אזי $a+c<b+d$

למה 1.1.3: לכל $a\in\mathbb{R}$ $a<0$ אמ"מ $0<-a$.

משפט 1.1.4:

1. $0<1$
2. אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ אז $a+b\in\mathbb{R}^+$
3. אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ אז $a\cdot b\in\mathbb{R}^+$

למה 1.1.5: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $a^2\geq 0$. יתר על כן $a^2=0\Leftrightarrow a=0$.

מסקנה 1.1.6: בממשיים אין פיתרון למשוואה $x^2+1=0$.

למה 1.2.1: חיתוך של קבוצות אינדוקטיביות הינו קבוצה אינדוקטיבית.

משפט 1.2.2: אם $S\subset\mathbb{N}$ אינדוקטיבית אזי $S=\mathbb{N}$ [24]

משפט 1.2.3 (**עקרון האינדוקציה**): עבור כל $n\in\mathbb{N}$ נתונה טענה $P(n)$. אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $P(1)$ נכונה
2. אם $P(n)$ נכונה אז גם $P(n+1)$ נכונה

אז $P(n)$ נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.

משפט 1.2.4:

1. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $1\leq n$
2. לכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים $m+n\in\mathbb{N}$
3. לכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים $m\cdot n\in\mathbb{N}$
4. לכל $1<n\in\mathbb{N}$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $m+1=n$
5. לכל $m,n\in\mathbb{N}$ אם $n<m$ אזי $m-n\in\mathbb{N}$
6. לכל $n\in\mathbb{N}$ לא ייתכן שקיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $n<m<n+1$

[24] זה הניסוח הפורמלי של הטענה ש- $\mathbb{N}$ היא בעצם הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר.

למה 1.2.5: לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $m,n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

למה 1.2.6: אם המינימום קיים אז הוא יחיד.

משפט 1.2.7 (**עיקרון הסדר הטוב ב-** $\mathbb{N}$): תהי $\varnothing \neq S \subset \mathbb{N}$. אזי ל- S קיים איבר מינימלי.

משפט 1.2.8 משפט 1.2.8 (**הבינום של ניוטון**): לכל $a,b \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
(**אי שוויון ברנולי**). לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $-1 < x$ מתקיים $1+nx \le (1+x)^n$

מסקנה 1.2.9: לכל $0 < x$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1+x)^n \ge \frac{n(n-1)}{2}x^2$

משפט 1.3.1: לא קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש- $q^2 = 2$.

משפט 1.3.2 (**תכונת החסם העליון (התחתון)**):
תהי $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$ חסומה מלמעלה (מלמטה). אזי ל- S יש חסם עליון (תחתון).

משפט 1.3.3: החסם העליון (התחתון) הוא יחיד

משפט 1.3.4: תהי $\varnothing \neq X \subset \mathbb{R}$ וחסומה מלמעלה (למטה). אזי הטענות הבאות שקולות:
1. $s = \sup X$ $(i = \inf S)$
2. א. לכל $x \in X$ מתקיים $x \le s$ $(i \le x)$
   ב. אם $l < s$ $(i < l)$ אזי קיים $x \in X$ כך ש- $l < x \le s$ $(i \le x < l)$
3. א. לכל $x \in X$ מתקיים $x \le s$ $(i \le x)$
   ב. לכל $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ קיים $x \in X$ אשר מקיים $s - x < \varepsilon$ $(x - i < \varepsilon)$

למה 1.3.5: יהיו $L,U \subset \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש- $L \le U$. אזי $\sup L \le \inf U$

משפט 1.3.6 (**הלמה היסודית**): יהיו $L,U \subset \mathbb{R}$ לא ריקות כך ש- $L \le U$. אזי התנאים הבאים שקולים:
1. קיים מספר $c \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש- $l \le c \le u$ לכל $l \in L, u \in U$.
2. $\sup L = \inf U$
3. לכל $0 < \varepsilon$ קיימים $l \in L$ ו- $u \in U$ כך ש- $u - l < \varepsilon$

משפט 1.3.7: אם A,B קבוצות לא ריקות וחסומות אזי:
1. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
2. אם $A \cap B \neq \varnothing$ אז $\sup(A \cap B) \le \min\{\sup A, \sup B\}$
3. $\inf(A+B) = \inf A + \inf B, \sup(A+B) = \sup A + \sup B$
4. $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$
5. אם A,B חיוביות אז $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

למה 1.4.1: לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $a,b \in \mathbb{R}$ מתקיים
1. $0 \le a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$
2. $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

משפט 1.4.2: יהי $0<y$. אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $0<x\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $x^n=y$.

מסקנה 1.4.3: אם $x,y\in\mathbb{R}^+$ ו- $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $x^m=y^m$ אזי $x=y$.

משפט 1.5.1 (**ארכימדיות של $\mathbb{N}$ ב- $\mathbb{R}$**): $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$ אינה חסומה מלמעלה.

מסקנה 1.5.2: לכל $0<\varepsilon$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$

משפט 1.5.3: בהינתן $0<x\in\mathbb{R}$ לכל $y\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $y<xn$.

משפט 1.5.4 (**צפיפות של $\mathbb{Q}$ ב- $\mathbb{R}$**): לכל $x,y\in\mathbb{R}$ אם $x<y$ קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש- $x<q<y$.

משפט 1.6.1: לכל $0<r\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x|\le r\Leftrightarrow -r\le x\le r$

מסקנה 1.6.2: לכל $0<r\in\mathbb{R}$ ולכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x-a|\le r\Leftrightarrow a-r\le x\le a+r$

משפט 1.6.3 (**אי שוויון המשולש**): לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x+y|\le|x|+|y|$

מסקנה 1.6.4: לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\big||y|-|x|\big|\le|y-x|$

משפט 1.7.1: $I\subset\mathbb{R}$ רווח אמ"מ I קטע.

טענה 1.8.2.1: ההגדרה של חזקה רציונלית מוגדרת היטב.

משפט 1.8.2.2: אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ ו- $r,s\in\mathbb{Q}$ אז

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$$
$$(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$$
$$(a^r)^s=a^{r\cdot s}$$

טענה 1.8.3.1: תחת הסימונים קודם, $i=s$.

משפט 1.8.3.2: יהי $x\in\mathbb{Q}$. אזי $a^q=\exp_a(q)$.

משפט 1.8.3.3: יהיו $x<y$. אם $1<a$ אז $a^x<a^y$ ואם $0<a<1$ אז $a^y<a^x$.

משפט 1.8.3.4: אם $a,b\in\mathbb{R}^+$ ו- $x,y\in\mathbb{R}$ אז

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$
$$(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$$
$$(a^x)^y=a^{x\cdot y}$$

למה 2.2.1: יהיו $P(n),P'(n),Q(n),Q'(n),R(n),R'(n)$ טענות כך ש- $P(n),P'(n)$ נכונות תמיד, $Q(n),Q'(n)$ נכונות כמעט תמיד ו- $R(n),R'(n)$ נכונות באופן שכיח. אזי:

1. $P(n)\wedge P'(n)$ נכונה תמיד

2. $Q(n)\wedge Q'(n)$ נכונה כמעט תמיד
3. $P(n)\wedge Q(n)$ נכונה כמעט תמיד
4. $P(n)\wedge R(n)$ נכונה באופן שכיח
5. $Q(n)\wedge R(n)$ נכונה באופן שכיח

<u>למה 2.2.2</u>: יהי $x\in\mathbb{R}^{+}$ כך שלכל $0<\varepsilon$ מתקיים $x<\varepsilon$. אזי $x=0$.

<u>משפט 2.2.3</u> (**יחידות הגבול**): תהי (a_n) כך ש- $a_n\to l$ וגם $a_n\to l'$. אזי $l=l'$.

<u>משפט 2.3.2</u>: $\mathcal{N}\cdot\mathcal{B}\subset\mathcal{N}$

<u>משפט 2.3.3</u> (**משפט סזרו**): אם $x_n\to 0$ אז $\frac{x_1+...+x_n}{n}\to 0$

<u>משפט 2.3.4</u>: תהי (a_n) כך ש- $a_n\to a$. אזי
1. סדרת הממוצעים מתכנסת ל- a
2. אם $a_n\neq 0$ ו- $a\neq 0$ אזי סדרת הממוצעים ההרמוניים מתכנסת ל- a
3. אם $0<a_n$ אזי סדרת הממוצעים הגאומטריים מתכנסת ל- a.

<u>טענה 2.3.5</u>: תהי (a_n) סדרה חיובית. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to a$ אזי $\sqrt[n]{a_n}\to a$.

<u>טענה 2.3.6</u>: תהי (a_n) סדרה חיובית. אזי
1. אם קיים $0<k<1$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|a_{n+1}-a_n|\leq k^n$ אזי הסדרה מתכנסת.
2. אם קיים $0<q<1$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|a_{n+2}-a_{n+1}|\leq q|a_{n+1}-a_n|$ אזי הסדרה מתכנסת.

<u>משפט 2.4.1</u> (**משפט הסנדוויץ'** ): יהיו $(a_n),(b_n),(c_n)$ סדרות אשר מקיימות $a_n\leq b_n\leq c_n$ כמעט תמיד. כמו כן $a_n\to L$ וגם $c_n\to L$. אזי $b_n\to L$.

<u>למה 2.4.2</u>: אם $b_n\to b\neq 0$ אזי $\operatorname{sgn} b_n=\operatorname{sgn} b$ כמעט תמיד.

<u>למה 2.4.3</u>: אם $b_n\to b\neq 0$ אזי $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ חסומה.

<u>משפט 2.4.4</u>: יהיו $(a_n),(b_n)$ כך ש- $a_n\to a, b_n\to b$ ו- $a<b$. אזי $a_n<b_n$ כמעט תמיד.

<u>משפט 2.4.5</u>: יהיו סדרות $a_n\to a, b_n\to b$ כך שמתקיים $a_n<b_n$ כמעט תמיד. אזי $a\leq b$.

<u>למה 2.4.6</u>: תהי (x_n) סדרה. אזי $x_n\to 0$ אמ"מ $|x_n|\to 0$.

<u>משפט 2.4.7</u>: יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש- $a_n\to a, b_n\to b$. אזי:
1. $a_n+b_n\to a+b$
2. $a_n\cdot b_n\to a\cdot b$
3. $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$ אם המנות מוגדרות.

למה 2.4.8: תהי (x_n) סדרה. אזי $x_n \to 0 \Leftrightarrow x_n^2 \to 0$.

משפט 2.5.1: $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{M}$

משפט 2.5.2 (**הלמה של קנטור**[25]): תהיינה $(a_n),(b_n)$ כך ש- $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$. אזי קיימים $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a \le b$ ולכל $a \le x \le b$ מתקיים שלכל $n \in \mathbb{N}$ $a_n \le x \le b_n$. יתר על כן, אם $b_n - a_n \to 0$ אזי קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש- $a_n \le c \le b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

משפט 2.6.1 (**משפט הירושה**): תהי (x_n) סדרה ו- (x_{n_k}) סדרה חלקית שלה. אזי

1. אם $(x_n) \in \mathcal{B}$ אזי $(x_{n_k}) \in \mathcal{B}$
2. אם $(x_n) \in \mathcal{N}$ אזי $(x_{n_k}) \in \mathcal{N}$
3. אם $(x_n) \in \mathcal{C}$ אזי $(x_{n_k}) \in \mathcal{C}$. יתר על כן, אם $x_n \to x$ אזי $x_{n_k} \to x$
4. אם $(x_n) \in \mathcal{M}$ אזי $(x_{n_k}) \in \mathcal{M}$ באותו הכיוון ולכל הפחות באותה עוצמה.

משפט 2.6.2: לכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית.

מסקנה 2.6.3 (**משפט בולצאנו ויירשטראס**): לכל סדרה חסומה יש סדרה חלקית מתכנסת.

משפט 2.6.4: תהי $(x_n) \in \mathcal{B}$. $p \in S$ אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ הטענה $p - \varepsilon < x_n < p + \varepsilon$ נכונה באופן שכיח.

למה 2.7.1: תהי $\varnothing \ne X \subset \mathbb{R}$ חסומה מלמעלה (למטה). אזי קיימת סדרה (x_n) ב- X כך ש- $x_n \to \sup X$ ($x_n \to \inf X$).

משפט 2.7.2: תהי $(x_n) \in \mathcal{B}$. אזי $\liminf x_n, \limsup x_n \in S$.

משפט 2.7.3: תהי $(x_n) \in \mathcal{B}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $l = \liminf x_n$
2. עבור l לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:
   - 2.1. הטענה $x_n < l + \varepsilon$ נכונה באופן שכיח
   - 2.2. הטענה $l - \varepsilon < x_n$ נכונה כמעט תמיד

משפט 2.7.4: $i = \liminf x_n$

משפט 2.7.4: תהי $(x_n) \in \mathcal{B}$. אזי $(x_n) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n$

טענה 2.7.5: תהיינה $(a_n),(b_n) \in \mathcal{B}$. אזי $\limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$.

משפט 2.8.1: תהי (x_n) סדרה. אזי $(x_n) \in \mathcal{C}$ אמ"מ (x_n) סדרת קושי.

משפט 2.9.1: יהיו $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש- $a_n \le b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

- אם $a_n \to +\infty$ אז $b_n \to +\infty$
- אם $b_n \to -\infty$ אז $a_n \to -\infty$

[25] Nested Interval Property

<u>משפט 2.9.2</u> (**אריתמטיקה של גבולות אינסופיים**): x הוא גבול סופי של סדרה. אזי

$$x+\left(\pm\infty\right)=\pm\infty$$
$$\left(\pm\infty\right)+\left(\pm\infty\right)=\left(\pm\infty\right)$$
$$x\neq 0\Rightarrow x\cdot\left(\pm\infty\right)=\operatorname{sgn}x\cdot\left(\pm\infty\right)$$

<u>משפט 2.9.3</u>: אם $0<x_n$ אזי $x_n\to\infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n}\to 0$

<u>מסקנה 2.9.4</u>: אם $x_n\neq 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי

$$\frac{1}{x_n}\to 0\Leftrightarrow |x_n|\to\infty$$
$$\frac{1}{|x_n|}\to\infty\Leftrightarrow x_n\to 0$$

<u>משפט 2.9.5</u>: אם (x_n) סדרה מונוטונית עולה (יורדת) ואינה חסומה מלמעלה (מלמטה) אז $x_n\to+\infty$ ($x_n\to-\infty$).

<u>משפט 2.9.6</u>: אם $x_n\to\infty$ אזי לכל תת סדרה $x_{n_k}\to\infty$

<u>משפט 2.9.7</u>: לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

<u>משפט 2.9.8</u>: לכל סדרה שאינה חסומה מלמעלה (למטה) יש סדרה חלקית ששואפת לאינסוף (למינוס אינסוף).

<u>משפט 2.9.9</u>: $x_n\to l$ אמ"מ $l=\limsup x_n=\liminf x_n$ ו- l כאן על תקן גבול במובן הרחב.

<u>משפט 3.2.1</u> (**הקריטריון של קושי**): $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n<m$ מתקיים $|a_{n+1}+...+a_m|<\varepsilon$.

<u>משפט 3.2.2</u>: אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $a_n\to 0$.

<u>טענה 3.2.3</u>: תהי (a_n) סדרה חיובית יורדת כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. אזי $na_n\to 0$.

<u>משפט 3.3.1</u>: אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>משפט 3.3.2</u> (**מבחן ההשוואה**[26]): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}c_n,\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ טורים חיוביים. אזי:

1. אם $a_n\le c_n$ כמעט תמיד ו- $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
2. אם $d_n\le a_n$ כמעט תמיד ו- $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

---
[26] Comparison Test

<u>טענה 3.3.3</u>: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אמ"מ $1<p$.

<u>משפט 3.3.4</u> (**מבחן ההשוואה הגבולי**): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ טורים חיוביים ממש. אזי:

1. אם $0<\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
2. אם $0=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>משפט 3.3.5</u> (**מבחן המנה**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי. ויהיו $u=\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n},l=\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}$. אזי:

1. אם $u<1$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס
2. אם $1<l$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

<u>משפט 3.3.6</u> (**מבחן השורש**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי. ויהי $u=\limsup\sqrt[n]{a_n}$. אזי:

1. אם $u<1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס
2. אם $1<u$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

<u>משפט 3.3.7</u> (**מבחן העיבוי**): תהי (a_n) חיובית מונוטונית יורדת. אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ מתכנס.

<u>משפט 3.3.8</u> (**מבחן רבה**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי כך שקיימים $1<\alpha$ ו- $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)n\geq\alpha$. אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>משפט 3.4.1</u>:

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ל- S אזי $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ מתכנס לכל $m\in\mathbb{N}$ ומתקיים $S=s_m+r_m$.
2. אם קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ל- S ומתקיים $S=s_m+r_m$.

<u>משפט 3.5.1</u> (**משפט לייבניץ**): תהי (x_n) חיובית ממש, מונוטונית יורדת ממש ומתכנסת לאפס. אזי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ מתכנס. לסכום s שמקיים $0<s<x_1$.

<u>מסקנה 3.5.2</u>: בתנאי משפט לייבניץ, ה- m זנב של הטור $\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=r_m$ מתכנס ומתקיים $|r_m|<a_{m+1}$ ו- $0<(-1)^m r_m$.

משפט 3.6.1 (**אריתמטיקה של טורים**): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים. אזי

1. חיוביות: אם $0 \le a_n$ אז $0 \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. מונוטוניות: אם $a_n \le b_n$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
3. לינאריות:
   3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$
   3.2. $k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (ka_n)$

משפט 3.7.1 (**הלמה של אבל**): יהיו סדרות $(a_n),(b_n)$ ו- $1 < m < n$. אזי
$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m - \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) B_{k+1}$ כאשר $B_k = \sum_{i=1}^{k-1} b_i$.

משפט 3.7.2 (**קריטריון דיריכלה**): יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חסום ו- (a_n) סדרה חיובית מונוטונית שואפת לאפס. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

מסקנה 3.7.3 (**קריטריון אבל**): אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס ו- (a_n) מונוטונית וחסומה אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

משפט 3.7.4 (**חוק הצירוף**): אם טור מתכנס וסכומו S אזי לאותו סכום יתכנס כל טור שמתקבל מהראשון ע"י הכנסת סוגריים.

משפט 3.7.5: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס שהתקבל מטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ע"י הכנסת סוגריים כך שכל האיברים בתוך הסוגריים בעלי אותו סימן. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ולאותו סכום כמו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

משפט 3.8.6 (**חוק החילוף**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס. אם (b_n) התקבלה ע"י שינוי סדר של (a_n) אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

למה 3.8.7: יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט. נסמן $P_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, N_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} P_n, \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ מתכנסים ומתקיים $S = P - N$ כאשר $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n, N = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$. ולהפך, אם $\sum_{n=1}^{\infty} P_n, \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ מתכנסים אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

משפט 3.8.7 (**משפט החילוף**): יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט. ויהי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור שהתקבל ע"י שינוי סדר של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>משפט 3.8.8</u> (**משפט רימן**): אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז לכל $s \in \mathbb{R}$ קיים סידור כלשהו לאיברי הטור $b_n = a_{p(n)}$ כך ש- $s = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>משפט 3.8.1</u>: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים בהחלט עם סכומים a ו- b בהתאמה. נגדיר $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ [27]. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ מתכנס ל- c ומתקיים $c = ab$.

<u>משפט 4.1.1</u> (**אי שוויון הממוצעים**): יהיו $0 \le a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. אזי

$$\overbrace{\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}}^{\text{Harmonic Average}} \le \overbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}^{\text{Geometric Average}} \le \overbrace{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}}^{\text{Arithmetic Average}}$$

<u>טענה 4.1.2</u>: הסדרה המוגדרת ע"י $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת.

<u>משפט 5.3.1</u>: אם קיים הגבול של f ב- a אזי הוא יחיד.

<u>משפט 5.3.2</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a. אזי f רציפה ב- a אמ"מ $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

<u>משפט 5.3.3</u>: הגדרת הגבול לפי קושי שקולה להגדרת הגבול לפי היינה.

<u>משפט 5.3.4</u> (**קריטריון קושי**): $\lim_{x\to a} f(x) = l$ אמ"מ לכל $0 < \varepsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שלכל x, y שמקיימים $0 < |x-a| < \delta, 0 < |y-a| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

<u>משפט 5.3.5</u>: אם $0 \ne l = \lim_{x\to a} f(x)$ אזי לכל $q < l$ קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $q < f(x)$.

<u>משפט 5.4.1</u> (**אריתמטיקה של גבולות**): נניח שקיימים $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$. אזי:

1. $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
3. אם $g(x) \ne 0$ ו- $\lim_{x\to a} g(x) \ne 0$ אזי $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

<u>משפט 5.4.2</u> (משפט ה- ): יהיו $f(x), g(x), h(x)$ פונקציות כך ש- $f(x) \le g(x) \le h(x)$ בסביבה מנוקבת כלשהי של a. אם $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ אזי $l = \lim_{x\to a} g(x)$.

<u>משפט 5.4.3</u> (**כלל ההצבה**): אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\lim_{x\to a} g(x) = b$
2. קיימת סביבת מנוקבת של a כך ש- $g(x) \ne b$

---

[27] זהו סידור קושי

3. $\lim_{x\to b} f(x) = l$

אז $\lim_{x\to a^+} f(g(x)) = l$

<u>משפט 5.5.1</u>: $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ אמ"מ לכל (x_n) שמקיימת:

1. $x_n \in D_f$
2. $a < x_n$
3. $x_n \to a$

מתקיים $f(x_n) \to l$.

<u>משפט 5.5.2</u>: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקדת של a. אזי $\lim_{x\to a^+} f(x) = l = \lim_{x\to a^-} f(x)$ אמ"מ $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

<u>משפט 5.5.3</u>: תהי f מוגדרת בסביבה (לא מנוקדת) של a. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x אם $|x-a| < \delta$ אז $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
3. לכל (x_n) כך ש-$x_n \to a$ מתקיים $f(x_n) \to f(a)$

<u>משפט 5.5.4</u>: f רציפה ב-a אמ"מ f רציפה ב-a גם מימין וגם משמאל.

<u>משפט 5.6.1</u> (**משפט האפסים של ויירשטראס**): תהי f רציפה בקטע I ויהיו $a,b \in I$. אם $f(a)\cdot f(b) < 0$ אזי קיים $c \in I$ בין a לבין b כך ש-$f(c) = 0$.

<u>מסקנה 5.6.2</u> (**משפט ערך הביניים**): תהי f רציפה בקטע I. אזי $J = f(I)$ הינו קטע.

<u>משפט 5.6.3</u> (**משפט החסימות**): תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי f חסומה ב-$[a,b]$.

<u>משפט 5.6.4</u>: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי f מקבלת ב-$[a,b]$ הן ערך מקסימלי והן ערך מינימלי.

<u>משפט 5.7.1</u>: תהי f מונוטונית עולה ב-(a,b). לכל $x_0 \in (a,b)$ קיימים $\lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ומתקיים $\sup f((a,x_0)) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf f((x_0,b))$.

<u>מסקנה 5.7.2</u>: באותם התנאים אם $a < x_0 < y_0 < b$ אז

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x) \le \lim_{x\to y_0^-} f(x) \le f(y) \le \lim_{x\to y_0^+} f(x)$$

<u>משפט 5.7.3</u>: יהי $I \subset \mathbb{R}$ קטע ו-$f: I \to \mathbb{R}$ מונוטונית. אזי f רציפה ב-I אמ"מ $J = f(I)$ קטע.

<u>טענה 5.8.1</u>: קבוצת נקודות האי רציפות של f מונוטונית בקטע הינה בת מניה.

<u>משפט 5.9.1</u>: $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ אמ"מ לכל סדרה (x_n) כך ש-$x_n \in D_f$ ו-$x_n \to \infty$ מתקיים $f(x_n) \to l$.

משפט 5.10.1: תהי f רציפה ועולה (יורדת) ממש בקטע I. אזי קיימת פונקציה g כך ש-

1. $J = D_g = f(I)$
2. g הפוכה של f
3. g עולה (יורדת) ממש ב- J
4. g רציפה ב- J

משפט 5.11.1: פונקציה f המוגדרת ב- A אינה רציפה שם במ"ש אמ"מ קיים $0<\varepsilon$ וסדרות ב- A $(x_n),(y_n)$ אשר מקיימות $x_n - y_n \to 0$ אבל $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

משפט 5.11.2: אם f רציפה ב- $[a,b]$ אזי היא רציפה שם במ"ש.

משפט 5.11.3: אם f רציפה במ"ש ב- A אזי לכל סדרת קושי (x_n) ב- A גם $f(x_n)$ סדרת קושי.

משפט 5.12.4: תהי f מוגדרת ורציפה ב- (a,b). אזי f רציפה במ"ש ב- (a,b) אמ"מ f ניתנת להרחבה רציפה ב- $[a,b]$.

משפט 6.1.1: f גזירה ב- a אמ"מ קיימת $\varphi: I \to \mathbb{R}$ רציפה ב- a כך ש- $\varphi(x)(x-a) = f(x) - f(a)$ ואז $\varphi(a) = \lim_{x\to a}\varphi(x) = f'(a)$.

משפט 6.1.2: אם f גזירה ב- a אזי f רציפה ב- a.

משפט 6.2.1 (**אריתמטיקה של נגזרות**): תהיינה f,g גזירות ב- $a \in I$. אזי

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. אם $g(a) \neq 0$ אז $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$
4. אם $g(a) \neq 0$ אז $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

משפט 6.2.2 (**כלל השרשרת**): תהיינה g גזירה ב- a ו- f גזירה ב- $b = g(a)$. אזי $f \circ g$ גזירה ב- a ומתקיים $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

משפט 6.3.1: תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה הפיכה בקטע, גזירה ב- a ומקיימת $f'(a) \neq 0$. תהי g הפונקציה ההפוכה שלה. אז g גזירה ב- $b = f(a)$ ומתקיים $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

משפט 6.4.1 (**משפט פרמה**): אם $f: I \to \mathbb{R}$ מקבלת מקסימום (מינימום) בנקודה פנימית $a \in I$ ו- f גזירה בה, אזי $f'(a) = 0$.

משפט 6.4.2 (**משפט רול**): תהי f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b). אם $f(a) = f(b)$ אזי קיים $a < c < b$ כך ש- $f'(c) = 0$.

<u>משפט 6.4.3</u> (**משפט לגרנז'**): תהי f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). אזי קיים $a<c<b$ כך ש-$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>משפט 6.4.4</u> (**משפט קושי**): תהיינה f,g רציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b) וכן $g'\neq 0$ ב-(a,b) ו-$g(a)\neq g(b)$. אזי קיים $a<c<b$ כך ש-$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>משפט 6.4.5</u>: תהי f גזירה בקטע I. אזי ל-f' תכונת ערך הביניים ב-I.