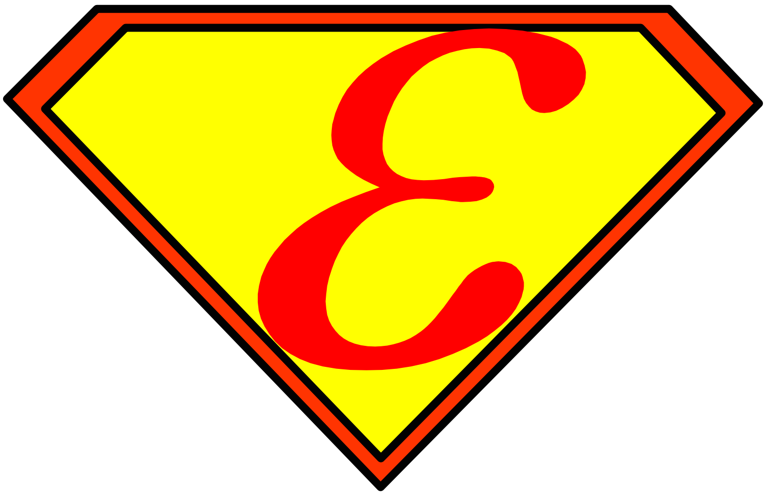
סיכומי גן-עדן מציגים...

חשבון אינפיניטסימלי 2
Revolutions



סוכם, נכתב ועובד ע"י דינה זליגר

בהשראת: מר איתמר צביק
גב' שלי גריון
הספר המדהים של פיכטנגולץ

מוקדש באהבה לכל תלמידי המתמטיקה...

" OH CALCULUS, OH CALCULUS!"

By Denis Gannon (1940-1991)
may be sung to "Oh, Christmas Tree"

Oh, Calculus; Oh, Calculus,
How tough are your two branches.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
To pass, what are my chances?
Derivatives, I cannot take,
At integrals my fingers shake.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
How tough are your two branches.

Oh, Calculus; Oh, Calculus,
Your theorems I can't master.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
My proofs are a disaster.
You pull a trick out of the air,
Or find a reason, God knows where.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
Your theorems I can't master.

Oh, Calculus; Oh, Calculus,
Your problems do distress me.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
Related rates depress me.
I cut out boxes in my sleep,
And max and min do make me weep.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
Your problems do distress me.

Oh, Calculus; Oh, Calculus,
My limit I am reaching.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
For mercy, I'm beseeching.
My grades do not approach a B,
They're just an epsilon from D.
Oh, Calculus; Oh, Calculus,
My limit I am reaching.

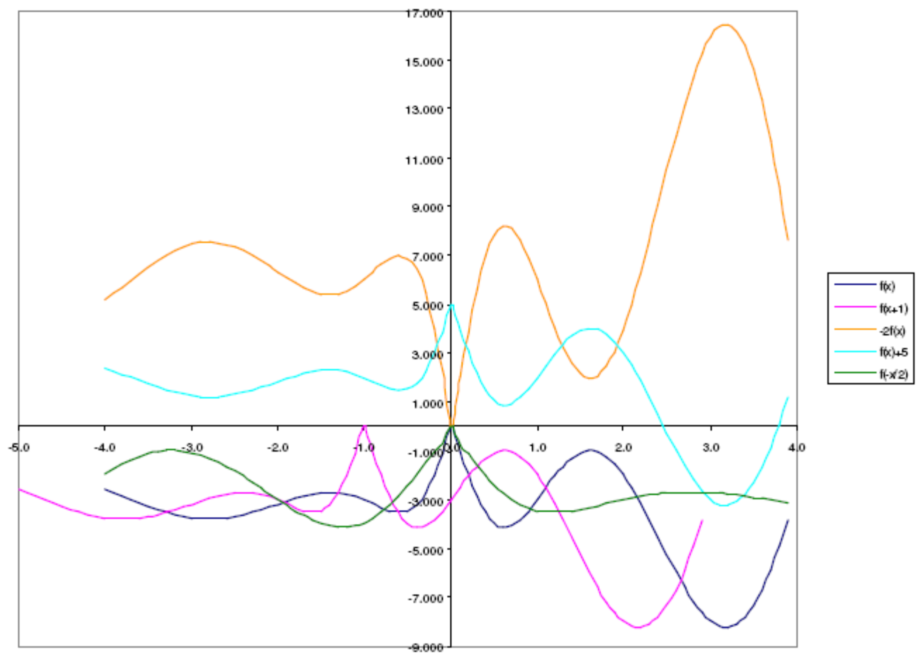
תוכן העניינים

1. חקירת פונקציות

1.1. הזזה ומתיחה של פונקציות

תהי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אף ללא נוסחה מפורשת, בהינתן גרף של $f(x)$, נוכל לדעת איך משפיעים עליו שינויים כאלה ואחרים:

1. הגרף של $f(x)+a$ עולה ב- a אם $0<a$ ויורד ב- $|a|$ אם $a<0$
2. הגרף של $f(x+a)$ זז שמאלה ב- a אם $0<a$ וזז ימינה ב- $|a|$ אם $a<0$
3. הגרף של $af(x)$ נמתח (או מתכווץ) פי a אם $0<a$ ונמתח (או מתכוץ) ומתהפך ביחס לציר ה- x אם $a<0$
4. הגרף של $f(ax)$ מתכווץ (או נמתח) אופקית פי a אם $0<a$ ואילו אם $a<0$ הוא גם מתהפך ביחס לציר ה- y .
5. בשביל לצייר את הגרף של $\frac{1}{f(x)}$ יש לשים ♥ לכמה פרטים:
   a. עבור $f(x)=\pm1$ גם $\frac{1}{f(x)}=\pm1$.
   b. בנקודות שבהן יש אסימפטוטות אנכיות יהיה $\frac{1}{f(x)}=0$.
   c. עבור נקודות בהן $f(x)=0$ יהיו אסימפטוטות אנכיות. הסימן של האינסוף ייקבע לפי הסימן של $f(x)$ בצד הרלוונטי.



1.2. שלבי חקירת פונקציה

1.2.1. תחום הגדרה

הגדרה: **תחום הגדרה** של פונקציה f הוא קבוצת המספרים $D\subset\mathbb{R}$ שעבורה לכל $x\in D$ הביטוי $f\left(x\right)$ מוגדר היטב.

דוגמה: בשביל למצוא את תחום ההגדרה של $f\left(x\right)=\sqrt{\arcsin x}$ יש לשים ♥ לשני דברים. ראשית, $\arcsin x$ צריך להיות מוגדר היטב ולכן צריך להתקיים $-1\le x\le 1$. שנית, $\sqrt{\arcsin x}$ צריך להיות מוגדר היטב ולכן $0\le \arcsin x$, כלומר $0\le x\le 1$. סה"כ תחום ההגדרה של $f\left(x\right)$ הוא $\left[0,1\right]$.

1.2.2. סימטריה

הגדרה: נאמר שפונקציה f **זוגית** אם לכל x בתחום ההגדרה שלה מתקיים $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ ונאמר שהיא **אי זוגית** אם לכל x בתחום ההגדרה שלה מתקיים $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

הגדרה: פונקציה f תיקראו מחזורית אם קיים $T\in\mathbb{R}$ כך שלכל x מתקיים $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$. נאמר ש- T הוא **המחזור** של $f\left(x\right)$.

דוגמאות:

1. $\cos x$ היא פונקציה זוגית עם מחזור 2π ו- $\sin x$ היא פונקציה אי זוגית עם מחזור 2π.
2. x^2 היא פונקציה זוגית שאינה מחזורית ו- x^3 היא פונקציה אי זוגית שאינה מחזורית.
3. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי זוגית היא פונקצית האפס $f\left(x\right)\equiv 0$.

1.2.3. גבולות בקצה התחום

נניח שהפונקציה שאנו חוקרים $f\left(x\right)$ מוגדרת בקטע I שגבולותיו סופיים $a<b$. אז נחשב את $\lim\limits_{x\to b^-} f\left(x\right),\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)$. אם הפונקציה מוגדרת על קטע מפוצל נחשב את הגבולות של כל אחד מהחלקים.

1.2.4. אסימפטוטות

הגדרה: נאמר של- $f\left(x\right)$ יש **אסימפטוטה אנכית** ב- x_0 מימין (משמאל) אם $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\pm\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\pm\infty$).

הגדרה: הישר $y=ax+b$ נקרא **אסימפטוטה משופעת** של $\left(fx\right)$ ב- ∞ (ב- $-\infty$) אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-y\right)=0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-y\right)=0$). האסימפטוטות ב- $\pm\infty$ לא תמיד מתלכדות.

טענה: $y=ax+b$ אסימפטוטה משופעת של $f\left(x\right)$ ב- ∞ אמ"מ קיימים הגבולות $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}$ ו- $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- $y=ax+b$ אסימפטוטה משופעת של $f\left(x\right)$ ב- ∞. אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-y\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-ax-b\right)=0$. לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)=b$ ואם נחלק ב- x נקבל $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f\left(x\right)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0$ ואז לפי

אריתמטיקה של גבולות $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ו- $b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$. נראה ש- $y=ax+b$ מקיים ש- $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y\right)=0$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\left(\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\right)\cdot x-\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\left(\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\right)\cdot x\right)\right)$$

קל לראות שהכל פה מצטמצם ואכן $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y\right)=0$. ☺

<u>הערה</u>: שהתנאי הראשון בלבד אינו מספיק. למשל, אם $f(x)=x$ אז $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ אבל ל- $\sin x$ אין אסימפטוטה משופעת.

1.2.5. <u>רציפות</u>

נבדוק אם יש ל- $f(x)$ נקודות אי רציפות ומאיזה סוג הן.

1.2.6. <u>גזירות</u>

נבדוק אם יש נקודות שבהם הפונקציה אינה גזירה.

1.2.7. <u>תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון</u>

<u>טענה</u>: אם $f(x)$ גזירה ב- (a,b) ו- $0<f'(x)$ ($0<f'(x)$) לכל $x\in(a,b)$ אזי f עולה (יורדת) ממש ב- (a,b).

<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה ש- $0<f'(x)$. יש להראות שלכל $x<y$ מתקיים $f(x)<f(y)$. לפי משפט הערך הממוצע בנוסח לגרנז' לכל $x,y\in(a,b)$ קיים $c\in(a,b)$ כך ש- $0<f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. אבל אם $x<y$ אז $0<y-x$ ולכן $0<f(y)-f(x)$ ולכן $f(x)<f(y)$. ☺

<u>טענה</u>: אם $f(x)$ גזירה פעמיים ב- x_0 ו- $f'(x_0)=0$. אם $f''(x_0)<0$ ($0<f''(x_0)$) אז x_0 נקודת מקסימום (מינימום) מקומי של $f(x)$. אם $f''(x_0)=0$ לא ניתן לדעת.

1.2.8. <u>תחומי קמירות וקעירות</u>

<u>הגדרה</u>: פונקציה $f(x)$ נקראת **קמורה** בקטע (a,b) אם היא נמצאת מתחת לכל המיתרים שלה. הפונקציה תיקרא **קעורה** אם היא נמצאת מעל כל המיתרים שלה. באופן פורמלי, פונקציה היא קמורה אם לכל $x,y\in(a,b)$ ולכל $0<t<1$ מתקיים $f(tx+(1-t)y)>tf(x)+(1-t)f(y)$.

<u>טענה</u>: אם $f(x)$ גזירה פעמיים ב- (a,b) ולכל $x\in(a,b)$ $f''(x)<0$ ($0<f''(x)$) אז $f(x)$ קעורה (קמורה) ב- (a,b).

1.2.9. <u>סקיצה של הגרף</u>

לאחר כל הבדיקות לעיל מציירים סקיצה של הגרף. לצורך כך כדאי גם למצוא את נקודות המפגש עם הצירים.

1.3. קריאה נוספת

נעיר ש החומר לא מופיע ב-Notes-Heaven מאחר שהתרגול היה עם עידו סמט ולא התקבל ממנו אישור לפרסם את הרשימות שלו. חומר קריאה נוסף ניתן למצוא כאן:

1. דוגמה לחקירה מלאה של פונקציות תמצאו בתרגיל 1: http://notes-heaven.intertent.net/InfinitesimalAnalysisII/ex/ex01dina.pdf
2. בן-ציון קון וסמי זעפרני, <u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1</u>, פרק 8: עמ' 201-225

2. משפטי ערך ממוצע מסדר גבוה

2.1. תזכורות

משפט רול: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ המקיימת את התנאים הבאים:

א. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$

ב. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b)

ג. $f(a)=f(b)$

אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

משפט הערך הממוצע של לגרנז': תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

משפט הערך הממוצע של קושי: יהיו $f(x)$ ו-$g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), ובנוסף $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$. אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

משפט ערך הביניים של דרבו: תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי עבור כל ערך β שנמצא בין $\lim_{x\to a^+}f'(x)$ לבין $\lim_{x\to b^-}f'(x)$ קיים $a\le x\le b$ כך ש- $f'(x)=\beta$.

2.2. כללי לופיטל

טענה: יהיו $f(x)$ ו-$g(x)$ פונקציות גזירות בסביבת הנקודה a. נניח ש-$f(a)=0=g(a)$ ו-$g'(a)\neq 0$. אזי $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

הוכחה: הפונקציות גזירות בסביבת הנקודה a ולכן קיימים הגבולות $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ו- $\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. אבל $f(a)=0=g(a)$. ולכן

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$ ☺

<u>דוגמה</u>: $f(x)=x^2, g(x)=\sin x$ ו- $a=0$. ברור שמתקיימים תנאי הטענה ולכן $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin x}=\frac{2x}{\cos x}\Big|_{x=0}=\frac{0}{1}=0$

<u>כלל לופיטל</u>: יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b) ($-\infty\le a<b\le\infty$). נניח ש- $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ ($-\infty\le l\le\infty$) וכן $g'(x)\neq0$ ב- (a,b) אזי אם

1. $\lim_{x\to a^+}f(x)=0=\lim_{x\to a^+}g(x)$ <u>או</u>
2. $\lim_{x\to a^+}|g(x)|=\infty$

אז $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נוכיח למה.

למה: אם $-\infty\le l<\infty$ אז לכל $l<q$ קיים $a<c_1<b$ כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)}<q$ לכל $a<x<c_1$ ואילו אם $-\infty<l\le\infty$ אז לכל $p<l$ קיים $a<c_2<b$ כך ש- $p<\frac{f(x)}{g(x)}$ לכל $a<x<c_2$.

הוכחה הלמה: ברור ששני המקרים סימטריים ולכן נוכיח רק את המקרה הראשון עבור $-\infty\le l<\infty$.
נטען ש- $g'(x)$ אינה מחליפה סימן ב- (a,b). אחרת, לפי משפט דרבו היה קיים $x\in(a,b)$ כך ש- $g'(x)=0$, בניגוד להנחה. נניח בה"כ ש- $g'(x)<0$. לכן $g(x)$ יורדת ב- (a,b) ולכן מתאפסת לכל היותר מפעם אחת. לכן, ע"י הקטנת b ניתן להניח ש- $g(x)$ שוות סימן ב- (a,b).

כעת יהי $l<q$. ניתן לבחור $l<r<q$. נתון ש- $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$. לכן קיים $a<c<b$ כך ש- $\frac{f'(x)}{g'(x)}<r$ לכל $a<x<c$. לכל $a<s<t<c<b$, לפי משפט הערך הממוצע של קושי קיים $u\in(s,t)$ כך ש- $\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}=\frac{f'(u)}{g'(u)}$. מאחר ש- $a<u<c$ מתקיים $\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}=\frac{f'(u)}{g'(u)}<r$.*

אם מתקיים תנאי 1: $\lim_{s\to a^+}f(s)=0=\lim_{s\to a^+}g(s)$. נניח ש- t קבוע. אזי $\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{s\to a^+}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{s\to a^+}\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}$. ולכן $\frac{f(t)}{g(t)}\le r<q$. אבל זה נכון לכל $a<t<c$ ומכאן הטענה.

אם מתקיים תנאי 2: $\lim_{x\to a^+}|g(x)|=\infty$. הנחנו ש- $g(x)$ שוות סימן. נניח בה"כ שהיא חיובית. אזי $\lim_{x\to a^+}g(x)=\infty$. מאחר ש- $g(x)$ יורדת וחיובית ו- $s<t$ אז $0<\frac{g(s)-g(t)}{g(s)}$. לכן ניתן לכפול את (*) בביטוי זה ונקבל:

$$\frac{f(s)-f(t)}{g(s)}=\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}\cdot\frac{g(s)-g(t)}{g(s)}<r\cdot\frac{g(s)-g(t)}{g(s)}$$

נשים ♥ ש- $1>1-\frac{g(t)}{g(s)}=\frac{g(s)-g(t)}{g(s)}>0$. לכן $r>r\cdot\frac{g(s)-g(t)}{g(s)}>\frac{f(s)-f(t)}{g(s)}$ כלומר $\frac{f(s)}{g(s)}<\frac{f(t)}{g(s)}+r\le\left|\frac{f(t)}{g(s)}\right|+r$.

$\lim_{s\to a^+}g(s)=\infty$ ולכן $\lim_{s\to a^+}\frac{f(t)}{g(s)}=0$. ניתן לבחור $a<c$ אשר מבטיח ש- $0<\left|\frac{f(t)}{g(s)}\right|<\frac{q-r}{2}$ לכל $a<s<c$. לכן $\frac{f(s)}{g(s)}<\frac{q-r}{2}+r<q$. ☺

נחזור להוכחת המשפט: נסתכל בכמה מקרים:

1. אם $l \in \mathbb{R}$ סופי. יהי $0 < \varepsilon$ ויהיו $l - \varepsilon = p < l < q = l + \varepsilon$. יהי $c = \min\{c_1, c_2\}$ כאשר c_1, c_2 מתאימים ל- q, p לפי הלמה. אז לכל $a < x < c$ מתקיים $l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$, כלומר $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
2. אם $l = -\infty$, בהינתן $q \in \mathbb{R}$ קטן כרצוננו, נוכל לבחור $a < c_1$ לפי הלמה כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ לכל $a < x < c_1$, כלומר $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
3. אם $l = \infty$, בהינתן $p \in \mathbb{R}$ גדול כרצוננו, נוכל לבחור $a < c_2$ לפי הלמה כך ש- $p < \frac{f(x)}{g(x)}$ לכל $a < x < c_2$, כלומר $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. ☺

<u>דוגמאות</u>: נשים ♥ שבדוגמאות הבאות קיים הגבול $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ולכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$

<u>אנטי דוגמאות</u>: בדוגמאות הבאות לא קיים הגבול $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ ולכן לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

1. אם $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ו- $g(x) = \sin x$ אז אפשר לחשב באופן ישיר $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$. אם ננסה להשתמש בכלל לופיטל נקבל $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}$ אבל לביטוי זה אין גבול.
2. אם $f(x) = x$ ו- $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ אז אפשר לחשב באופן ישיר $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$. אבל אם ננסה להשתמש בכלל לופיטל נקבל $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$ שזה לא נותן לנו כלום...

<u>התחכמויות</u>:

1. אם נשתמש ישירות בכלל לופיטל בשביל לחשב את $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$ נקבל שיש לחשב את $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{-2x}{\left(x^2\right)^2}\right)$ וזה קשה יותר. אבל נשים ♥ ש- $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ ועכשיו אפשר להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2x}{\left(x^2\right)^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{\sin x}}$. כעת מהרציפות של הפונקציה e^x מספיק לחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x} = 1$. לכן $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$.

<u>טענה</u>: יהי $p(x)\in\mathbb{R}[X]$ פולינום. אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^x} = 0$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על הדרגה של $p(x)$.

2.3. קירובים פולינומיאליים

<u>טענה</u>: יהי $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-a)^i$. אזי לכל $0\le k\le n$ מתקיים $a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$.

<u>הוכחה</u>: נחשב את הנגזרות באופן מפורש:

$$p^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i i (x-a)^{i-1}$$
$$p^{(2)}(x) = \sum_{i=2}^{n} a_i i(i-1)(x-a)^{i-2}$$
$$p^{(3)}(x) = \sum_{i=3}^{n} a_i i(i-1)(i-2)(x-a)^{i-3}$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(x) = \sum_{i=n}^{n} a_i i(i-1)(i-2)\dots(i-(n-1))(x-a)^{i-n}$$

$$p(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i (a-a)^i = a_0$$
$$p^{(1)}(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i i (a-a)^{i-1} = a_1$$
$$p^{(2)}(a) = \sum_{i=2}^{n} a_i i(i-1)(a-a)^{i-2} = 2a_2$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(a) = a_n n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))(a-a)^{n-n} = n!a_n$$

סה"כ לכל $0\le k\le n$ מתקיים $a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי f גזירה n פעמים בנקודה a. הפולינום $T_{f,n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ נקרא **פולינום טיילור מסדר** n **של** f **בחזקות של** $x-a$ (**או סביב** a).

אם ברור באיזו פונקציה ובאיזו נקודה מדובר נסמן רק $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

<u>טענה</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a וגזירה n פעמים ב-a. יהי $T_n(x)$ הפולינום טיילור של f מסדר n סביב a. אזי לכל $0\le k\le n$ מתקיים $f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$.

<u>הוכחה</u>: לפי הטענה הקודמת לכל $0\le k\le n$ מתקיים $\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{T_n^{(k)}(a)}{k!}$ ולכן $f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$. ☺

<u>טענה</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a וגזירה n פעמים ב-a. יהי $T_n(x)$ הפולינום טיילור של f מסדר n סביב a. אזי לכל $0 \le j \le n$ $T_n^{(j)}(x)$ הוא פולינום טיילור מסדר $n-j$ של $f^{(j)}(x)$ סביב a.

<u>הוכחה</u>: נסמן $g(x)=f^{(j)}(x)$. לפי ההגדרה $\sum_{i=1}^{n-j}\frac{f^{(i+j)}(a)}{i!}(x-a)^i = \sum_{i=1}^{n-j}\frac{g^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = T_{n-j,g,a}(x)$. אבל מצד שני $\sum_{i=0}^{n-j}\frac{f^{(i+j)}(a)}{i!}(x-a)^i = \sum_{i=j}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}\cdot\frac{i!}{(i-j)!}(x-a)^{i-j} = \sum_{i=j}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}i(i-1)\ldots(i-j+1)(x-a)^{i-j} = T_n^{(j)}(x)$.

כלומר $T_n^{(j)}(x)$ הוא פולינום טיילור מסדר $n-j$ של $f^{(j)}(x)$ סביב a. ☺

<u>משפט</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a וגזירה ב-a n פעמים. אזי $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}=0$.

<u>הוכחה</u>: נחשב באופן מפורש:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right]$$

נסמן $Q(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$ ו-$g(x)=(x-a)^n$. תחת סימונים אלה נרצה להוכיח ש-$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)-Q(x)}{g(x)}$. לפי הנתון f גזירה $n-1$ פעמים בסביבה של a ו-n פעמים ב-a עצמה. לכן נקבל מהרציפות ש-

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-Q(x)\right)=f(a)-Q(a)=0$$
$$\lim_{x\to a}\left(f'(x)-Q'(x)\right)=f'(a)-Q'(a)=0$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x\to a}\left(f^{(n-2)}(x)-Q^{(n-2)}(x)\right)=f^{(n-2)}(a)-Q^{(n-2)}(a)=0$$

כמו כן לכל $0\le k<n$ מתקיים $g^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$ ולכן $\lim_{x\to a}g^{(k)}(x)=0$. אם נראה שמתקיים $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-2)}(x)-Q^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)}$ נוכל להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(1)}(x)-Q^{(1)}(x)}{g^{(1)}(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-2)}(x)-Q^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

נחשב אז את הגבול:

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-2)}(x)-Q^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{n!}\cdot\frac{f^{(n-1)}(x)-Q^{(n-1)}(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{1}{n!}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

וקיבלנו את הדרוש. ☺

<u>משפט</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a וגזירה n פעמים ב-a ויהי $q(x),p(x)\in\mathbb{R}[X]$ כך ש-$\deg q(x),\deg p(x)\le n$ ו-$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-q(x)}{(x-a)^n}=0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}$. אזי $q(x)=p(x)$.

<u>הוכחה</u>: נסמן $R(x)=q(x)-p(x)$. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-q(x)}{(x-a)^n}=0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}$ ולכן $\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n}=0$. נניח ש-

$R(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i\left(x-a\right)^i$. $\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{\left(x-a\right)^n}=0$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות לכל $0\le i\le n$ מתקיים $\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{\left(x-a\right)^i}=0$.

כלומר $\lim_{x\to a}R(x)=\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{\left(x-a\right)^0}=0$ ומהרציפות נקבל ש- $R(x)=0$, כלומר $b_0=0$. לכן $R(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i\left(x-a\right)^i$.

אבל $\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{\left(x-a\right)^1}=0$ ולכן $b_1=0$. נמשיך הלאה באתו אופן עד שנקבל שלכל $0\le i\le n$ $b_i=0$. כלומר $R(x)\equiv 0$. מכאן ש- $p(x)=q(x)$. ☺

<u>מסקנה</u>: פולינום טיילור של פונקציה $f(x)$ נסדר n הוא יחיד.

<u>משפט טיילור</u>: תהי f גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,x]$ ונניח שקיימת הנגזרת מסדר $n+1$ בקטע (a,x).
אם $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ אזי:

1. שארית בנוסח קושי: קיים $a<c<x$ כך ש- $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}\left(x-c\right)^n\left(x-a\right)$
2. שארית בנוסח לגרנז': קיים $a<c<x$ כך ש- $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}$

<u>הוכחה</u>:
יהי x קבוע ונתבונן על הביטוי הבא כפונקציה של t בקטע (a,x):

$$* f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2+...+\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k+...+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+S(t)$$

נשים ♥ שאם נציב $t=a$ נקבל ש- $S(a)=R_n(x)$ וכן אם נציב $t=x$ נקבל $S(x)=0$.
נגזור את שני אגפי (*) לפי t ונקבל:

$$0=f'(t)+(-1)f'(t)+f''(t)(x-t)+(-1)(x-t)f''(t)+\frac{f'''(x)}{2}(x-t)^2+...+$$
$$+(-1)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(t)+f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}+...+(-1)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}+S'(t)$$

כמעט כל האיברים מצטמצמים ונקבל $0=f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}+S'(t)$ או $S'(t)=-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$.
תהי $g(t)$ פונקציה מוגדרת ורציפה בקטע $[a,x]$ וגזירה ב- (a,x) כך ש- $g'(t)\ne 0$ לכל $a<t<x$. קל לראות ש- $S(t)$ ו- $g(t)$ עומדות בתנאי משפט הערך הממוצע של קושי: $S(t)$ אמנם רציפה ב-$[a,x]$ וגזירה ב- (a,x) משום שהיא הפרש בין פונקציה שמקיימת תנאים אלה לבין פולינום. לכן קיים $a<c<x$ כך ש-

$$\frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{S'(c)}{g'(c)}$$

נזכור ש- $S(x)=0$ ונציב את c ב- $S'(t)$ ונקבל:

$$** R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}}{g'(c)}\left(g(x)-g(a)\right)$$

1. נבחר $g(t)=t$, ברור שהיא מקיימת את התנאים הדרושים. נציב ב-(**) ונקבל את השארית בנוסח קושי: $R_n(x)=f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}(x-a)$
2. נבחר $g(t)=(x-t)^{n+1}$ ואז $g'(t)=(n+1)(x-t)^n(-1)$. נציב ב-(**) ונקבל את השארית בנוסח לגרנז':

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}}{(n+1)(x-c)^n}(x-a)^{n+1}=\frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ .\ ☺$$

<u>הערה</u>: אם $a<c<x$ קיים $0<\theta<1$ כך ש- $c=a+\theta(x-a)$ ואז השאריות מקבלות את הצורה הבאה:

השארית בנוסח קושי: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(1+\theta)^n(x-a)^{n+1}$

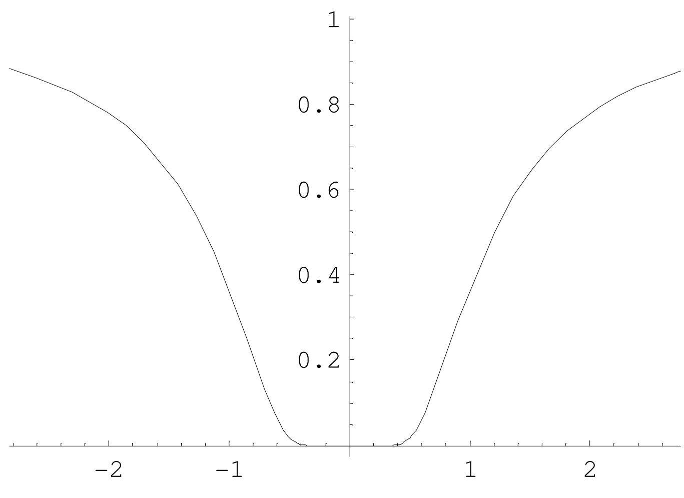
השארית בנוסח לגרנז': $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

<u>פולינומי טיילור שימושיים</u>: כל הפיתוחים להלן סביב $x=0$.

1. $e^x=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}+R_n(x)$
2. $\ln(1+x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i+1}x^{i+1}+R_n(x)$
3. $\frac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{n}x^i+R_n(x)$
4. $\sin x=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{2i+1}+R_n(x)$
5. $\cos x=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(2i)!}x^{2i}+R_n(x)$
6. $\sinh x=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(2i+1)!}x^{2i+1}+R_n(x)$
7. $\cosh x=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(2i)!}x^{2i}+R_n(x)$
8. $(1+x)^\alpha=\sum_{i=0}^{n}\binom{\alpha}{i}x^i+R_n(x)$

<u>אנטי דוגמה</u>: יש פונקציות ר-ע-ו-ת!

הפונקציה $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ מקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ $f^{(n)}(0)=0$. לכן סביב 0 $T_n(x)\equiv 0$. אז המידע הזה לא נותן לנו כלום ולא מאפשר לנו לחשב קירובים של הפונקציה!



<u>סימונים</u>:

- נסמן ב- $\mathscr{B}_a$ את קבוצת הפונקציות החסומות בסביבה פתוחה מנוקבת של a
- נסמן ב- $\mathscr{N}_a$ את קבוצת הפונקציות ששואפות ל- 0 ב- a

נשים ♥ שקבוצות אלה מהוות מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u>: תהיינה f,g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a. נאמר ש- $f=O(g)$ כאשר $x\to a$ אם $\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathcal{B}_a$.

ונאמר ש- $f=o(g)$ כאשר $x\to a$ אם $\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathcal{N}_a$.

תחת הסימונים החדשים, פולינום טיילור הוא היחיד שמקיים $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ כאשר $R_n(x)=o\left((x-a)^n\right)$.

<u>הגדרה</u>: יהי $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$. אזי $\left[p(x)\right]_k=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i$.

<u>טענה</u>: תהיינה f,g גזירות $n+1$ פעמים ב- 0. נניח כי $f(x)+P_n(x)+R_n(x)$ ו- $g(x)=Q_n(x)+S_n(x)$ כאשר $P_n(x),Q_n(x)$ הם פיתוחי טיילור של f,g מסדר n סביב 0 ו- $R_n(x),S_n(x)$ הן השאריות בהתאמה. אזי $\left[P_n(x)Q_n(x)\right]_n$ הוא הפולינום טיילור מסדר n של המכפלה $f(x)g(x)$.

<u>טענה</u>: תהיינה f,g גזירות $n+1$ פעמים ב- 0. נניח כי $f(x)+P_n(x)+R_n(x)$ ו- $g(x)=Q_n(x)+S_n(x)$ כאשר $P_n(x),Q_n(x)$ הם פיתוחי טיילור של f,g מסדר n סביב 0 ו- $R_n(x),S_n(x)$ הן השאריות בהתאמה. נניח ש- $g(0)=0$. אזי פולינום טיילור מסדר n של ההרכבה $f\circ g$ סביב 0 הוא $\left[P\left(Q(x)\right)\right]_n$.

<u>טענה</u>: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 וגזירה בנקודה n פעמים. נניח שלכל $1\le i\le n-1$ $f^{(i)}(x_0)=0$ ו- $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. אזי:

1. אם n אי זוגי אזי אין ב- x_0 נקודת קיצון
2. אם n זוגי אז
   a. אם $f^{(n)}(x_0)<0$ אז x_0 נקודת מקסימום מקומי
   b. אם $0<f^{(n)}(x_0)$ אז x_0 נקודת מינימום מקומי.

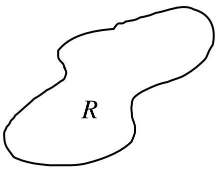
<u>טענה</u>: e איננו רציונלי.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש- $e=\frac{m}{n}$ שבר מצומצם. ידוע ש- $e^e=1+x+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$ ולכן $e=1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n!}+R_n(1)=\frac{m}{n}$. נכפול את שני האגפים ב- $n!$ ונקבל $n!\left(1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n!}\right)+n!R_n(1)=(n-1)!m$. ברור ש- $(n-1!)m\in\mathbb{Z}$, $n!\left(1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n!}\right)$. ולכן גם $n!R_n(1)\in\mathbb{Z}$. ידוע ש- $R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}$ כאשר $c\in(0,1)$. ולכן $n!R_n(1)=\frac{e^c}{n+1}\in\mathbb{Z}$. ידוע ש- $e<3$ ולכן $e^c<3$. כלומר n יכול להיות רק $0,1,2$. ברור ש- $n\neq 0$. $n\neq 1$ כי $2<e<3$ וגם $n\neq 2$ כי $2\frac{1}{2}<e<3$. וזאת סתירה. לכן e לא יכול להיות רציונלי. ☺

3. אינטגרל רימן

3.1. מוטיבציה

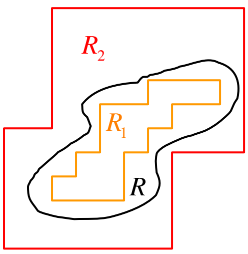
המוטיבציה בפיתוח תורת האינטגרציה היא בעיית השטח. מושג השטח ידוע לנו עוד מימי בית הספר היסודי העליזים. לכל צורה מישורית (אשר מיוצגת באופן פורמלי כתת קבוצה $R \subseteq \mathbb{R}^2$) אנחנו מייחסים מידה $\mu(R)$ שמקיימת את התכונות הבאות:



1. חיוביות: $0 \le \mu(R)$
2. מונוטוניות: אם $R_1 \subseteq R_2$ אז $\mu(R_1) \le \mu(R_2)$
3. אדטיביות: אם $R_1 \cap R_2 = \varnothing$ אז $\mu(R_1 + R_2) = \mu(R_1) + \mu(R_2)$

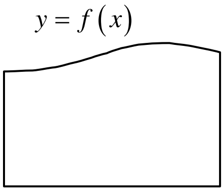
לשם הגדרת מידה שכזו אנחנו צריכים יחידה שתשמש לנו כקנה מידה. אז נבחר ריבוע $\square$ ונקבע שהמידה שלו היא $\mu(\square) = 1$.

באופן טבעי, מידות של אזורים מלבניים הרבה יותר קל לנו לחשב. לכן נרצה לבצע הערכות של המידה של R ע"י מידות של אזורים מלבניים. בציור $R_1 \subseteq R \subseteq R_2$ ולפי תכונת המונוטוניות נקבל ש- $\mu(R_1) \subseteq \mu(R) \subseteq \mu(R_2)$. אך ברור שיש עוד מקום לשיפור רב בהערכה שלנו את המידה. אם האזור R חסום אזי לקירובים מבחוץ $\{R_2\}$ יש חסם תחתון ולקירובים מבפנים $\{R_1\}$ יש חסם עליון.



נאמר של- R יש מידה אם קיים מספר יחיד שמבדיל בין הקירובים מבחוץ לבין הקירובים מבפנים.

אנחנו נעסוק באזורים שבנויים משלושה צדדים מלבניים וצד אחד שמהווה גרף של פונקציה $f(x)$. את הקירובים מבחוץ ומבפנים נקבל ע"י קירובים של $f(x)$ מלמעלה ומלמטה בהתאמה.



נסכים שלאזורים שמעל ציר ה- x יש מידה חיובית ואילו לאזורים מתחת לציר ה- x יש מידה שלילית.

3.2. פונקציות מדרגות

<u>הגדרה</u>: **חלוקה** של הקטע $[a,b]$ הינה קבוצה סדורה $\mathscr{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ כך ש- $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
לפעמים נרשום $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. הנקודות $\{x_i\}_{i=0}^n$ נקראות **נקודות_החלוקה**.

<u>הגדרה</u>: יהיו שתי חלוקות $\mathscr{P}_1 = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ ו- $\mathscr{P}_2 = \{c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d\}$. **איחוד_החלוקות** $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ הוא חלוקה של הקטע $[\min\{a,c\}, \max\{b,d\}]$ שנקודות החלוקה שלה הן הקבוצה $\{x_i\}_{i=0}^n \cup \{y_j\}_{j=0}^m$ מסודרת מן הקטן אל הגדול.

<u>הגדרה</u>: פונקציה φ מוגדרת בקטע $[a,b]$ תיקרא **פונקצית מדרגות** אם קיימת חלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ וקיימים קבועים $c_1,...,c_n\in\mathbb{R}$ כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$.
את קבוצת פונקציות המדרגות על הקטע $[a,b]$ נסמן $\mathfrak{S}[a,b]$. אם ברור באיזה קטע מדובר נסמן רק $\mathfrak{S}$.

<u>טענה</u>: תהי $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקצית מדרגות לפי החלוקה $\mathscr{P}$. ותהי $c\notin\mathscr{P}$. אזי φ פונקצית מדרגות גם לפי $\mathscr{P}\cup\{c\}$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ ו- $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$. אם $c\notin\mathscr{P}$ אזי קיים $1\le i\le n$ כך ש- $x_{i-1}<c<x_i$. ברור שלכל $j\ne i$ מתקיים $\varphi\big|_{(x_{j-1},x_j)}\equiv c_j$ וכן $\varphi\big|_{(x_{i-1},c)}\equiv c_i,\varphi\big|_{(c,x_i)}\equiv c_i$. קיבלנו ש- φ פונקצית מדרגות גם לפי החלוקה המורחבת. ☺

<u>מסקנה</u>: תהי $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקצית מדרגות לפי החלוקה $\mathscr{P}$. אזי לכל חלוקה $\mathscr{P}'$ של $[a,b]$ φ פונקצית מדרגות לפי $\mathscr{P}\cup\mathscr{P}'$.
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על מספר נקודות החלוקה ב- $\mathscr{P}'$.

<u>טענה</u>:
1. $\mathfrak{S}[a,b]$ סגורה תחת סכום
2. $\mathfrak{S}[a,b]$ סגורה תחת כפל בממשיים
3. $\mathfrak{S}[a,b]$ סגורה תחת מכפלה
4. אם $\varphi\in\mathfrak{S}[a,b]$ ו- $a\le c<d\le b$ אז $\varphi\big|_{[c,d]}\in\mathfrak{S}[c,d]$
5. אם $\varphi\in\mathfrak{S}[c,d]$ ו- $a\le c<d\le b$ אז $\tilde{\varphi}$ המוגדרת ע"י $\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}0 & a\le t<c\\ \varphi(t) & c\le t\le d\\ 0 & d<t\le a\end{cases}$ היא פונקצית מדרגות על $[a,b]$.

<u>הוכחה</u>:
1. יהיו $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}[a,b]$. ניתן להניח ששתיהן מיוצגות ע"י אותה החלוקה שמתקבלת ע"י איחוד החלוקות שמייצגות אותן. כלומר קיימת חלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$ ו- $\psi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv d_i$. אזי $(\varphi+\psi)\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i+d_i$. כלומר $\varphi+\psi$ פונקצית מדרגות.
2. תהי $\varphi\in\mathfrak{S}[a,b]$. קיימת חלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$. בהינתן $k\in\mathbb{R}$ ברור ש- $(k\varphi)\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv kc_i$. כלומר $k\varphi$ פונקצית מדרגות.
3. יהיו $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}[a,b]$. ניתן להניח ששתיהן מיוצגות ע"י אותה החלוקה שמתקבלת ע"י איחוד החלוקות שמייצגות אותן. כלומר קיימת חלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$ ו- $\psi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv d_i$. אזי $(\varphi\cdot\psi)\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i\cdot d_i$. כלומר $\varphi\cdot\psi$ פונקצית מדרגות.
4. נניח ש- φ פונקצית מדרגות ביחס לחלוקה $\mathscr{P}_1=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$. ברור ש- $\varphi\big|_{[c,d]}$ היא פונקצית מדרגות ביחס לחלוקה $\mathscr{P}=(\mathscr{P}_1\cap[c,d])\cup\{c,d\}$.
5. נניח ש- $\varphi\in\mathfrak{S}[c,d]$ מיוצגת ע"י החלוקה $\mathscr{P}_1=\{c=x_0<x_1<...<x_n=d\}$. אזי נגדיר חלוקה $\mathscr{P}=\{a<c=x_0<x_1<...<x_n=d<b\}$. אזי לפי ההגדרה $\tilde{\varphi}\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$ ואילו $\tilde{\varphi}\big|_{(a,c)}\equiv 0\equiv\tilde{\varphi}\big|_{(d,b)}$. כלומר $\tilde{\varphi}$ פונקצית מדרגות. ☺

3.3. אינטגרל של פונקציות מדרגות

<u>הגדרה</u>: תהי $\varphi\in\mathfrak{I}[a,b]$ המיוצגת ע"י החלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ כך ש- $\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$ לכל $1\le i\le n$.
האינטגרל של φ ב-$[a,b]$ לפי $\mathscr{P}$ מוגדר ע"י $I_{\mathscr{P}}(\varphi)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-x_{i-1})$.

<u>הערה</u>: נשים ♥ שערכי הפונקציה φ בנקודות החלוקה $\mathscr{P}$ אינם באים לידי ביטוי בהגדרת האינטגרל.

<u>למה</u>: תהי $\varphi\in\mathfrak{I}[a,b]$. לכל שתי חלוקות $\mathscr{P},\mathscr{P}'$ שמתאימות להגדרת φ מתקיים $I_{\mathscr{P}}(\varphi)=I_{\mathscr{P}'}(\varphi)$, כלומר האינטגרל בלתי תלוי בחלוקה שלפיה מוגדרת הפונקציה.
<u>הוכחה</u>: נניח ש-φ מוגדרת לפי החלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ כך ש-$\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$ לכל $1\le i\le n$. נראה ראשית שעבור חלוקה שמתקבלת ע"י הוספת נקודה אחת, האינטגרל לא משתנה. תהי $\mathscr{P}'$ חלוקה שמתקבלת מ-$\mathscr{P}$ ע"י הוספת איבר אחד x'. קיים $1\le j\le n$ כך ש-$x_{j-1}<x'<x_j$. ברור ש-$\varphi|_{(x_{j-1},x')}\equiv c_j=\varphi|_{(x',x_j)}$. נחשב כעת את האינטגרל:

$$I_{\mathscr{P}'}(\varphi)=\sum_{i\ne j}c_i(x_i-x_{i-1})+c_j(x_j-x')+c_j(x'-x_{j-1})=\sum_{i\ne j}c_i(x_i-x_{i-1})+c_j(x_j-x'+x'-x_{j-1})=$$
$$=\sum_{i\ne j}c_i(x_i-x_{i-1})+c_j(x_j-x_{j-1})=\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i-x_{i-1})=I_{\mathscr{P}}(\varphi)$$

כעת במקרה הכללי בהינתן שתי חלוקות $\mathscr{P},\mathscr{P}'$ נסתכל על האיחוד שלהן $\mathscr{P}\cup\mathscr{P}'$. באינדוקציה קל להראות ש-$I_{\mathscr{P}}(\varphi)=I_{\mathscr{P}\cup\mathscr{P}'}(\varphi)$ וגם $I_{\mathscr{P}'}(\varphi)=I_{\mathscr{P}\cup\mathscr{P}'}(\varphi)$. ומכאן ש-$I_{\mathscr{P}}(\varphi)=I_{\mathscr{P}'}(\varphi)$. ☺

מאחר שהראנו שהאינטגרל של פונקצית מדרגות בלתי תלוי בחלוקה נסתפק בסימון $I(\varphi)$ ללא ציון מפורש של החלוקה.

<u>תכונות האינטגרל של פונקצית מדרגות</u>: יהיו $\varphi,\psi\in\mathfrak{I}[a,b]$ ויהי $k\in\mathbb{R}$. אזי:

1. חיוביות: אם $0\le\varphi$ אז $0\le I(\varphi)$
2. מונוטוניות: אם $\varphi\le\psi$ אז $I(\varphi)\le I(\psi)$
3. לינאריות: $I(\varphi+\psi)=I(\varphi)+I(\psi)$ וגם $I(k\cdot\varphi)=k\cdot I(\varphi)$
4. אדטיביות: לכל $a<c<b$ $I\left(\varphi|_{[a,b]}\right)=I\left(\varphi|_{[a,c]}\right)+I\left(\varphi|_{[c,b]}\right)$
5. יחידה: $l([a,b])=I\left(1|_{[a,b]}\right)=b-a$
6. הזזה: נגדיר $\psi(t)=\varphi(t-c)$ עבור $c\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו. אזי $\psi\in\mathfrak{I}[a+c,b+c]$ ו-$I\left(\varphi|_{[a,b]}\right)=I\left(\psi|_{[a+c,b+c]}\right)$.
7. מתיחה: נגדיר $\psi(t)=\varphi\left(\frac{t}{c}\right)$ עבור $0<c\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו. אזי $\psi\in\mathfrak{I}[ac,bc]$ ו-$I\left(\varphi|_{[a,b]}\right)=\frac{1}{c}I\left(\psi|_{[ac,bc]}\right)$.

<u>הוכחה</u>:
1. מקרה פרטי של (2)
2. בה"כ φ,ψ מיוצגות ע"י אותה החלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$. ונניח ש-$\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$ ו-$\psi|_{(x_{i-1},x_i)}=d_i$ לכל $1\le i\le n$. לפי הנתון ש-$\varphi\le\psi$ נובע ש-$c_i\le d_i$. לכן

$$I(\varphi)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)\le\sum_{i=1}^{n}d_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=I(\psi)\ .$$

3. בה"כ ש- φ,ψ מיוצגות ע"י אותה החלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$. נניח ש- $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$ ו- $\psi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=d_i$ לכל $1\le i\le n$ אזי $(\varphi+\psi)\big|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i+d_i$. כעת:

$$I(\varphi+\psi)=\sum_{i=1}^{n}(c_i+d_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\left[c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)+d_i\left(x_i-x_{i-1}\right)\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)+\sum_{i=1}^{n}d_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=I(\varphi)+I(\psi)$$

כעת יהי $k\in\mathbb{R}$. ברור ש- $(k\cdot\varphi)\big|_{(x_{i-1},x_i)}=k\cdot c_i$. לכן

$$I(k\cdot\varphi)=\sum_{i=1}^{n}(k\cdot c_i)(x_i-x_{i-1})=k\sum_{i=1}^{n}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=k\cdot I(\varphi)$$

4. ראשית, לפי טענה קודמת, הפונקציות $\varphi\big|_{[c,b]},\varphi\big|_{[a,c]}$ הן פונקציות מדרגות ולכן האינטגרלים מוגדרים. כמו כן ראינו שהאינטגרל אינו תלוי בחלוקה ולכן ניתן לבצע את החישוב עבור חלוקה $P=\left\{a=x_0<\ldots<x_{j-1}<x_j<x_{j+1}<\ldots<x_n=b\right\}$ אשר $x_j=c$ היא נקודת חלוקה בה. נניח ש- $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$ לכל $1\le i\le n$. לכן:

$$I(\varphi)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{j}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)+\sum_{i=j}^{n}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=I\left(\varphi\big|_{[a,c]}\right)+I\left(\varphi\big|_{[c,b]}\right)$$

5. הפונקציה הקבועה 1 היא פונקצית מדרגות ביחס לחלוקה $\{a,b\}$. לכן $I(1)=1\cdot(b-a)=b-a$.

6. תהי $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$ לכל $1\le i\le n$. ברור ש- $\mathscr{P}'=\{a+c=x_0+c<\ldots<x_n+c=b+c\}=\{y_0<\ldots<y_n\}$ חלוקה של $[a+c,b+c]$. כעת לכל $1\le i\le n$ מתקיים שאם $t\in(y_{i-1},y_i)$ אז $t-c\in(y_{i-1}-c,y_i-c)=(x_{i-1},x_i)$ ולכן $\psi\big|_{(y_{i-1},y_i)}=\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$. כלומר $\psi\in\mathfrak{S}[a+c,b+c]$. כמו כן

$$I(\psi)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(y_i-y_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left((x_i+c)-(x_i+c)\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=I(\varphi)$$

7. תהי $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$ לכל $1\le i\le n$. ברור ש- $\mathscr{P}'=\{a\cdot c=x_0\cdot c<\ldots<x_n\cdot c=b\cdot c\}=\{y_0<\ldots<y_n\}$ חלוקה של $[a\cdot c,b\cdot c]$. כעת לכל $1\le i\le n$ מתקיים שאם $t\in(y_{i-1},y_i)$ אז $\frac{t}{c}\in\left(\frac{y_{i-1}}{c},\frac{y_i}{c}\right)=(x_{i-1},x_i)$ ולכן $\psi\big|_{(y_{i-1},y_i)}=\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$. כלומר $\psi\in\mathfrak{S}[a\cdot c,b\cdot c]$. כמו כן

$$I(\psi)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(y_i-y_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left((x_i\cdot c)-(x_i\cdot c)\right)=c\cdot\sum_{i=1}^{n}c_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=c\cdot I(\varphi)$$

כלומר $I\left(\varphi\big|_{[a,b]}\right)=\frac{1}{c}I\left(\psi\big|_{[ac,bc]}\right)$. ☺

3.4. אינטגרל של פונקציה חסומה

באופן טבעי נרצה להרחיב את מושג האינטגרל לכל הפונקציות ולא רק עבור פונקציות מדרגות. נתחיל את התהליך בפונקציות חסומות. נבצע תהליך דומה למה שעשינו כשדיברנו על חישוב שטחים של צורות מישוריות – קירובים מלמעלה וקירובים מלמטה.

תהי $f \in \mathscr{B}[a,b]$ [1]. נגדיר שתי קבוצות של מספרים ממשיים:

$$\Phi_f[a,b]=\{I(\varphi):\varphi\in\mathfrak{S}\wedge\varphi\le f\}$$

$$\Psi_f[a,b]=\{I(\psi):\psi\in\mathfrak{S}\wedge f\le\psi\}$$

מאחר ש- f חסומה ברור ש- $\Phi_f[a,b],\Psi_f[a,b]\neq\varnothing$. כמו כן לפי תכונת המונוטוניות של אינטגרל של פונקצית מדרגות נובע ש- $\Phi_f[a,b]\le\Psi_f[a,b]$. ולכן מאקסיומת השלמות[2] יש לפחות מספר אחד $c\in\mathbb{R}$ שמקיים $\Phi_f[a,b]\le c\le\Psi_f[a,b]$. כמו כן, לפי תכונת החסם העליון (התחתון)[3] קיימים $\underline{I}(f)=\sup\Phi_f[a,b]$ ו- $\overline{I}(f)=\inf\Psi_f[a,b]$.

<u>הגדרה</u>: $\underline{I}(f)=\sup\Phi_f[a,b]$ ו- $\overline{I}(f)=\inf\Psi_f[a,b]$ נקראים **האינטגרל התחתון** ו**האינטגרל העליון** של f בהתאמה.

<u>הגדרה</u>: $f\in\mathscr{B}[a,b]$ תיקרא **אינטגרבילית** ב- $[a,b]$ אם קיים מספר I אחד ויחיד אשר מקיים $I(\varphi)\le I\le I(\psi)$ לכל $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}[a,b]$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$. במקרה זה נסמן $I=\int_a^b f$.

נסמן את קבוצת הפונקציות האינטגרביליות על $[a,b]$ ע"י $\mathscr{R}[a,b]$. אם יהיה ברור באיזה קטע מדובר נסתפק בסימון $\mathscr{R}$.

מהסמסטר הקודם, בהינתן קבוצות $L\le U$ לא ריקות, כל התנאים הבאים שקולים:

1. קיים מספר $c\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $l\le c\le u$ לכל $u\in U, l\in L$
2. $\sup L=\inf U$
3. לכל $\varepsilon>0$ קיימים $l\in L$ ו- $u\in U$ כך ש- $u-l<\varepsilon$
4. קיימות סדרות $(l_n)\subset L$ ו- $(u_n)\subset U$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}(u_n-l_n)=0$
5. קיימות סדרות $(l_n)\subset L$ ו- $(u_n)\subset U$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}u_n$.

נחיל את התנאים האלה על $\Phi_f[a,b]$ ו- $\Psi_f[a,b]$ ונקבל בקלות רשימה של תנאים שקולים לאינטגרביליות.

<u>טענה</u>: $f\in\mathscr{R}[a,b]$ ו- $I=\int_a^b f$ אמ"מ מתקיימת אחת מהתכונות השקולות הבאות:

1. $\underline{I}(f)=\sup\Phi_f[a,b]=I=\inf\Psi_f[a,b]=\overline{I}(f)$
2. קיים $I\in\mathbb{R}$ אחד ויחיד כך ש- $I(\varphi)\le I\le I(\psi)$ לכל $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ שמקיימות $\varphi\le f\le\psi$
3. לכל $\varepsilon>0$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ וגם $I(\psi)-I(\varphi)<\varepsilon$

---

[1] <u>הגדרה</u>: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. נאמר ש- f חסומה אם קיימים $m,M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $m\le f(x)\le M$.
נסמן ב- $\mathscr{B}[a,b]$ את קבוצת הפונקציות החסומות על הקטע $[a,b]$. אם ברור באיזה קטע מדובר נסתפק בסימון $\mathscr{B}$ בלבד.

[2] <u>אקסיומת השלמות</u>: יהיו $L,U\subset\mathbb{R}$ לא ריקות אשר מקיימות $L\le U$. אזי קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $l\le c\le u$ לכל $u\in U, l\in L$.

[3] <u>תכונת החסם העליון (התחתון)</u>: תהי $\varnothing\neq S\subset\mathbb{R}$ חסומה מלמעלה (מלמטה). אזי ל- S יש חסם עליון (תחתון).

4. קיימות $(\varphi_n),(\psi_n)\subset\mathfrak{I}$ כך ש- $\varphi_n\le f\le\psi_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $I(\psi_n)-I(\varphi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ [4]
5. קיימות $(\varphi_n),(\psi_n)\subset\mathfrak{I}$ כך ש- $\varphi_n\le f\le\psi_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $\lim_{n\to\infty}I(\varphi_n)=I=\lim_{n\to\infty}I(\psi_n)$.

<u>משפט:</u> תהי $\tau\in\mathfrak{I}[a,b]$. אזי $\int_a^b\tau=I(\tau)$, כלומר שתי ההגדרות מתלכדות עבור פונקציות מדרגה.
<u>הוכחה:</u> ברור ש- $I(\tau)\in\Phi_\tau[a,b]$ שהרי $\tau\le\tau$. מאותה סיבה $I(\tau)\in\Psi_\tau[a,b]$. לכן $I(\tau)\le\sup\Phi_\tau[a,b]$ ו- $\inf\Psi_\tau[a,b]\le I(\tau)$. אבל $\sup\Phi_\tau[a,b]\le\inf\Psi_\tau[a,b]$. לכן $I(\tau)=\sup\Phi_\tau[a,b]=\inf\Psi_\tau[a,b]=I(\tau)$ כלומר $\tau\in\mathscr{R}[a,b]$ וכן $\int_a^b\tau=I(\tau)$. ☺

<u>דוגמה:</u>
באופן טבעי נשאלת השאלה – האם כל הפונקציות החסומות הן אינטגרביליות?
נסתכל על פונקצית דיריכלה $D:[0,1]\to\mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י $D(t)=\begin{cases}1 & t\in\mathbb{Q}\\ 0 & t\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. ברור שלא קיימת $\varphi\in\mathfrak{I}$ כך ש- $0<\varphi\le D$. מדוע? נניח שהייתה כזאת. אזי לפי הגדרת פונקצית מדרגות היה קיים תת קטע $(a,b)\in[0,1]$ שבו לכל $x\in(a,b)$ $0<\varphi(x)\le D(x)$. אבל בגלל צפיפות האי רציונליים ברציונליים קיימת נקודה $x'\in(a,b)$ אי רציונלית ובה $D(x')=0$. בסתירה לכך ש- $0<\varphi(x')\le D(x')$. לכן $\underline{I}(D)\le 0$. מצד שני משיקול דומה ברור שלא קיימת $\psi\in\mathfrak{I}$ כך ש- $D\le\psi<1$. לכן $1\le\overline{I}(D)$. ולכן לא יכול להיות $\underline{I}(D)=\overline{I}(D)$. כלומר פונקצית דיריכלה אינה אינטגרבילית ב- $[0,1]$. ברור כמובן שהיא גם אינה אינטגרבילית באף קטע סגור $[a,b]$.

<u>תכונות של אינטגרל של פונקציות חסומות:</u> יהיו $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$ ויהי $k\in\mathbb{R}$. אזי:
1. חיוביות: אם $0\le f$ אז $0\le\int_a^b f$
2. מונוטוניות: אם $f\le g$ אז $\int_a^b f\le\int_a^b g$
3. לינאריות: $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$ וכן $\int_a^b(k\cdot f)=k\cdot\int_a^b f$

<u>הוכחה:</u>
לכל פונקציה $h\in\mathscr{B}$ נגדיר $\Phi_h=\{I(\varphi):\varphi\in\mathfrak{I}\wedge\varphi\le h\}$ ו- $\Psi_h=\{I(\psi):\psi\in\mathfrak{I}\wedge h\le\psi\}$. נשים לב שמאחר ש- $h\in\mathscr{B}$ קבוצות אלה אינן ריקות וברור ש- $\Phi_h\le\Psi_h$. לכן קיימים $\sup\Phi_h,\inf\Psi_h$.
1. מקרה פרטי של (2)
2. בגלל ש- $f\le g$ ומהמונוטוניות של אינטגרל של פונקצית מדרגות ברור ש- $\Phi_f\le\Psi_g$. לכן מאחר ש- $f,g\in\mathscr{R}$ ומתכונות החסם העליון והתחתון נובע $\int_a^b f=\sup\Phi_f\le\inf\Psi_g=\int_a^b g$.
3. $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$: מאחר ש- $f,g\in\mathscr{R}$ מתקיים $\sup\Phi_f=\inf\Psi_f$ ו- $\sup\Phi_g=\inf\Psi_g$ כמו כן מאחר ש- $f,g\in\mathscr{B}$ גם $f+g\in\mathscr{B}$ ולכן קיימים $\sup\Phi_{f+g},\inf\Psi_{f+g}$. מצד שני ברור ש- $\Phi_f+\Phi_g\subseteq\Phi_{f+g}$ ו- $\Psi_f+\Psi_g\subseteq\Psi_{f+g}$. לכן לפי תכונות חסם עליון ותחתון נקבל ש-

$$\int_a^b f+\int_a^b g=\sup\Phi_f+\sup\Phi_g=\sup(\Phi_f+\Phi_g)\le\sup\Phi_{f+g}\le$$
$$\le\inf\Psi_{f+g}\le\inf(\Psi_f+\Psi_g)=\inf\Psi_f+\inf\Psi_g=\int_a^b f+\int_a^b g$$

לכן $\sup\Phi_{f+g}=\inf\Psi_{f+g}$ כלומר $f+g\in\mathscr{R}$. כמו כן $\int_a^b f+\int_a^b g=\sup\Phi_{f+g}=\int_a^b(f+g)$.
$\int_a^b(k\cdot f)=k\cdot\int_a^b f$: אם $k=0$ אין מה להוכיח.
נניח ש- $0<k$. בגלל הלינאריות של אינטגרל של פונקצית מדרגות ברור ש- $\Phi_{k\cdot f}=k\cdot\Phi_f$ וכן

[4] נשים לב שקריטריון זה אינו מצביע על האינטגרל אלא רק על הקיום שלו.

$\Psi_{k\cdot f}=k\cdot\Psi_f$. ולכן $\int_a^b f=\sup\Phi_f$ ולכן $k\cdot\int_a^n f=k\cdot\sup\Phi_f$. מתכונות של חסם עליון $\sup(k\cdot\Phi_f)=k\cdot\sup\Phi_f$ ולכן $k\cdot\int_a^b f=\sup\Phi_{k\cdot f}$. באותו אופן ניתן לקבל ש- $k\cdot\int_a^b f=\inf\Psi_{k\cdot f}$. לכן $\sup\Phi_{k\cdot f}=\inf\Psi_{k\cdot f}$ כלומר $k\cdot f\in\mathscr{R}$ וכן $\int_a^b(k\cdot f)=k\cdot\int_a^b f$.

נניח ש-$k=-1$. אזי לפי תכונות של אינטגרל של פונקציות מדרגות $-\Phi_f=\Psi_{-f}$ ו- $-\Psi_f=\Phi_{-f}$. ידוע ש- $-\inf A=\sup(-A)$ ו- $-\sup A=\inf(-A)$. לכן נקבל ש-

$$-\int_a^b f=-\sup\Phi_f=\inf(-\Phi_f)=\inf\Psi_{-f}\le\sup\Phi_{-f}=\sup(-\Psi_f)=-\inf\Psi_f=-\int_a^b f$$

לכן $\inf\Psi_{-f}=\sup\Phi_{-f}$ כלומר $-f\in\mathscr{R}$ וכן $-\int_a^b f=\sup\Phi_{-f}=\int_a^b(-f)$.

המקרה הכללי $k<0$ מתקבל ע"י הסתכלות על k כ- $k=-|k|$ ושימוש ב- $\int_a^b(|k|\cdot f)=|k|\cdot\int_a^b f$ וב- $\int_a^b(-f)=-\int_a^b f$. ☺

<u>משפט</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור אינטגרבילית בו.

<u>הוכחה</u>: תהי $f\in\mathscr{C}[a,b]$. נראה שלכל $\varepsilon>0$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathscr{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $I(\psi)-I(\varphi)<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$. לפי משפט מהסמסטר הקודם f רציפה במידה שווה ב-$[a,b]$[5]. לכן עבור אותו ε קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. תהי $\mathscr{P}=\{a=x_0<...<x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}<\delta$. לפי משפט מהסמסטר הקודם פונקציה רציפה בקטע סגור מממשת בו הן את המקסימום שלה והן את המינימום. לכן נוכל להגדיר את שתי פונקציות המדרגות φ,ψ כך:

לכל $1\le i\le n$, לכל $x_{i-1}<t<x_i$ נגדיר $\varphi(t)=\min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=m_i$ ו- $\psi(t)=\max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=M_i$. בנקודות החלוקה $\{x_i\}_{i=0}^n$ נגדיר $\varphi(x_i)=f(x_i)=\psi(x_i)$.

ברור ש- $\varphi\le f\le\psi$. כעת נחשב את האינטגרל:

$$I(\psi)-I(\varphi)=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$$

מאחר שבחרנו את $\mathscr{P}$ כך ש- $\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}<\delta$, מהרציפות במידה שווה נובע ש- $M_i-m_i<\frac{\varepsilon}{b-a}$ לכל $1\le i\le n$. לכן $\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^n\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$. כלומר מצאנו $\varphi,\psi\in\mathscr{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $I(\psi)-I(\varphi)<\varepsilon$. מכאן ש-$f\in\mathscr{R}[a,b]$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $f\in\mathscr{B}[a,b]$. אזי $f\in\mathscr{R}[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימות $g,h\in\mathscr{C}[a,b]$ כך ש- $g\le f\le h$ וגם $\int_a^b h-\int_a^b g<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: לא הוכח בכיתה וגם לא בסיכומים של צביק.

<u>משפט</u>: פונקציה מונוטונית בקטע סגור אינטגרבילית בו.

<u>הוכחה</u>: תהי $f\in\mathscr{M}[a,b]$. בה"כ f מונוטונית עולה. אם f מונוטונית יורדת אז נסתכל על $-f$ שהיא מונוטונית עולה ולפי הטענה קודמת $\int_a^b f=\int_a^b(-f)=-\int_a^b(-(-f))$.

---

[5] <u>הגדרה</u>: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת מעל התחום D. נאמר כי $f(x)$ רציפה במידה שווה בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in D$ אם $|x_1-x_2|<\delta$ אז $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

<u>משפט</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה.

תהי $\mathcal{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ כך ש- $x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$ לכל $1\le i\le n$. נגדיר שתי פונקציות מדרגות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ באופן הבא: לכל $1\le i\le n$, לכל $x_{i-1}<t<x_i$ נגדיר $\varphi(t)=f(x_{i-1})$ ו- $\psi(t)=f(x_i)$. בנקודות החלוקה נגדיר $\{x_i\}_{i=0}^n=f(x_i)$. ברור ש- $\varphi\le f\le\psi$. כעת:

$$I(\psi)-I(\varphi)=\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^n\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)(x_i-x_{i-1})=$$
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=\frac{b-a}{n}\cdot\left(f(b)-f(a)\right)$$

יהי $0<\varepsilon$. נבחר $\frac{b-a}{\varepsilon}\cdot\left(f(b)-f(a)\right)<n$. אזי לפי התהליך לעיל נמצא שתי פונקציות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ וכן $I(\psi)-I(\varphi)<\varepsilon$. לכן $f\in\mathcal{R}$. ☺

<u>משפט</u>: יהיו $a<c<b$. אזי $f\in\mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ $f\in\mathcal{R}[a,c]$ וכן $f\in\mathcal{R}[c,b]$. יתר על כן מתקיים $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

<u>הוכחה</u>: לפי האדטיביות של אינטגרל של פונקצית מדרגות ברור ש-

$$\Phi_f[a,b]\subseteq\Phi_f[a,c]+\Phi_f[c,b]$$
$$\Psi_f[a,b]\subseteq\Psi_f[a,c]+\Psi_f[c,b]$$

שכן, לדוגמה, אם $I\in\Phi_f[a,b]$ אזי קיימת $\varphi\in\mathfrak{S}[a,b]$ כך ש- $\varphi\le f$ ו- $I(\varphi)=I$. אבל ידוע ש- $I\left(\varphi\big|_{[a,b]}\right)=I\left(\varphi\big|_{[a,c]}\right)+I\left(\varphi\big|_{[c,b]}\right)\subseteq\Phi_f[a,c]+\Phi_f[c,b]$. מכאן ש- $\Phi_f[a,b]\subseteq\Phi_f[a,c]+\Phi_f[c,b]$. את ההכלה השנייה מוכיחים בצורה דומה.

נרצה להראות שמתקיימת ההכלה גם בכיוון השני. יהיו $\varphi_1\in\mathfrak{S}[a,c],\varphi_2\in\mathfrak{S}[c,b]$ כך ש- $\varphi_1\le f\big|_{[a,c]},\varphi_2\le f\big|_{[c,b]}$. אזי $I\left(\varphi_1\big|_{[a,c]}\right)\in\Phi_f[a,c]$ ו- $I\left(\varphi_2\big|_{[c,b]}\right)\in\Phi_f[c,b]$. בה"כ $\varphi_1(c)=\varphi_2(c)$, אחרת נשנה את הערכים כך שיתקיים שוויון והרי הדבר לא ישפיע על האינטגרלים שלהן. כעת נגדיר $\varphi\in\mathfrak{S}[a,b]$ באופן הבא: $\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_1(t) & t\in[a,c]\\ \varphi_2(t) & t\in[c,b]\end{cases}$. ברור ש- $\varphi\le f$ ולפי אדטיביות של אינטגרל של פונקציות מדרגות ברור ש- $\int_a^b\varphi_1+\int_a^b\varphi_2=\int_a^b\varphi\in\Phi_f[a,b]$. לכן $\Phi_f[a,c]+\Phi_f[c,b]\subseteq\Phi_f[a,b]$. קיבלנו ש- $\Phi_f[a,b]=\Phi_f[a,c]+\Phi_f[c,b]$. בצורה דומה מראים ש- $\Psi_f[a,b]=\Psi_f[a,c]+\Psi_f[c,b]$. לכן

$$\sup\Phi_f[a,b]=\sup\Phi_f[a,c]+\sup\Phi_f[c,b]$$
$$\inf\Psi_f[a,b]=\inf\Psi_f[a,c]+\inf\Psi_f[c,b]$$

עכשיו נניח ש- $f\in\mathcal{R}[a,b]$. אזי

$$^*\sup\Phi_f[a,c]+\sup\Phi_f[c,b]=\sup\Phi_f[a,b]=\inf\Psi_f[a,b]=\inf\Psi_f[a,c]+\inf\Psi_f[c,b]$$

אבל $\sup\Phi_f[a,c]\le\inf\Psi_f[a,c]$ ו- $\sup\Phi_f[c,b]\le\inf\Psi_f[c,b]$. לכן $\sup\Phi_f[a,c]=\inf\Psi_f[a,c]$ ו- $\sup\Phi_f[c,b]=\inf\Psi_f[c,b]$. כלומר $f\in\mathcal{R}[a,c]$ וכן $f\in\mathcal{R}[c,b]$.

מצד שני אם $f\in\mathcal{R}[a,c]$ וכן $f\in\mathcal{R}[c,b]$ אז $\sup\Phi_f[a,c]=\inf\Psi_f[a,c]$ ו- $\sup\Phi_f[c,b]=\inf\Psi_f[c,b]$, כלומר

$$^*\sup\Phi_f[a,c]+\sup\Phi_f[c,b]=\sup\Phi_f[a,b]=\inf\Psi_f[a,b]=\inf\Psi_f[a,c]+\inf\Psi_f[c,b]$$

ולכן $f\in\mathcal{R}[a,b]$. כמו כן מ-(*) נובע ש- $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ויהי $c\in\mathbb{R}$. נגדיר $g:[a+c,b+c]\to\mathbb{R}$ ע"י $g(t)=f(t-c)$. אזי $g\in\mathcal{R}[a+c,b+c]$ וכן $\int_a^b f=\int_{a+c}^{b+c} g$.

<u>הוכחה</u>: נראה שקיימות שתי סדרות $(\varphi_n),(\psi_n)\subset\mathfrak{S}[a+c,b+c]$ כך ש- $\varphi_n\le g\le\psi_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ו- $I(\varphi_n)-I(\psi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

$f\in\mathcal{R}[a,b]$ ולכן קיימות $(\varphi'_n),(\psi'_n)\in\mathfrak{S}[a,b]$ כך ש- $\varphi'_n\le f\le\psi'_n$ ו- $I(\varphi'_n)-I(\psi'_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\varepsilon$. נגדיר $(\varphi_n),(\psi_n):[a+c,b+c]\to\mathbb{R}$ ע"י $\varphi_n(t)=\varphi'_n(t-c)$ ו- $\psi_n(t)=\psi'_n(t-c)$. לפי אינווריאנטיות תחת הזזה של אינטגרל של פונקציות מדרגות נקבל ש- $(\varphi_n),(\psi_n)\subset\mathfrak{S}[a+c,b+c]$ וכן $I(\varphi_n)=I(\varphi'_n)$ ו- $I(\psi_n)=I(\psi'_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $I(\varphi_n)-I(\psi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. ברור ש- $\varphi_n\le g\le\psi_n$ ומכאן ש- $g\in\mathcal{R}[a+c,b+c]$. כמו כן $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}I(\varphi'_n)=\lim_{n\to\infty}I(\varphi_n)=\int_{a+c}^{b+c}g$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ויהי $0<c\in\mathbb{R}$. נגדיר $g:[a\cdot c,b\cdot c]\to\mathbb{R}$ ע"י $g(t)=f\left(\frac{t}{c}\right)$. אזי $g\in\mathcal{R}[a\cdot c,b\cdot c]$ וכן $\int_a^b f=\frac{1}{c}\int_{a\cdot c}^{b\cdot c} g$.

<u>הוכחה</u>: נראה שקיימות שתי סדרות $(\varphi_n),(\psi_n)\subset\mathfrak{S}[a\cdot c,b\cdot c]$ כך ש- $\varphi_n\le g\le\psi_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ו- $I(\varphi_n)-I(\psi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

$f\in\mathcal{R}[a,b]$ ולכן קיימות $(\varphi'_n),(\psi'_n)\in\mathfrak{S}[a,b]$ כך ש- $\varphi'_n\le f\le\psi'_n$ ו- $I(\varphi'_n)-I(\psi'_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\varepsilon$. נגדיר $(\varphi_n),(\psi_n):[a\cdot c,b\cdot c]\to\mathbb{R}$ ע"י $\varphi_n(t)=\varphi'_n\left(\frac{t}{c}\right)$ ו- $\psi_n(t)=\psi'_n\left(\frac{t}{c}\right)$. לפי התכונה המקבילה עבור אינטגרל של פונקציות מדרגות נקבל ש- $(\varphi_n),(\psi_n)\subset\mathfrak{S}[a\cdot c,b\cdot c]$ וכן $I(\varphi_n)=\frac{1}{c}I(\varphi'_n)$ ו- $I(\psi_n)=\frac{1}{c}I(\psi'_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $I(\varphi_n)-I(\psi_n)=\frac{1}{c}\left(I(\varphi'_n)-I(\psi'_n)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. ברור ש- $\varphi_n\le g\le\psi_n$ ומכאן ש- $g\in\mathcal{R}[a\cdot c,b\cdot c]$ וכן מתקיים השוויון הדרוש $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}I(\varphi'_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c}I(\varphi_n)=\frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}I(\varphi_n)=\frac{1}{c}\int_{a+c}^{b+c}g$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. אזי $f\in\mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ $f\in\mathcal{R}[c,d]$ לכל $a<c<d<b$.

<u>הערה</u>: חשוב ש- $f\in\mathcal{B}[a,b]$ משום שאם $f\in\mathcal{R}[c,d]$ לכל $a<c<d<b$ אין הדבר מבטיח ש- $f\in\mathcal{B}[a,b]$ ואז לא יכול להיות ש- $f\in\mathcal{R}[a,b]$. למשל נסתכל על $f(x)=\begin{cases}1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נובע ישירות מהאדטיביות של האינטגרל.

($\Rightarrow$) מספיק להראות שלכל $0<\varepsilon$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}[a,b]$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $I(\psi)-I(\varphi)<c\varepsilon$ כאשר $0<c\in\mathbb{R}$ קבוע.

יהי $0<\varepsilon$. אזי לכל $a<c<d<b$. מאחר ש- $f\in\mathcal{R}[c,d]$ ניתן למצוא $\varphi',\psi'\in\mathfrak{S}[c,d]$ כך ש- $\varphi'\le f\le\psi'$ ו- $I(\psi')-I(\varphi')<\varepsilon$.

נניח ש- $m\le f\le M$ ב- $[a,b]$. נגדיר $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}[a,b]$ באופן הבא:

$$\varphi(t)=\begin{cases}m & t\in[a,c)\\ \varphi'(t) & t\in[c,d]\\ m & t\in(c,b]\end{cases}\qquad\qquad \psi(t)=\begin{cases}M & t\in[a,c)\\ \psi'(t) & t\in[c,d]\\ M & t\in(c,b]\end{cases}$$

ברור ש- $\varphi\le f\le\psi$ ולפי אדטיביות ולינאריות של אינטגרל של פונקציות מדרגות

$$I(\psi)-I(\varphi)=\left[I\left(\psi\big|_{[a,c]}\right)+I\left(\psi\big|_{[c,d]}\right)+I\left(\psi\big|_{[d,b]}\right)\right]-\left[I\left(\varphi\big|_{[a,c]}\right)+I\left(\varphi\big|_{[c,d]}\right)+I\left(\varphi\big|_{[d,b]}\right)\right]=$$
$$=I\left((\psi-\varphi)\big|_{[a,c]}\right)+I\left((\psi-\varphi)\big|_{[c,d]}\right)+I\left((\psi-\varphi)\big|_{[d,b]}\right)<(M-m)(c-a)+\varepsilon+(M-m)(b-d)$$

כעת אם נבחר $c,d\in(a,b)$ כך ש- $c-a,b-d<\dfrac{\varepsilon}{M-m}$ נקבל ש- $I(\psi)-I(\varphi)<3\varepsilon$. כלומר $f\in\mathcal{R}[a,b]$. ☺

<u>מסקנות</u>:

1. אם $f\in\mathcal{B}[a,b]$ ו- $f\in\mathcal{C}(a,b)$ אזי $f\in\mathcal{R}[a,b]$.
2. אם f רציפה למקוטעין[6] ב-$[a,b]$ אזי $f\in\mathcal{R}[a,b]$.
3. אם f חסומה ומונוטונית למקוטעין ב-$[a,b]$ אזי $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

<u>משפט</u>: אם $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ו- $g=f$ פרט למספר סופי של נקודות אז $g\in\mathcal{R}[a,b]$ ו- $\int_a^b g=\int_a^b f$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח למקרה שהפונקציות שונות בנקודה אחת בלבד, והמקרה הכללי יתקבל באינדוקציה על מספר הנקודות. נניח ש- $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq x_0\\ g(x_0) & x=x_0\end{cases}$ ונראה שלכל $0<\varepsilon$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le g\le\psi$ וכן $\int_a^b\varphi-\int_a^b\psi<\varepsilon$. $f\in\mathcal{R}$ ולכן קיימות $\varphi',\psi'\in\mathfrak{S}$ כך ש-$\varphi'\le f\le\psi'$ וכן $\int_a^b\varphi'-\int_a^b\psi'<\varepsilon$. נגדיר שתי פונקציות חדשות:

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi'(x) & x\neq x_0\\ \max\{f(x_0),g(x_0)\} & x=x_0\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}\varphi'(x) & x\neq x_0\\ \min\{f(x_0),g(x_0)\} & x=x_0\end{cases}$$

ברור ש- $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ וכן $\varphi\le g\le\psi$. לפי משפט קודם האינטגרל של פונקציות מדרגה לא משתנה אם יש שינוי בנקודה אחת. ולכן $\int_a^b\varphi-\int_a^b\psi=\int_a^b\varphi'-\int_a^b\psi'<\varepsilon$ וכן $\int_a^b g=\int_a^b f$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $f\in\mathcal{R}[a,b]$ כך ש- $m\le f\le M$. תהי $g\in\mathcal{C}[m,M]$. אזי $h=g\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: נראה שלכל $0<\varepsilon$ קיימות $\varphi_h,\psi_h\in\mathfrak{S}[a,b]$ כך ש-$\varphi_h\le h\le\psi_h$ ו- $I(\psi_h)-I(\varphi_h)<c\varepsilon$ עבור $0<c\in\mathbb{R}$ קבוע.

יהי $0<\varepsilon$. g רציפה בקטע הסגור $[m,M]$ ולכן רציפה בו במידה שווה. לכן עבור ε זה קיים $0<\delta$ כך שלכל $s,t\in[m,M]$ אם $|s-t|<\delta$ אז $|g(s)-g(t)|<\varepsilon$.

$f\in\mathcal{R}[a,b]$. לכן קיימות $\varphi_f,\psi_f\in\mathfrak{S}[a,b]$ כך ש- $\varphi_f\le f\le\psi_f$ ו- $I(\psi_f)-I(\varphi_f)<\delta\cdot\varepsilon$. בה"כ φ_f,ψ_f מיוצגות ע"י אותה חלוקה $\mathcal{P}=\{a=x_0<...<x_n=b\}$ ולכן לכל $1\le i\le n$ מתקיים $\varphi_f\big|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i\le d_i=\psi_f\big|_{(x_{i-1},x_i)}$. בה"כ $m\le c_i\le d_i\le M$ אחרת נגדיל את c_i ל- m ונקטין את d_i ל- M וברור שעדיין יתקיים $\varphi_f\le f\le\psi_f$ ו- $I(\psi_f)-I(\varphi_f)<\delta\cdot\varepsilon$ שהרי רק קירבנו את φ_f,ψ_f אחת לשנייה.

נגדיר $\varphi_h,\psi_h\in\mathfrak{S}[a,b]$ באמצעות אותה החלוקה באופן הבא: לכל $1\le i\le n$ נגדיר: $\varphi_h\big|_{(x_{i-1},x_i)}=\min_{t\in[c_i,d_i]}g(t)=l_i$ ו- $\psi_h\big|_{(x_{i-1},x_i)}=\max_{t\in[c_i,d_i]}g(t)=L_i$. ביטויים אלה מוגדרים היטב משום ש- g רציפה בכל קטע סגור מהצורה $[c_i,d_i]$ ולכן מממשת בו הן את המינימום והן את המקסימום. בנקודות החלוקה $\{x_i\}_{i=0}^n$ נגדיר $\varphi_h(x_i)=h(x_i)=\psi_h(x_i)$.

ברור ש- $\varphi_h\le h\le\psi_h$ שהרי $h=g\circ f$.

נחלק את $\{0,1,...,n\}$ לשתי קבוצות. נאמר ש- $i\in G$ אמ"מ $d_i-c_i<\delta$. אזי לפי הרציפות במידה שווה נקבל ש-

---

[6] כלומר, יש חלוקה סופית של $[a,b]$ כך שבכל חלק שלה f רציפה.

$L_i - l_i < \varepsilon$. ומצד שני נאמר ש-$i \in B$ אמ"מ $d_i - c_i \ge \delta$. כעת נחשב את $I(\psi_h) - I(\varphi_h)$:

$$I(\psi_h) - I(\varphi_h) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i\in G} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in B} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1})$$

כעת $\sum_{i\in G} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i\in G} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \sum_{i\in G} (x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \cdot (b-a)$.

וכן

$$\delta \sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i\in B} \delta(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i\in B} (d_i - c_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = I(\psi_f) - I(\varphi_f) < \delta \cdot \varepsilon$$

לכן $\sum_{i\in B} (x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon$. מכאן ש-

$$\sum_{i\in G} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in B} (L_i - l_i)(x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon(b-a) + (L-l)\varepsilon = (b-a+L-l)\varepsilon$$

כאשר $l = \min_{t\in[m,M]} g(t)$ ו-$L = \max_{t\in[m,M]} g(t)$. כלומר אם $c = b-a+L-l$ אז $I(\psi_h) - I(\varphi_h) < c\varepsilon$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהיו $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. אזי

- $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$
- $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$
- $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$
- אם $m \le g \le M$ ו-$M < 0$ או $m > 0$ אז $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $s(t) = t^2$, $v(t) = |t|$ ו-$i(t) = \frac{1}{t}$. רציפות בכל קטע סגור ואילו i רציפה בכל קטע שאינו מכיל את 0. נשים ♥ ש-$f^2 = s \circ f$, $|f| = v \circ f$ ו-$\frac{1}{g} = i \circ g$. לכן לפי המשפט הקודם $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$, $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ וגם $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$. כמו כן $f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$. ולכן לפי אריתמטיקה של פונקציות אינטגרביליות $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$. כעת $\frac{f}{g} = \frac{1}{g} \cdot f$. ולכן $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$. ☺

3.5. סכומי רימן

בהרבה מן ההוכחות שהיו לנו עד כה כדי למצוא פונקציות מדרגות שמקיימות תנאים מסוימים ראשית ציינו מהי החלוקה שנשתמש בה. זה מזמין אותנו להסתכל על חלוקות הקטע כשחקן הראשי.

<u>הגדרה</u>: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ותהי $\mathcal{P} = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$. נכנה בשם **סכום רימן** של f עבור $\mathcal{P}$ כל סכום מהצורה $S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ כאשר $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ו-$x_{i-1} \le t \le x_i$.

נגדיר את **פרמטר החלוקה** של $\mathcal{P}$ ע"י $\lambda(\mathcal{P}) = \max_{1\le i\le n} \{\Delta x_i\}$.

<u>הגדרה</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ תיקרא **אינטגרבילית רימן** ב-$[a,b]$ אם קיים מספר $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל סכום רימן S של f עבור כל חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P})<\delta$ מתקיים $|S-I|<\varepsilon$.
במקרה זה נסמן $I=\int_a^b f(x)dx$.

<u>הערה</u>: חשוב להבין שהתנאי הזה חייב להתקיים באופן בלתי תלוי בנקודות שנבחרו עבור הסכום ובאופן בלתי תלוי בחלוקה כל עוד הפרמטר שלה קטן מספיק.

<u>משפט</u>: אם f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אזי קיים I אחד ויחיד אשר מקיים את ההגדרה.
<u>הוכחה</u>: יהיו $I\le I'$ שעומדים בהגדרה. נניח בשלילה ש-$I<I'$. יהי $0<\varepsilon<I'-I$. לפי ההגדרה קיים $0<\delta$ כך שלכל סכום רימן S של f עבור חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P})<\delta$ מתקיים $|S-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. כמו כן קיים $0<\delta'$ כך שלכל סכום רימן S' של f עבור חלוקה $\mathcal{P}'$ של $[a,b]$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P}')<\delta$ מתקיים $|S'-I'|<\frac{\varepsilon}{2}$.
תהי $\mathcal{Q}$ חלוקה של $[a,b]$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{Q})<\min\{\delta,\delta'\}$ ויהי T סכום רימן של f לפי חלוקה זו. אזי $I'-I=|I'-I|=|I'-T+T-I|\le|I'-T|+|T-I|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ בסתירה לכך ש-$0<\varepsilon<I'-I$. לכן $I=I'$, כלומר האינטגרל הוא יחיד. ☺

<u>משפט</u>: אם f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אז f חסומה שם.
<u>הוכחה</u>[7]: נניח ש-$f(x)$ אינה חסומה ב-$[a,b]$. תהי $\mathcal{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ חלוקה של הקטע. קיים $0\le j<n$ כך ש-$f(x)$ אינה חסומה בקטע $[x_j,x_{j+1}]$. לכל $i\ne j$ יהי $c_i\in[x_i,x_{i+1}]$. נסמן $M=\left|\sum_{i\ne j} f(x_i)\Delta x_i\right|$. $f(x)$ אינה חסומה ב-$[x_j,x_{j+1}]$ ולכן קיים $c_j\in[x_j,x_{j+1}]$ כך ש-$|f(c_j)\Delta x_j|>M+\frac{1}{\lambda(\mathcal{P})}$. לכן נקבל ש-

$$|T|=\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i\right|\ge\left|f(c_j)\Delta x_j\right|-\left|\sum_{i\ne j} f(c_i)\right|>M+\frac{1}{\lambda(\mathcal{P})}-M=\frac{1}{\lambda(\mathcal{P})}$$

ככל ש-$\lambda(\mathcal{P})$ יקטן $|T|$ ילך וישאף לאינסוף, ולכן לא יכול להיות שקיים I כך שלכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל S סכום רימן עבור חלוקה $\mathcal{P}$ עם $\lambda(\mathcal{P})<\delta$ יתקיים $|S-I|<\varepsilon$. בסתירה להנחה שהפונקציה אינטגרבילית. ☺

<u>קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן</u>: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש-$|S-S'|<\varepsilon$ לכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ בהתאמה כך ש-$\lambda(\mathcal{P}),\lambda(\mathcal{P}')<\delta$.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) נניח ש-f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$. יהי $0<\varepsilon$ ויהי $0<\delta$ לפי ההגדרה שעבורו $\left|S-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל S סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש-$\lambda(\mathcal{P})<\delta$. אזי לכל S,S' סכומי רימן כאלה מתקיים:

[7] לא הוכח בכיתה אלא רק בסיכומים של צביק

$$|S-S'|=\left|S-\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f(x)dx-S'\right|\le\left|S-\int_a^b f(x)dx\right|+\left|\int_a^b f(x)dx-S'\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

($\Rightarrow$) נניח שמתקיים קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן. תהי $(\mathscr{P}_n)$ סדרת חלוקות של $[a,b]$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P}_n)=\delta_n=\frac{1}{n}$. ותהי (S_n) סדרת סכומי רימן המתאימה לחלוקות הנ"ל.

נראה ש-(S_n) סדרת קושי. יהי $\varepsilon>0$. יהי $\delta>0$ המתאים לו לפי קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן. יהי $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{\delta}<N$. אזי לכל $N<n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\delta_n=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$. לכן עבור $N<n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $|S_n-S_m|<\varepsilon$. לכן (S_n) מתכנסת ויהי $I=\lim_{n\to\infty}S_n$. נטען ש- $I=\int_a^b f(x)dx$.

יהי $\frac{\varepsilon}{2}>0$ ויהי $\delta>0$ המתאים לו לפי קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן. נבחר $n\in\mathbb{N}$ שמקיים הן $|S_n-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ והן $\lambda(\mathscr{P}_n)<\delta$. אזי לכל S סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathscr{P}$ עם פרמטר $\lambda(\mathscr{P})<\delta$ יתקיים $|S-I|=|S-S_n+S_n-I|\le|S-S_n|+|S_n-I|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. כלומר $I=\int_a^b f(x)dx$. ☺

<u>משפט</u>: יהיו f,g אינטגרביליות רימן ב-$[a,b]$ ויהי $k\in\mathbb{R}$. אזי

$$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b(f+g)(x)dx$$
$$k\cdot\int_a^b f(x)dx=\int_a^b(k\cdot f)(x)dx$$

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $I=\int_a^b f(x)dx$ ו- $J=\int_a^b g(x)dx$. נרצה להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $|S_{f+g}-(I+J)|<\varepsilon$ לכל S_{f+g} סכום רימן של $f+g$ עבור חלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ עם פרמטר $\lambda(\mathscr{P})<\delta$. לפי ההגדרה כל S_{f+g} הוא מהצורה

$$S_{f+g}=\sum_{i=1}^n(f+g)(t_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n g(t_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^n g(t_i)\Delta x_i=S_f+S_g$$

כאשר $x_{i-1}\le t_i\le x_i$ ו- S_f,S_g סכומי רימן של f,g בהתאמה. מאחר ש- $I=\int_a^b f(x)dx$ ו- $J=\int_a^b g(x)dx$ בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $|S_f-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ ו- $|S_g-J|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל S_f,S_g סכומי רימן של f,g לפי חלוקות $\mathscr{P}_f,\mathscr{P}_g$ עם פרמטרים $\lambda(\mathscr{P}_f),\lambda(\mathscr{P}_g)<\delta$ בהתאמה. לכן עבור חלוקה כזאת יתקיים

$$|S_{f+g}-(I+J)|=|S_f-I+S_g-J|\le|S_f-I|+|S_g-J|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כלומר $f+g$ אינטגרבילית רימן ו- $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b(f+g)(x)dx$.

באופן דומה מוכיחים כי $k\cdot\int_a^b f(x)dx=\int_a^b(k\cdot f)(x)dx$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $\varphi\in\Im[a,b]$. אזי φ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b\varphi(x)dx=\int_a^b\varphi=I(\varphi)$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נוכיח כמה למות.

למה 1: תהי $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $\varphi(t)=\begin{cases}1 & t=x\\ 0 & t\ne x\end{cases}$ עבור $x\in[a,b]$ קבוע ונתון מראש. אזי $\int_a^b\varphi(t)dt=0$.

הוכחה למה 1: לכל $\delta>0$ ולכל S סכום רימן של φ עבור חלוקה $\mathscr{P}$ עם $\lambda(\mathscr{P})<\delta$ מתקיים $0\le S\le 2\delta$. שכן מצד אחד יכול להיות שכל נקודות הדגימה יהיו שונות מ- x ואז $\sum_{i=1}^n\varphi(t_i)\Delta x_i=0$.

ומצד שני בהינתן $\delta > 0$ יכול להיות שיהיו שתי נקודות חלוקה $x-\delta, x+\delta$ ובקטע הזה נבחר לדגום בנקודה x ואז $\sum_{i=1}^{n} \varphi(t_i)\Delta x_i = 2\delta$ שהוא אורך הקטע $[x-\delta, x+\delta]$.

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$. אזי לכל S סכום רימן של φ עבור חלוקה עם פרמטר $\lambda(\mathscr{P}) < \delta$ נקבל ש- $0 \le S \le 2\delta < \varepsilon$. כלומר $|S-0| < \varepsilon$. לכן φ אינטגרבילית רימן ו- $\int_a^b \varphi(t)\,dt = 0$. ☺

למה 2: יהיו $a < c < d < b$ ו- $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in (c,d) \\ 0 & t \notin (c,d) \end{cases}$. אזי $\int_a^b \varphi(t)\,dt = d-c$.

הוכחה למה 2: בדומה לטיעון מהלמה הקודמת לכל $\delta > 0$ כל S סכום רימן של φ עבור חלוקה עם $\lambda(\mathscr{P}) < \delta$ מתקיים $(d-c)-2\delta \le S \le (d-c)+2\delta$. לכן $|S-(d-c)| \le 2\delta$. לכל בהינתן $\varepsilon > 0$ מספיק לבחור $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז $|S-(d-c)| < \varepsilon$. כלומר φ אינטגרבילית רימן ו- $\int_a^b \varphi(t)\,dt = d-c$. ☺

נחזור להוכחת המשפט. נניח ש- φ מיוצגת באמצעות החלוקה $\mathscr{P} = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ ומתקיים $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i$ לכל $1 \le i \le n$. נגדיר $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathfrak{I}[a,b]$ באופן הבא:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1 & t \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & t \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

הפונקציה $\varphi - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ מתאפסת חוץ מאשר במספר סופי של נקודות בקטע $[a,b]$ (שהרי $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ שונה מ- φ לכל היותר בנקודות החלוקה של $\mathscr{P}$). לכן ניתן לכתוב אותה כסכום סופי של פונקציות מהצורה של הפונקציות בלמה 1. אלה פונקציות אינטגרביליות והאינטגרל שלהן מתאפס ולכן לפי הלינאריות של אינטגרל רימן נקבל ש- $\int_a^b \left(\varphi - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right)(t)\,dt = 0$. אבל $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$ היא צירוף לינארי של פונקציות מהצורה של הפונקציות בלמה 2 ולכן מהלינאריות של אינטגרל רימן היא אינטגרבילית והאינטגרל שלה הוא

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right)(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b \varphi_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\Delta x_i .$$

לכן $\int_a^b \left(\varphi - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right)(t)\,dt = 0 = \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right)(t)\,dt = 0$. כלומר

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right)(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i\Delta x_i = I(\varphi)$$

ומההתאמה בהגדרה של אינטגרל של פונקציה חסומה לאינטגרל של פונקצית מדרגות נקבל את הדרוש $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi = I(\varphi)$. ☺

<u>למה</u>: יהיו $g \le f \le h$ כך ש- g,h אינטגרביליות רימן ב- $[a,b]$. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon < S < \int_a^b h(x)\,dx + \varepsilon$ לכל סכום רימן S של f עבור חלוקה $\mathscr{P}$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P}) < \delta$. יתר על כן, לכל S' סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathscr{P}'$ עם פרמטר $\lambda(\mathscr{P}') < \delta$ מתקיים $|S-S'| < \int_a^b (h-g)(x)\,dx + 2\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: g,h אינטגרביליות רימן ב- $[a,b]$. לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_h > 0$ כך שלכל סכום רימן S_h של h עבור חלוקה $\mathscr{P}_h$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P}_h) < \delta_h$ מתקיים $\left|S_h - \int_a^b h(x)\,dx\right| < \varepsilon$ וקיים $\delta_g > 0$ כך שלכל סכום רימן S_g של g עבור חלוקה $\mathscr{P}_g$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P}_g) < \delta_g$ מתקיים $\left|S_g - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \varepsilon$. כלומר $\int_a^b h(x)\,dx - \varepsilon < S_h < \int_a^b h(x)\,dx + \varepsilon$ ו- $\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon < S_g < \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon$.

יהי $\delta=\min\{\delta_g,\delta_h\}$ ותהי $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P})<\delta$. ויהי $S=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ סכום רימן של f עבור חלוקה זו. אזי

$$\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<S_g=\sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n} h(t_i)\Delta x_i=S_h<\int_a^b h(x)dx+\varepsilon$$

כלומר $\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<S<\int_a^b h(x)dx+\varepsilon$ לכל סכום רימן S של f עבור חלוקה $\mathscr{P}$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P})<\delta$.

כעת יהי סכום רימן נוסף S' של f עם חלוקה $\mathscr{P}'$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P}')<\delta$. אזי $\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<S'<\int_a^b h(x)dx+\varepsilon$. לכן

$$\int_a^b g(x)dx-\varepsilon-\left(\int_a^b h(x)dx+\varepsilon\right)<S-S'<\int_a^b h(x)dx+\varepsilon-\left(\int_a^b g(x)dx-\varepsilon\right)$$

כלומר $\int_a^b (g-h)(x)dx-2\varepsilon<S-S'<\int_a^b (h-g)(x)dx+2\varepsilon$ או $|S-S'|<\int_a^b (h-g)(x)dx+2\varepsilon$. ☺

<u>עיקרון הסנדוויץ'</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ב- $[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימות g,h אינטגרביליות רימן ב- $[a,b]$ כך ש- $g\le f\le h$ ו- $\int_a^b h(x)dx-\int_a^b g(x)dx<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) אם f אינטגרבילית מספיק לבחור $g=f=h$.

($\Rightarrow$) נראה שמתקיים קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן[8]. יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $g\le f\le h$ לפי ההנחה כך ש- $\int_a^b h(x)dx-\int_a^b g(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}$. לפי הלמה הקודמת קיים $\delta>0$ עבור $\frac{\varepsilon}{4}$ ועבור g,h אלה כך ש-לכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות בהתאם עם פרמטרים קטנים מ- δ מתקיים

$|S-S'|<\int_a^b (h-g)(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. כלומר מתקיים קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן. ☺

3.6. סכומי דרבו

<u>הגדרה</u>: תהי $f\in\mathscr{B}[a,b]$ ותהי $\mathscr{P}=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$. נסמן $M_i=\sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)$ ו- $m_i=\inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)$. נגדיר את סכומי דרבו של $\mathscr{P}$:

סכום דרבו עליון: $\mathcal{U}(\mathscr{P})=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ **<u>סכום דרבו תחתון</u>**: $\mathcal{L}(\mathscr{P})=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$

<u>הערה</u>: סכומי דרבו מוגדרים היטב משום ש- $f\in\mathscr{B}[a,b]$ ולכן חסומה בכל תת קטע ולכן קיימים $M_i=\sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)$ ו- $m_i=\inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)$. כמו כן נשים ♥ שסכומי דרבו אינם סכומי רימן, משום שלא בהכרח קיימת t_i כך ש- $M_i=f(t_i)$.

---

[8] <u>קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן</u>: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. f אינטגרבילית רימן ב- $[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $|S-S'|<\varepsilon$ לכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות $\mathscr{P},\mathscr{P}'$ בהתאמה כך ש- $\lambda(\mathscr{P}),\lambda(\mathscr{P}')<\delta$.

<u>למה 1</u>: תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$ ותהי $\mathcal{P}$ חלוקה של $[a,b]$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטרים קטנים מ-δ מתקיים

$$|S-S'|<\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})+2\varepsilon$$

<u>הוכחה</u>: נגדיר $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$: לכל $1\le i\le n$ נגדיר $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=m_i$ ו-$\psi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=M_i$ כאשר m_i,M_i מהגדרת סכומי דרבו ולכל $0\le i\le n$ נגדיר $\varphi(x_i)=f(x_i)=\psi(x_i)$. ברור ש-$\varphi\le f\le\psi$. כמו כן אלה פונקציות מדרגות ולכן אינטגרביליות רימן. לפי למה קודמת[9] לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל S',S סכומי רימן של f עבור חלוקה עם פרמטר קטן δ מתקיים $|S-S'|<\int_a^b(\psi-\varphi)(x)dx+2\varepsilon$. וזה לפי לינאריות האינטגרל בדיוק $|S-S'|<\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})+2\varepsilon$. ☺

<u>למה 2</u>: לכל חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ ולכל $\eta>0$ קיימים S,S' סכומי רימן של f עבור $\mathcal{P}$ אשר מקיימים:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P})-S<\eta(b-a)$$
$$S'-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\eta(b-a)$$

ולכן $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<S-S'+2\eta(b-a)$

<u>הערה</u>: נשים לב שכאן מדובר בסכומי רימן שמבוססים על אותה החלוקה, החלוקה שניתנת מראש.

<u>הוכחה</u>: יהיו $s_i,t_i\in[x_{i-1},x_i]$ כך ש-$M_i-\eta<f(t_i)$ ו-$f(s_i)<m_i+\eta$. קיימים כאלה לפי תכונות החסם העליון והתחתון. נגדיר $S=\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$ ו-$S'=\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i$. אזי $M_i\Delta x_i-\eta\Delta x_i<f(t_i)\Delta x_i$ ולכן $\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i-\eta(b-a)=\sum_{i=1}^n(M_i\Delta x_i-\eta\Delta x_i)<\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i=S$ ומכאן ש-$\mathcal{U}(\mathcal{P})-S<\eta(b-a)$. באותו אופן $f(s_i)\Delta x_i<m_i\Delta x_i+\eta\Delta x_i$ ולכן $\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i+\eta(b-a)$ כלומר $S'-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\eta(b-a)$. ☺

<u>*תנאי רימן לאינטגרביליות*</u>: תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ של הקטע $[a,b]$ כך ש-$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש-f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$. אזי לפי קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטר חלוקה קטן מ-δ מתקיים $|S-S'|<\frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $0<\eta=\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. ותהי $\mathcal{P}$ חלוקה של $[a,b]$ עם פרמטר חלוקה קטן מאותו δ מקודם. לפי למה 2 קיימים S,S' סכומי רימן של f לפי $\mathcal{P}$ כך ש-$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<S-S'+2\eta(b-a)\le|S-S'|+2\eta(b-a)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

($\Rightarrow$) נניח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ של הקטע $[a,b]$ כך ש-$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$ ונראה שמתקיים קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן. יהי $\varepsilon>0$. צריך למצוא $\delta>0$ כך ש-$|S-S'|<c\varepsilon$ ($0<c\in\mathbb{R}$ קבוע) לכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטרים קטנים מ-δ. לפי ההנחה קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש-$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$. לפי למה 1 קיים $\delta>0$ כך שלכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטרים קטנים מ-δ מתקיים $|S-S'|<\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})+2\varepsilon$. כלומר $|S-S'|<3\varepsilon$. ☺

---

[9] יהיו $g\le f\le h$ כך ש-g,h אינטגרביליות רימן ב-$[a,b]$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<S<\int_a^b h(x)dx+\varepsilon$ לכל סכום רימן S של f עבור חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש-$\lambda(\mathcal{P})<\delta$. יתר על כן, לכל S' סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathcal{P}'$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P}')<\delta$ מתקיים $|S-S'|<\int_a^b(h-g)(x)dx+2\varepsilon$.

3.7. שקילות של אינטגרביליות ואינטגרביליות רימן

עד כה היו לנו שלושה מושגים:
- אינטגרל של פונקצית מדרגות שסומן $I(\varphi)$
- אינטגרביליות של פונקציה חסומה כאשר האינטגרל, אם קיים, סומן ע"י $\int_a^b f$
- אינטגרביליות רימן כאשר האינטגרל, אם קיים, סומן ע"י $\int_a^b f(x)dx$

ראינו שמושג האינטגרל של פונקצית מדרגות מתלכד עם אינטגרל של פונקציה חסומה ועם אינטגרל רימן וכן מתקיים השוויון $I(\varphi)=\int_a^b\varphi=\int_a^b\varphi(x)dx$. האם המושגים מתלכדים לכל הפונקציות החסומות?

<u>משפט</u>: תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) נניח ש- f אינטגרבילית רימן. אזי לפי תנאי רימן לאינטגרביליות בהינתן $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $\mathscr{P}=\{a=x_0<...<x_n=b\}$ כך ש- $\mathcal{U}(\mathscr{P})-\mathcal{L}(\mathscr{P})<\varepsilon$. עבור חלוקה זו נגדיר שתי פונקציות מדרגות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$. לכל $1\le i\le n$ נגדיר $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=m_i=\inf\limits_{t\in[x_{i-1},x_i]}f(t)$ ו- $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)}=M_i=\sup\limits_{t\in[x_{i-1},x_i]}f(t)$. לנקודות החלוקה $\{x_i\}_{i=0}^n$ נגדיר $\varphi(x_i)=f(x_i)=\psi(x_i)$. ברור ש- $\varphi\le f\le\psi$. וכן אם ניזכר בהגדרה של $\mathcal{L}(\mathscr{P}),\mathcal{U}(\mathscr{P})$ הרי בעצם $\int_a^b\psi(x)dx=\mathcal{U}(\mathscr{P})$ ו- $\int_a^b\varphi(x)dx=\mathcal{L}(\mathscr{P})$. כלומר $\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx<\varepsilon$.
($\Rightarrow$) ראינו שפונקציות מדרגות הן אינטגרביליות רימן. לכן לפי עיקרון הסנדוויץ' f אינטגרבילית רימן. ☺

<u>משפט</u>: תהי $f\in\mathcal{B}$. אזי $f\in\mathscr{R}[a,b]$ אמ"מ f אינטגרבילית רימן ובמקרה זה $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f$.
<u>הוכחה</u>: לפי ההגדרה של אינטגרביליות $f\in\mathscr{R}$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $I(\psi)-I(\varphi)<\varepsilon$. אבל ראינו ש- $I(\varphi)=\int_a^b\varphi(x)dx$ ו- $I(\psi)=\int_a^b\psi(x)dx$. כלומר $f\in\mathscr{R}$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx<\varepsilon$. אבל לפי המשפט הקודם f אינטגרבילית רימן אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx<\varepsilon$. לכן $f\in\mathscr{R}[a,b]$ אמ"מ f אינטגרבילית רימן ב- $[a,b]$.
נראה כעת כי $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f$. יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ ו- $\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx<\varepsilon$. לפי טענה קודמת[10] קיים $\delta_1>0$ כך שלכל S סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathscr{P}$ עם $\lambda(\mathscr{P})<\delta_1$ מתקיים $\int_a^b\varphi(x)dx-\varepsilon<S<\int_a^b\psi(x)dx+\varepsilon$. ראינו כבר שהאינטגרלים מלכדים עבור פונקציות מדרגות. לכן לפי מונוטוניות האינטגרל:

$$\int_a^b\varphi(x)dx-\varepsilon<\int_a^b\varphi(x)dx=\int_a^b\varphi\le\int_a^b f\le\int_a^b\psi=\int_a^b\psi(x)dx<\int_a^b\psi(x)dx+\varepsilon$$

כמו כן לפי הגדרת אינטגרל רימן קיים $\delta_2>0$ כך ש- $\left|S-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$ לכל S סכום רימן של f עבור חלוקה עם פרמטר $\lambda(\mathscr{P})<\delta_2$. יהי S סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathscr{P}$ עם פרמטר $\lambda(\mathscr{P})<\min\{\delta_1,\delta_2\}$. אז נקבל

[10] יהיו $g\le f\le h$ כך ש- g,h אינטגרביליות רימן ב- $[a,b]$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $\int_a^b g(x)dx-\varepsilon<S<\int_a^b h(x)dx+\varepsilon$ לכל סכום רימן S של f עבור חלוקה $\mathscr{P}$ כך ש- $\lambda(\mathscr{P})<\delta$.

$$\left|\int_a^b f-\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\left|\int_a^b f-S\right|+\left|S-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\int_a^b\psi(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)\,dx+2\varepsilon<4\varepsilon$$

מאחר שזה נכון לכל $0<\varepsilon$ נקבל ש- $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f$. ☺

<u>משפט:</u> תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. $f\in\mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש- $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$ לכל חלוקה $\mathcal{P}$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P})<\delta$.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) נניח ש- $f\in\mathcal{R}$. יהי $0<\varepsilon$. לפי קריטריון קושי לאינטגרביליות קיים $0<\delta$ כך ש- $|S-S'|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטרים קטנים מ- δ. תהי $\mathcal{P}$ עם $\lambda(\mathcal{P})<\delta$ ויהי $0<\eta=\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. לפי למה קודמת[11] קיימים S,S' סכומי רימן של f עבור $\mathcal{P}$ כך ש- $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<S-S'+\frac{\varepsilon}{2}$. לכן

$$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<S-S'+\frac{\varepsilon}{2}\le|S-S'|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

($\Rightarrow$) אם מתקיים התנאי אזי מתקיים תנאי רימן לאינטגרביליות[12]. שכן בהינתן $0<\varepsilon$ ניקח $0<\delta$ כך ש- $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$ לכל $\mathcal{P}$ עם פרמטר קטן מ- δ. ☺

<u>משפט:</u> $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ו- $I=\int_a^b f(x)\,dx$ אמ"מ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=I$ לכל (S_n) סדרה של סכומי רימן של f עבור סדרה $(\mathcal{P}_n)$ של חלוקות כך ש- $\lambda(\mathcal{P}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) לפי ההגדרה $I=\int_a^b f(x)dx$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש- $|S-I|<\varepsilon$ לכל S סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathcal{P}$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P})<\delta$. תהי $(\mathcal{P}_n)$ סדרת חלוקות כך ש- $\lambda(\mathcal{P}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. תהי (S_n) סדרת סכומי רימן המתאימים לחלוקות אלה. בהינתן $0<\varepsilon$ יהי $0<\delta$ לפי הגדרת האינטגרל. קיים $N\in\mathbb{N}$ שהחל ממנו $\lambda(P_n)<\delta$. לכן החל ממנו $|S_n-I|<\varepsilon$ כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=I$.

($\Rightarrow$) נניח בשלילה שקיים $0<\varepsilon$ כך שלכל $0<\delta$ קיים סכום רימן S של f כך ש- $|S-I|\ge\varepsilon$. נסתכל בסדרה $(\delta_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$. עבור סדרה זו תהי (S_n) סדרת סכומי הרימן המתאימים לפי ההנחה בשלילה. אזי $\delta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אבל $|S_n-I|\ge\varepsilon$ בסתירה להנחה. ☺

---

[11] לכל חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ ולכל $0<\eta$ קיימים S,S' סכומי רימן של f עבור $\mathcal{P}$ אשר מקיימים $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<S-S'+2\eta(b-a)$

[12] תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן ב- $[a,b]$ אמ״מ לכל $0<\varepsilon$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ של הקטע $[a,b]$ כך ש- $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$.

3.8. תנודה של פונקציות

<u>הגדרה</u>: תהי $f\in\mathscr{B}\left[a,b\right]$. **התנודה** של f בקטע $\left[a,b\right]$ מוגדרת ע"י

$$\omega_f\left[a,b\right]=\sup_{x\in[a,b]}f\left(x\right)-\inf_{x\in[a,b]}f\left(x\right)$$

<u>טענה</u>: תהי $f\in\mathscr{B}\left[a,b\right]$. $\omega_f\left[a,b\right]=\sup_{z,y\in[a,b]}\left|f\left(z\right)-f\left(y\right)\right|$.

<u>תנאי רימן לאינטגרביליות</u>: $f\in\mathscr{R}\left[a,b\right]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ כך שאם $\mathscr{P}$ חלוקה עם $\lambda\left(\mathscr{P}\right)<\delta$ אז $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left(f\right)\Delta x_i<\varepsilon$ כאשר $\omega_i\left(f\right)=\omega_f\left[x_{i-1},x_i\right]$.

<u>הוכחה</u>: זה פשוט ניסוח אחר של תנאי רימן לאינטגרביליות הקודם.

<u>הגדרה</u>: תהי $f\in\mathscr{B}\left[a,b\right]$. **התנודה** של f בנקודה x מוגדרת ע"י

$$\omega_f\left(x\right)=\inf_{0<\delta}\omega_f\left[x-\delta,x+\delta\right]$$

<u>טענה</u>: f רציפה ב- x אמ"מ $\omega_f\left(x\right)=0$.

3.9. המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

<u>הגדרה</u>: תהי $f\in\mathscr{R}\left[a,b\right]$. לכל $c\in\left[a,b\right]$ נגדיר $\int_c^c f\left(x\right)dx=0$. כמו כן $\int_b^a f\left(x\right)dx=-\int_a^b f\left(x\right)dx$.

<u>למה</u>: תהי $f\in\mathscr{R}\left[a,b\right]$. אזי $\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|\le\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נציין שלפי משפט קודם אם $f\in\mathscr{R}$ אז גם $\left|f\right|\in\mathscr{R}$ ולכן האינטגרל מוגדר היטב.
כעת, יודע ש- $-\left|f\right|\le f\le\left|f\right|$. לכן לפי מונוטוניות האינטגרל $-\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx\le\int_a^b f\left(x\right)dx\le\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$. אבל זה בדיוק אומר ש- $\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|\le\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$. ☺

<u>המשפט היסודי</u>: תהי $f\in\mathscr{R}\left[a,b\right]$ ונניח ש- $F'=f$ ב- $\left[a,b\right]$. אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

<u>הוכחה</u>: נראה שלכל $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi\le f\le\psi$ מתקיים $\int_a^b\varphi\le F\left(b\right)-F\left(a\right)\le\int_a^b\psi$ ומכאן תנבע הטענה. שהרי אם $f\in\mathscr{R}\left[a,b\right]$ אז $\sup\left\{\int_a^b\varphi\right\}=\inf\left\{\int_a^b\psi\right\}=\int_a^b f\left(x\right)dx$ ולכן נקבל $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
יהיו φ,ψ כאלה. בה"כ שתיהן מיוצגות ע"י אותה החלוקה $\mathscr{P}=\left\{a=x_0<\ldots<x_n=b\right\}$. F גזירה ב- $\left[a,b\right]$ ולכן

גזירה בכל תת קטע שלו. לפי משפט הערך הממוצע בנוסח לגרנז'[13] עבור F בקטע $\left[x_{i-1},x_i\right]$ קיים $t\in\left(x_{i-1},x_i\right)$ כך ש- $F\left(x_i\right)-F\left(x_{i-1}\right)=f\left(t_i\right)\Delta x_i$. נסכם ביטויים אלה לפי i ונקבל:

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(x_i\right)-F\left(x_{i-1}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(t_i\right)\Delta x_i$$

נזכור ש- $\varphi\le f\le\psi$ ולכן $\varphi\left(t_i\right)\le f\left(t_i\right)\le\psi\left(t_i\right)$. מכאן ש- $\varphi\left(t_i\right)\Delta x_i\le f\left(t_i\right)\Delta x_i\le\psi\left(t_i\right)\Delta x_i$ ולכן $\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(t_i\right)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}f\left(t_i\right)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\psi\left(t_i\right)\Delta x_i$. אבל מאחר ש- $t\in\left(x_{i-1},x_i\right)$ אז בעצם $\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(t_i\right)\Delta x_i=\int_a^b\varphi$ ו- $\sum_{i=1}^{n}\psi\left(t_i\right)\Delta x_i=\int_a^b\psi$. כלומר $\int_a^b\varphi\le F(b)-F(a)\le\int_a^b\psi$. ☺

<u>המשפט היסודי</u>: תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. אם $f\in\mathcal{R}[a,b]$ נגדיר $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. אזי F רציפה ב- $[a,b]$ ואם f רציפה ב- $c\in[a,b]$ אז F גזירה בו ו- $F'(c)=f(c)$.

<u>הוכחה</u>: נראה ש- F מקיימת את תנאי ליפשיץ[14] ב- $[a,b]$ ולכן רציפה שם. יהיו $x,y\in[a,b]$. אזי לפי האדטיביות של האינטגרל $\left|F(x)-F(y)\right|=\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^y f(t)dt\right|=\left|\int_y^x f(t)dt\right|$. אבל $f\in\mathcal{B}[a,b]$ ולכן קיים M כך ש- $|f|\le M$. לכן $\left|\int_y^x f(t)dt\right|\le M\left|\int_y^x 1dt\right|=M(x-y)$. לכן F רציפה ב- $[a,b]$.

כעת נניח ש- f רציפה ב- $c\in[a,b]$. נראה ש- $F'(c)=f(c)$. לפי הגדרת הנגזרת יש להראות ש- $\lim_{x\to c}\left[\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt\right]=f(c)$. נראה שלכל $0<\varepsilon$ מתקיים $\left|\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt-f(c)\right|<\varepsilon$ $\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=$ ומכאן תתקבל הטענה.

$$\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt-f(c)=\frac{1}{x-c}\left[\int_c^x f(t)dt-\int_c^x f(c)dt\right]=\frac{1}{x-c}\int_c^x\left(f(t)-f(c)\right)dt$$

לכן $\left|\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)dt-f(c)\right|=\left|\frac{1}{x-c}\int_c^x\left(f(t)-f(c)\right)dt\right|\le\left|\frac{1}{x-c}\right|\left|\int_c^x\left|\left(f(t)-f(c)\right)\right|dt\right|$. f רציפה ב- c. לכן לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל $0\le|x-c|<\delta$ מתקיים $\left|f(x)-f(c)\right|<\varepsilon$.

בהינתן $0<\varepsilon$ נקבל עבור $|x-c|<\delta$ ש- $\left|\frac{1}{x-c}\right|\left|\int_c^x\left|\left(f(t)-f(c)\right)\right|dt\right|\le\frac{1}{|x-c|}\left|\int_c^x\varepsilon dt\right|=\frac{|x-c|}{|x-c|}\varepsilon=\varepsilon$. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי $F:I\to\mathbb{R}$. F תיקרא **קדומה** של f ב- I אם $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in I$.

<u>מסקנה</u>: אם f רציפה ב- $[a,b]$ אזי לפי המשפט היסודי קיימת לה פונקציה קדומה ב- $[a,b]$ והיא $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

<u>הערה</u>: קיימות פונקציות אינטגרביליות אשר אין להן פונקציה קדומה. למשל, פונקציות מדרגה הן אינטגרביליות, אך לא מקיימות את תכונת ערך הביניים ולכן אין להן פונקציה קדומה.

---

[13] תהי f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b). אזי קיים $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

[14] <u>תנאי ליפשיץ לרציפות</u>: תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בקטע I ונניח שקיים קבוע ממשי K כך שלכל שתי נקודות $x_1,x_2\in I$ מתקיים $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le K\left|x_1-x_2\right|$. אזי $f(x)$ רציפה ב- I.

<u>דוגמה</u>: נסתכל על הפונקציה

$$F\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

פונקציה זו גזירה בכל נגודה והנגזרת שלה היא:

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

אבל $f\left(x\right)$ אינה אינטגרבילית בקטע שמכיל את 0 משום שאינה חסומה שם. כלומר יכול להיות מצב שבו $f\left(x\right)$ מקבלת פונקציה קדומה אבל היא אינה אינטגרבילית. וזה חשוב מאוד למשפט היסודי.

4. האינטגרל הלא מסוים

4.1. הגדרות

<u>הגדרה</u>: האינטגרל הלא מסוים של f הוא הקבוצה $\int f(x)dx = \{F : F' = f\}$. למעשה זו קבוצת הפונקציות הקדומות של הפונקציה f.

<u>הערה</u>: אם F קדומה של f אזי כל הפונקציות הקדומות של f הן מהצורה $F+c$ כאשר $c \in \mathbb{R}$. לכן נהוג לסמן $\int f(x)dx = F(x)+c$.

יש להבדיל בין כמה מושגים:

1. האינטגרל המסוים, הוא אינטגרל רימן ומסומן ע"י $\int_a^b f(x)dx$
2. הפונקציה המצטברת שהגדרנו במשפט היסודי $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
3. פונקציה קדומה, אשר מקיימת $F'(x) = f(x)$
4. האינטגרל הלא מסוים שהגדרנו למעלה $\int f(x)dx$

4.2. שיטות אינטגרציה

4.2.1. <u>אינטגרלים מידיים</u>

יש אינטגרלים שצריך לדעת בע"פ:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ כאשר $n \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ או $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$
8. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$
9. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

4.2.2. שיטת ההצבה

לפי משפט הגזירה של פונקציה מורכבת מתקבל השוויון הבא: אם $F'(t)=f(t)$ אז

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+c$$

דוגמאות:

1. $\int \cos(x^2)2xdx=\sin x^2+c$

2. נחשב את $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx$ ע"י ההצבה $e^x=t$. אז $dx=\frac{1}{t}dt$. ולכן מספיק לחשב את $\int \frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{1}{t}dt$.

בסעיף 4.3 נלמד איך מחשבים אינטגרל של פונקציה מהצורה הזאת. כרגע רק נציין שזה אפשרי וכרוך הכמה מניפולציות אלגבריות.

משפט: תהי $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ ותהי $g(x)$ גזירה ברציפות ב-$[c,d]$ ומקיימת $a\le g(x)\le b$ כאשר $a=g(c), b=g(d)$. אזי $\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(x))g'(x)dx$.

הצבות מוצלחות: $m,n\in\mathbb{Z}$ ו-$R(x,y)$ פונקציה רציונלית בשני משתנים.[15]

צורת האינטגרל	הצבה
$\int x^n\cdot\sqrt[m]{ax+b}dx$	$ax+b=t^m$
$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$
$\int x^{2n+1}\sqrt{a^2\pm x^2}dx$	$t^2=a^2\pm x^2$
$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x=a\sin t$
$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x=a\tan t$ או $x=a\sinh t$
$\int x^{2n}\sqrt{x^2-a^2}dx$	$x=\frac{a}{\sin t}$ או $x=a\cosh t$
$\int R(\sin x,\cos x)dx$	$t=\tan\frac{x}{2}$

4.2.3. אינטגרציה בחלקים

מהנוסחה לנגזרת של מכפלת פונקציות נובע השוויון הבא:

$$\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

דוגמאות:

1. $\int e^x xdx \underset{\substack{f'(x)=e^x\\ g(x)=x}}{=} e^x x-\int e^x dx=e^x x-e^x+c$

---

[15] למשל $R(x,y)=\frac{x^2+xy+x^2y+1}{xy^3+y}$

2. $\int \ln x dx = \int 1\cdot \ln x dx \underset{\substack{f'(x)=1 \\ g(x)=\ln x}}{=} x\ln x - \int x\cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + c$

<u>משפט</u>: יהיו $f(x), g(x)$ גזירות ברציפות ב- $[a,b]$. אזי

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

4.3. אינטגרציה של פונקציה רציונלית

<u>הגדרה</u>: **פונקציה רציונלית** היא פונקציה מהצורה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר $P(x), Q(x)$ פולינומים. פונקציה רציונלית תיקרא **פשוטה** אם $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

נפתור כמה אינטגרלים של פונקציות רציונליות:

1. $\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A\ln|x-\alpha| + c$
2. עבור $1 < n \in \mathbb{N}$:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx = \int A(x-\alpha)^{-n} dx = \frac{A(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + c = \frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} + c$$

3. עבור $p^2 - 4q < 0$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right) - \frac{Ap}{2} + B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx + \left(-\frac{Ap}{2} + B\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right) + \frac{-\frac{Ap}{2} + B}{q - \frac{p^2}{4}} \arctan \frac{x+\frac{p}{2}}{q - \frac{p^2}{4}} + c$$

4. עבור $p^2 - 4q < 0$ ו- $1 < n \in \mathbb{N}$:
5. $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n} dx = -\frac{A}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n} dt$ כאשר

$J_n = \int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n} dt$ נתון ע"י הנוסחה הרקורסיבית: $\begin{cases} J_1 = \int \frac{1}{t^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \\ J_{n+1} = \frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n \end{cases}$

אלגוריתם לחישוב אינטגרל של פונקציה רציונלית:

1. במידה והפונקציה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ אינה פשוטה השתמשו בחילוק פולינומים כדי להציג אותה כ-
$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ כאשר $\deg R(x) < \deg Q(x)$.
2. לפי משפט באלגברה אפשרי לחלק את הפולינום $Q(x)$ לגורמים באופן הבא:
$Q(x) = \left(x-\alpha_1\right)^{m_1} \ldots \left(x-\alpha_k\right)^{m_k} \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{n_1} \ldots \left(x^2+p_lx+q_l\right)^{n_l}$
3. לפי משפט באלגברה קיימים A_j^i, B_j^i, C_j^i קבועים כך ש-

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \left[\frac{A_1^1}{\left(x-\alpha_1\right)^1} + \ldots + \frac{A_{m_1}^1}{\left(x-\alpha_1\right)^{m_1}}\right] + \ldots + \left[\frac{A_1^k}{\left(x-\alpha_k\right)^1} + \ldots + \frac{A_{m_k}^k}{\left(x-\alpha_k\right)^{m_k}}\right] +$$
$$+\left[\frac{B_1^1 + C_1^1 x}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^1} + \ldots + \frac{B_{n_1}^1 + C_{n_1}^1 x}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{n_1}}\right] + \ldots +$$
$$+\left[\frac{B_1^l + C_1^l x}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^1} + \ldots + \frac{B_{n_l}^l + C_{n_l}^l x}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{n_l}}\right]$$

4. חשבו את האינטגרל $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int M(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ ע"י שימוש בנוסחאות שלמעלה.

5. אינטגרלים לא אמיתיים

5.1. אינטגרלים על קטע לא חסום

עד כה עסקנו באינטגרלים של פונקציות חסומות על תחומים חסומים.

<u>הגדרה</u>: תהי f מוגדרת בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו- $a \le b$ ואינטגרבילית בו. נסמן $I(b)=\int_a^b f(x)dx$. אם קיים $\lim_{b\to\infty} I(b)$ והוא סופי נאמר ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתכנס**. אחרת נאמר ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתבדר**.
באופן אנלוגי מגדירים התכנסות של $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

באופן טבעי מתבקשת כאן אנלוגיה בין טורים אינסופיים לבין אינטגרלים על תחומים לא חסומים, ואכן יש דמיון רב. אך אין אנלוגיה בכל התכונות. למשל, ידוע בטורים שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. אין זה כך עבור אינטגרלים. למשל, אם $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{N}\\ 0 & x\notin\mathbb{N}\end{cases}$ אז ברור ש- $f(x)$ אינה מתכנסת כלל אבל ברור גם ש- $\int_0^\infty f(x)dx=0$.

<u>תכונות האינטגרל על תחום לא חסום</u>: יהיו f,g פונקציות מוגדרות בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו- $a \le b$. נניח ש- $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות. אזי:

1. חיוביות: אם $0 \le f$ אז $0 \le \int_a^\infty f(x)dx$
2. מונוטוניות: אם $f \le g$ אז $\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$
3. לינאריות:
   a. $\int_a^\infty (f+g)(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx$
   b. לכל $k\in\mathbb{R}$ $\int_a^\infty (k\cdot f)(x)dx = k\int_a^\infty f(x)dx$
4. אדטיביות: לכל $a \le c$ $\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$

<u>הוכחה</u>: ע"י שימוש בתכונות האינטגרל על קטע סגור $[a,b]$ ולקיחת גבול $b\to\infty$.

<u>קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל בתחום לא חסום</u>: תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ עם a קבוע ו- $a \le b$. אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים B כך שלכל $B<b,b'$ מתקיים $\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: תהי $F(b)=\int_a^x f(x)dx$. $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אמ"מ קיים הגבול $\lim_{b\to\infty} F(b)$. אבל לפי הגדרת הגבול $\lim_{b\to\infty} F(b)$ קיים אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $B\in\mathbb{R}$ כך שלכל $B<b,b'$ מתקיים $|F(b)-F(b')|<\varepsilon$. כלומר $|F(b)-F(b')| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^{b'} f(x)dx\right| = \left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| < \varepsilon$. ☺

<u>טענה</u>: אם h מוגדרת בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו- $a\le b$ ו- $0\le h(x)$ לכל $a<x$ אזי $\int_a^\infty h(x)dx$ מתכנס אמ"מ $I(b)=\int_a^b h(x)dx$ חסומה.

<u>הוכחה</u>: $0\le h(x)$ ולכן ברור ש- $I(b)=\int_a^b h(x)\,dx$ פונקציה עולה. אבל פונקציה מונוטונית עולה וחסומה היא מתכנסת באינסוף. ☺

<u>קריטריון ההשוואה</u>: יהיו f,g פונקציות מוגדרות בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו- $a\le b$. נניח כי קיים $0<k\in\mathbb{R}$ כך ש- $0\le f(x)\le k\cdot g(x)$. אזי:

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

<u>הוכחה</u>:

ברור שאם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty kg(x)\,dx$ מתכנס. ולכן הפונקציה $kG(b)=\int_a^\infty kg(x)\,dx$ חסומה בקטע. אבל $0\le f(x)$ ולכן לפי הטענה הקודמת, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

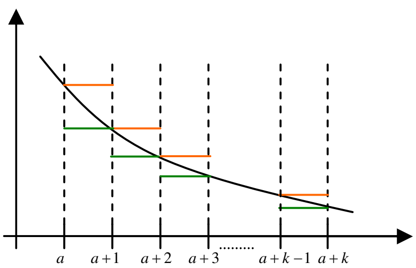
כעת, אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר, אם נניח בשלילה ש- $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס, אז מהחלק הראשון נקבל ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס. בסתירה. ☺

<u>קריטריון גבולי להתכנסות</u>: יהיו f,g פונקציות מוגדרות בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו- $a\le b$. נניח ש- $0\le f(x)$ ו- $0<g(x)$ לכל $a\le x$. אם קיים $0<k$ כך ש- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon<k$ קבוע כלשהו. קיים $X\in\mathbb{R}$ כך שלכל $X<x$ מתקיים $k+\varepsilon>\frac{f(x)}{g(x)}>k-\varepsilon>0$ ולכן $(k-\varepsilon)g(x)<f(x)<(k+\varepsilon)g(x)$. ועכשיו המשפט מתקבל ע"י קריטריון ההשוואה. ☺

<u>משפט</u>: תהי f חיובית יורדת בקטע $[a,\infty)$[16]. אזי $\sum_{k=0}^\infty f(a+k)$ מתכנס אמ"מ $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>: נעיר שמאחר שהפונקציה מונוטונית יורדת נובע מכל שהיא אינטגרבילית בכל תת קטע סגור ולכן ניתן לדבר על האינטגרל הלא אמיתי.



ברור ש- $s_k=f(a)+\ldots+f(a+k)\ge\int_a^{a+k+1}f(x)\,dx$ ומצד שני $s_k-f(a)=f(a+1)+\ldots+f(a+k)\le\int_a^{a+k}f(x)\,dx$.

טור חיובי מתכנס אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים חסומה ואינטגרל מתכנס אמ"מ האינטגרל על קטעים סגורים חסום.

נניח ש- $\sum_{k=0}^\infty f(a+k)$ מתכנס. אזי (s_k) חסומה. ולכן $F(k)=\int_a^{a+k+1}f(x)\,dx$ חסומה ומכאן שהאינטגרל מתכנס.

[16] ולכן אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר $a\le b$.

ואם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז $F(k)=\int_a^{a+k} f(x)dx$ חסומה ולכן (s_k) חסומה, כלומר הטור מתכנס. ☺

<u>הגדרה</u>: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר $a\le b$. נאמר ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אך לא בהחלט, נאמר שהוא **מתכנס בתנאי**.

<u>משפט</u>: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר $a\le b$. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon>0$. לפי קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל בתחום לא חסום קיים B כך שלכל $B<b,b'$ מתקיים $\left|\int_b^{b'}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$. ולכן עבור אותו B מתקיים לכל $B<b,b'$ ש- $\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right|\overset{*}{\le}\left|\int_b^{b'}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$ כאשר (*) נובע מתכונת המונוטוניות. ☺

<u>משפט</u>: תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,\infty)$ כאשר $0<a$. נניח ש- $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ חסומה שם. אזי לכל $0<\alpha$ האינטגרל $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}dx$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>: $f(x)$ רציפה ולכן $F(x)$ פונקציה קדומה שלה. לכן עבור קטע סגור $[a,b]$ ניתן להשתמש במשפט היסודי ובאינטגרציה לפי חלקים:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x^\alpha}dx=F(x)\cdot\frac{1}{x^\alpha}\Big|_a^b-\int_a^b F(x)(-\alpha)\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx$$

נשים לב שמאחר ש- $|F(x)|\le M$ חסומה מתקיים $F(x)\cdot\frac{1}{x^\alpha}\Big|_a^\infty=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{F(b)}{b^\alpha}-\frac{F(a)}{a^\alpha}\right]=-\frac{F(a)}{a^\alpha}$ וכן $\left|\int_a^b F(x)(-\alpha)\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx\right|\le\left|\int_a^b\left|F(x)(-\alpha)\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right|dx\right|\le\alpha\int_a^b M\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx$ והאינטגרל הזה מתכנס כי $1<\alpha+1$. ☺

<u>דוגמה</u>: האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס, לפי המשפט הקודם, אך לא בהחלט.

5.2. אינטגרלים של פונקציות לא חסומות

<u>הגדרה</u>: תהי f מוגדרת ב- $(a,b]$ ואינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[c,b]$ כאשר $a<c$ ואינה חסומה בכל סביבה ימנית של a. נגדיר $I(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. אם קיים הגבול $\lim_{\varepsilon\to0^+}I(\varepsilon)$ והוא סופי נאמר ש**האינטגרל הלא אמיתי** $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס. אחרת, נאמר ש- $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר.

באופן אנלוגי מגדירים את $\int_a^b f(x)dx$ למקרה ש- f אינה חסומה בכל סביבה שמאלית של b.

<u>קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל של פונקציה לא חסומה</u>: תהי f מוגדרת ב- $(a,b]$ ואינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[c,b]$ כאשר $a<c$ ואינה חסומה בכל סביבה ימנית של a. אזי $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס אמ"מ לכל $0<\varepsilon$

קיים $a<C$ כך שלכל $a<c,c'<C$ מתקיים $\left|\int_c^{c'} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

<u>הערה</u>: אינטגרל לא אמיתי של פונקציה לא חסומה אפשר בקלות להעביר לאינטגרל לא אמיתי של פונקציה על תחום לא חסום:

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \underset{\substack{x=a+\frac{1}{y}\\ dx=-\frac{1}{y^2}dy}}{=} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{y^2}\cdot f\left(a+\frac{1}{y}\right)dy$$

מכאן נובע שאת כל המשפטים למקרה של התכנסות של אינטגרל בתחום לא חסום ניתן לכתוב בצורה אנלוגית עבור אינטגרלים של פונקציות לא חסומות.

5.3. פונקצית גמא

<u>הגדרה</u>: **פונקצית גמא** מוגדרת ע"י האינטגרל הלא אמיתי $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$

<u>משפט</u>: פונקצית גמא $\Gamma(t)$ מוגדרת היטב (כלומר האינטגרל מתכנס) לכל $0<t$.

<u>הוכחה</u>: נחלק את ההוכחה לשני חלקים: $\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx$ ו- $\int_1^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$.

בקטע $(0,1]$ מתקיים $\frac{1}{x^{1-t}}=x^{t-1}\geq\frac{x^{t-1}}{e^x}\geq\frac{x^{t-1}}{e}\geq 0$. לכן לפי קריטריון ההשוואה לאינטגרלים של פונקציות חיוביות נקבל ש- $\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx$ מתכנס אמ"מ $1-t<1$, כלומר אמ"מ $0<t$.

נסתכל כעת בקטע $[1,\infty)$. ידוע ש- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^x}=0$ לכל $m\in\mathbb{R}$ ולכן לכל t הפונקציה $e^{-x}x^{t+1}$ חסומה על $[1,\infty)$. לכן קיים קבוע C_t כך שלכל $1\leq x$ מתקיים $x^{t-1}e^{-x}\leq\frac{C_t}{x^2}$. לכן לפי קריטריון ההשוואה $\int_1^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ מתכנס. ☺

<u>טענה</u>: לכל $0<t$ מתקיים $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$

<u>הוכחה</u>: $\Gamma(t+1)=\int_0^\infty x^t e^{-x}dx$. נחשב את האינטגרל בחלקים. נסמן $u=x^t, v'=e^{-x}$. אז

$\Gamma(t+1)=-x^te^{-x}\Big|_0^\infty+t\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx=t\Gamma(t)$. ☺

<u>מסקנה</u>: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\Gamma(n)=(n-1)!$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על n.

6. סדרות וטורי פונקציות

6.1. הגדרות

סימון: $B^A=\{f:A\to B\}$ קבוצת הפונקציות הממשיות מ- A ל- B.

הגדרה: תהי $X\subset\mathbb{R}$ תת קבוצה (לא בהכרח קטע). **סדרה של פונקציות** ב- X הינה סדרה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^X$ כאשר $n\mapsto f_n$ ו- $f_n:X\to\mathbb{R}$.

הגדרה: תהי $X\subset\mathbb{R}$ תת קבוצה (לא בהכרח קטע). ותהי סדרה של פונקציות ב- X (f_n). אזי $\sum f_n$ נקרא **טור אינסופי של פונקציות**.
אנו לא מציינים את האינדקס שממנו מתחילה הספירה, אלא מניחים שהאינדקס הוא כזה שכל המחוברים מוגדרים היטב.

6.2. התכנסות לעומת התכנסות במידה שווה

הגדרה: יהיו (f_n) ו- f מוגדרות ב- $X\subset\mathbb{R}$. נאמר ש- $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ נקודתית ב- X אם לכל $x\in X$ מתקיים $f=\lim_{n\to\infty}f_n$. כלומר לכל $x\in X$ מתקיים שלכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

הגדרה: יהיו (f_n) ו- f מוגדרות ב- X. נאמר ש- $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ במידה שווה ב- X אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

(f_n) אינה מתכנסת במידה שווה ל- f ב- X אם קיים $0<\varepsilon$ כך שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $x\in X$ וקיים $N<n$ כך ש- $|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon$. זה אומר שיש תת סדרה (f_{n_k}) וסדרה (x_k) כך ש- $|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\geq\varepsilon$ לכל $k\in\mathbb{N}$.

קריטריון קושי להתכנסות סדרות במידה שווה: (f_n) מתכנסת במידה שווה ל- f ב- X אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n,m$ מתקיים $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.
הוכחה:
($\Leftarrow$) נניח ש- $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ במ"ש. יהי $0<\varepsilon$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ לכל $x\in X$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. יהיו $N<n,m$. אזי לכל $x\in X$ מתקיים

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

($\Rightarrow$) נניח שמתקיים קריטריון קושי. לכל $x \in X$ קבוע $\left(f_n\left(x\right)\right)$ סדרת קושי ולכן מתכנסת. נסמן $f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)$ מוגדרת ב- X. נטען שההתכנסות היא במידה שווה. יהי $0<\varepsilon$. יהי $0<\varepsilon'<\varepsilon$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n,m$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon'$. נקבע את n ונשאיף את m לאינסוף. נקבל ש- $\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\le\varepsilon'<\varepsilon$. נציין שזה אפשרי בגלל ההתכנסות הנקודתית. אז קיבלנו שעבור $N<n$ לכל $x\in X$ $\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$. כלומר ההתכנסות היא במידה שווה. ☺

<u>הגדרה</u>: יהיו $\left(f_n\right)$ ו- f מוגדרות ב- X. נאמר שהטור $\sum f_n$ מתכנס נקודתית ל- f אם לכל $x\in X$ מתקיים $f\left(x\right)=\sum f_n\left(x\right)$. כלומר אם לכל $x\in X$ מתקיים שלכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $\left|\sum^n f_i\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

<u>הגדרה</u>: יהיו $\left(f_n\right)$ ו- f מוגדרות ב- X. נאמר שהטור $\sum f_n$ מתכנס ל- f במידה שווה ב- X אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n$ מתקיים $\left|\sum^n f_i\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

<u>קריטריון קושי להתכנסות טורים במידה שווה</u>: תהי $\left(f_n\right)$ מוגדרת ב- X. $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ב- X אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n<m$ מתקיים $\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: ע"י החלת קריטריון קושי להתכנסות סדרות במידה שווה על סדרת הסכומים החלקיים של הטור.

<u>קריטריון ויירשטראס</u>: תהי $\left(f_n\right)$ מוגדרת ב- X. תהי $\left(M_n\right)$ סדרה ב- $\mathbb{R}$ אי שלילית כך שמתקיים:

1. הטור $\sum M_n$ מתכנס
2. $\left|f_n\left(x\right)\right|\le M_n$ לכל $x\in X$

אזי $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ב- X.

<u>הוכחה</u>: יהי $0<\varepsilon$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n<m$ $\sum_{i=n}^{m} M_i<\varepsilon$. אבל $\left|f_i\left(x\right)\right|\le M_i$ לכל $i\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in X$. לכן עבור אותו N לכל $N<n<m$ יתקיים $\left|\sum_{i=n}^{m} f_i\left(x\right)\right|\le\sum_{i=n}^{m}\left|f_i\left(x\right)\right|\le\sum_{i=n}^{m} M_i<\varepsilon$ כלומר מתקיים קריטריון קושי להתכנסות טורים במידה שווה. ☺

6.3. התכנסות ורציפות

<u>טענה</u>: תהי $\left(f_n\left(x\right)\right)$ סדרת פונקציות רציפות בקטע X המתכנסת שם לפונקציה רציפה $f\left(x\right)$. אזי לכל $a\in X$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n\left(x\right)=\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)$.

<u>הוכחה</u>: יהי $a\in X$. לכל $n\in\mathbb{N}$ $f_n\left(x\right)$ פונקציה רציפה ולכן $\lim_{x\to a} f_n\left(x\right)=f_n\left(a\right)$. אבל סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ב- X, ובפרט ב- a ולכן $\lim_{n\to\infty} f_n\left(a\right)=f\left(a\right)$.

מצד שני, לכל $x\in X$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)=f\left(x\right)$ אבל $f\left(x\right)$ רציפה ולכן $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=f\left(x\right)$. סה"כ קיבלנו ש- $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n\left(x\right)=f\left(a\right)=\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right)$. ☺

<u>משפט</u>: תהי $\left(f_n\right)$ מוגדרת בקטע I ונניח ש- $f_n\to f$ במ"ש ב- I. אם לכל $n\in\mathbb{N}$ f_n רציפה ב- $a\in I$ אז f רציפה ב- a.

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon>0$. יהי $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ לכל $x\in I$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$. יהי $N<n$ קבוע כזה. $f_n\left(x\right)$ רציפה ב- a ולכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $\left|x-a\right|<\delta$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)-f_n\left(a\right)\right|<\varepsilon$. אז עבור אותו $\delta>0$ יתקיים שאם $\left|x-a\right|<\delta$ אז

$$\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|\le\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|+\left|f_n\left(x\right)-f_n\left(a\right)\right|+\left|f_n\left(a\right)-f\left(a\right)\right|<3\varepsilon$$

כלומר $f\left(x\right)$ רציפה ב- a. ☺

<u>משפט דיני לסדרות</u>: יהיו $\left(f_n\right)$ ו- f רציפות בקטע סגור וחסום I. אם $\left(f_n\right)$ מונוטונית[17] ושואפת נקודתית ל- f, אזי $f_n\to f$ במ"ש ב- I.

<u>הוכחה</u>: בה"כ $\left(f_n\right)$ מונוטונית יורדת. נגדיר $g_n\left(x\right)=f_n\left(x\right)-f\left(x\right)$. אזי ברור ש- $\left(g_n\left(x\right)\right)$ חיובית מונוטונית יורדת לאפס. אם נראה שהיא מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס תנבע הטענה. כל הפונקציות $g_n\left(x\right)$ רציפות ולכן ממשות מקסימום ב- I. נניח שלכל $n\in\mathbb{N}$ $g_n\left(x_n\right)=M_n=\max g_n\left(I\right)$. אם נראה ש- $\lim_{n\to\infty} M_n=0$ תנבע הטענה שהרי אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ ולכל $x\in I$ יתקיים $\left|g_n\left(x\right)\right|=g_n\left(x\right)\le M_n<\varepsilon$.

$\left(x_n\right)$ סדרה ב- I ולכן חסומה ולכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת $\left(x_{n_k}\right)$. I סגור ולכן ניתן לומר ש- $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c\in I$. נסתכל בסדרה $\left(g_j\left(c\right)\right)$. ברור ש- $\lim_{j\to\infty} g_j\left(x\right)=0$. לכן בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $J\in\mathbb{N}$ כך שלכל $J<j$ מתקיים $g_j\left(c\right)<\varepsilon$. כמו כן $g_J\left(x\right)$ רציפה ולכן עבור אותו ε קיים $\delta>0$ כך שאם $\left|x-c\right|<\delta$ אז $g_J\left(x\right)<\varepsilon$. יהי $k\in\mathbb{N}$ כך שגם $\left|x_{n_k}-c\right|<\delta$ וגם $J<n_k$. אזי לכל $n_k<n$ מתקיים $M_n\le M_{n_k}=g\left(x_{n_k}\right)\le g_J\left(x_{n_k}\right)<\varepsilon$ (בגלל המונוטוניות). אבל g_J רציפה ולכן עבור אותו ε קיים $\delta>0$ כך שאם $\left|x-c\right|<\delta$ אז $\left|g_J\left(x\right)-g_J\left(c\right)\right|<\varepsilon$. יהי $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $\left|x_{n_k}-c\right|<\delta$ ובו זמנית $J<n_k$ ואז לכל $n_k<n$ נקבל $M_n\le M_{n_k}=g_{n_k}\left(x_{n_k}\right)\le g_J\left(x_{n_k}\right)\le\left|g_J\left(x_{n_k}\right)-g_J\left(c\right)\right|+g_J\left(c\right)<2\varepsilon$. ומכאן הטענה. ☺

---

[17] כלומר לכל $x\in I$ או $f_{n+1}\left(x\right)\le f_n\left(x\right)$ או $f_{n+1}\left(x\right)\ge f_n\left(x\right)$.

<u>משפט</u>: אם לכל $n\in\mathbb{N}$ הפונקציה $f_n(x)$ רציפה ב- X והטור $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$ ב- X אז הפונקציה $S(x)$ רציפה ב- X.
<u>הוכחה</u>: נובע מהחלת המשפט המקביל לסדרות על סדרת הסכומים החלקיים.

<u>משפט דיני לטורים</u>: אם לכל $n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)$ חיובית ורציפה ב- $[a,b]$ ובנוסף הסכום $S(x)$ של הטור $\sum f_n$ הוא פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, אזי הטור $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$ ב- $[a,b]$.
<u>הוכחה</u>: נובע מהחלת משפט לסדרות על סדרת הסכומים החלקיים.

6.4. התכנסות ואינטגרציה

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אשר מתכנסת שם במידה שווה לפונקציה f. אזי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.
<u>הוכחה</u>: בשביל להראות ש- $f(x)$ אינטגרבילית יש להראות לכל $\varepsilon>0$ קיימות $g(x),h(x)$ אינטגרביליות כך ש- $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ו- $\int_a^b h(x)dx-\int_a^b g(x)dx<\varepsilon$.
יהי $\varepsilon>0$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. אזי $f_n(x)-\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}<f(x)<f_n(x)+\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. נקבע $n>N$ כזה ונסמן $g(x)=f_n(x)-\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$ ו- $h(x)=f_n(x)+\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. אז $\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_a^b\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}dx=\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. לכן $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.
כעת נראה ש- $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$. יהי $\varepsilon>0$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. אזי

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)dx\right|\le\left|\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|dx\right|<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon.$$ ☺

<u>מסקנה</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אשר מתכנסת שם במידה שווה לפונקציה f. נגדיר לכל $x\in[a,b]$ $g_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt$. אזי g_n מתכנסת ל- $g(x)=\int_a^x f(x)dx$ במידה שווה.
הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ונראה שקיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ $\left|g_n(x)-g(x)\right|<\varepsilon$. יהי $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $t\in[a,b]$ $\left|f_n(t)-f(t)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. אז עבור אותו N לכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים

$$\left|g_n(x)-g(x)\right|=\left|\int_a^x f_n(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right|\le\int_a^x\left|f_n(t)-f(t)\right|dt\le\int_a^b\left|f_n(t)-f(t)\right|dt<\varepsilon.$$ ☺

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרת פונקציות ב- $[a,b]$ וטור הפונקציות $\sum f_n = S(x)$ מתכנס במידה שווה ב- $[a,b]$. אזי $\int_a^b S(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$.

<u>הוכחה</u>: מתקבל מהחלת המשפט המקביל לסדרות על סדרת הסכומים החלקיים של הטור.

6.5. התכנסות וגזירה

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות גזירות ברציפות בקטע הסגור I נניח שקיים $a \in I$ כך שהסדרה $(f_n(a))$ מתכנסת. אם הסדרה (f_n') מתכנסת במידה שווה ב- I לפונקציה $g(x)$ אזי הסדרה (f_n) מתכנסת ב- I לפונקציה גזירה ולכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$.

<u>הוכחה</u>: הנגזרות הן פונקציות רציפות על קטע סגור ולכן אינטגרביליות. לכן לפי משפט האינטגרציה לכל $x \in I$ מתקיים $\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt$. לפי המשפט היסודי, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$. הסדרות $\left(\int_a^x f_n'(t)dt\right)$ ו- $(f_n(a))$ מתכנסות ולכן הסדרה $(f_n(x))$ מתכנסת לכל $x \in I$. נגדיר $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. מכאן נקבל ש- $\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$. לכן $f(x) = \int_a^x g(t)dt + f(a)$. $g(x)$ רציפה כי היא גבול במידה שווה של סדרת פונקציות רציפות. לכן לפי המשפט היסודי בכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) = g(x)$. ☺

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרת פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$ והטור $S(x) = \sum f_n(x)$ מתכנס ב- $[a,b]$ וטור הנגזרות $\sum f_n'$ מתכנס במידה שווה ב- $[a,b]$. אזי $S'(x) = \sum f_n'(x)$.

<u>הוכחה</u>: מתקבלת מהחלת המשפט הקודם על סדרת הסכומים החלקיים של הטור.

6.6. טורי חזקות

<u>הגדרה</u>: יהיו $a \in \mathbb{R}$ ו- $(c_n) \subset \mathbb{R}$. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ נקרא **טור חזקות**.

מעתה נניח כי $a = 0$.

<u>למה</u>: אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס עבור $r \in \mathbb{R}$ אזי הוא מתכנסת עבור כל $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x| < |r|$.

<u>הוכחה</u>: יהי $0 \neq r \in \mathbb{R}$ כך ש- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ מתכנס. אזי $\left(c_n r^n\right)$ שואפת לאפס וחסומה. יהי M כך ש- $M \geq \left|c_n r^n\right|$ לכל $n \in \mathbb{N}$. יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x| < |r|$. אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n x^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n\left(\frac{x}{r}\right)^n r^n\right| \leq M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{r}\right|^n$. אבל $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{r}\right|^n$ מתכנס. לכן לפי מבחן ההשוואה $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס. ☺

<u>מסקנה</u>: תחום ההתכנסות של טור חזקות הוא תמיד קטע סימטרי לגבי $x = 0$.

<u>משפט</u>: יהי טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. אזי מתקיים אחד מהבאים:

1. הטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$
2. קיים $0 < R \in \mathbb{R}$ כך שהטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x| < R$ ומתבדר לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $R < |x|$.
3. הטור מתכנס רק ל- $x = 0$.

<u>הוכחה</u>: אם הטור מתכנס רק ל- $x = 0$ סיימנו. אחרת קיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ מתכנס. נסתכל על הקבוצה $I = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty\right\}$. כעת יש שתי אפשרויות.

אם I חסומה אז קיים לה חסם עליון $R > 0$. ברור ש- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתבדר לכל $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $R < |x|$. כעת יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x| < R$. קיים $r \in I$ כך ש- $|x| < r < R$. לכן $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ מתכנס ולפי הלמה גם $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס.

ברור שאם I אינה חסומה אז לפי הלמה $I = \mathbb{R}$. ☺

<u>הגדרה</u>: R מהמשפט הקודם נקרא **רדיוס ההתכנסות** של $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

<u>משפט קושי-אדמר</u>: רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ הוא $R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$.

<u>הוכחה</u>: נשתמש במבחן קושי לטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n||x|^n} = |x|\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ מתכנס בהחלט לעל $x \in \mathbb{R}$ שמקיים $|x|\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ ומתבדר לכל $x \in \mathbb{R}$ שמקיים $1 < |x|\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. לכן לפי המשפט הקודם $R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ הוא רדיוס ההתכנסות של הטור. ☺

<u>הערה</u>: אם קיים $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, אז ע"י שימוש במשפט ד'אלמבר לבדיקת התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, ניתן לקבל באופן דומה ש- $R=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

<u>משפט</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ טור חזקות על רדיוס התכנסות R. אזי הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[-r,r]$ המוכל בקטע ההתכנסות I.
<u>הוכחה</u>: לכל מתקיים $\left|c_nx^n\right|\le\left|c_nr^n\right|$ ועכשיו המשפט נובע מקריטריון ויירשטראס להתכנסות במידה שווה. ☺

<u>משפט אבל</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ טור מתכנס ותהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ מוגדרת עבור $-1<x\le 1$. אזי $\lim_{x\to 1^-}=f(1)$, כלומר $f(x)$ רציפה משמאל ב- $x=1$.

<u>מסקנה</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0<R<\infty$. אם הטור מתכנס גם ב- $x=R$ ($x=-R$) אזי הפונקציה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ רציפה משמאל ב- $x=R$ (רציפה מימין ב- $x=-R$).

<u>משפט</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R$. נתבונן בפונקציה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ בקטע $(-R,R)$. אזי:

1. $f(x)$ גזירה שם ומתקיים $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$.
2. לכל $[a,b]\subset(-R,R)$, $f(x)$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b$.

<u>הוכחה</u>: מספיק להראות שלכל הטורים הנ"ל אותו רדיוס התכנסות. אבל זה ברור ממשפט קושי-אדמר. ☺

6.7. פונקציות אנליטיות

<u>הגדרה</u>: תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע I. נאמר ש-$f(x)$ **אנליטית** ב- I אם לכל $a\in I$ קיימים (a_n) ב- $\mathbb{R}$ וסביבה $U\subset I$ של a כך ש- $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ לכל $x\in U$.

<u>משפט</u>: תהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ עבור $|x-a|<R$. אזי $f(x)$ אנליטית בקטע $I=(a-R,a+R)$.

7. המרחב האוקלידי ממימד n

7.1. המבנה האוקלידי

<u>הגדרה</u>: יהי $n\in\mathbb{N}$. נגדיר $\mathbb{R}^n=\left\{\left(x^1,...,x^n\right):\forall 1\le i\le n\ x^i\in\mathbb{R}\right\}$ קבוצת כל ה-n-יות של מספרים ממשיים.
באלגברה לינארית ידוע לנו שזהו מרחב וקטורי. ל-$\left(x^1,...,x^n\right)$ נקרא **נקודה** ב-$\mathbb{R}^n$ ולמספרים $x^1,...,x^n$ נקרא **הקואורדינטות** של הנקודה.

<u>הגדרה</u>: נגדיר פונקציה $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י $d\left(\left(x^1,...,x^n\right),\left(y^1,...,y^n\right)\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y^i-x^i\right)^2}$. פונקציה זו נקראת המרחק בין $x=\left(x^1,...,x^n\right)$ לבין $y=\left(y^1,...,y^n\right)$.

<u>טענה</u>: הפונקציה $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כפי שהגדרנו היא מטריקה על $\mathbb{R}^n$. כלומר, לכל $x,y,z\in\mathbb{R}^n$:
1. חיוביות: $0\le d\left(x,y\right)$ ו-$d\left(x,y\right)=0$ אמ"מ $x=y$
2. סימטריה: $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
3. אי שוויון המושלש: $d\left(x,z\right)\le d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

הוכחה: פשוטה מאוד וזה גם ידוע לנו מאלגברה לינארית.

7.2. כדורים, קטעים ומה ביניהם

נרצה להרחיב את מושג הקטע שהגדרנו ב-$\mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u>: **כדור פתוח** ברדיוס $0<r$ שמרכזו $a\in\mathbb{R}^n$ הוא הקבוצה $B_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:d\left(x,a\right)<r\right\}$.
כדור סגור ברדיוס $0<r$ שמרכזו $a\in\mathbb{R}^n$ הוא הקבוצה $\overline{B}_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:d\left(x,a\right)\le r\right\}$.
ספירה ברדיוס $0<r$ שמרכזה $a\in\mathbb{R}^n$ היא הקבוצה $S_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:d\left(x,a\right)=r\right\}$.

<u>הגדרה</u>: יהיו $\left\{a^i\right\}_{i=1}^n,\left\{b^i\right\}_{i=1}^n$ כך ש-$a^i\le b^i$ לכל $1\le i\le n$. **תיבה** היא הקבוצה $\left\{\left(x^1,...,x^n\right)\in\mathbb{R}^n:\forall 1\le i\le n\ a^i\le x^i\le b^i\right\}$. הקבוצה $\left\{\left(x^1,...,x^n\right)\in\mathbb{R}^n:\forall 1\le i\le n\ a^i<x^i<b^i\right\}$ נקראת **תיבה פתוחה**.

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה $U\subset\mathbb{R}^n$ תיקרא **סביבה** של $a\in\mathbb{R}^n$ אם קיים $0<\varepsilon$ כך ש-$B_\varepsilon\left(a\right)\subset U$.

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$ תיקרא **פתוחה** אם לכל $a\in A$ קיימת סביבה U כך ש-$a\in U\subset A$. A תיקרא **סגורה** אם A^c פתוחה.

7.3. סדרות ב- $\mathbb{R}^n$

<u>הגדרה</u>: הפונקציה $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$ כאשר $k\mapsto a_k=\left(x_k^1,...,x_k^n\right)$ תיקרא **סדרה** ב- $\mathbb{R}^n$. בעצם זה כמו n סדרות ב- $\mathbb{R}$.
נסמן את הסדרה ב- $\{a_k\}$.

<u>הגדרה</u>: הנקודה $l=\left(l^1,...,l^n\right)$ היא **גבול** של סדרת הנקודות $\{a_k\}$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $K<k$ מתקיים $d\left(a_k,l\right)<\varepsilon$. נסמן אז $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=l$.

<u>למה</u>: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$. אזי לכל $1\le i\le n$ מתקיים $\left(x^i-y^i\right)^2\le\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x^i-y^i\right)^2\le n\max\left\{\left(x^j-y^j\right):1\le j\le n\right\}$ וכן $\left|x^i-y^i\right|\le d\left(x,y\right)\le\sqrt{n}\max\left\{\left|x^j-y^j\right|:1\le j\le n\right\}$.
<u>הוכחה</u>: טריוויאלי.

<u>משפט</u>: תהיינה $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^n$ ו- $x\in\mathbb{R}^n$. אזי:
1. $\lim\limits_{k\to\infty}d\left(x_k,x\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\left(x_k-x\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$
2. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$ אמ"מ לכל $1\le i\le n$ מתקיים $\lim\limits_{k\to\infty}x_k^i=x^i$

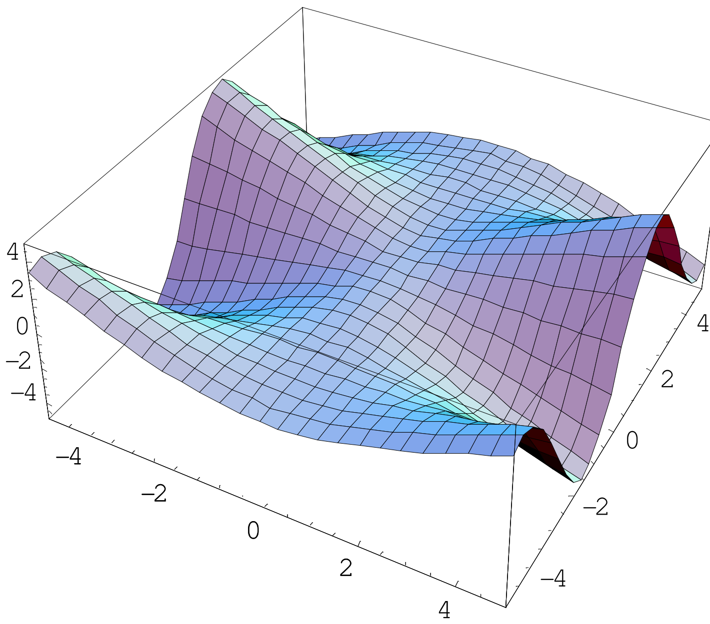
<u>הוכחה</u>: טריוויאלי בשימוש בלמה.

<u>משפט</u>: $\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$ סדרה מתכנסת אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $K<m,k$ מתקיים $d\left(x_k,x_m\right)<\varepsilon$.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) טריוויאלי בשימוש באי שוויון המשולש עבור פונקציית המרחק.
($\Rightarrow$) יהי $0<\varepsilon$. קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $K<k,m$ מתקיים $d\left(x_k,x_m\right)<\varepsilon$. מהלמה נובע שלכל $1\le i\le n$ $\left|x_k^i-x_m^i\right|<\varepsilon$. לכן $\left(x_k^i\right)\subset\mathbb{R}$ סדרת קושי ולכן מתכנסת, נניח ל- x^i. נגדיר $x=\left(x^1,...,x^n\right)$. ברור ש- $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$.
☺

7.4. פונקציות ב- $\mathbb{R}^n$

<u>הגדרה</u>: תהי $D\subset\mathbb{R}^n$. אומרים שעל הקבוצה D מוגדרת **פונקציה**, אם לכל נקודה $x\in D$ מתאים מספר ממשי יחיד לפי חוק הנתון מראש, ומסמנים $y=f\left(x\right)$ או $y=f\left(x^1,...,x^n\right)$. הקבוצה D נקראת **תחום ההגדרה** של הפונקציה.

<u>דוגמה</u>: נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x,y)=\frac{x^2\sin y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$. פונקציה זו מוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$ וניתן לצייר את הגרף שלה:



7.5. גבולות של פונקציות

<u>הגדרת הגבול הכפול לפי קושי</u>: נאמר שהמספר l הוא גבול הפונקציה $f(x)$ כאשר $x\to x_0$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל נקודה M המקיימת $0<d(x,x_0)<\delta$ מתקיים $|f(x)-l|<\varepsilon$.

<u>הגדרת הגבול הכפול לפי היינה</u>: l הוא הגבול של הפונקציה $y=f(x)$ כאשר $x\to x_0$ אם לכל סדרת נקודות $\{p_k\}$ המתכנסת ל- x_0 ו- $p_k\neq x_0$, סדרת המספרים $(f(p_k))$ מתכנסת ל- l.

<u>משפט</u>: הגדרות הגבול לפי היינה שקולה להגדרת הגבול לפי קושי.
<u>הוכחה</u>: בדומה למקרה של פונקציות במשתנה יחיד.

<u>מסקנה</u>: גבול של פונקציה, אם קיים, הוא יחיד ואינו תלוי במסלול שדרכו הנקודה x מתקרבת לנקודה x_0.

<u>מסקנה</u>: אם לפונקציה $f(x)$ גבולות שונים לפי מסלולים שונים של התקרבות x ל- x_0 אזי ל- $f(x)$ אין גבול כאשר $x\to x_0$.

<u>דוגמאות:</u>

1. נסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ ונטען שלא קיים לה גבול ב- $(0,0)$. נגדיר שתי סדרות: $p_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ ו- $q_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$. אזי $f(p_n)=\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$ אבל $f(q_n)=0$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$: יהי $\varepsilon>0$. ניקח $\delta=\varepsilon$. ואז $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\le|(x,y)|<\varepsilon$.

7.6. גבולות חוזרים

בסעיף זה נטפל רק בפונקציות עם שני משתנים.

<u>הגדרה:</u> תהי $u=f(x,y)$ המוגדרת בסביבת הנקודה (a,b) פרט אולי לנקודה עצמה. לכל y קבוע נחשב $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ ונעבור לגבול כאשר $y\to b$ ונקבל $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$. באותו אופן נבנה $\psi(x)=\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$ ו- $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$. לגבול $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y),\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ קוראים **גבולות חוזרים** של $f(x,y)$.

<u>משפט:</u> אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. קיים הגבול הכפול $f(x,y)$ $l=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}$

ב. לכל y בסביבת הנקודה (a,b) קיים הגבול $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$

אזי קיים הגבול החוזר $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)$ ו- $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=l$.

<u>הוכחה:</u> לפי הגדרת הגבול הכפול לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x,y המקיימים $|x-a|,|y-b|<\delta$ מתקיים $|f(x,y)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$. נקבע כעת x שמקיים $|x-b|<\delta$ וגם $|\varphi(y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן נקבל ש- $|\varphi(y)-l|<\varepsilon$. ☺

7.7. רציפות

<u>הגדרה:</u> תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בתחום D. נאמר ש- $f(x)$ **רציפה** בנקודה $a\in D$ אם $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.
כלומר, הפונקציה $f(x)$ רציפה ב- $a\in\mathbb{R}^n$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ שמקיים $d(x,a)<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

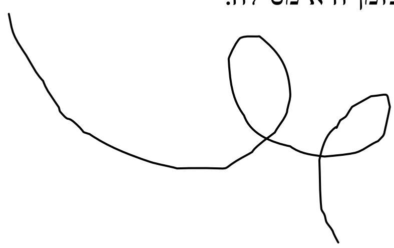
דוגמאות:

1. ראינו שלפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ אין גבול ב- $(0,0)$ ולכן אינה רציפה.
2. נסתכל בפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. ברור שהיא רציפה בכל $(x,y)\neq(0,0)$.
נראה שהיא רציפה גם ב- $(x,y)=(0,0)$. נסמן $x^2+y^2=t$. אז
$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1=f(0,0)$.

7.8. מסילות

הגדרה: פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ נקראת **מסילה.**

דוגמה: תנועת חלקית במרחב כתלות בזמן היא מסילה.



הגדרה: תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ מסילה. אם $g(x)=\begin{pmatrix}g^1(x)\\ \vdots\\ g^m(x)\end{pmatrix}$ כאשר $g^i(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לכל $1\le i\le m$ נאמר
ש- g גזירה ב- x אם קיים הגבול $\lim_{h\to0}\frac{g^i(x+h)-g^i(x)}{h}$ לכל $1\le i\le m$ ונסמן:

$$g'(x)=\begin{pmatrix}Dg^1(x)\\ \vdots\\ Dg^m(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{h\to0}\frac{g^1(x+h)-g^1(x)}{h}\\ \vdots\\ \lim_{h\to0}\frac{g^m(x+h)-g^m(x)}{h}\end{pmatrix}$$

8. חשבון דיפרנציאלי של פונקציות בכמה משתנים

8.1. נגזרות חלקיות

הגדרה: תהי המוגדרת בתחום D. ותהי $x_0 \in D$. אם קיים וסופי הגבול

$$\lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f\left(x^1,...,x^i+\Delta x^i,...,x^n\right)-f\left(x^1,...,x^i,...,x^n\right)}{\Delta x^i}$$

אז נסמן אותו $\frac{\delta y}{\delta x^i}\left(x_0\right)$ או $f'_{x^i}\left(x_0\right)$ או $D_i\left(x_0\right)$ ונקרא לו **הנגזרת החלקית** של f לפי x^i.

דוגמה: נסתכל על הפונקציה $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$. קל להראות לפי הגדרת הנגזרת החלקית ש- $\frac{df}{dy}\left(0,0\right)=0=\frac{df}{dx}\left(0,0\right)$. אבל ידוע לנו שפונקציה זו אינה רציפה בראשית. לכן קיום הנגזרות החלקיות אינו גורר את רציפות הפונקציה.

8.2. דיפרנציאביליות

בסעיף זה נעסוק לשם הנוחות בפונקציות בשני משתנים אך ניתן להכליל את כל ההגדרות והתוצאות גם לפונקציות ב- n משתנים.

הגדרה: הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ תיקרא **דיפרנציאבילית** בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אם קיימים $A,B\in\mathbb{R}$ ו- $\alpha,\beta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)=0, \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta\left(\Delta x,\Delta y\right)=0$ ו-

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\Delta x+\beta\left(\Delta x,\Delta y\right)\Delta y$$

מסקנה: נסמן $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אמ"מ קיימים $A,B\in\mathbb{R}$ ו- $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0$ ו- $f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon\rho$.

משפט: אם פונקציה $z=f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אזי קיימות הנגזרות החלקיות ו- $A=f'_x\left(x_0,y_0\right)$ ו- $B=f'_y\left(x_0,y_0\right)$.

הוכחה: מהדיפרנציאביליות נובע שקיימים $A,B\in\mathbb{R}$ ו- $\alpha,\beta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)=0$, ו- $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta\left(\Delta x,\Delta y\right)=0$ כך שמתקיים

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\Delta x+\beta\left(\Delta x,\Delta y\right)\Delta y$$

ניקח $\Delta y=0$ ונקבל ש- $f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A\Delta x+\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\Delta x$. נחלק את שני האגפים ב- Δx ונחשב את הגבול ונקבל $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}=A+\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\alpha\left(\Delta x,0\right)=A$. לכן $A=f'_x\left(x_0,y_0\right)$. בדיוק באותו אופן, ע"י הצבת $\Delta x=0$ נקבל $B=f'_y\left(x_0,y_0\right)$. ☺

<u>מסקנה</u>: נסמן $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אמ"מ קיים $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=0$ ו- $f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\varepsilon\rho$.

<u>משפט</u>: אם הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אז היא רציפה בה.

<u>הוכחה</u>: לפי המסקנה $f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\varepsilon\rho$. נסתכל על הגבול הכפול: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\varepsilon\rho\right]=0$. לכן $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)=f\left(x_0,y_0\right)$. כלומר $z=f\left(x,y\right)$ רציפה ב- $\left(x_0,y_0\right)$. ☺

<u>מסקנה</u>: אם פונקציה לא רציפה בנקודה, אז היא לא דיפרנציאבילית באותה נקודה.

<u>משפט</u>: אם פונקציה $z=f\left(x,y\right)$ מוגדרת בסביבת נקודה $\left(x_0,y_0\right)$ ובעלת נגזרות חלקיות $f'_x\left(x,y\right),f'_y\left(x,y\right)$ רציפות בסביבת אותה נקודה, אזי היא דיפרנציאבילית ב- $\left(x_0,y_0\right)$.

<u>הוכחה</u>: נשים לב שמתקיים

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=\left[f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)\right]+\left[f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]$$

מאחר שנגזרות החלקיות רציפות ניתן להשתמש במשפט לגרנז' למשתנה יחיד ונקבל שקיימים $0<\theta_1,\theta_2<1$ כך שמתקיים:

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)=f'_x\left(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y\right)\Delta x$$
$$f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=f'_y\left(x_0,y_0+\theta_2\Delta y\right)\Delta y$$

מאחר ש- f'_x,f'_y רציפות בסביבת $\left(x_0,y_0\right)$ ניתן לרשום:

$$f'_x\left(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y\right)=f'_x\left(x_0,y_0\right)+\alpha$$
$$f'_y\left(x_0,y_0+\theta_2\Delta y\right)=f'_y\left(x_0,y_0\right)+\beta$$

כאשר $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=0=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta$. כעת נציב הכל חזרה ונקבל

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=f'_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x+f'_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

כלומר $f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית ב- $\left(x_0,y_0\right)$. ☺

8.3. נגזרות חלקיות של פונקציה מורכבת

נביא כאן רשימה של כללי השרשרת אך לא נוכיח אותם מאחר שלא הוכחו בכיתה:

<u>כלל השרשרת 1</u>: תהי $u=f\left(x^1,...,x^n\right)$ בעלת נגזרות חלקיות $D_1,...,D_n$ רציפות ויהיו הפונקציות $x^1\left(t\right),...,x^n\left(t\right)$ גזירות. אזי קיימת הנגזרת $\frac{du}{dt}$ ומתקיים $\frac{du}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}D_i\frac{dx^i}{dt}$.

<u>כלל השרשרת 2</u>: תהי $u=f\left(x^1,...,x^n\right)$ דיפרנציאבילית ויהיו $x^1\left(t^1,...,t^m\right),...,x^n\left(t^1,...,t^m\right)$ דיפרנציאביליות. אזי הפונקציה המורכבת $u=u\left(t^1,...,t^m\right)$ גזירה חלקית לפי $t^1,...,t^m$ ולכל $1\le i\le m$ מתקיים: $\frac{\delta u}{\delta t^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta f}{\delta x^j}\cdot\frac{\delta x^j}{\delta t^i}$.

8.4. נגזרות חלקיות מסדר גבוה

<u>הגדרה</u>: תהי $\frac{\delta u}{\delta x^i}$ נגזרת חלקית לפי x^i של הפונקציה $u=f\left(x^1,...,x^n\right)$ המוגדרת בתחום D. אם u'_{x^i} גם היא מוגדרת בכל נקודה של D, אזי היא פונקציה של n משתנים וניתן להגדיר (אם הן קיימות) את הנגזרות החלקיות שלה לפי x^j ולקבל נגזרות חלקיות מסדר שני של הפונקציה המקורית. מסמנים $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}$ או $f^{(2)}_{x^i,x^j}$ או $f^{(2)}_{ij}$ כאשר $1\le i,j\le n$. אם $i\ne j$ אזי הנגזרת $f^{(2)}_{ij}$ נקראת **נגזרת מעורבת** מסדר שני.

<u>משפט</u>: אם הפונקציה $f\left(x,y\right)$ מוגדרת בתחום D ובעלת נגזרות חלקיות f'_x,f'_y, $f^{(2)}_{yx},f^{(2)}_{xy}$ רציפות בסביבת הנקודה $\left(x_0,y_0\right)\in D$ אזי בנקודה זו הנגזרות המעורבות שוות $f^{(2)}_{yx}\left(x_0,y_0\right)=f^{(2)}_{xy}\left(x_0,y_0\right)$.

<u>הוכחה</u>: לא הוכח בכיתה.

נספח א – זהויות טריגונומטריות שימושיות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

נספח ב – הגדרות

<u>הגדרה</u>: **תחום הגדרה** של פונקציה f הוא קבוצת המספרים $D \subset \mathbb{R}$ שעבורה לכל $x \in D$ הביטוי $f(x)$ מוגדר היטב.

<u>הגדרה</u>: נאמר שפונקציה f **זוגית** אם לכל x בתחום ההגדרה שלה מתקיים $f(-x)=f(x)$ ונאמר שהיא **אי זוגית** אם לכל x בתחום ההגדרה שלה מתקיים $f(-x)=-f(x)$.

<u>הגדרה</u>: פונקציה f תיקראו מחזורית אם קיים $T \in \mathbb{R}$ כך שלכל x מתקיים $f(x+T)=f(x)$. נאמר ש- T הוא **המחזור** של $f(x)$.

<u>הגדרה</u>: נאמר של- $f(x)$ יש **אסימפטוטה אנכית** ב- x_0 מימין (משמאל) אם $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$).

<u>הגדרה</u>: הישר $y=ax+b$ נקרא **אסימפטוטה משופעת** של (fx) ב- ∞ (ב- $-\infty$) אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-y\right)=0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-y\right)=0$). האסימפטוטות ב- $\pm\infty$ לא תמיד מתלכדות.

<u>הגדרה</u>: פונקציה $f(x)$ נקראת **קמורה** בקטע (a,b) אם היא נמצאת מתחת לכל המיתרים שלה. הפונקציה תיקרא **קעורה** אם היא נמצאת מעל כל המיתרים שלה. באופן פורמלי, פונקציה היא קמורה אם לכל $x,y \in (a,b)$ ולכל $0<t<1$ מתקיים $f\left(tx+(1-t)y\right) > tf(x)+(1-t)f(y)$.

<u>הגדרה</u>: תהי f גזירה n פעמים בנקודה a. הפולינום $T_{f,n,a}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ נקרא **פולינום טיילור מסדר** n **של** f **בחזקות של** $x-a$ (**או סביב** a).

אם ברור באיזו פונקציה ובאיזו נקודה מדובר נסמן רק $T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

<u>הגדרה</u>: תהיינה f,g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a. נאמר ש- $f=O(g)$ כאשר $x\to a$ אם $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathscr{B}_a$.

ונאמר ש- $f=o(g)$ כאשר $x\to a$ אם $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathscr{N}_a$.

<u>הגדרה</u>: יהי $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^i$. אזי $\left[p(x)\right]_k=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i x^i$.

<u>הגדרה</u>: **חלוקה** של הקטע $[a,b]$ הינה קבוצה סדורה $\mathscr{P}=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ כך ש- $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. לפעמים נרשום $\mathscr{P}=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$. הנקודות $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ נקראות **נקודות_החלוקה**.

<u>הגדרה</u>: יהיו שתי חלוקות $\mathscr{P}_1=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ ו- $\mathscr{P}_2=\{c=y_0<y_1<...<y_m=d\}$. **איחוד_החלוקות** $\mathscr{P}=\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$ הוא חלוקה של הקטע $\left[\min\{a,c\},\max\{b,d\}\right]$ שנקודות החלוקה שלה הן הקבוצה

$\{x_i\}_{i=0}^{n} \cup \{y_j\}_{j=0}^{m}$ מסודרת מן הקטן אל הגדול.

<u>הגדרה</u>: פונקציה φ מוגדרת בקטע $[a,b]$ תיקרא **פונקצית מדרגות** אם קיימת חלוקה $\mathscr{P} = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ וקיימים קבועים $c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$ כך שלכל $1 \le i \le n$ מתקיים $\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i$.
את קבוצת פונקציות המדרגות על הקטע $[a,b]$ נסמן $\mathfrak{S}[a,b]$. אם ברור באיזה קטע מדובר נסמן רק $\mathfrak{S}$.

<u>הגדרה</u>: תהי $\varphi \in \mathfrak{S}[a,b]$ המיוצגת ע"י החלוקה $\mathscr{P} = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ כך ש-$\varphi\big|_{(x_{i-1},x_i)} \equiv c_i$ לכל $1 \le i \le n$.
האינטגרל של φ ב-$[a,b]$ לפי $\mathscr{P}$ מוגדר ע"י $I_{\mathscr{P}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$.

<u>הגדרה</u>: $\underline{I}(f) = \sup \Phi_f [a,b]$ ו-$\overline{I}(f) = \inf \Psi_f [a,b]$ נקראים **האינטגרל התחתון** ו**האינטגרל העליון** של f בהתאמה.

<u>הגדרה</u>: $f \in \mathscr{B}[a,b]$ תיקרא **אינטגרבילית** ב-$[a,b]$ אם קיים מספר I אחד ויחיד אשר מקיים $I(\varphi) \le I \le I(\psi)$ לכל $\varphi,\psi \in \mathfrak{S}[a,b]$ כך ש- $\varphi \le f \le \psi$. במקרה זה נסמן $I = \int_a^b f$.
נסמן את קבוצת הפונקציות האינטגרביליות על $[a,b]$ ע"י $\mathscr{R}[a,b]$. אם יהיה ברור באיזה קטע מדובר נסתפק בסימון $\mathscr{R}$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ותהי $\mathscr{P} = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$. נכנה בשם **סכום רימן** של f עבור $\mathscr{P}$ כל סכום מהצורה $S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ כאשר $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ו- $x_{i-1} \le t \le x_i$.
נגדיר את **פרמטר החלוקה** של $\mathscr{P}$ ע"י $\lambda(\mathscr{P}) = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$.

<u>הגדרה</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ תיקרא **אינטגרבילית רימן** ב-$[a,b]$ אם קיים מספר $I \in \mathbb{R}$ כך שלכל $0 < \varepsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שלכל סכום רימן S של f עבור כל חלוקה $\mathscr{P}$ של $[a,b]$ עם פרמטר $\lambda(\mathscr{P}) < \delta$ מתקיים $|S - I| < \varepsilon$.
במקרה זה נסמן $I = \int_a^b f(x)dx$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f \in \mathscr{B}[a,b]$ ותהי $\mathscr{P} = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$. נסמן $M_i = \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)$ ו- $m_i = \inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)$. נגדיר את סכומי דרבו של $\mathscr{P}$:

סכום דרבו עליון: $\mathscr{U}(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ <u>**סכום דרבו תחתון**</u>: $\mathscr{L}(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

<u>הגדרה</u>: תהי $f \in \mathscr{B}[a,b]$. **התנודה** של f בקטע $[a,b]$ מוגדרת ע"י

$$\omega_f [a,b] = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

<u>הגדרה</u>: תהי $f \in \mathscr{B}[a,b]$. **התנודה** של f בנקודה x מוגדרת ע"י

$$\omega_f (x) = \inf_{0<\delta} \omega_f [x-\delta, x+\delta]$$

<u>הגדרה</u>: תהי $f \in \mathscr{R}[a,b]$. לכל $c \in [a,b]$ נגדיר $\int_c^c f(x)dx = 0$. כמו כן $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

<u>הגדרה</u>: תהי $F:I\to\mathbb{R}$. F תיקרא **קדומה** של f ב- I אם $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in I$.

<u>הגדרה</u>: האינטגרל הלא מסוים של f הוא הקבוצה $\int f(x)dx=\{F:F'=f\}$. למעשה זו קבוצת הפונקציות הקדומות של הפונקציה f .

<u>הגדרה</u>: **פונקציה רציונלית** היא פונקציה מהצורה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר $P(x),Q(x)$ פולינומים. פונקציה רציונלית תיקרא **פשוטה** אם $\deg P(x)<\deg Q(x)$.

<u>הגדרה</u>: תהי f מוגדרת בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו- $a\le b$ ואינטגרבילית בו. נסמן $I(b)=\int_a^b f(x)dx$. אם קיים $\lim\limits_{b\to\infty}I(b)$ והוא סופי נאמר ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתכנס**. אחרת נאמר ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתבדר**.
באופן אנלוגי מגדירים התכנסות של $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

<u>הגדרה</u>: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר $a\le b$. נאמר ש- $\int_a^\infty f(x)dx$ **מתכנס בהחלט** אם $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אך לא בהחלט, נאמר שהוא **מתכנס בתנאי**.

<u>הגדרה</u>: תהי f מוגדרת ב- $(a,b]$ ואינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[c,b]$ כאשר $a<c$ ואינה חסומה בכל סביבה ימנית של a . נגדיר $I(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. אם קיים הגבול $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}I(\varepsilon)$ והוא סופי נאמר ש**האינטגרל הלא אמיתי** $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס. אחרת, נאמר ש- $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר.
באופן אנלוגי מגדירים את $\int_a^b f(x)dx$ למקרה ש- f אינה חסומה בכל סביבה שמאלית של b .

<u>הגדרה</u>: **פונקצית גמא** מוגדרת ע"י האינטגרל הלא אמיתי $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$

<u>הגדרה</u>: תהי $X\subset\mathbb{R}$ תת קבוצה (לא בהכרח קטע). **סדרה של פונקציות** ב- X הינה סדרה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^X$ כאשר $n\mapsto f_n$ ו- $f_n:X\to\mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u>: תהי $X\subset\mathbb{R}$ תת קבוצה (לא בהכרח קטע). ותהי סדרה של פונקציות ב- X (f_n) . אזי $\sum f_n$ נקרא **טור אינסופי של פונקציות**.
אנו לא מציינים את האינדקס שממנו מתחילה הספירה, אלא מניחים שהאינדקס הוא כזה שכל המחוברים מוגדרים היטב.

<u>הגדרה</u>: יהיו (f_n) ו- f מוגדרות ב- $X\subset\mathbb{R}$. נאמר ש- $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ נקודתית ב- X אם לכל $x\in X$ מתקיים $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$. כלומר לכל $x\in X$ מתקיים שלכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

<u>הגדרה</u>: יהיו (f_n) ו- f מוגדרות ב- X . נאמר ש- $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ במידה שווה ב- X אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

<u>הגדרה:</u> יהיו (f_n) ו- f מוגדרות ב- X. נאמר שהטור $\sum f_n$ מתכנס נקודתית ל- f אם לכל $x\in X$ מתקיים $f(x)=\sum f_n(x)$. כלומר אם לכל $x\in X$ מתקיים שלכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $\left|\sum^n f_i(x)-f(x)\right|<\varepsilon$.

<u>הגדרה:</u> יהיו (f_n) ו- f מוגדרות ב- X. נאמר שהטור $\sum f_n$ מתכנס ל- f במידה שווה ב- X אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n$ מתקיים $\left|\sum^n f_i(x)-f(x)\right|<\varepsilon$.

<u>הגדרה:</u> יהיו $a\in\mathbb{R}$ ו- $(c_n)\subset\mathbb{R}$. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ נקרא **טור חזקות**.

<u>הגדרה:</u> יהי טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. R שמקיים שהטור מתכנס לכל $|x|<R$ נקרא **רדיוס ההתכנסות** של $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$.

<u>הגדרה:</u> תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע I. נאמר ש-$f(x)$ **אנליטית** ב- I אם לכל $a\in I$ קיימים (a_n) ב- $\mathbb{R}$ וסביבה $U\subset I$ של a כך ש- $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ לכל $x\in U$.

<u>הגדרה:</u> יהי $n\in\mathbb{N}$. נגדיר $\mathbb{R}^n=\left\{(x^1,...,x^n):\forall 1\le i\le n\ x^i\in\mathbb{R}\right\}$ קבוצת כל ה- n-יות של מספרים ממשיים. באלגברה לינארית ידוע לנו שזהו מרחב וקטורי. ל-$(x^1,...,x^n)$ נקרא **נקודה** ב- $\mathbb{R}^n$ ולמספרים $x^1,...,x^n$ נקרא **הקואורדינטות** של הנקודה.

<u>הגדרה:</u> נגדיר פונקציה $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י $d\left((x^1,...,x^n),(y^1,...,y^n)\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y^i-x^i\right)^2}$. פונקציה זו נקראת המרחק בין $x=(x^1,...,x^n)$ לבין $y=(y^1,...,y^n)$.

<u>הגדרה:</u> **כדור פתוח** ברדיוס $0<r$ שמרכזו $a\in\mathbb{R}^n$ הוא הקבוצה $B_r(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:d(x,a)<r\right\}$.
כדור סגור ברדיוס $0<r$ שמרכזו $a\in\mathbb{R}^n$ הוא הקבוצה $\overline{B}_r(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:d(x,a)\le r\right\}$.
ספירה ברדיוס $0<r$ שמרכזה $a\in\mathbb{R}^n$ היא הקבוצה $S_r(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^n:d(x,a)=r\right\}$.

<u>הגדרה:</u> יהיו $\left\{a^i\right\}_{i=1}^n,\left\{b^i\right\}_{i=1}^n$ כך ש- $a^i\le b^i$ לכל $1\le i\le n$. **תיבה** היא הקבוצה $\left\{(x^1,...,x^n)\in\mathbb{R}^n:\forall 1\le i\le n\ a^i\le x^i\le b^i\right\}$. הקבוצה $\left\{(x^1,...,x^n)\in\mathbb{R}^n:\forall 1\le i\le n\ a^i<x^i<b^i\right\}$ נקראת **תיבה פתוחה**.

<u>הגדרה:</u> תת קבוצה $U\subset\mathbb{R}^n$ תיקרא **סביבה** של $a\in\mathbb{R}^n$ אם קיים $0<\varepsilon$ כך ש- $B_\varepsilon(a)\subset U$.

<u>הגדרה:</u> תת קבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$ תיקרא **פתוחה** אם לכל $a\in A$ קיימת סביבה U כך ש-$a\in U\subset A$. A תיקרא **סגורה** אם A^c פתוחה.

<u>הגדרה:</u> הפונקציה $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$ כאשר $k\mapsto a_k=\left(x_k^1,...,x_k^n\right)$ תיקרא **סדרה** ב- $\mathbb{R}^n$. בעצם זה כמו n סדרות ב- $\mathbb{R}$.
נסמן את הסדרה ב- $\{a_k\}$.

<u>הגדרה:</u> הנקודה $l=\left(l^1,...,l^n\right)$ היא **גבול** של סדרת הנקודות $\{a_k\}$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $K<k$ מתקיים $d\left(a_k,l\right)<\varepsilon$. נסמן אז $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=l$.

<u>הגדרה:</u> תהי $D\subset\mathbb{R}^n$. אומרים שעל הקבוצה D מוגדרת **פונקציה,** אם לכל נקודה $x\in D$ מתאים מספר ממשי יחיד לפי חוק הנתון מראש, ומסמנים $y=f\left(x\right)$ או $y=f\left(x^1,...,x^n\right)$. הקבוצה D נקראת **תחום ההגדרה** של הפונקציה.

<u>הגדרת הגבול הכפול לפי קושי:</u> נאמר שהמספר l הוא גבול הפונקציה $f\left(x\right)$ כאשר $x\to x_0$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל נקודה M המקיימת $0<d\left(x,x_0\right)<\delta$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon$.

<u>הגדרת הגבול הכפול לפי היינה:</u> l הוא הגבול של הפונקציה $y=f\left(x\right)$ כאשר $x\to x_0$ אם לכל סדרת נקודות $\{p_k\}$ המתכנסת ל- x_0 ו- $p_k\neq x_0$, סדרת המספרים $\left(f\left(p_k\right)\right)$ מתכנסת ל- l.

<u>הגדרה:</u> תהי $u=f\left(x,y\right)$ המוגדרת בסביבת הנקודה (a,b) פרט אולי לנקודה עצמה. לכל y קבוע נחשב $\varphi\left(y\right)=\lim\limits_{x\to a}f\left(x,y\right)$ ונעבור לגבול כאשר $y\to b$ ונקבל $\lim\limits_{y\to b}\varphi\left(y\right)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f\left(x,y\right)$. באותו אופן נבנה $\psi\left(x\right)=\lim\limits_{y\to b}f\left(x,y\right)$ ו- $\lim\limits_{x\to a}\psi\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f\left(x,y\right)$. לגבול $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f\left(x,y\right),\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f\left(x,y\right)$ קוראים **גבולות חוזרים** של $f\left(x,y\right)$.

<u>הגדרה:</u> תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מוגדרת בתחום D. נאמר ש- $f\left(x\right)$ **רציפה** בנקודה $a\in D$ אם $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=f\left(a\right)$.
כלומר, הפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה ב- $a\in\mathbb{R}^n$ אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ שמקיים $d\left(x,a\right)<\delta$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<\varepsilon$.

<u>הגדרה:</u> פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ נקראת **מסילה.**

<u>הגדרה:</u> תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ מסילה. אם $g\left(x\right)=\begin{pmatrix}g^1\left(x\right)\\ \vdots\\ g^m\left(x\right)\end{pmatrix}$ כאשר $g^i\left(x\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לכל $1\le i\le m$ נאמר ש- g גזירה ב- x אם קיים הגבול $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g^i\left(x+h\right)-g^i\left(x\right)}{h}$ לכל $1\le i\le m$ ונסמן:

$$g'\left(x\right)=\begin{pmatrix}Dg^1\left(x\right)\\ \vdots\\ Dg^m\left(x\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g^1\left(x+h\right)-g^1\left(x\right)}{h}\\ \vdots\\ \lim\limits_{h\to0}\dfrac{g^m\left(x+h\right)-g^m\left(x\right)}{h}\end{pmatrix}$$

הגדרה: תהי המוגדרת בתחום D. ותהי $x_0 \in D$. אם קיים וסופי הגבול

$$\lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{f\left(x^1,...,x^i+\Delta x^i,...,x^n\right)-f\left(x^1,...,x^i,...,x^n\right)}{\Delta x^i}$$

אז נסמן אותו $\frac{\delta y}{\delta x^i}(x_0)$ או $f'_{x^i}(x_0)$ או $D_i(x_0)$ ונקרא לו **הנגזרת החלקית** של f לפי x^i.

הגדרה: הפונקציה $z=f(x,y)$ תיקרא **דיפרנציאבילית** בנקודה (x_0,y_0) אם קיימים $A,B\in\mathbb{R}$ ו- $\alpha,\beta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0, \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\beta(\Delta x,\Delta y)=0$ ו-

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\left(\Delta x,\Delta y\right)\Delta x+\beta\left(\Delta x,\Delta y\right)\Delta y$$

הגדרה: תהי $\frac{\delta u}{\delta x^i}$ נגזרת חלקית לפי x^i של הפונקציה $u=f\left(x^1,...,x^n\right)$ המוגדרת בתחום D. אם u'_{x^i} גם היא מוגדרת בכל נקודה של D, אזי היא פונקציה של n משתנים וניתן להגדיר (אם הן קיימות) את הנגזרות החלקיות שלה לפי x^j ולקבל נגזרות חלקיות מסדר שני של הפונקציה המקורית. מסמנים $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}$ או $f^{(2)}_{x^i,x^j}$ או $f^{(2)}_{ij}$ כאשר $1\le i,j\le n$. אם $i\ne j$ אזי הנגזרת $f^{(2)}_{ij}$ נקראת **נגזרת מעורבת** מסדר שני.

נספח ג – טענות ומשפטים

<u>טענה</u>: $y=ax+b$ אסימפטוטה משופעת של $f(x)$ ב- ∞ אמ"מ קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ו- $b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$.

<u>טענה</u>: אם $f(x)$ גזירה ב- (a,b) ו- $0<f'(x)$ ($0>f'(x)$) לכל $x\in(a,b)$ אזי f עולה (יורדת) ממש ב- (a,b).

<u>טענה</u>: אם $f(x)$ גזירה פעמיים ב- x_0 ו- $f'(x_0)=0$. אם $f''(x_0)<0$ ($0<f''(x_0)$) אז x_0 נקודת מקסימום (מינימום) מקומי של $f(x)$. אם $f''(x_0)=0$ לא ניתן לדעת.

<u>טענה</u>: אם $f(x)$ גזירה פעמיים ב- (a,b) ולכל $x\in(a,b)$ $f''(x)<0$ ($0<f''(x)$) אז $f(x)$ קעורה (קמורה) ב- (a,b).

<u>משפט רול</u>: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ המקיימת את התנאים הבאים:

ד. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$

ה. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b)

ו. $f(a)=f(b)$

אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

<u>משפט הערך הממוצע של לגרנז'</u>: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b).
אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>משפט הערך הממוצע של קושי</u>: יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), ובנוסף $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$. אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

<u>משפט ערך הביניים של דרבו</u>: תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע הסגור $[a,b]$. אזי עבור כל ערך β שנמצא בין $\lim_{x\to a^+}f'(x)$ לבין $\lim_{x\to b^-}f'(x)$ קיים $a\le x\le b$ כך ש- $f'(x)=\beta$.

<u>טענה</u>: יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות גזירות בסביבת הנקודה a. נניח ש- $f(a)=0=g(a)$ ו- $g'(a)\neq 0$. אזי $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

<u>כלל לופיטל</u>: יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b) ($-\infty\le a<b\le\infty$). נניח ש- $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ ($-\infty\le l\le\infty$) וכן $g'(x)\neq 0$ ב- (a,b) אזי אם

1. $\lim_{x\to a^+} f(x)=0=\lim_{x\to a^+} g(x)$ <u>או</u>
2. $\lim_{x\to a^+}|g(x)|=\infty$

אז $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$.

<u>טענה</u>: יהי $p(x)\in\mathbb{R}[X]$ פולינום. אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0$.

<u>טענה</u>: יהי $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-a)^i$. אזי לכל $0\le k\le n$ מתקיים $a_k=\frac{p^{(k)}(a)}{k!}$.

<u>טענה</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a וגזירה n פעמים ב- a. יהי $T_n(x)$ הפולינום טיילור של f מסדר n סביב a. אזי לכל $0\le k\le n$ מתקיים $f^{(k)}(a)=T_n^{(k)}(a)$.

<u>משפט</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a וגזירה ב- a n פעמים. אזי $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}=0$.

<u>משפט</u>: תהי f מוגדרת בסביבה של a וגזירה n פעמים ב- a ויהי $q(x),p(x)\in\mathbb{R}[X]$ כך ש- $\deg q(x),\deg p(x)\le n$ ו- $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-q(x)}{(x-a)^n}=0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}$. אזי $q(x)=p(x)$.

<u>מסקנה</u>: פולינום טיילור של פונקציה $f(x)$ נסדר n הוא יחיד.

<u>משפט טיילור</u>: תהי f גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,x]$ ונניח שקיימת הנגזרת מסדר $n+1$ בקטע (a,x). אם $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ אזי:

1. שארית בנוסח קושי: קיים $a<c<x$ כך ש- $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x-c)^n(x-a)$
2. שארית בנוסח לגרנז': קיים $a<c<x$ כך ש- $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

<u>טענה</u>: תהיינה f,g גזירות $n+1$ פעמים ב- 0. נניח כי $f(x)+P_n(x)+R_n(x)$ ו- $g(x)=Q_n(x)+S_n(x)$ כאשר $P_n(x),Q_n(x)$ הם פיתוחי טיילור של f,g מסדר n סביב 0 ו- $R_n(x),S_n(x)$ הן השאריות בהתאמה. אזי $\left[P_n(x)Q_n(x)\right]_n$ הוא הפולינום טיילור מסדר n של המכפלה $f(x)g(x)$.

<u>טענה</u>: תהיינה f,g גזירות $n+1$ פעמים ב- 0. נניח כי $f(x)+P_n(x)+R_n(x)$ ו- $g(x)=Q_n(x)+S_n(x)$ כאשר $P_n(x),Q_n(x)$ הם פיתוחי טיילור של f,g מסדר n סביב 0 ו- $R_n(x),S_n(x)$ הן השאריות בהתאמה. נניח ש- $g(0)=0$. אזי פולינום טיילור מסדר n של ההרכבה $f\circ g$ סביב 0 הוא $\left[P(Q(x))\right]_n$.

<u>טענה</u>: תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 וגזירה בנקודה n פעמים. נניח שלכל $1 \le i \le n-1$ $f^{(i)}(x_0)=0$ ו- $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. אזי:

1. אם n אי זוגי אזי אין ב- x_0 נקודת קיצון
2. אם n זוגי אז
   a. אם $f^{(n)}(x_0)<0$ אז x_0 נקודת מקסימום מקומי
   b. אם $0<f^{(n)}(x_0)$ אז x_0 נקודת מינימום מקומי.

<u>טענה</u>: e איננו רציונלי.

<u>טענה</u>: תהי $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקצית מדרגות לפי החלוקה $\mathscr{P}$. ותהי $c \notin \mathscr{P}$. אזי φ פונקצית מדרגות גם לפי $\mathscr{P}\cup\{c\}$.

<u>מסקנה</u>: תהי $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקצית מדרגות לפי החלוקה $\mathscr{P}$. אזי לכל חלוקה $\mathscr{P}'$ של $[a,b]$ φ פונקצית מדרגות לפי $\mathscr{P}\cup\mathscr{P}'$.

<u>טענה</u>:

1. $\mathfrak{S}[a,b]$ סגורה תחת סכום
2. $\mathfrak{S}[a,b]$ סגורה תחת כפל בממשיים
3. $\mathfrak{S}[a,b]$ סגורה תחת מכפלה
4. אם $\varphi\in\mathfrak{S}[a,b]$ ו- $a\le c<d\le b$ אז $\varphi\big|_{[c,d]}\in\mathfrak{S}[c,d]$
5. אם $\varphi\in\mathfrak{S}[c,d]$ ו- $a\le c<d\le b$ אז $\tilde{\varphi}$ המוגדרת ע"י $\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}0 & a\le t<c\\ \varphi(t) & c\le t\le d\\ 0 & d<t\le a\end{cases}$ היא פונקצית מדרגות על $[a,b]$.

<u>למה</u>: תהי $\varphi\in\mathfrak{S}[a,b]$. לכל שתי חלוקות $\mathscr{P},\mathscr{P}'$ שמתאימות להגדרת φ מתקיים $I_{\mathscr{P}}(\varphi)=I_{\mathscr{P}'}(\varphi)$, כלומר האינטגרל בלתי תלוי בחלוקה שלפיה מוגדרת הפונקציה.

<u>תכונות האינטגרל של פונקצית מדרגות</u>: יהיו $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}[a,b]$ ויהי $k\in\mathbb{R}$. אזי:

1. חיוביות: אם $0\le\varphi$ אז $0\le I(\varphi)$
2. מונוטוניות: אם $\varphi\le\psi$ אז $I(\varphi)\le I(\psi)$
3. לינאריות: $I(\varphi+\psi)=I(\varphi)+I(\psi)$ וגם $I(k\cdot\varphi)=k\cdot I(\varphi)$
4. אדטיביות: לכל $a<c<b$ $I\left(\varphi\big|_{[a,b]}\right)=I\left(\varphi\big|_{[a,c]}\right)+I\left(\varphi\big|_{[c,b]}\right)$
5. יחידה: $l([a,b])=I\left(1\big|_{[a,b]}\right)=b-a$
6. הזזה: נגדיר $\psi(t)=\varphi(t-c)$ עבור $c\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו. אזי $\psi\in\mathfrak{S}[a+c,b+c]$ ו- $I\left(\varphi\big|_{[a,b]}\right)=I\left(\psi\big|_{[a+c,b+c]}\right)$.
7. מתיחה: נגדיר $\psi(t)=\varphi\left(\frac{t}{c}\right)$ עבור $0<c\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו. אזי $\psi\in\mathfrak{S}[ac,bc]$ ו- $I\left(\varphi\big|_{[a,b]}\right)=\frac{1}{c}I\left(\psi\big|_{[ac,bc]}\right)$.

<u>טענה:</u> $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ו- $I = \int_a^b f$ אמ"מ מתקיימת אחת מהתכונות השקולות הבאות:

1. $\underline{I}(f) = \sup \Phi_f[a,b] = I = \inf \Psi_f[a,b] = \overline{I}(f)$
2. קיים $I \in \mathbb{R}$ אחד ויחיד כך ש- $I(\varphi) \le I \le I(\psi)$ לכל $\varphi,\psi \in \mathfrak{I}$ שמקיימות $\varphi \le f \le \psi$
3. לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $\varphi,\psi \in \mathfrak{I}$ כך ש- $\varphi \le f \le \psi$ וגם $I(\psi) - I(\varphi) < \varepsilon$
4. קיימות $(\varphi_n),(\psi_n) \subset \mathfrak{I}$ כך ש- $\varphi_n \le f \le \psi_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $I(\psi_n) - I(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ [18]
5. קיימות $(\varphi_n),(\psi_n) \subset \mathfrak{I}$ כך ש- $\varphi_n \le f \le \psi_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = I = \lim_{n\to\infty} I(\psi_n)$.

<u>משפט:</u> תהי $\tau \in \mathfrak{I}[a,b]$. אזי $\int_a^b \tau = I(\tau)$, כלומר שתי ההגדרות מתלכדות עבור פונקציות מדרגה.

<u>תכונות של אינטגרל של פונקציות חסומות:</u> יהיו $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$ ויהי $k \in \mathbb{R}$. אזי:

1. חיוביות: אם $0 \le f$ אז $0 \le \int_a^b f$
2. מונוטוניות: אם $f \le g$ אז $\int_a^b f \le \int_a^b g$
3. לינאריות: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ וכן $\int_a^b (k \cdot f) = k \cdot \int_a^b f$

<u>משפט:</u> פונקציה רציפה בקטע סגור אינטגרבילית בו.

<u>משפט:</u> תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $g,h \in \mathcal{C}[a,b]$ כך ש- $g \le f \le h$ וגם $\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon$.

<u>משפט:</u> פונקציה מונוטונית בקטע סגור אינטגרבילית בו.

<u>משפט:</u> יהיו $a < c < b$. אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ $f \in \mathcal{R}[a,c]$ וכן $f \in \mathcal{R}[c,b]$. יתר על כן מתקיים $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

<u>משפט:</u> תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. נגדיר $g:[a+c,b+c] \to \mathbb{R}$ ע"י $g(t) = f(t-c)$. אזי $g \in \mathcal{R}[a+c,b+c]$ וכן $\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} g$.

<u>משפט:</u> תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ויהי $0 < c \in \mathbb{R}$. נגדיר $g:[a\cdot c,b\cdot c] \to \mathbb{R}$ ע"י $g(t) = f\left(\frac{t}{c}\right)$. אזי $g \in \mathcal{R}[a\cdot c,b\cdot c]$ וכן $\int_a^b f = \frac{1}{c}\int_{a\cdot c}^{b\cdot c} g$.

<u>משפט:</u> תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ $f \in \mathcal{R}[c,d]$ לכל $a < c < d < b$.

<u>מסקנות:</u>

1. אם $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ו- $f \in \mathcal{C}(a,b)$ אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$.
2. אם f רציפה למקוטעין[19] ב- $[a,b]$ אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$.
3. אם f חסומה ומונוטונית למקוטעין ב- $[a,b]$ אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

---

[18] נשים לב שקריטריון זה אינו מצביע על האינטגרל אלא רק על הקיום שלו.

[19] כלומר, יש חלוקה סופית של $[a,b]$ כך שבכל חלק שלה f רציפה.

<u>משפט</u>: אם $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ו- $g = f$ פרט למספר סופי של נקודות אז $g \in \mathcal{R}[a,b]$ ו- $\int_a^b f = \int_a^b g$.

<u>משפט</u>: תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ כך ש- $m \le f \le M$. תהי $g \in \mathcal{C}[m,M]$. אזי $h = g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

<u>מסקנה</u>: יהיו $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$. אזי

- $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$
- $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$
- $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$
- אם $m \le g \le M$ ו- $M<0$ או $0<m$ אז $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$.

<u>משפט</u>: אם f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אזי קיים I אחד ויחיד אשר מקיים את ההגדרה.

<u>משפט</u>: אם f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אז f חסומה שם.

<u>קריטריון קושי לאינטגרביליות רימן</u>: תהי $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש- $|S-S'|<\varepsilon$ לכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ בהתאמה כך ש- $\lambda(\mathcal{P}),\lambda(\mathcal{P}')<\delta$.

<u>משפט</u>: יהיו f,g אינטגרביליות רימן ב-$[a,b]$ ויהי $k \in \mathbb{R}$. אזי

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f+g)(x)dx$$

$$k \cdot \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (k \cdot f)(x)dx$$

<u>משפט</u>: תהי $\varphi \in \mathcal{S}[a,b]$. אזי φ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi = I(\varphi)$.

<u>למה</u>: יהיו $g \le f \le h$ כך ש- g,h אינטגרביליות רימן ב-$[a,b]$. אזי לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש- $\int_a^b g(x)dx - \varepsilon < S < \int_a^b h(x)dx + \varepsilon$ לכל סכום רימן S של f עבור חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש- $\lambda(\mathcal{P})<\delta$. יתר על כן, לכל S' סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathcal{P}'$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P}')<\delta$ מתקיים $|S-S'| < \int_a^b (h-g)(x)dx + 2\varepsilon$.

<u>עיקרון הסנדוויץ'</u>: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיימות g,h אינטגרביליות רימן ב-$[a,b]$ כך ש- $g \le f \le h$ ו- $\int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx < \varepsilon$.

<u>למה 1</u>: תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ותהי $\mathcal{P}$ חלוקה של $[a,b]$. אזי לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל S,S' סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטרים קטנים מ- δ מתקיים

$$|S-S'| < \mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) + 2\varepsilon$$

<u>למה 2</u>: לכל חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ ולכל $0<\eta$ קיימים S,S' סכומי רימן של f עבור $\mathcal{P}$ אשר מקיימים:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - S < \eta(b-a)$$

$$S' - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \eta(b-a)$$

ולכן $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < S - S' + 2\eta(b-a)$

<u>תנאי רימן לאינטגרביליות</u>: תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן ב- $[a,b]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ של הקטע $[a,b]$ כך ש- $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$.

<u>משפט</u>: תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיימות $\varphi,\psi \in \mathfrak{S}$ כך ש- $\varphi \le f \le \psi$ ו- $\int_a^b \psi(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx<\varepsilon$.

<u>משפט</u>: תהי $f \in \mathcal{B}$. אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ f אינטגרבילית רימן ובמקרה זה $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$.

<u>משפט</u>: תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש- $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$ לכל חלוקה $\mathcal{P}$ עם פרמטר $\lambda(\mathcal{P})<\delta$.

<u>משפט</u>: $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ו- $I=\int_a^b f(x)dx$ אמ"מ $\lim_{n\to\infty} S_n = I$ לכל (S_n) סדרה של סכומי רימן של f עבור סדרה $(\mathcal{P}_n)$ של חלוקות כך ש- $\lambda(\mathcal{P}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

<u>טענה</u>: תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. $\omega_f[a,b]=\sup_{z,y\in[a,b]}|f(z)-f(y)|$.

<u>תנאי רימן לאינטגרביליות</u>: $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ כך שאם $\mathcal{P}$ חלוקה עם $\lambda(\mathcal{P})<\delta$ אז $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon$ כאשר $\omega_i(f)=\omega_f[x_{i-1},x_i]$.

<u>טענה</u>: f רציפה ב- x אמ"מ $\omega_f(x)=0$.

<u>למה</u>: תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$. אזי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

<u>המשפט היסודי</u>: תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ונניח ש- $F'=f$ ב- $[a,b]$. אזי $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

<u>המשפט היסודי</u>: תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. אם $f \in \mathcal{R}[a,b]$ נגדיר $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. אזי F רציפה ב- $[a,b]$ ואם f רציפה ב- $c\in[a,b]$ אז F גזירה בו ו- $F'(c)=f(c)$.

<u>מסקנה</u>: אם f רציפה ב- $[a,b]$ אזי לפי המשפט היסודי קיימת לה פונקציה קדומה ב- $[a,b]$ והיא $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

<u>משפט</u>: תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ ותהי $g(x)$ גזירה ברציפות ב- $[c,d]$ ומקיימת $a\le g(x)\le b$ כאשר $a=g(c), b=g(d)$. אזי $\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(x))g'(x)dx$.

<u>משפט</u>: יהיו $f(x),g(x)$ גזירות ברציפות ב- $[a,b]$. אזי

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

<u>תכונות האינטגרל על תחום לא חסום</u>: יהיו f,g פונקציות מוגדרות בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו-$a\le b$. נניח ש-$f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות. אזי:

1. חיוביות: אם $0\le f$ אז $0\le\int_a^\infty f(x)dx$
2. מונוטוניות: אם $f\le g$ אז $\int_a^\infty f(x)dx\le\int_a^\infty g(x)dx$
3. לינאריות:
   a. $\int_a^\infty (f+g)(x)dx=\int_a^\infty f(x)dx+\int_a^\infty g(x)dx$
   b. לכל $k\in\mathbb{R}$ $\int_a^\infty (k\cdot f)(x)dx=k\int_a^\infty f(x)dx$
4. אדטיביות: לכל $a\le c$ $\int_a^\infty f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx$

<u>קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל בתחום לא חסום</u>: תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ עם a קבוע ו-$a\le b$. אזי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים B כך שלכל $B<b,b'$ מתקיים $\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

<u>טענה</u>: אם h מוגדרת בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו-$a\le b$ ו-$0\le h(x)$ לכל $a<x$ אזי $\int_a^\infty h(x)dx$ מתכנס אמ"מ $I(b)=\int_a^b h(x)dx$ חסומה.

<u>קריטריון ההשוואה</u>: יהיו f,g פונקציות מוגדרות בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו-$a\le b$. נניח כי קיים $0<k\in\mathbb{R}$ כך ש-$0\le f(x)\le k\cdot g(x)$. אזי:

א. אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

ב. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x)dx$ מתבדר.

<u>קריטריון גבולי להתכנסות</u>: יהיו f,g פונקציות מוגדרות בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר a קבוע ו-$a\le b$. נניח ש-$0\le f(x)$ ו-$0<g(x)$ לכל $a\le x$. אם קיים $0<k$ כך ש-$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ אז $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

<u>משפט</u>: תהי f חיובית יורדת בקטע $[a,\infty)$[20]. אזי $\sum_{k=0}^{\infty} f(a+k)$ מתכנס אמ"מ $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

<u>משפט</u>: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר $a\le b$. אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

<u>משפט</u>: תהי $f(x)$ רציפה ב-$[a,\infty)$ כאשר $0<a$. נניח ש-$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ חסומה שם. אזי לכל $0<\alpha$ האינטגרל $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}dx$ מתכנס.

[20] ולכן אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ כאשר $a\le b$.

<u>קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל של פונקציה לא חסומה</u>: תהי f מוגדרת ב- $(a,b]$ ואינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[c,b]$ כאשר $a<c$ ואינה חסומה בכל סביבה ימנית של a. אזי $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $a<C$ כך שלכל $a<c,c'<C$ מתקיים $\left|\int_c^{c'} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

<u>משפט</u>: פונקצית גמא $\Gamma(t)$ מוגדרת היטב (כלומר האינטגרל מתכנס) לכל $0<t$.

<u>טענה</u>: לכל $0<t$ מתקיים $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$

<u>מסקנה</u>: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\Gamma(n)=(n-1)!$.

<u>קריטריון קושי להתכנסות סדרות במידה שווה</u>: (f_n) מתכנסת במידה שווה ל- f ב- X אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n,m$ מתקיים $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

<u>קריטריון קושי להתכנסות טורים במידה שווה</u>: תהי (f_n) מוגדרת ב- X. $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ב- X אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x\in X$ ולכל $N<n<m$ מתקיים $\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right|<\varepsilon$.

<u>קריטריון ויירשטראס</u>: תהי (f_n) מוגדרת ב- X. תהי (M_n) סדרה ב- $\mathbb{R}$ אי שלילית כך שמתקיים:
1. הטור $\sum M_n$ מתכנס
2. $|f_n(x)|\le M_n$ לכל $x\in X$

אזי $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ב- X.

<u>טענה</u>: תהי $(f_n(x))$ סדרת פונקציות רציפות בקטע X המתכנסת שם לפונקציה רציפה $f(x)$. אזי לכל $a\in X$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)=\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) מוגדרת בקטע I ונניח ש- $f_n\to f$ במ"ש ב- I. אם לכל $n\in\mathbb{N}$ f_n רציפה ב- $a\in I$ אז f רציפה ב- a.

<u>משפט דיני לסדרות</u>: יהיו (f_n) ו- f רציפות בקטע סגור וחסום I. אם (f_n) מונוטונית[21] ושואפת נקודתית ל- f, אזי $f_n\to f$ במ"ש ב- I.

<u>משפט</u>: אם לכל $n\in\mathbb{N}$ הפונקציה $f_n(x)$ רציפה ב- X והטור $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$ ב- X אז הפונקציה $S(x)$ רציפה ב- X.

<u>משפט דיני לטורים</u>: אם לכל $n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)$ חיובית ורציפה ב- $[a,b]$ ובנוסף הסכום $S(x)$ של הטור $\sum f_n$ הוא פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, אזי הטור $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ל- $S(x)$ ב- $[a,b]$.

---

[21] כלומר לכל $x\in I$ או $f_{n+1}(x)\le f_n(x)$ או $f_{n+1}(x)\ge f_n(x)$.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אשר מתכנסת שם במידה שווה לפונקציה f. אזי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

<u>מסקנה</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אשר מתכנסת שם במידה שווה לפונקציה f. נגדיר לכל $x\in[a,b]$ $g_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt$. אזי g_n מתכנסת ל- $g(x)=\int_a^x f(x)dx$ במידה שווה.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרת פונקציות ב- $[a,b]$ וטור הפונקציות $\sum f_n=S(x)$ מתכנס במידה שווה ב- $[a,b]$. אזי $\int_a^b S(x)dx=\sum\int_a^b f_n(x)dx$.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות גזירות ברציפות בקטע הסגור I נניח שקיים $a\in I$ כך שהסדרה $(f_n(a))$ מתכנסת. אם הסדרה (f_n') מתכנסת במידה שווה ב- I לפונקציה $g(x)$ אזי הסדרה (f_n) מתכנסת ב- I לפונקציה גזירה ולכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=g(x)$.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרת פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$ והטור $S(x)=\sum f_n(x)$ מתכנס ב- $[a,b]$ וטור הנגזרות $\sum f_n'$ מתכנס במידה שווה ב- $[a,b]$. אזי $S'(x)=\sum f_n'(x)$.

<u>למה</u>: אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ מתכנס עבור $r\in\mathbb{R}$ אזי הוא מתכנסת עבור כל $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $|x|<|r|$.

<u>מסקנה</u>: תחום ההתכנסות של טור חזקות הוא תמיד קטע סימטרי לגבי $x=0$.

<u>משפט</u>: יהי טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. אזי מתקיים אחד מהבאים:

1. הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$
2. קיים $0<R\in\mathbb{R}$ כך שהטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $|x|<R$ ומתבדר לכל $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $R<|x|$.
3. הטור מתכנס רק ל- $x=0$.

<u>משפט קושי-אדמר</u>: רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ הוא $R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$.

<u>משפט</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ טור חזקות על רדיוס התכנסות R. אזי הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור $[-r,r]$ המוכל בקטע ההתכנסות I.

<u>משפט אבל</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ טור מתכנס ותהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ מוגדרת עבור $-1<x\le 1$. אזי $\lim_{x\to 1^-}=f(1)$, כלומר $f(x)$ רציפה משמאל ב- $x=1$.

<u>מסקנה</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $0<R<\infty$. אם הטור מתכנס גם ב- $x=R$ ($x=-R$) אזי הפונקציה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ רציפה משמאל ב- $x=R$ (רציפה מימין ב- $x=-R$).

<u>משפט</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R$. נתבונן בפונקציה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ בקטע $(-R,R)$. אזי:

1. $f(x)$ גזירה שם ומתקיים $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$.
2. לכל $[a,b]\subset(-R,R)$, $f(x)$ אינטגרביליות ב- $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b$.

<u>משפט</u>: תהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ עבור $|x-a|<R$. אזי $f(x)$ אנליטית בקטע $I=(a-R,a+R)$.

<u>טענה</u>: הפונקציה $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כפי שהגדרנו היא מטריקה על $\mathbb{R}^n$. כלומר, לכל $x,y,z\in\mathbb{R}^n$:

1. חיוביות: $0\le d(x,y)$ ו- $d(x,y)=0$ אמ"מ $x=y$
2. סימטריה: $d(x,y)=d(y,x)$
3. אי שוויון המושלש: $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

<u>למה</u>: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$. אזי לכל $1\le i\le n$ מתקיים $\left(x^i-y^i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\left(x^i-y^i\right)^2\le n\max\left\{\left(x^j-y^j\right):1\le j\le n\right\}$ וכן $\left|x^i-y^i\right|\le d(x,y)\le\sqrt{n}\max\left\{\left|x^j-y^i\right|:1\le j\le n\right\}$.

<u>משפט</u>: תהיינה $\{x_n\}\subset\mathbb{R}^n$ ו- $x\in\mathbb{R}^n$. אזי:

1. $\lim_{k\to\infty} d(x_k,x)=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_k-x)=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k=x$
2. $\lim_{k\to\infty} x_k=x$ אמ"מ לכל $1\le i\le n$ מתקיים $\lim_{k\to\infty} x_k^i=x^i$

<u>משפט</u>: $\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$ סדרה מתכנסת אמ"מ לכל $0<\varepsilon$ קיים $K\in\mathbb{N}$ כך שלכל $K<m,k$ מתקיים $d(x_k,x_m)<\varepsilon$.

<u>משפט</u>: הגדרות הגבול לפי היינה שקולה להגדרת הגבול לפי קושי.

<u>מסקנה</u>: גבול של פונקציה, אם קיים, הוא יחיד ואינו תלוי במסלול שדרכו הנקודה x מתקרבת לנקודה x_0.

<u>מסקנה</u>: אם לפונקציה $f(x)$ גבולות שונים לפי מסלולים שונים של התקרבות x ל- x_0 אזי ל- $f(x)$ אין גבול כאשר $x\to x_0$.

<u>משפט</u>: אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. קיים הגבול הכפול $l=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

ב. לכל y בסביבת הנקודה (a,b) קיים הגבול $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$

אזי קיים הגבול החוזר $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)=$ ו- $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=l$.

<u>מסקנה</u>: נסמן $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. הפונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אמ"מ קיימים $A,B\in\mathbb{R}$ ו- $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=0$ ו- $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon\rho$.

<u>משפט</u>: אם פונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אזי קיימות הנגזרות החלקיות ו- $A=f'_x(x_0,y_0)$ ו- $B=f'_y(x_0,y_0)$.

<u>מסקנה</u>: נסמן $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. הפונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אמ"מ קיים $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=0$ ו- $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon\rho$.

<u>משפט</u>: אם הפונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אז היא רציפה בה.

<u>מסקנה</u>: אם פונקציה לא רציפה בנקודה, אז היא לא דיפרנציאבילית באותה נקודה.

<u>משפט</u>: אם פונקציה $z=f(x,y)$ מוגדרת בסביבת נקודה (x_0,y_0) ובעלת נגזרות חלקיות $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ רציפות בסביבת אותה נקודה, אזי היא דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0).

<u>כלל השרשרת 1</u>: תהי $u=f(x^1,...,x^n)$ בעלת נגזרות חלקיות $D_1,...,D_n$ רציפות ויהיו הפונקציות $x^1(t),...,x^n(t)$ גזירות. אזי קיימת הנגזרת $\frac{du}{dt}$ ומתקיים $\frac{du}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\frac{dx^i}{dt}$.

<u>כלל השרשרת 2</u>: תהי $u=f(x^1,...,x^n)$ דיפרנציאבילית ויהיו $x^1(t^1,...,t^m),...,x^n(t^1,...,t^m)$ דיפרנציאביליות. אזי הפונקציה המורכבת $u=u(t^1,...,t^m)$ גזירה חלקית לפי $t^1,...,t^m$ ולכל $1\le i\le m$ מתקיים: $\frac{\delta u}{\delta t^i}=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\delta f}{\delta x^j}\cdot\frac{\delta x^j}{\delta t^i}$.

<u>משפט</u>: אם הפונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D ובעלת נגזרות חלקיות $f^{(2)}_{yx},f^{(2)}_{xy},f'_x,f'_y$ רציפות בסביבת הנקודה $(x_0,y_0)\in D$ אזי בנקודה זו הנגזרות המעורבות שוות $f^{(2)}_{yx}(x_0,y_0)=f^{(2)}_{xy}(x_0,y_0)$.

נספח ד – תמצית הוכחות של משפטים נבחרים

<u>כלל לופיטל</u>: יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בקטע (a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$. נניח ש- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ $(-\infty \le l \le \infty)$ וכן $g'(x) \ne 0$ ב-(a,b) אזי אם

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$ <u>או</u>
2. $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = \infty$

אז $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>הוכחה</u>: מוכיחים את הלמה הבאה: אם $-\infty \le l < \infty$ אז לכל $l < q$ קיים $a < c_1 < b$ כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ לכל $a < x < c_1$ ואילו אם $-\infty < l \le \infty$ אז לכל $p < l$ קיים $a < c_2 < b$ כך ש- $p < \frac{f(x)}{g(x)}$ לכל $a < x < c_2$. ברור ששתי הטענות סימטריות אז מוכיחים רק הראשונה. מניחים בה"כ שהפונקציה g חיובית ומונוטונית יורדת. לוקחים $l < r < q$ ומסתכלים בקטע (a,c) שבו $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ ומשתמשים בלגרנז' על הקטע הזה. במקרה (1) מראים ע"י קיבוע משתנה אחד והשאפת השני ל- a^+ ובמקרה (2) כופלים ב- $\frac{g(s)-g(t)}{g(s)}$ ומפתחים אי שוויון עד שמתקבלת התוצאה.

<u>משפט טיילור</u>: תהי f גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,x]$ ונניח שקיימת הנגזרת מסדר $n+1$ בקטע (a,x). אם $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ אזי:

1. שארית בנוסח קושי: קיים $a < c < x$ כך ש- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x-c)^n(x-a)$
2. שארית בנוסח לגרנז': קיים $a < c < x$ כך ש- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

<u>הוכחה</u>: לוקחים x קבוע ומסתכלים על הביטוי

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + S(t)$$

כפונקציה של t. גוזרים לפי t ומלא איברים מצטמצמים. בוחרים $g(t)$ ומשתמשים במשפט הערך הממוצע של קושי עבור $S(t), g(t)$ בקטע $[a,x]$. בשביל שארית לגרנז' לוקחים $g(t) = (x-t)^{n+1}$ ובשביל שארית קושי לוקחים $g(t) = t$.

<u>משפט</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור אינטגרבילית בו.
<u>הוכחה</u>: משתמשים בתכונת הרציפות במידה שווה. בוחרים חלוקה כך שהאיברים בסכום לא יהיו גדולים מ- ε.

<u>משפט</u>: פונקציה מונוטונית בקטע סגור אינטגרבילית בו.
<u>הוכחה</u>: עושים טור שחיל ובוחרים חלוקה כך שההפרש בין האינטגרלים לא יעלה על ε.

<u>משפט</u>: תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ כך ש- $m \le f \le M$. תהי $g \in \mathcal{C}[m,M]$. אזי $h = g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.
<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon > 0$. לוקחים $\delta > 0$ לפי הרציפות במידה שווה של g ואז לפי האינטגרביליות של f מוצאים פונקציות מר\דרגה כך ש- $m \le \varphi_f \le \psi_f \le M$. אפשר להניח ש- $\int_a^b \left(\psi_f - \varphi_f\right) < \delta\varepsilon$. מגדירים φ_h, ψ_h ע"י המקסימום והמינימום בהתאמה של g לפי החלוקה. מחלקים את האינדקסים לשני חלקים – אלה לפי המידה השווה ואלה שלא ומראים שבכל אופן שניהם מסתכמים לאינטגרל שקטן מ- ε.

<u>המשפט היסודי</u>: תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ונניח ש- $F' = f$ ב- $[a,b]$. אזי $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
<u>הוכחה</u>: מראים ש- $\int_a^b \varphi \le F(b) - F(a) \le \int_a^b \psi$ ובגלל שהפונקציה אינטגרבילית נתבע הטענה. משתמשים במשפט לגרנז' כדי לכתוב $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$ וסוכמים.

<u>המשפט היסודי</u>: תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. אם $f \in \mathcal{R}[a,b]$ נגדיר $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ע"י $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. אזי F רציפה ב- $[a,b]$ ואם f רציפה ב- $c \in [a,b]$ אז F גזירה בו ו- $F'(c) = f(c)$.
<u>הוכחה</u>: מראים ש- F מקיימת את תנאי ליפשיץ ולכן רציפה. ובשביל להראות את השוויון משתמשים בהגדרת הנגזרת.

<u>משפט</u>: תהי $f(x)$ רציפה ב- $[a,\infty)$ כאשר $0 < a$. נניח ש- $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ חסומה שם. אזי לכל $0 < \alpha$ האינטגרל $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}dx$ מתכנס.
<u>הוכחה</u>: אינטגרציה בחלקים.

<u>משפט</u>: פונקצית גמא $\Gamma(t)$ מוגדרת היטב (כלומר האינטגרל מתכנס) לכל $0 < t$.
<u>הוכחה</u>: ב- $[0,1]$ משווים עם $\frac{1}{x^{t-1}}$ וב- $[1,\infty)$ מראים שקיים c_t כך ש- $x^{t-1}e^{-x} \le \frac{c_t}{x^2}$.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) מוגדרת בקטע I ונניח ש- $f_n \to f$ במ"ש ב- I. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ f_n רציפה ב- $a \in I$ אז f רציפה ב- a.
<u>הוכחה</u>: $\left|f(x) - f(a)\right| \le \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(a)\right| + \left|f_n(a) - f(a)\right|$ וכל אחד מהמחוברים קטן מ- ε בגלל הרציפות ובגלל ההתכנסות במידה שווה.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אשר מתכנסת שם במידה שווה לפונקציה f. אזי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
<u>הוכחה</u>: לוקחים n קבוע כך ש- $f_n(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ ואת השוויון בין האינטגרלים מראים ע"י הגדרת הגבול ובשימוש בהתכנסות במידה שווה.

<u>משפט</u>: תהי (f_n) סדרה של פונקציות גזירות ברציפות בקטע הסגור I נניח שקיים $a \in I$ כך שהסדרה $\left(f_n(a)\right)$ מתכנסת. אם הסדרה (f_n') מתכנסת במידה שווה ב- I לפונקציה $g(x)$ אזי הסדרה (f_n) מתכנסת ב- I לפונקציה גזירה ולכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$.
<u>הוכחה</u>: אפשר להשתמש במשפט האינטגרציה עבור טור הנגזרות כי הן רציפות. מגדירים את פונקציית הגבול ומשתמשים במשפט היסודי ובאריתמטיקה של גבולות כדי להראות את ההתכנסות. לוקחים גבול ואז נגזרת.

<u>משפט</u>: אם פונקציה $z=f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אזי קיימות הנגזרות החלקיות ו-$A=f'_x\left(x_0,y_0\right)$ ו-$B=f'_y\left(x_0,y_0\right)$.
<u>הוכחה</u>: פעם לוקחים $\Delta x=0$ ופעם $\Delta y=0$.

<u>משפט</u>: אם הפונקציה $z=f\left(x,y\right)$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ אז היא רציפה בה.
<u>הוכחה</u>: זה פשוט יוצר מההגדרה של דיפרנציאביליות.

<u>משפט</u>: אם פונקציה $z=f\left(x,y\right)$ מוגדרת בסביבת נקודה $\left(x_0,y_0\right)$ ובעלת נגזרות חלקיות $f'_x\left(x,y\right),f'_y\left(x,y\right)$ רציפות בסביבת אותה נקודה, אזי היא דיפרנציאבילית ב-$\left(x_0,y_0\right)$.
<u>הוכחה</u>: מפרקים את Δz לסכום איברים שאפשר להשתמש עליהן במשפט הערך הממוצע של לגרנז' (בגלל שהנגזרות החלקיות רציפות).