<u>פרק א' (25%)</u>

ענו על שאלה <u>אחת</u> מבין שתי השאלות הבאות:

1. תהי f פונקציה ממשית גזירה n פעמים בנקודה a. הוכיחו שקיים פולינום $P\left(x\right)$ אחד ויחיד ממעלה קטנה או שווה ל- n המקיים

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{\left(x-a\right)^n}=0$$

וכתבו נוסחה מפורשת עבורו (נוסחת טיילור).
הערה: יש להוכיח גם קיום וגם יחידות.

2. הוכיחו את משפט Dini: תהי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית לא יורדת של פונקציות רציפות ב- $\left[a,b\right]$ (דהיינו $\forall x\in[a,b], f_n(x)\le f_{n+1}(x)$), המתכנסת נקודתית לפונקציה f שהיא רציפה ב- $\left[a,b\right]$. אזי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- f במידה שווה ב- $\left[a,b\right]$.

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. יהי n מספר טבעי. נסמן $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,dx$.

   א. הוכיחו ש- $\left(I_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת.

   ב. הוכיחו: $\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$.

   ג. הסיקו ש- $I_n = O\left(1/n\right)$.

4. א. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2^n x\right)}{n!}$ מתכנס לכל $x \in \mathbf{R}$ וכי הפונקציה $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2^n x\right)}{n!}$ גזירה מכל סדר לכל $x \in \mathbf{R}$.

   ב. חשבו את $f\left(0\right)$ ואת $f^{(k)}\left(0\right)$ לכל $k \in \mathbf{N}$.

   ג. באילו נקודות מתכנס טור Taylor של הפונקציה f סביב $a = 0$?

5. תהי

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \left(x,y\right) \neq (0,0) \\ 0 & \left(x,y\right) = (0,0) \end{cases}.$$

   א. מצאו את כל הנקודות $\left(x,y\right)$ בהן f רציפה.

   ב. מצאו את כל הנקודות $\left(x,y\right)$ בהן שתי הנגזרות החלקיות של f קיימות וחשבו אותן.

   ג. מצאו את כל הנקודות $\left(x,y\right)$ בהן f דיפרנציאבילית.

<u>פרק ג' (35%)</u>

ענו על <u>כל</u> השאלות. בכל שאלה יש לסמן תשובה נכונה אחת בלבד בטופס הנלווה.

התשובות הנכונות מסומנות כך.

<u>שימו לב:</u> סדר השאלות והמסיחים כאן שונה מהסדר בבחינה שפתרתם!

❖ תהי $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ פונקציה חסומה. נתבונן בשני התנאים הבאים:

(i) לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל שני סכומי רימן R_1,R_2 של f שפרמטר החלוקה שלהם קטן מ- δ מתקיים $|R_1-R_2|<\varepsilon$.

(ii) לכל $0<\varepsilon$ יש חלוקה $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$ כך ש-
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\left(\sup_{x\in[a_{i-1},a_i]}f(x)-\inf_{x\in[a_{i-1},a_i]}f(x)\right)<\varepsilon.$$

אזי

a) (i) גורר (ii) ו- (ii) גורר (i)

b) (i) גורר (ii) ו- (ii) לא גורר (i)

c) (i) לא גורר (ii) ו- (ii) לא גורר (i)

d) (i) לא גורר (ii) ו- (ii) גורר (i)

❖ נתבונן בפונקציה: $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,dt$. אזי:

a) $\lim_{x\to0}F(x)=1$ ו- $\lim_{x\to0}F'(x)=0$.

b) $\lim_{x\to0}F(x)=1$ ו- $\lim_{x\to0}F'(x)=-1$.

c) $\lim_{x\to0}F(x)=0$ ו- $\lim_{x\to0}F'(x)=0$.

d) $\lim_{x\to0}F(x)=0$ ו- $\lim_{x\to0}F'(x)=-1$.

❖ נתון ש- $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\sin x + b} = 1$. ערכים אפשריים עבור a,b הם:

a) $a = b = 1$.

b) $a = 1, b = 2$.

c) $a = 2, b = 1$.

d) $a = b = 2$.

❖ איזה תנאי מספיק להתכנסות $\int_0^{\infty} f(x^2)\,dx$?

a) f מחזורית.

b) $g(t) = \int_0^{t} f(x)\,dx$ פונקציה מחזורית.

c) $\int_0^{\infty} f(x^4)\,dx$ מתכנס.

d) $|f(x)| \le |\sin x|$ לכל x .

❖ תהי $\left(f_n : [a,b] \to \mathbf{R}\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות אי-שליליות המתכנסת נקודתית לפונקציה גזירה $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. איזה מבין הבאים נכון בהכרח:

a) אם $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ במ"ש ב- $[a,b]$ אזי $f_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'$ נקודתית.

b) אם $f_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'$ נקודתית אזי $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ במ"ש ב- $[a,b]$.

c) אם לכל $x \in [a,b]$ $|f_{n+1}'(x) - f_n'(x)| \le \frac{1}{n^2}$ אזי $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ במ"ש ב- $[a,b]$.

d) אם $\left(f_n'\right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של פונקציות חסומות אזי $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ במ"ש ב- $[a,b]$.

❖ איזו מבין הטענות הבאות נכונה:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ לכל $-1 < x < 1$.

b) סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ מתכנסת במ"ש ב- $[0,1]$.

c) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ מתכנס לכל $x \in \mathbf{R}$.

d) תהי $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים n טבעי ומספרים ממשיים $a_0, a_1, \ldots, a_n$ כך ש- $\sup_{x \in [a,b]} | f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k | < \varepsilon$ אזי f אנליטית בקטע $[a,b]$.

❖ תהי $f(x,y) = x^2 \sin(y + \frac{\pi}{2})$. ערכו של ההפרש

$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to \pi/2} f(x,y) - \lim_{x \to \pi/2} \lim_{y \to 0} f(x,y)$ הוא:

a) $-\pi^2/4$

b) $\pi^2/4$

c) 0

d) 1

פרק ב'

(לא לבדיקה)

5

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2-\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א) נקודות הרציפות של $f(x,y)$.

לפי ההגדרה $f(x,y)$ רציפה ב (x_0,y_0) אם

לכל סדרה $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ מתקיים

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y_n\to y_0}} f(x_n,y_n)=f(x_0,y_0)$$

צריך לומר שמדובר בסכום/מנה של רציפות והרכבה של רציפות

ברור שבנקודה $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ הפונקציה הנתונה $f(x,y)$ רציפה שהרי אין בעיות בהגדרה, המונה והמכנה מוגדרים היטב, $\sqrt{x_0^2+y_0^2}\neq 0$ וניתן לחלק.

~~נבדוק אם כן את הרציפות ב $(0,0)$.~~

~~ניקח את הסדרה $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\xrightarrow[n\to\infty]{}(0,0)$. אז כמובן~~

$$\cancel{f(\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n})=\frac{\sin\frac{1}{n^2}-\sin\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=0}$$

~~מצד שני, ניקח את הסדרה $(\frac{1}{n},0)\to(0,0)$. אז~~

$$\cancel{f(\tfrac{1}{n},0)=\frac{\sin\frac{1}{n^2}-\sin 0}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}=\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}}$$

נראה ש $f(x,y)$ רציפה ב- $(0,0)$.

ראשית נראה ש- $\frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$.

+6

$$\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2}}\right|=\left|\frac{\sin x^2}{x}\right|$$

$\sin x^2\to 0$, $x\to 0$. אבל

ולפי כלל לופיטל $\frac{2x\cdot\cos x^2}{1}\to 0$ $\Leftarrow$ $\frac{\sin x^2}{x}\to 0$. $\frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{}0$

באותו אופן $-\frac{\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$ ועכשיו לפי אריתמטיקה של גבולות $f(x,y)\xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{}0$ $\Leftarrow$ f רציפה ב $(0,0)$.

~~(ב) נגזרות חלקיות:~~

(ב) נגזרות חלקיות ב- $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x\cos x^2\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}(\sin x^2-\sin y^2)}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{2x\cos x^2\,(x^2+y^2)-x(\sin x^2-\sin y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2y\cos y^2\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}(\sin x^2-\sin y^2)}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{-2y\cos y^2(x^2+y^2)-y(\sin x^2-\sin y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

בנקודה $(0,0)$ נראה אם קיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h^2}{h|h|}=$$

+7

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h^2}{\operatorname{sign}h\cdot h^2}$$ וזה לא קיים

כי $\frac{\sin h^2}{h^2}\to 1$ ול- sign h אין גבול.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h^2}{h|h|}$$ לא קיים מאותה סיבה.

(ג) ברור ש $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות בכל $(x,y)\neq(0,0)$ כי המכנה שונה מאפס ולכן לפי משפט שלמדנו בכיתה הפונ' דיפרנציאבילית ב $(x,y)\neq(0,0)$.

+7

כמו כן למדנו שאם פונ' דיפרנציאבילית בנקודה אז קיימות בה הנגזרות החלקיות $\Rightarrow$ לא יכול להיות ש- f דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

<u>פרק א' (25%)</u>

ענו על שאלה <u>אחת</u> מבין שתי השאלות הבאות:

1. הוכיחו את המשפט: תהי f פונקציה ממשית אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ונגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ לכל $x\in[a,b]$. אזי F פונקציה רציפה ב- $[a,b]$. יתר על כן, לכל $x\in[a,b]$, אם f רציפה ב- x אזי F גזירה ב- x ומתקיים $F'(x)=f(x)$.

2. הוכיחו את כלל לופיטל הבא: יהיו f,g גזירות ב- (a,b) כאשר $-\infty<a<b<+\infty$.

נניח ש- : $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} f(x)=0=\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} g(x),$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}=l \quad , \quad l\in\mathbf{R}.$$

אזי $\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} \frac{f(x)}{g(x)}=l$.

<u>פרק ב' (40%)</u>

ענו על <u>שתיים</u> מבין שלוש השאלות הבאות.

3. א. חשבו: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$.

ב. בדקו את התכנסות האינטגרל הלא אמיתי : $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x+x^3}}\,dx$.

4. תהי $f_0:[0,1]\to\mathbf{R}$ פונקציה אינטגרבילית אי-שלילית. נגדיר $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$

עבור $n\in\mathbf{N}$, $x\in[0,1]$.

א. הראו ש- f_n אי-שלילית, וכן שקיים N_1 טבעי כך שלכל $n>N_1$ טבעי מתקיים ש- f_n גזירה ברציפות.

ב. הראו שקיים N_2 טבעי כך שלכל $n>N_2$ הפונקציה f_n מונוטונית עולה בקטע $[0,1]$.

ג. הוכיחו כי קיים N_3 טבעי כך שלכל $n>N_3$ טבעי ולכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f_{n+1}(x)\le xf_n(x)$. הסיקו כי $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ נקודתית.

ד. האם ההתכנסות היא במידה שווה?

5. תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה אי-שלילית ($\forall x\in\mathbf{R}: \quad 0\le f(x)$) בעלת נגזרת שנייה רציפה וחסומה: $\forall x\in\mathbf{R}: \quad |f''(x)|\le M$.

יהי $a\in\mathbf{R}$.

א. הוכיחו: $\forall x\in\mathbf{R}: \quad f(x)\le f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{M}{2}(x-a)^2$.

ב. הוכיחו: $\forall t\in\mathbf{R}: \quad 0\le f(a)+f'(a)t+\frac{M}{2}t^2$.

ג. הסיקו: $|f'(a)|\le\sqrt{2M\,f(a)}$.

<u>פרק ג' (35%)</u>

ענו על <u>כל</u> השאלות. בכל שאלה יש לסמן תשובה נכונה אחת בלבד בטופס הנלווה.

התשובות הנכונות מסומנות כך.

<u>שימו לב:</u> סדר השאלות והמסיחים כאן שונה מהסדר בבחינה שפתרתם!

❖ נתון: $L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$, אזי:

a) $L=\ln 2$.

b) $L=\frac{\pi}{4}$.

c) $L=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $L=\frac{e}{3}$.

❖ בקטע $(-\pi,\pi)$ לפונקציה $F(x)=\int_0^{x^2-1}\arctan(t)dt$:

a) אין אף נקודת קיצון מקומי.

b) יש נקודת קיצון מקומי אחת ויחידה.

c) יש בדיוק שתי נקודות קיצון מקומי.

d) יש בדיוק שלוש נקודות קיצון מקומי.

❖ איזה מהתנאים הבאים <u>מספיק</u> להתכנסות $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$?

a) $\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0 \quad \forall x>0$.

b) $\int_x^{x+1} |f(t)|\,dt<\frac{1}{x} \quad \forall x>0$.

c) $\left|\int_x^{x^2} f(t)\,dt\right|<\frac{1}{x} \quad \forall x>0$.

d) $\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt \quad \forall x>0$.

❖ תהי $\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ב- $\mathbf{R}$ המתכנסת נקודתית לפונקציה

$f(x)=\begin{cases}\cos x & x\geq 0\\ -\cos x & x<0\end{cases}$. אזי

a) בהכרח f_n לא רציפה עבור n מספיק גדול.

b) אם כל f_n אינטגרבילית אז $\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)dx=0$.

c) אם כל f_n גזירה, אז ההתכנסות היא לא במידה שווה ב- $[-1,1]$.

d) יתכן שכל f_n רציפה ושההתכנסות היא במידה שווה ב- $(-\infty,\varepsilon]$ לכל $\varepsilon>0$.

❖ נתון טור חזקות $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ עם רדיוס התכנסות R . אילו מהטענות הבאות **<u>איננה</u>** נכונה?

a) אם הטור $S(x)$ מתכנס ב- $x=R$ אז גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ מתכנס בנקודה $x=R$ ל- $\int_0^R S(x)dx$.

b) אם הטור $S(x)$ מתכנס ב- $x=R$ אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ מתכנס בנקודה $x=R$ ל- $S'(R)$.

c) אם הטור $S(x)$ מתכנס ב- $x=R$ אז הוא מתכנס במידה שווה ב- $[0,R]$.

d) אם הטור $S(x)$ מתכנס במידה שווה ב- $(0,R)$ אז הוא מתכנס ב- $x=R$.

❖ תהי $f(x,y)=x^2+2x+3xy$.

אזי $\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{f(x,y)-9-10(x-1)-3(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$ שווה ל- :

a) 0.

b) 1.

c) ∞.

d) הגבול לא קיים.

❖ תהי $f(x,y)=\frac{x}{y}$. עבור אלו נקודות (x_0,y_0) מתקיים השוויון:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$?

a) $x_0=0, y_0\neq 0$.

b) $x_0=1, y_0\neq 0$.

c) $x_0=-1, y_0\neq 0$.

d) $0\neq y_0=-x_0$.