

משפטי ערך ממוצע מסדר גבוה

ניזכר בכמה משפטים מהסמסטר הקודם:

משפט פרמה: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b) וגזירה בנקודה פנימית x_0 . אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'(x_0) = 0$.

משפט רול: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[a, b]$ ומקיימת את התנאים הבאים:

1. $f(x)$ רציפה ב- $[a, b]$

2. $f(x)$ גזירה ב- (a, b)

3. $f(a) = f(b)$

אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש- $f'(c) = 0$.

משפט הערך הממוצע של לגרנז': תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) . אזי קיימת

נקודה $a < c < b$ כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

משפט הערך הממוצע של קושי: יהיו $f(x), g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות בקטע

(a, b) , ובנוסף לכל $a < x < b$ $g'(x) \neq 0$. אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

משפט הערך הביניים של דרבו: תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב- $[a, b]$. אזי עבור כל ערך β שנמצא בין

$f_+(a)$ ו- $f_-(b)$ קיימת נקודה $a \leq x_0 \leq b$ כך ש- $f'(x_0) = \beta$.

עד כאן חזרה על השבוע האחרון של הסמסטר הקודם.

משפט: כלל לופיטל (L'Hôpital): יהיו f, g גזירות בקטע (a, b) .¹ נניח ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ וכן $g' \neq 0$

ב- (a, b) . אזי אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty$

אז $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

הוכחה: נטען שמספיק להראות שאם $-\infty \leq l < \infty$ אז לכל $l < q$ קיים $a < c_1 < b$ כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ לכל

$a < x < c_1$ ואם $-\infty < l \leq \infty$ אז לכל $p < l$ קיים $a < c_2 < b$ כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)} > p$ לכל $a < x < c_2$.

מדוע זה מספיק? יש 3 אפשרויות:

¹ קטע כאן הוא במובן הרחב. כלומר $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

- $l \in \mathbb{R}$ סופי. יהי $0 < \varepsilon$ ויהיו $l - \varepsilon = p < l < q = l + \varepsilon$. יהי $a = \min\{c_1, c_2\}$. אזי לכל $a < x < c$

$$\text{מתקיים } l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon \text{ כלומר } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

- $l = -\infty$. אזי בהינתן $q \in \mathbb{R}$ קיים c כך ש- $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ לכל $a < x < c$. כלומר $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

- $l = \infty$. אזי בהינתן $p \in \mathbb{R}$ קיים c כך ש- $p < \frac{f(x)}{g(x)}$ לכל $a < x < c$. כלומר $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

לכן נותר לנו להוכיח את האמור לעיל. ברור ששני המקרים סימטריים אז נוכיח רק עבור המקרה ש- $-\infty \leq l < \infty$.

ראשית, נטען ש- $\text{sgn } g'$ קבוע. אחרת, לפי משפט דרבו הנגזרת הייתה מתאפסת בנקודה כלשהי וזה בניגוד להנחה. לכן, נניח בה"כ ש- $g' < 0$.

שנית, נטען שניתן להניח כי $\text{sgn } g$ קבוע ב- (a, b) . הנחנו כי $g' < 0$, כלומר g יורדת ולכן מתאפסת לכל היותר פעם אחת. לכן, במידת הצורך, נקטין את b ואז g שומרת סימן. נניח בה"כ כי $0 < g$.

בהינתן $l < q$ נבחר $l < r < q$. נתון ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. לכן קיים $a < c < b$ כך ש- $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ לכל

$a < x < c$. לכל $a < s < t \leq c < b$ לפי משפט קושי קיים $a < s < u < t \leq c$ כך ש- $\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$

$$\text{לכן } \frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} < r$$

אם מתקיים תנאי (1) אז נקבע את t ונשאיר את s ל- a . נתון ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ולכן לפי

אריתמטיקה של גבולות $\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} = \frac{f(t)}{g(t)} \leq r < q$. אבל $a < t < c$. אז קיבלנו את מה שצריך.

אם מתקיים תנאי (2) נזכור שנחנו כי $g' < 0$ ו- $0 < g$. לכן $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$. בהינתן $l < q$ יהי $l < r < q$.

אזי כמו קודם קיים $a < c < b$ כך ש- $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ לכל $a < x < c$. כמו קודם, נתבונן ב- (*). מאחר ש- g

יורדת וחיובית מתקיים $1 - \frac{g(t)}{g(s)} < 1$. לכן נוכל לכפול את (*) בביטוי זה ונקבל:

$$\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} \cdot \frac{g(s) - g(t)}{g(s)} < r \cdot \frac{g(s) - g(t)}{g(s)}$$

$$\frac{f(s) - f(t)}{g(s)} < r \cdot \left(1 - \frac{g(t)}{g(s)}\right)$$

$$\frac{f(s)}{g(s)} < \frac{f(t)}{g(s)} + r \cdot \left(1 - \frac{g(t)}{g(s)}\right) < \frac{f(t)}{g(s)} + r$$

$$\odot \lim_{s \rightarrow a^+} \frac{f(s)}{g(s)} \leq r < q \text{ נקבל } a \text{ ל- } s \text{ ונשאיר את } t \text{ ונשאיר את } s \text{ ל- } a$$

דוגמאות:

1. בסמסטר הקודם פתרנו את הבעיה הזאת בשיטות יותר מסובכות. כעת בעזרת כלל לופיטל ניתן

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \stackrel{continuity}{=} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x}{\cos x} = 2 \quad .3$$

$$.4 \quad \text{זאת היא דווקא אנטי דוגמה. קל לחשב באופן ישיר כי } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0 \text{ אבל אם היינו מנסים}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + \cancel{x} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x}^2} \right)}{\cos x} \quad \text{להתשמה בכלל לופיטל היינו נתקלים בבעיה:}$$

למונה בביטוי הזה אין גבול...

08/03/06 יום האישה שמח לכולם!

הסבר להוכחה מהשעור הקודם ותיקון:

אנחנו רוצים להגיד משהו על גבול של מנה של פונקציות - $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר יודעים את $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

היינו רוצים לומר שהם שווים אבל לא מתקיים תמיד. כלל לופיטל אומר שאם $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (כאן

במובן הרחב) ומתקיים אחד מהבאים: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ או $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty$ אזי

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

מה זה אומר $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = l$ אם $l \in \mathbb{R}$ סופי ההגדרה היא $|\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) - l| < \varepsilon$ $\exists \delta > 0$ $a < x < a + \delta \Rightarrow$

בהגדרה הזאת אפשר לעשות שני שינויים. הראשון, ניתן לסמן $a + \delta = c$. והשני, $|h(x) - l| < \varepsilon$ פירושו

$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$ אבל ניתן לדון בקטע לא סימטרי סביב l ואלה הם p, q מההוכחה.

ככה, למשל, במקרה ש- $l = -\infty$ מתקבל הניסוח הבא: $l = -\infty \Rightarrow \forall q \in \mathbb{R} \exists c > a \ a < x < c \Rightarrow h(x) < q$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

כעת נוסיף תיקון קל להוכחה של המקרה השני שבו $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = \infty$. הנחנו $g' < 0$ ו- $0 < g$. יהי

$l < r < q$. בגלל ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ אז קיימת סביבה ימנית של a שבה $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$. נבחר

$a < s < t < c$. לפי משפט קושי קיים $u \in (s, t)$ כך ש- $\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} < r$. כעת נפכיל את שני

$$\text{האגפים ב-} \frac{g(s) - g(t)}{g(s)} < 1 \text{ ונקבל } 0 < \frac{g(s) - g(t)}{g(s)}$$

$$\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} \cdot \frac{g(s) - g(t)}{g(s)} < r \cdot \frac{g(s) - g(t)}{g(s)}$$

$$\frac{f(s) - f(t)}{g(s)} < r$$

$$\Rightarrow \frac{f(s)}{g(s)} < \frac{f(t)}{g(s)} + r$$

בשעור הקודם כתבנו שמכאן נובע ש- $\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{f(s)}{g(s)} \leq r$ אבל זה נכון רק אם הגבול קיים. הנימוק הנכון הוא

זה: מאחר ש- $\lim_{s \rightarrow a^+} \frac{f(t)}{g(s)} = 0$ ניתן לבחור $a < c$ אשר מבטיח $0 < \frac{f(t)}{g(s)} < \frac{q-r}{2}$ לכל $a < s < c$. לכן

יתקיים $\frac{f(s)}{g(s)} < \frac{q-r}{2} + r < q$. עכשיו ההוכחה בסדר.

דוגמאות:

1. יהיו $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ פונקציות פולינומיות. אז בעזרת כלל לופיטל אפשר לחשב את

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}$. זה מקרה שקוראים לו " $\frac{0}{0}$ ". אפשר לעשות פה לופיטל אבל אז נקבל שצריך לחשב

את $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} \left[-\frac{-2x}{(x^2)^2} \right]$ שזה אפילו יותר מסובך מהבעיה המקורית. אבל נשים לב שמתקיים

$$\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{1}{\frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}}$$

ועכשיו אנחנו במקרה " $\frac{\infty}{\infty}$ " וגם כאן נתו להשתמש בלופיטל. אז

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{-2x}{(x^2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(x^2)^2}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

3. די ברור באופן אינטואיטיבי ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$. אבל היינו מנסים להשתמש בכלל לופיטל כדי

להוכיח את זה היינו קבלים ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ שזה נכון אבל זה לא נותן לנו כלום...

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$. כאן יש מקרה " $0 \cdot \infty$ ". ניתן לרשום $x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ ועכשיו אפשר להשתמש בכלל

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

לופיטל. אז נקבל $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$. באופן אינטואיטיבי היינו מצפים ש- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$ שהרי עבור $x \approx 0$

$$\sin x \approx x \text{ וידוע ש-} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

במקרה " 1^∞ " הטריק הוא לא להסתכל על הביטוי אלא להוציא $\ln$. אז במקום לחשב את

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}} \text{ נחשב את } \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

כעת נוכל להשתמש בכלל לופיטל

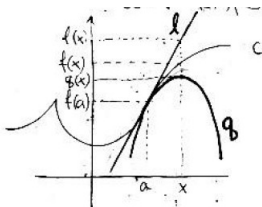
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

ונקבל $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$

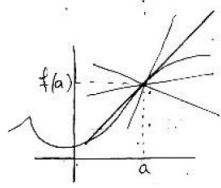
קירובים פולינומיאליים

ראשית קצת אינטואיציה. נניח שיש לנו פונקציה $f(x)$ שאנחנו יודעים את ערכה ב- a ואנחנו רוצים לחשב את הערך שלה בנקודה שקרובה ל- a . אם f רציפה אז אם $x \approx a$ אז $f(x) \approx f(a)$. למשל, $\sqrt{1.1} \approx \sqrt{1}$

פונקציות לינאריות הן פונקציות שקל לעבוד איתן. אז אם נוכל להעביר משיק לפונקציה בנקודה a נוכל לומר שערכי הפונקציה קרובים לערכי המשיק בקרבת a : אם $f(x)$ גזירה ב- a אז $f(x) \approx l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. אבל למה להסתפק בישיר? אולי נוכל למצוא פרבולה, או פולינום מהמעלה השלישית...



נחזור רגע למקרה הלינארי. מה מייחד את המשיק מכל הישרים שעוברים דרך הנקודה $(a, f(a))$?
באופן כללי, משוואת ישר שעובר דרך הנקודה הזו היא $y = f(a) + n(x-a)$



כאשר n הוא השיפוע. לכל שיפוע n מן הסתם מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - (f(a) + n(x-a))) = 0$$

אבל רק עבור המשיק מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)))}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

השאיפה היא כל כך חזקה שאפילו אם מחלקים את הביטוי בביטוי אחר אשר שואף לאפס עדיין הגבול הוא אפס. אז המשיק הכי קרוב לפונקציה מכל הישרים האחרים. בלשון זו, היינו יכולים להגדיר את

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - (f(a) + n(x-a)))}{x-a} = 0$$

הנגזרת כשיפוע של הישר שמקיים

כאמור, למה לנו להסתפק בישיר? בשביל למצוא את הפרבולה $p_2(x)$ הכי קרובה ל- $f(x)$ נחפש את

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_2(x)}{(x-a)^2} = 0$$

ובאופן כללי נחפש פולינום $p_n(x)$ ממעלה n הכי קרוב

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

לפונקציה – זהו הפולינום שמקיים

יהי $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ פולינום. נשים לב שאם אנחנו יודעים את הערכים של הפולינום ונגזרותיו ב- $x=0$ אפשר לשחזר את הפולינום במלואו.

$$\begin{aligned} p(0) &= a_0 & p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} \\ p'(0) &= a_1 & p''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + (n-1)na_nx^{n-2} \\ &\vdots & &\vdots \\ p^{(k)}(0) &= k!a_k \end{aligned}$$

אז לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים $p^{(k)}(0) = k!a_k$ ולכן את הפולינום אפשר להציג באופן הבא:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

באופן דומה, אם $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n$ נקבל $p^{(k)}(a) = k!b_k$.

הגדרה: תהי f גזירה n פעמים בנקודה a . נקרא $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ הפולינום של טיילור

מסדר n של f בחזקות של $x-a$.

משפט: תהי f מוגדרת וגזירה ב- a עד סדר $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. יהי T_n הפולינום טיילור שלה f מסדר n ב-

$$a. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

תזכורות והערות:

1. פולינום טיילור הוא $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
2. נובע ש-

$$T_n(a) = f(a)$$

$$T_n'(a) = f'(a)$$

$\vdots$

$$T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

למעשה, $T_n(x)$ הוא הפולינום היחיד מסדר $n \geq$ שמקיים תכונה זו.

3. עבור $0 \leq j \leq n$ $T_n^{(j)}(x)$ הוא הפולינום של טיילור מסדר $n-j$ שך $f^{(j)}(x)$ ב- a .
4. בהנחה ש- $f(x)$ גזירה n פעמים מסתתרת ההנחה שהפונקציה מוגדרת ובעלת גזירה $n-1$ פעמים באיזושהו קטע $[b, c]$ המכיל את a . כלומר קיימות ומוגדרות בכל $[b, c]$ כל $f^{(j)}(x)$ $0 \leq j \leq n$. חוץ מזה קיימת הנגזרת ה- n ית-בנקודה עצמה a $f^{(n)}(a)$ מה שלא בהכרח אומר שהנגזרת ה- n ית-קיימת בסביבה של a .

הוכחה:

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}{\underbrace{(x-a)^n}_{g(x)}} = \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

מהרציפות של f נובע ש-

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - Q(x)) = f(a) - Q(a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f'(x) - Q'(x)) = f'(a) - Q'(a) = 0$$

$\vdots$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^{(n-2)}(x) - Q^{(n-2)}(x)) = f^{(n-2)}(a) - Q^{(n-2)}(a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = 0 \text{ מתקיים } 0 \leq k < n \text{ אז לכל } g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k} \text{ כמו כן}$$

כעת נשתמש בכלל לופיטל:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - Q(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - Q'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-2)}(x) - Q^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{n!} \cdot \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

וזה בדיוק מה שרצינו. ☺

משפט: יהיו $P(x), Q(x)$ שני פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n כך ש-

$$P(x) = Q(x) \text{ אזי } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n}$$

הוכחה: יהי $R(x) = Q(x) - P(x)$. לפי אריתמטיקה של גבולות, מ- $*$ נובע ש- $0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^n}$.

נניח ש- $R(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n$. נשים לב שלכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^i}$ לכן

בפרט $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0$. לכן מרציפות $R(x)$ נקבל $b_0 = 0$. לכן

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^i} = 0, \text{ אבל כאמור, } R(x) = b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n = (x-a) \left[b_1 + \dots + b_n(x-a)^{n-1} \right]$$

$b_1 = 0$. נמשיך n פעמים ונקבל $R(x) = 0$. כלומר $P(x) = Q(x)$. ☺

מסקנה: טיילור (כמו אמא) יש רק אחד!

הסבר להוכחה של משפט טיילור:

מדוע בהוכחה השתמשנו בכלל לופיטל רק $n-1$ פעמים? הרי הפונקציה גזירה n פעמים בנקודה $a \dots$ ובכן, מה שקורה זה הדבר הבא: זה שהפונקציה גזירה ב- a n פעמים זה אומר שהיא גזירה בסביבה של a $n-1$ פעמים. בגזירה ה- n ית כבר לא בטוח שהפונקציה גזירה בסביבה. אבל ידוע שהיא כן גזירה בנקודה a עצמה. אז בהוכחה היה לנו בגבול $f(x)$ ושהתמשהו בכלל לופיטל $n-1$ פעמים עד שהיה לנו בגבול $f^{(n-1)}(x)$. כעת, אנחנו לא יכולים להמשיך לגזור משום ש- $x \neq a$, אם נרצה לגזור בעצם אנחנו נגזיר בסביבה של a וזה לא בטוח אפשרי...

משפט (טיילור): תהי f גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a, x]$ ונניח שקיימת הנגזרת מסדר $n+1$ בקטע (a, x) . אם $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ אזי:

$$1. \text{ קיים } a < c < x \text{ כך ש-} R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a) \text{ (שארית בנוסח קושי)}$$

$$2. \text{ קיים } a < c < x \text{ כך ש-} R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \text{ (שארית בנוסח לגרנז')}$$

הערה: זה שדורשים גזירות בקטע סגור ואח"כ בקטע פתוח זה לא ממש אמור להפתיע אותנו כי כל המשפטים בעניין הערך הממוצע מדברים על רציפות בקטע סגור וגזירות בקטע פתוח... הוכחה: נתבונן על x כקבוע ועל הביטוי הבא כפונקציה של t בקטע (a, x) :

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n + S(t)$$

נשים לב ש- $S(a) = R_n(x)$ אם נציב a נקבל $f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ כמו $f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = T_n(x)$. כן, $S(x) = 0$.

כעת נגזור את שני האגפים לפי t ונקבל:

$$0 = f'(t) + (-1)f'(t) + f''(t)(x-t) + (-1)(x-t)f''(t) + \frac{f'''(t)}{2!} (x-t)^2 + \dots + (-1)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!} + \dots + (-1)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} + S'(t)$$

$$S'(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \text{ כל המחזורים שבהתחלה מצטמצמים וניוותר עם השוויון}$$

תהי g פונקציה מוגדרת ורציפה בקטע $[a, x]$, גזירה ב- (a, x) כך ש- $g'(t) \neq 0$ לכל $a < t < x$. נשים לב ש- S ו- g עומדות בתנאי משפט הערך הממוצע בנוסח קושי: S אמנם רציפה ב- $[a, x]$ וגזירה ב- (a, x) , שהרי f מקיימת זאת ו- S היא הפרש בין f לפולינום. לכן נוכל להפעיל את משפט הערך הממוצע ולקבל שקיימת $a < c < x$ כך ש- $\frac{S(x)-S(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{S'(c)}{g'(c)}$. נזכור ש- $S(x) = 0$, נציב c ב- $S'(t)$ ונקבל:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!g'(c)}(g(x)-g(a))$$

כעת נבחר g שונות ונקבל את השאריות בנוסחים השונים.

$$1. \text{ נבחר } g(t) = t \text{ ונקבל } g'(t) = 1. \text{ אז } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!} (x-a)$$

$$2. \text{ נבחר } g(t) = (x-t)^{n+1}. \text{ אז } g'(t) = (n+1)(x-t)^n (-1). \text{ נציב ונקבל}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(-(x-a)^{n+1})}{n!(-1)(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

קיבלנו את שתי השאריות. ☺

נשים לב שאת המשפט קיבלנו מבחירת פונקציות g קיצוניות למדי. אם נבחר $g(t) = (x-t)^p$ עבור

$1 \leq p$ נקבל גרסה נוספת של השארית. $g'(t) = p(x-t)^{p-1}(-1)$ ואז

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(-(x-a)^p)}{n!(-1)(x-c)^{p-1}p} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^p(x-c)^{n-p+1}}{n!p}$$

הערה נוספת: בספרות מציגים את השאריות בצורה קצת שונה. אם $a < x < c$ ניתן להציג את c באופן $c = a + \theta(x-a)$ כאשר $0 < \theta < 1$. אז נקבל ש-

$$x-c = x-(a+\theta(x-a)) = (x-a)-\theta(x-a) = (1-\theta)(x-a)$$

כעת נציב את זה בנוסחה של השארית ונקבל:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{pn!} (x-a)^p [(x-a)(a-\theta)]^{n-p+1} =$$

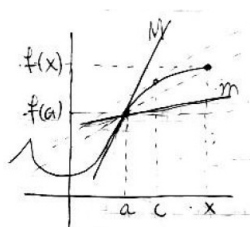
$$= \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{pn!}$$

נעיר משהו לגבי המשך החומר. כאשר נלמד אינטגרלים גם נבין יותר את מה שכתוב פה. אם $f^{(n+1)}$

$$\text{אינטגרלית בקטע } [a, x] \text{ אז } S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t) dt \text{ ואז } R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$$

דוגמה:

נמצע קירוב ל- $\sqrt{1.1}$. לצורך כל נחשב פיתוח טיילור לפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ סביב הנקודה $a=1$. ברור ש- $\sqrt{1.1} \approx \sqrt{1}$ אבל האמירה הזו חסרת משמעות אם אנחנו לא אומרים מה סדר הגודל של השגיאה. לפי



משפט הערך הממוצע קיימת נקודה c כך ש- $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$ לכן

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \quad m \leq f' \leq M \quad \text{ע"י } f' \text{ כעת אם נוכל לחסום את } f' \text{ אז}$$

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \quad m \leq f'(c) \leq M \quad \text{אז } m \leq f'(c) \leq M \text{ וזה מאפשר לנו לתת הערכה לשגיאה:}$$

$$f(a) + m(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + M(x-a)$$

$$\text{לכן במקרה שלנו משום ש- } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ נקבל } \sqrt{1.1} - \sqrt{1} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(1.1-1)$$

כאשר $1 < c < 1.1$. אז עקרונית נוכל להציב בנוסחה את הגבולות ולהעריך את השגיאה. אבל לצורך כך יש לחשב את $\sqrt{c}$ וכאשר $c = 1.1$ אנחנו לא יודעים את התוצאה. נשים לב ש- $1 < c < 1.1 < 1.21$ ואת זה

אנחנו דווקא יכולים לחשב. אז $1 < \sqrt{c} < \sqrt{1.21} = 1.1$. לכן $\frac{1}{2.2} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2}$ ומכאן נקבל הערכה:

$$1 + \frac{1}{22} = 1 + \frac{1}{2.2} \cdot 0.1 < \sqrt{1.1} < 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 = 1 + \frac{1}{20}$$

האם זו הערכה טובה? זה כבר תלוי במה שאנחנו רוצים. אבל לפחות הערכנו את השגיאה...

דוגמה:

נמצא קירוב ל- $\sin 36^\circ$. ראשית, הפונקציה רשומה במעלות, אבל אנחנו יודעים לעבוד רק עם רדיאנים.

אז נבצע את ההמרה: $36^\circ = 30^\circ + 6^\circ = 30^\circ + \frac{30^\circ}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30}\right) \text{ באופן טבעי נחפש פולינום טיילור של הפונקציה } f(x) = \sin x \text{ בנקודה } a = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{נוכר שמתקיים } f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x \text{ ואז}$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \dots + \frac{\sin^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{n!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^n$$

נשתמש בשארית בנוסח לגרנז'. השארית היא $R_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$. כמובן $|\sin^{(n+1)}(c)| \leq 1$

$$\text{ולכן } |R_n(x)| \leq \frac{\left|x - \frac{\pi}{6}\right|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ ואז } \left|R_n\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30}\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\left(\frac{4}{30}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

נניח שאנחנו רוצים שהשגיאה לא תעלה על 10^{-3} . אז מספיק לבחור $n = 2$ כי אז $\frac{\left(\frac{4}{30}\right)^3}{3!} < \frac{1}{1000}$

נחשב לפי פולינום טיילור מדרגה 2 ונקבל:

$$\sin 36^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{30} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{30}\right)^2$$

והשגיאה אינה עולה על 10^{-3} .

נוסחת השארית של לאגראנז' (הנחיה אחת)

f פונקציה n פעמים חזרנית ב $[a, x]$ ואז

$a < c < x$ פונקציה ב (a, x) אזי קיים

כך ש $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

הנחיה למקרה $n=1$

העניין הוא רצף. (הקדם לא) x ונקחה $M \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + M(x-a)^2$$

אז g פונקציה ב S :

$$g(s) = f(s) - f(a) - f'(a)(s-a) - M(s-a)^2$$

g היא פונקציה ב $[a, x]$ ויש לה

$$g(a) = 0$$

$$g(x) = 0$$

לפי משפט רול, קיים $a < c < x$ כך ש

$$g'(c) = 0$$

$$g'(s) = f'(s) - f'(a) - 2M(s-a)$$

אם f' חזרנית ב $[a, x]$ אז

$$g'(c) = 0$$

$$g'(a) = 0$$

לפי משפט רול, קיים $a < c < c_1 < x$ כך ש

$$g''(c) = 0$$

$$g'(s) = f''(s) - 2M$$

$$M = \frac{f''(s)}{2}$$

$$f''(s) - 2M = 0$$

אז M קבוע

$$R_1(x) = \frac{f''(s)}{2} (x-a)^2$$

הוכחה מסודרת למקרה הכללי:

נקבע את x ונבחר M לפי התחנה ϵ .

$$f(x) = T_n(x) + M(x-a)^{n+1}$$

למען הסר ספק, (לדור את M צי)

$$M = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

(לדור g ב $[a, x]$ צי)

$$g(s) = f(s) - T_n(s) - M(s-a)^{n+1}$$

$$T_n(s) - M(s-a)^{n+1} \text{ פונקציה ב-} s \text{ ש-}$$

ב תכונה גליונית של f נקבעת צי f

$\Leftarrow g$ אינה חפופה, ברצוננו ב- $[a, x]$ $n+1$ -
פעמים ב- (a, x) .

(שים לב שהגליונית של f והגליונית של T_n מתחברות

בנקודה a וצדד n

$$\Leftarrow \text{אם } 0 \leq k \leq n \text{ אז } g^{(k)}(a) = 0 \text{ מדוע?}$$

הגליונית מתחברת והגליונית של הביטוי $M(s-a)^{n+1}$

תתאפס ברצפה של a אף על פי של חלקה ושל חלקה
ב צדד $n \leq k \leq 0$.

$$\text{חלף מזה } g(a) = 0 = g(x)$$

$\Leftarrow$ לפי משפט רול' צריך להיות g בקטע $[a, x]$ קיים

$$a < c_1 < x \text{ יק' של } g'(c_1) = 0$$

אם לא היה שם לאחריו קופים $g'(a) = 0$ $\Leftarrow$ לפי משפט

רול' צריך להיות g' ב- $[a, c_1]$ קיים $a < c_2 < c_1$ יק' $\Leftarrow$

$$g''(c_2) = 0 = g''(a)$$

$$a < c < c_n < \dots < c_2 < c_1 < x \text{ יק'}$$

$$0 = g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - M(n+1)!$$

מכאן התוצאה



11)

מורה ϕ טרמיונלואיה ($a \in \mathbb{R}$ או a מן $\mathbb{C}$)

- נסמן B_a את קבוצת הפונקציות f שממירה
הסביבה פתוחה מוקפת של a העלים אחריה

$$\exists \delta > 0 \exists M \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

- נסמן N_a את קבוצת הפונקציות f אשר
מקיימות $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ אם $f \in N_a$ (אחר 0 -
צבסור a -ה או אינפיניטסימלית a -ה).

שים לב שהקבוצות הללו, אחרת אחרת וקטוריים הם $\mathbb{R}$!

B_a : N_a סגורות תחת סכום, כפל וכל
בסקלר ותת $N_a \cdot B_a \subseteq N_a$ מזה

ההצבה תהיה f, g אוהדות הסביבה מוקפת של a

(אחר 0 -ל $f = O(g)$ כאשר $x \rightarrow a$ על

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \in B_a$$

העלים אחרות

$$\exists \delta > 0 \exists M \forall x \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

(אחר 0 -ל $f = O(g)$ כאשר $x \rightarrow a$ על

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(אם f ו g אותה בעלות, אז קול לרשום $f(x) = g(x)h(x)$
(אחר 0 -ל $h(x) \in N_a$)

תחת הטרמיונלואיה ההדדל. נניח אר נעמחבלאחר של a ו δ :

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$$\Rightarrow |f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| |x-a|^{n+1}$$

$$f(x) = T_n(x) + O((x-a)^{n+1})$$

ל

אין בעלות
הוא $g(x) \neq 0$
הסביבה של a
אם $f(x) = g(x)h(x)$

חזק ורבה פת' נוסף סגור הוא היחיד למקרים

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = c$$

$$f(x) = T_n(x) + c((x-a)^n) \quad \text{כ}$$

יש לו תחילה שאנשים הלכו לאיבוד. אז נקדים משהו אחד
למהט מלמדה על החומר.

אנחנו עוסקים בפונקציה f עתירת אינפורמציה על הנגזרות שלה
בנקודה מסוימת a ע"י הצגת f ו n פולינום הננו את
מה שנקרא פולינום טיילור שלה $T_{n,f,a}$ - פולינום טיילור
של f מסדר n בנקודה a . בד"כ הרוב האזני נקודה
ואצו פונקציה אנחנו נוסקים, אז נושמים רק T_n .

לדבר $0 \leq k \leq n$ מתקיים: $f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$ הפולינום
של טיילור מסדר n של f בחזקת $x-a$ $T_n(x)$ הוא
היחיד מבין הפולינומים שמתחתם לכל היותר n אשר יש
להם את התכונה (*). למה המעלה לכל היותר n יש
להבדיל בין סדר לבין מעלה או דרגה. נניח שמתחתם את
הפולינום טיילור של f מסדר n יכול להיות $f^{(n)}(a) = 0$
ואז נקבל פולינום של דרגתו n . אבל המדר של הפולינום טיילור
הוא n , פשוט כי ככה הגדרנו את זה.

דוגמה: $p(x) = 1 - 3x + 5x^2$ (רצה להציג אותו בחזקת
של $x-1$ (חילה אותה הפולינום טיילור שלו ב $a=1$
(קבל) $p(x) = 3 + 7(x-1) + 5(x-1)^2$

~~הנה~~ ברור. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - T_n(x)) = 0$ אבל זה שואל לאכזב אחד
מאוד! וזה מתבטא בדרך של מתק"ם

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

$T_n(x)$ הוא גם היחיד מבין הפולינומים שמתחתם לכל היותר n
שמתקיים את הביטוי הזה. זה נובע ישירות מההגדרה. הוכחנו
את זה.

דוגמה: $f(x) = e^x$ $f^{(k)}(0) = 1$ $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

כאן יש לדעת. מה שרשמו הוא הפולינום טיילור $a=0$

$$T_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

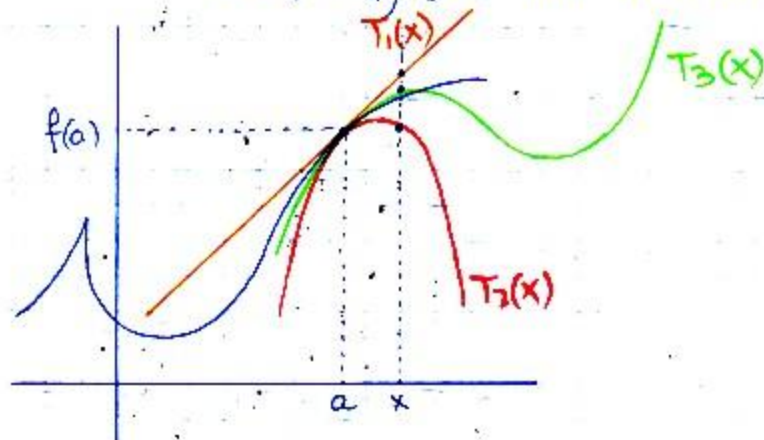
ומה גם נתלבס $a=1$? (קהל פולינום אחר)

$$T_{n,1}(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \dots + \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ כן $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

ולפי ההגדרות מהשיעור הקודם $R_n(x) = o((x-a)^n)$

$R_n(x)$ הוא היתר אף התרונה $(x-a)^n$



החיסוק של f ערך הפונקציה ב- x עי פולינום טיילור הוא סביב a אנוני קרובים a אם מתרחקים a נצטק לקחת פולינום מסדר גבוה מאוד מאוד...

(נסתב) אשפת הפונקציות ונתלבס את הפולינום טיילור מסדר 3 שלהן.

פונקציה

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \sin x$$

$$h(x) = \sinh(x)$$

$$t(x) = \tan x$$

$$T_3(x)$$

$$x$$

$$x - \frac{x^3}{6}$$

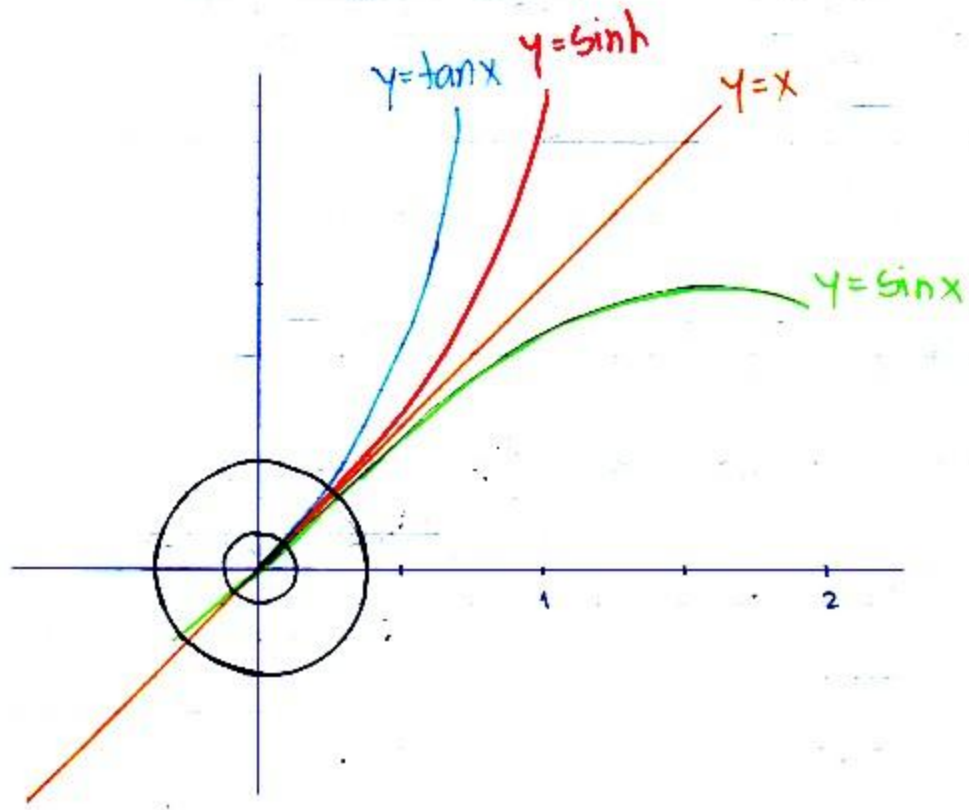
$$x + \frac{x^3}{6}$$

$$x + \frac{2x^3}{6}$$

המה ציר גר 4 הפונקציות העלו



13



האיבר הראשון בפיתוח טיילור של $\frac{1}{1-x}$ הפונקציות הנ"ל הוא x ואכן כל שאנחנו עושים לוח זמן יותר סביב $a=0$ אנחנו רואים שהפונקציות יותר ויותר דומות לו לפי אבר מתרחק את מהלכיה כל שמתרחקים מאשליה הצורה.

דוגמה: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$

נשים לב של אבר $S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ כל (קטן)

$$\frac{S_n(x)}{x^n} = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

כל $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ הוא הפונקציות טיילור של $\frac{1}{1-x}$ עבור $a=0$ הנקודה היא $S_n(x)$

(סתם על) $\frac{1}{1+x}$ ההיבט הנה אכן הקדמה הוא לבקום

x הצבנו $-x$ (צבנו לא x בפונקציות טיילור ונקודת)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \underbrace{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}}_{(*)} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}$$

סביר ל $(*)$ הוא פונקציות טיילור של $\frac{1}{1-x^2}$ עבור $2n$

בשלב זה הוריה נאמר צריך להראות שהיא מתאמת

$$\frac{\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}}{x^{2n}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

ובדיוק דומה:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

דוגמה: (חשב את הפולינום סילור של) $f(x) = \ln(1+x)$ סביב $a=0$
(חשב לשם כך את הפולינום)

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-2)(-1)(1+x)^{-3}$$

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! (-1)^{n+1} (1+x)^{-n}$$

(3) $a=0$ ונקמה

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

(גזר את זה ונקמה)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n+1} x^{n-1} + R'_n(x)$$

התוצאה בדיוק יש לה שיש לנו פה אופציה של

reverse engineering: כי אם אנחנו יודעים את הפולינום

סילור של הפונקציה אנחנו יכולים להסיק את

הפונקציה, לדוגמה קבוע

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \left\{ \text{שם יבוא} \right\}$$

השאר אינסופי ונקמה

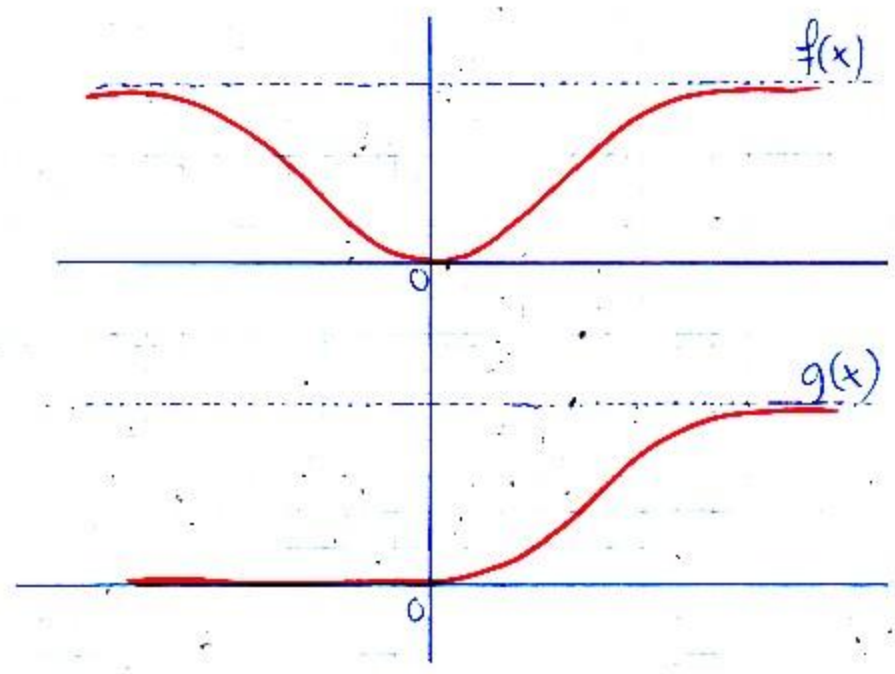
$$\arctan x = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \left\{ \text{שם יבוא} \right\}$$

14

פונקציה שלילית (סמל) $\otimes$ אחת

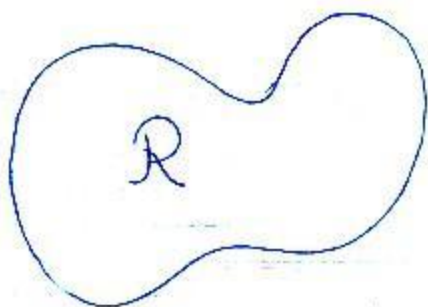
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & 0 < x \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

הגרפים (ראוים רק בלחץ)



אזה פונקציות פתולוגיות אחדים הם גזירות ונגזרתם
זכו וכו', רק שלב $a=0$ על הנהגות שלהן מתאפסות
אבל לא משנה אזה ח נבחר תמיד $T_n(x) = 0$
הנה רק שלמות ב $a=0$ להפנותם טיפוח הוא תמיד
אפס

אינטגרציה



המחיצה: בעזר הטטה באיזור

מה שאנחנו נרצה לעשות זה עם

$$R \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ מידה } \mu$$

שמה"מ את התכונות הבאות:

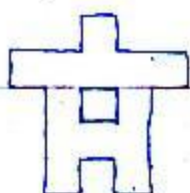
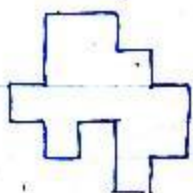
- חיוביות: $0 \leq \mu(R) \in \mathbb{R}$

- אנונימיות: אם $R_1 \subseteq R_2$ אז $\mu(R_1) \leq \mu(R_2)$

- אדיטיביות: אם $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ אז $\mu(R_1 \cup R_2) = \mu(R_1) + \mu(R_2)$

אנחנו רוצים שתהיה לנו איזו מידה, איזה קנה מידה להשוואה.

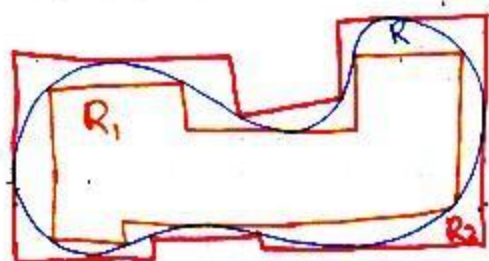
אז לוקחים איזה מן ריבוע קבוע $\square$ וקובעים $\mu(\square) = 1$



זהו אזורי מלבנים. (ומן חתכים)

אם שטחים זי' תאוקה למלבנים צרים וסייכום

הוא זהה לזה שיהיה, רפי שניסחנו אותה, אינה פתירה יש אזורים שלא נוכל לייחס להם מידה כזו, למשל אזורי למלכורים אינה שוויונית - אלא תורים אלא אנחנו (בעבר עם) ראיה שיש להם מידה



$$R_1 \subseteq R \subseteq R_2$$



מאפיין

$$\mu(R_1) \leq \mu(R) \leq \mu(R_2)$$

אז אפשר לעשות הערכה של הטטה

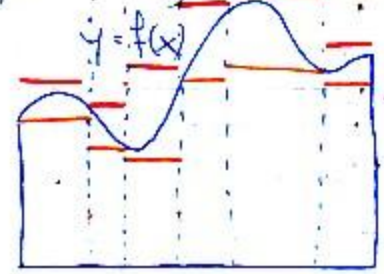
אבל אפשר לזכור את ההערכה טוב יותר



אם המידות של האזורים הנלמנים אנוני וזעים לחשב
אז נחזור דוג (לחילוף השנה) בעצם אנוני מחפשים
חם עליון של המידות והתחומות ותם תחתון של
המידות באזורים.

אם האזור R חסום ידוע, לקימים החם העליון והחם
התחתון. אבל הרי לא תמיד הם שווים.
אזור חסום יקרא שיש לו מידה אם מתקיים עבורו
שיש מספר יחיד שמכיל בין המידות של האזורים לחסומים
אותו ארגז המידות של האזורים לחסומים בו.

אנוני בקלות נזטוק האזורים שנקראים רק



ש-3 צבדים הם מלמנים ומלמלה הם מכל של סיוקציה $f(x)$
ואז א-הוגל (חסום מלמלה ומלמלה
אבל למידה יש סימן. אזורים מכל צד היא נותן להם
מידה חיבור והאזורים מתחת לצד ה- x נותן להם מידה
שלילית

פונקציות מדרגות

הגדרה: תחלקה של הקטע $[a, b]$ הינה תחלקה סדורה

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{יב } 0 -$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

הגדרה: פונקציה φ מדרגות בקטע $[a, b]$ תיקרא פונקציה

מדרגות אם קיימת תחלקה $P = \{x_0, \dots, x_n\}$

וקיימים קבועים $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ יב $0 -$

$$1 \leq i \leq n \quad \varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i$$

ללא אכפת לננו מהו הערכים בהקדמות $x_0, \dots, x_n$ עצמן.

הפונקציה קבועה בתת קטעים פתוחים של $[a, b]$.

נסמן: $S[a, b]$ - קבוצת פונקציות המדרגות בקטע $[a, b]$.

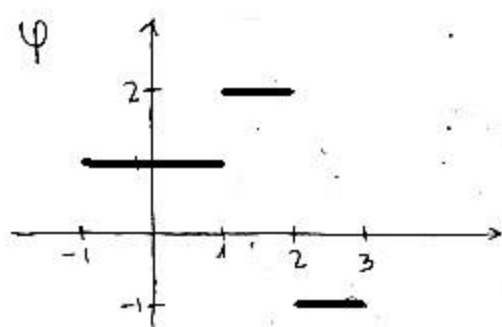
תכונות:

- ① S סגורה תחת סכום ובה הסתגרות $\{ S \text{ סגורה תחת } \}$
- ② S סגורה תחת כפל

טונקציות מדרגה

הי שלפונקציה שמוגדרת בקטע נתון, פונקציה מדרגה חייבת להיות חלוקה של הקטע למקסימום את התחנה המוגדרת של הצורה בשאר שער אחר כל חציית חלוקה היחידה.

הערה: אם φ מוגדרת כפונקציה מדרגה ב- $[a, b]$ ע"י חלוקה P אז היא גם מוגדרת באמצעות חלוקה של $[a, b]$ למקבילת P ע"י הוספת נוסף סוף של איברים



אפשר לייצג את φ שתי חלוקות:

$$P = \{-1, 1, 2, 3\}$$

$$P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

וכמובן עוד חלוקות רבות אחרות

תכונות $S[a, b]$ קבוצת פונקציות המדרגה על $[a, b]$

(1) S סגורה תחת סכום

(2) S סגורה תחת נכס הסקלר

(3) אם $\varphi \in S[a, b]$ ו- $a \leq c < d \leq b$ אז $\varphi|_{[c, d]} \in S[c, d]$

(4) $\varphi \in S[c, d]$ ו- $a \leq c < d \leq b$ אז $\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} 0 & a \leq t < c \\ \varphi(t) & c \leq t \leq d \\ 0 & d < t \leq b \end{cases}$

אז $\varphi \in S[a, b]$

הוכחה

(1) מתקבלת ע"י הסתכלות באיחוד של החלוקות של הפונקציות

(2) טריוויאלי

(3) למעשה ב התכונות הן טריוויאליות

(4)

אנטגראל של פונקציות מדרגיות

תהי $P \in \mathcal{P}[a, b]$ פונקציה מדרגית, התחלקה P

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i - 1 \quad P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

האנטגראל $I\varphi$ של φ מוגדר כך

$$I\varphi = c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_{n-1})$$

בהגדרה הזאת אנו משתמשים במידע שיש לנו על הפונקציה.

הן בתחילתה והן בתחילתה של P מדרגית. תהי P פונקציה מדרגית, φ של P מדרגית. הקודם

$$I\varphi = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2}) + 2 \cdot (\frac{1}{2} - 1) + (-1) \cdot (2 - 1) = 3$$

הערה: $I\varphi$ אינו תלוי בקצב φ באיברי התחלקה - שכן בכל אופן התחלקה צויה בהגדרה.

למה: ערך האנטגראל אינו תלוי בתחילתה.

הוכחה: תהי P' תחלקה של P מדרגית. P' מדרגית. x'

אחד. אז $1 \leq j \leq n$. יחיד. רק $x_{j-1} < x' < x_j$

כאמור $c_j(x_j - x_{j-1}) = c_j(x' - x_{j-1}) + c_j(x_j - x')$

$$c_j(x_j - x_{j-1}) = c_j(x' - x_{j-1}) + c_j(x_j - x')$$

ולפי ההגדרה $P = \{a = x_0 < \dots < x_{j-1} < x' < x_j < \dots < x_n = b\}$

$$I\varphi = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \neq j} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_j(x_{j-1} - x_j) =$$

$$= \sum_{i \neq j} c_i(x_i - x_{i-1}) + c_j(x' - x_{j-1}) + c_j(x_j - x') = I\varphi$$

תהי P ו- Q תחלקות של הקטע $[a, b]$ באמצעות

$P \cup Q$ תהי פונקציה מדרגית. $P \cup Q$ תהי פונקציה מדרגית.

התחלקה של הקטע $[a, b]$ אשר מדרגית. $P \cup Q$ תהי פונקציה מדרגית.

P ו- Q איברי $P \cup Q$ מדרגית. $P \cup Q$ תהי פונקציה מדרגית.

א- Q תהי תחלקה של מדרגית. $P \cup Q$ תהי פונקציה מדרגית.

אנטגראל. $I\varphi = I\varphi_P + I\varphi_Q = I\varphi_{P \cup Q}$



$$I\varphi_P + I\varphi_Q = I\varphi_{P \cup Q}$$

(17)

$k \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ יהיו תכונות:

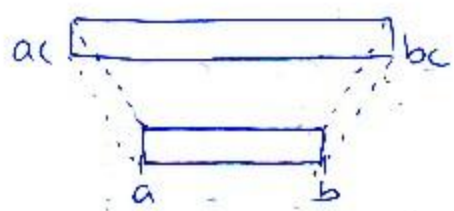
- (1) $(\text{חיוביות}) \quad 0 \leq I\varphi \iff 0 \leq \varphi$
- (2) $(\text{אינוסוקיות}) \quad I\varphi \leq I\psi \iff \varphi \leq \psi$
- (3) $(\text{סלינאריות}) \quad \begin{cases} I(\varphi + \psi) = I\varphi + I\psi \\ I(k\varphi) = k(I\varphi) \end{cases}$

(4) $(\text{אדיטיביות}) \quad a < c < b \quad \text{לב} \quad I_{[a,b]}\varphi = I_{[a,c]}\varphi + I_{[c,b]}\varphi$

(5) $(\text{יחידה}) \quad l([a,b]) = I_{[a,b]}1 = b-a$

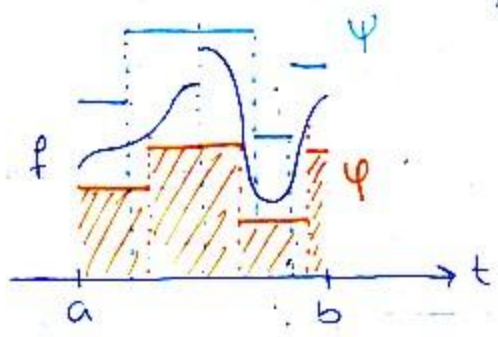
(6) $\text{אם } \psi(t) = \varphi(t-c) \text{ קבוע } c \text{ אז } I_{[a,b]}\varphi = I_{[a+c,b+c]}\psi$

(7) $\text{אם } \psi(t) = \varphi(\frac{t}{c}) \text{ קבוע } c > 0 \text{ אז } I_{[a,b]}\varphi = \frac{1}{c} I_{[ac,bc]}\psi$



הוכחה: ריגוריות

(18) $B = B[a,b]$ יהי קבוצת הפונקציות החסומות ב- $[a,b]$ (כלומר קבוצת הפונקציות הריבועיות) $f \in B$



לפונקציות המוגדרות על $[a,b]$ נחשב את Φ_f ו- Ψ_f ונראה ש- $\Phi_f \leq \Psi_f$ וכל $\varphi \in \mathcal{S}$ המקיים $\varphi \leq f$ הוא חסום על ידי Φ_f וכל $\psi \in \mathcal{S}$ המקיים $f \leq \psi$ הוא חסום על ידי Ψ_f .

$$\Phi_f[a,b] = \{ I\varphi \mid \varphi \in \mathcal{S} \wedge \varphi \leq f \}$$

$$\Psi_f[a,b] = \{ I\psi \mid \psi \in \mathcal{S} \wedge f \leq \psi \}$$

2. נראה ש- $\Phi_f \leq \Psi_f$ (כלומר Φ_f חסום על ידי Ψ_f)

מאקסמום ומינימום של פונקציה רציפה (בניקיון)
 חוק הממוקציות יק"א של מספר אחד מבידול בין
 הקירובים ותלך ל"א יק"א לא. זה מה שמתבדל בין
 הפונקציות האנטיגורדיות לפונקציות הלא אנטיגורדיות.

הערה:

$$(1) \quad \emptyset \neq \Phi_f[a,b] \subseteq \Psi_f[a,b] \neq \emptyset$$

הקואר בגדל החסימות של f .

הערה: $f \in B[a,b]$ תקרא אנטיגורדיות ב $[a,b]$

אנ"ה ק"ם מספר I אחד ויחיד אשר מקיים

$$I_\varphi \leq I \leq I_\psi$$

לכל $\varphi, \psi \in S$ כך ש $\varphi \leq f \leq \psi$.

במקרה זה $(\mathbb{R})$ או $I = \int_a^b f$ נקרא $f \in \mathcal{R}$
 ($\mathcal{R}$ ע"ל $\mathbb{R}$ - פונקציות אנטיגורדיות $\mathbb{R}$ יחיד)

ניכר הלאה: הוסיסיות אם $\emptyset \neq L \leq U \neq \emptyset$ התנאים הבאים
 שלקלים:

- קיים I יחיד כך ש $l \leq I \leq u$

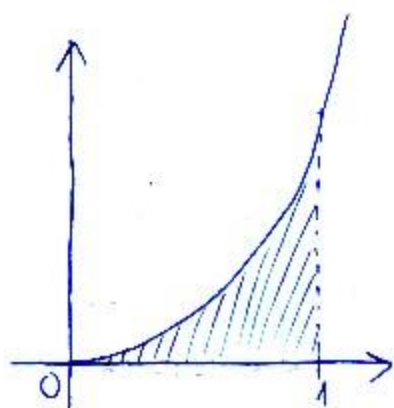
- לכל $\varepsilon > 0$ קיים l, u כך ש $u - l < \varepsilon$

$$\inf U = \sup L$$

אם $f \in \mathcal{R}$ ו $f \in \mathcal{R}$ אז $\int_a^b f = \int_a^b f$ ו $f \in \mathcal{R}$

$$(3) \quad \exists \varphi \leq f \leq \psi \quad (\varphi, \psi \in S) \quad I_\psi - I_\varphi < \varepsilon$$

$$\sup \Phi f = \int_a^b f = \inf \Psi f$$



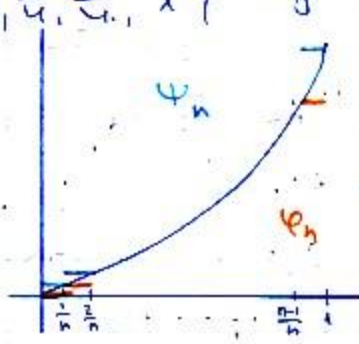
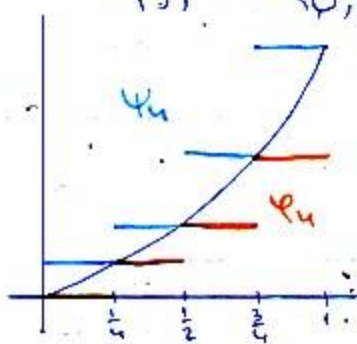
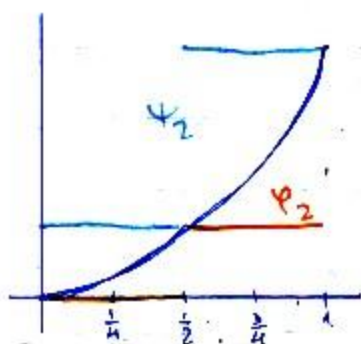
נתונה פונקציה ריבועית

תהי $f(t) = t^2$ ב- $[0, 1]$
נחשב את השטח של המשולש הירוק.
שנוצר.

(א) נראה ש $f(t)$ אינטגרלית
ב- $[0, 1]$

(ב) נחשב את האינטגרל - שזה
עצמאי אפילו!

אם נחשוב את $f(t)$ אלמנטרית ואלמנטרית בעזרת
החלוקה $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, אחר $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$
אחר $\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$ וכו'



$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

$$I\psi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{2^2} \right)$$

$$I\varphi_2 = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1^2}{2^2} \right)$$

$$I\psi_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^2} \right)$$

$$I\varphi_3 = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{3^2} \right)$$

$$I\psi_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right)$$

$$I\varphi_n = \frac{1}{n} \left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right)$$

$$I\psi_n - I\varphi_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

נשים לב ש $I\psi_n - I\varphi_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
לפי ה定理 הבסיסית f אינטגרלית ב- $[0, 1]$
ואם רצי למצוא את $\int f$ (נחשב את האינטגרל) או
לשקדורבים אלמנטרית או של הקירובים אלמנטרית

$$\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

מה שקובץ הוא הנח
בין המקדמים של החלק
הגבוה

זה משווה שלם היוונים ובר ידעו הם ידעו שלם
מתקיים חיבור יב:



הגשמים שונים $\frac{1}{3}$

נכיר לראש רמה פתחים מהמספר הקדמי: פאדנו. חלקה
וצינתי של מספר אי שלם. אחז פאדנו. חלקה ממשי של
מספר אי שלם. ע' קבוצה החלקה הצינתי מאלו ומתחת
זה מהלך דומה לאיך שהפאדנו אנטיגרי של פיוקציה
ע' אנטיגרי של פיוקציה מצגה אכל במקרה של החלקה
הפנו ציבים להראות שהפאדנו של הצינתיים מתכסה עם
הממשים. ציב, טענה נגד זה במקרה של האנטיגרי.
לומר אם ψ פונקציה מצגה של להראות של $\psi = I_{[a,b]}$

תרגילים:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{בשמות כלשהו}$$

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \text{בשמות אנוסיה}$$

$$\int_0^1 t = ?$$

$$\int_0^1 t^3 = ?$$

צ'יק מלחין אותנו לעין בספר
Apostol ו. calculus

$$\int_0^1 t^n = ?$$

מה זה $\int_0^c t^2$ עבור $0 < c$ שלילי?

נזכור מה שלמדנו קודם: פונקציה ψ מוגדרת על $[a, b]$ כך ש- $\psi(t) = \psi(\frac{t}{c})$ אם $\int_a^b \psi = c \int_a^b \psi$ (פונקציה מוגדרת)

אם נגדיר $g(t) = f(\frac{t}{c})$ עבור $0 \leq t \leq c$ אז $0 \leq \frac{t}{c} \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^c g = c \int_0^1 f = c \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \int_0^c g = \int_0^c (\frac{t}{c})^2 = \int_0^c \frac{1}{c^2} t^2 =$$

$$= \frac{1}{c^2} \int_0^c t^2 \Rightarrow c \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{c^2} \int_0^c t^2$$

$$\Rightarrow \int_0^c t^2 = \frac{c^3}{3}$$

מה זה קטע $[a, b]$ שלילי?

$$\int_a^b t^2 = \int_0^b t^2 - \int_0^a t^2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

נניח שיש פונקציה τ מוגדרת על $[a, b]$ ונניח:

אם $\tau \in \mathcal{S}[a, b]$ אז $\int_a^b \tau = I_{[a, b]} \tau$

(נסתכל על $\{I\psi : \psi \leq \tau\} = \Phi$ ו- $I\tau \in \Phi$)

$$\Rightarrow I\tau \leq \sup \{I\psi : \psi \leq \tau\}$$

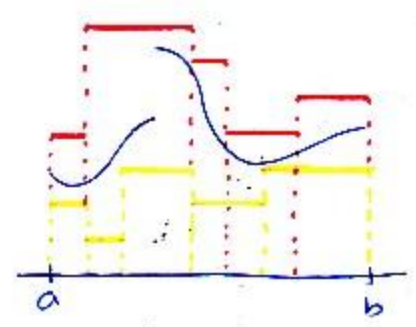
$$\inf \{I\psi : \tau \leq \psi\} \leq I\tau$$

אבל $\sup \{I\psi : \psi \leq \tau\} \leq \inf \{I\psi : \tau \leq \psi\}$

ואז $\int_a^b \tau = I\tau$! τ אינטגרלית



הסתגנו ל התיזה הפונקציות והתחבורה B
אם $f \in B[a,b]$ אז התפרקו את האינטגרל ל



הכל תכונות של פונקציות מפרקות $\Phi_f \leq \Psi_f$

ראש $\Phi_f = \{ I\varphi : \varphi \leq f \}$

$\Psi_f = \{ I\psi : f \leq \psi \}$

לא להתבלבל: Φ_f, Ψ_f הן קבוצות של מספרים, ואילו $I\varphi, I\psi$ הן פונקציות. זהו שוויון בין פונקציות.

כך $I(f) = \sup \Phi_f = \inf \Psi_f = \bar{I}(f)$

הגדרנו מה זה פונקציה אנטיגרלונית. זה צריך להתקיים תנאי קצר, חסר, וזה:

(השקולה)
 $f \in R[a,b]$ אם מתקיימת אחת מהתכונות הבאות:

(i) $I(f) = \sup \Phi_f = \inf \Psi_f = \bar{I}(f)$

(ii) קיים $I \in \mathbb{R}$ אחד ויחיד כך $I\varphi \leq I \leq I\psi$

כאן $\varphi, \psi \in \mathcal{S}[a,b]$ $\varphi \leq f \leq \psi$

(iii) לכל $0 < \varepsilon < 1$ קיימות $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ כך $\varphi \leq f \leq \psi$ ו- $I\psi - I\varphi < \varepsilon$

(iv) קיימות $(\varphi_n), (\psi_n)$ ב- $\mathcal{S}$ כך $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ ו- $I\psi_n - I\varphi_n \rightarrow 0$

(v) קיימות $(\varphi_n), (\psi_n)$ כך $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} I\varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I\psi_n$

התכונות
המשוליות

בתנאים אלה מתקיים

$$\underline{I}(f) = \sup \Phi f = I = \inf \Psi f = \bar{I}(f)$$

יתר על כן, לכל $(\varphi_n), (\psi_n)$ כדל $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ ורק $\mathcal{S}$ -

$$I\psi_n - I\varphi_n \rightarrow 0 \quad \text{מתקיים}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I\varphi_n = I = \lim_{n \rightarrow \infty} I\psi_n$$

$$I = \int_a^b f \quad \text{מסומן}$$

ראינו $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ - כל $\mathcal{S}$ (ראה) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ -
כל $\mathcal{S}$ (ראה) $\mathcal{S}$ פונקציה חסומה. כל $\mathcal{S}$ אינטגרלית:

נסתם $\mathcal{D}$ פונקציה דירטה $\mathcal{D} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{R}$

$$D(t) = \begin{cases} 1 & t \in \mathbb{Q} \\ 0 & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

תהי $\varphi \in \mathcal{S}$ ורק $\varphi \leq D$ בהיכלי רעיון האי-רציונלים

$$\underline{I}(D) \leq 0 \iff \varphi \leq 0$$

תהי $\varphi \in \mathcal{S}$ ורק $D \leq \varphi$ בהיכלי רעיון הרציונלים

$$1 \leq \bar{I}(D) \iff 1 \leq \varphi \quad \mathcal{R} \text{ -}$$

$$\underline{I}(D) = \bar{I}(D) \iff \text{כל ירחי לרבות } \mathcal{S}$$

משפט: $\mathcal{C}[a,b] \subseteq \mathcal{R}[a,b]$ (כל פונקציה רציפה בקטע סגור אינטגרלית)

הוכחה: תהי $f \in \mathcal{C}[a,b]$ $\iff f$ רציפה במ"ל $[a,b]$

(ראה לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $\varphi, \psi \in \mathcal{S}[a,b]$ ורק $\varphi \leq f \leq \psi$)

$$I\psi - I\varphi < \varepsilon \quad \text{יהי } 0 < \varepsilon$$

f רציפה במ"ל $[a,b]$ $\iff$ לכל $\delta > 0$ ורק δ שלם

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{אם } x, y \in [a,b] \text{ ו- } |x - y| < \delta$$

תהי $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ חלוקה של $[a,b]$

$$\text{ו- } 1 \leq i \leq n \quad \text{כל } x_i - x_{i-1} < \delta$$

(21)

כעת נגדיר ψ ו- φ (אדיר) $1 \leq i \leq n$ כך

$$M_i := \psi(t) = \max \{ f(t) : x_{i-1} \leq t \leq x_i \} \quad x_{i-1} < t < x_i$$

$$\psi(x_i) = f(x_i) = \psi(x_i)$$

$$m_i := \varphi(t) = \min \{ f(t) : x_{i-1} \leq t \leq x_i \} \quad x_{i-1} < t < x_i$$

זה אפשרי כי f רציפה ב- $[a, b]$ רק רציפה בה
התקטן של $[a, b]$ אכן ממלא תנאים והקטנות
נשים לב ל- $\varphi \leq f \leq \psi$ (חשוב)

$$\begin{aligned} I\psi - I\varphi &= \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$



משפט $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ (ממוסמך)

הוכחה: בהיכ נניח ש- f פונה ב- $[a, b]$ (אכן)
העברון צריך להוכיח קדמה את ההערכות של קאנטורצ'ה
ואז $I\varphi = -I\psi$ ולכן אכן f יוצרת (סתם) של f -
שנאמר (חשוב) קרה P חסומה של $[a, b]$ חלקה

$$1 \leq i \leq n \quad x_i = x_0 + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0$$

אדיר ψ, φ רק

$$\psi(t) = f(x_i) \quad x_{i-1} < t < x_i$$

$$\psi(x_i) = f(x_i) = \psi(x_i)$$

$$\varphi(t) = f(x_{i-1}) \quad x_{i-1} < t < x_i$$

נשים לב ל- $\varphi \leq f \leq \psi$

$$I\psi - I\varphi = \sum_{i=1}^n \underbrace{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{\text{הפרש}} (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] = (*)$$

בהינתן $\varepsilon > 0$ אם נבחר $\delta k \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon} < \eta$ (*) $< \varepsilon$

☺

תכונות של פונקציות אינטגרליות

כא $k \in \mathbb{R}$ $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ משפטים

- (1) $0 \leq f \iff 0 \leq \int_a^b f$ (ח'וב'א)
- (2) $f \leq g \iff \int_a^b f \leq \int_a^b g$ (אונ'ט'אונ'א)
- (3) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ (ל'נ'א'נ'א)
- (4) $\int_a^b k f = k \int_a^b f$

הוכחה:

(1) מקרה פ'ט'א של (2)

(2) $f \leq g \iff \int_a^b f \leq \int_a^b g$ (אונ'ט'אונ'א)

אזכור: $\Phi f \leq \Psi g$

$\int_a^b f = \sup \Phi f \leq \inf \Psi g = \int_a^b g$

כ'א f אינט'ב'ל'א $\leftarrow$ כ'א g אינט'ב'ל'א

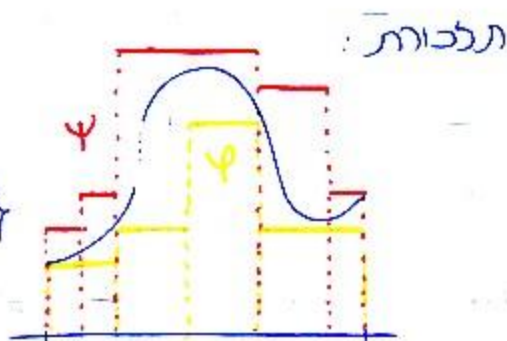
(3) $\Phi f + \Phi g \subseteq \Phi (f+g)$ (ל'נ'א'נ'א)

$\Psi f + \Psi g \subseteq \Psi (f+g)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g &= \sup \Phi f + \sup \Phi g = \sup (\Phi f + \Phi g) \leq \\ &\leq \sup (\Phi (f+g)) \leq \inf (\Psi (f+g)) \leq \\ &\leq \inf (\Psi f + \Psi g) = \inf \Psi f + \inf \Psi g = \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g \\ \Rightarrow \int_a^b f + \int_a^b g &= \inf (\Psi (f+g)) = \int_a^b (f+g) \end{aligned}$$

$$\varphi \leq f \leq \psi$$

$$\Phi_f = \{I\varphi : \varphi \leq f\} \leq \Psi = \{I\psi : \psi \geq f\}$$



יש מי קריטריונים להחלטה אם פונקציה f היא אינטגרלית
 כיון. למשל $f \in \mathcal{R}$ אם $\sup \Phi_f = \inf \Psi_f$ אבל לפעמים
 זה קשה לחשב את המספרים האלה. כמו שבספרות היו
 6 מיני קריטריונים להחלטות שלא נתנו לנו בהכרח את
 הפתרון, או כמו שבטורים היו קריטריונים להחלטות שלו נתנו
 לנו את הסכום, גם במקרה של האינטגרל יש קריטריונים
 לאינטגרליות שלו. נותנים את האינטגרל עצמו:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in \mathcal{S} : \varphi \leq f \leq \psi \wedge I\psi - I\varphi < \varepsilon$$

משפט: $k \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{R}$

$$0 \leq \int_a^b f \iff 0 \leq f \quad (1)$$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \iff f \leq g \quad (2)$$

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g) \quad (3)$$

$$k \int_a^b f = \int_a^b (kf) \quad (4)$$

הנחת (המשק)

(4) אם $k=0$ אין מה להוכיח. ערשו יל שני מקרים

אם $k > 0$ נשים לב $k \Phi_f = \Phi_{kf}$ (בגלל תכונות

של פונקציות מדרגות) ואם $k \Psi_f = \Psi_{kf}$ (*)

אם $k < 0$ נשים לב $k \Psi_f = \Phi_{kf}$ וכן $k \Phi_f = \Psi_{kf}$ (**)

$$k \int_a^b f = k \sup \Phi_f \iff \int_a^b kf = \sup \Phi_{kf}, k > 0$$

$$\text{המסקנה הקלה} \quad k \cdot \sup \Phi_f = \sup \Phi_{kf} \quad (*)$$

$$k \cdot \int_a^b f = \int_a^b kf \iff k \cdot \sup \Phi_f = \sup \Phi_{kf} \quad (*)$$

ע k אינטגרלית. כן היו מסיימים את הוכחה

יוצאים מאי. אם נשתמש בהשען אנלוגי עבור הצד השני

$$k \int_a^b f = k \sup \Phi f = \sup k \Phi f = \sup \Phi k f \leq \inf \Psi k f = \inf k \Psi f = k \inf \Psi f = k \int_a^b f$$

אנלוגיהם $k f$ עבור $\sup \Phi k f = \inf \Psi k f$ $\Leftarrow$

$$k \int_a^b f = \int_a^b k f \quad -1$$

הצורה דומה עבור המקרה $k < 0$:

$$k \int_a^b f = k \inf \Psi f = \sup k \Psi f = \sup \Phi k f \leq \inf \Psi k f = \inf k \Phi f = k \sup \Phi f = k \int_a^b f$$

אנלוגיהם $k f$ עבור $\sup \Phi k f = \inf \Psi k f$ $\Leftarrow$

$$k \int_a^b f = \int_a^b k f$$



משפט (אדג'מנט) ידוע $a < c < b$ וכן

$$f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b] \iff f \in \mathcal{R}[a, b]$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{אנלוגיהם}$$

הוכחה: $f \in \mathcal{B}[a, c] \wedge f \in \mathcal{B}[c, b] \iff f \in \mathcal{B}[a, b]$

דבר תכונות של פונקציות אדג'מנט

$$\Phi f[a, c] + \Phi f[c, b] \geq \Phi f[a, b]$$

$$-\Psi f[a, c] + \Psi f[c, b] \geq \Psi f[a, b]$$

ידוע $\varphi_1 \in \mathcal{S}[a, c], \varphi_2 \in \mathcal{S}[c, b]$ כך ש-

$$\varphi_1 \leq f|_{[a, c]}, \quad \varphi_2 \leq f|_{[c, b]}$$

$$\int_a^c \varphi_1 \in \Phi f[a, c], \quad \int_c^b \varphi_2 \in \Phi f[c, b] \quad \text{וכן}$$

נניח למשל ש- $\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$ (אפשר לשנות את האנלוגיהם)

אז $\varphi \in \mathcal{S}[a, b]$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & a \leq t \leq c \\ \varphi_2(t) & c \leq t \leq b \end{cases}$$

עבור $\varphi \leq f$ $\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi_1 + \int_c^b \varphi_2 \leq \int_a^b f$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

דבר פונקציות אדג'מנט

23

$\Phi_f[a,c] + \Phi_f[c,b] \leq \Phi_f[a,b]$ אז

$\Phi_f[a,c] + \Phi_f[c,b] = \Phi_f[a,b]$

$\Psi_f[a,c] + \Psi_f[c,b] = \Psi_f[a,b]$ אז

אז $\sup \Phi_f[a,c] + \sup \Phi_f[c,b] = \sup \Phi_f[a,b]$ אז

$\sup \Phi_f[a,c] + \sup \Phi_f[c,b] = \sup \Phi_f[a,b]$

$\inf \Psi_f[a,b] = \inf \Psi_f[a,c] + \inf \Psi_f[c,b]$

... אז

$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \sup \Phi_f[a,b] = \inf \Psi_f[a,b] \Leftrightarrow$

$\sup \Phi_f[a,c] + \sup \Phi_f[c,b] = \inf \Psi_f[a,c] + \inf \Psi_f[c,b]$

$a \leq b$ אז
 $c \leq d$ אז
 $a+c = b+d$ אז
 $a=b, c=d$ אז

$\sup \Phi_f[a,c] \leq \inf \Psi_f[a,c]$

$\sup \Phi_f[c,b] \leq \inf \Psi_f[c,b]$

אז $\sup \Phi_f[a,c] = \inf \Psi_f[a,c]$ $\wedge$ $\sup \Phi_f[c,b] = \inf \Psi_f[c,b]$

$\sup \Phi_f[a,c] = \inf \Psi_f[a,c] \wedge \sup \Phi_f[c,b] = \inf \Psi_f[c,b]$

$f \in \mathcal{R}[c,b], f \in \mathcal{R}[a,c] \Leftrightarrow$



$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

אז

$f \in \mathcal{R}[c,d], a \leq c < d \leq b$ אז $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אז

אז $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אז $f \in \mathcal{R}[c,b]$ אז

$f \in \mathcal{R}[c,b] \wedge f \in \mathcal{R}[a,c]$

$f \in \mathcal{R}[d,b] \wedge f \in \mathcal{R}[c,d]$

אז: $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אז $f \in \mathcal{R}[c,b]$ אז

אז $f \in \mathcal{R}[c,b]$ אז $f \in \mathcal{R}[c,d]$ אז

אז $f \in \mathcal{R}[c,d]$ אז $f \in \mathcal{R}[d,b]$ אז

$f \in \mathcal{R}[a,b]$

אז: $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אז $f \in \mathcal{R}[a,c]$ אז

$\int_a^{b+c} f = \int_a^b f + \int_b^{b+c} f$ $\wedge g \in \mathcal{R}[a+c, b+c]$ אז $g(t) = f(t-c)$

הצורה דומה, אם $c > 0$ ו- $f(\frac{t}{c}) = g(t)$ אז $\int_a^b f(\frac{t}{c}) dt = \int_{ac}^{bc} g(t) dt$ ו- $g \in R[a, b]$

ביום חמישי נורה משפט שהורחטו אנוי הרי
מסברת בתוך הכל- משפט על הרבה של
פונקציה רציפה עם פונקציה אינטגרלית.
כדאי לבקש מאת הרשאותי ה- אשט

משפט יחסי: f חסומה ב- $[a, b]$ ואינטגרליות ב- $[a, b]$ נובעת מאי-
 $[c, d]$ כאשר $a < c < d < b$ אז f אינטגרליות ב- $[a, b]$.

הוכחה: מספיק להראות שלם $0 < \epsilon$ ק"מור $\psi \leq f \leq \varphi$
 $\psi, \varphi \in \mathcal{S}[a, b]$ (ורפואה קבועה $0 < \epsilon$) רק ב-

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \epsilon$$

בהנחת $\epsilon < \epsilon$ שלם $a < c < d < b$ ניתן למצוא

$$\psi|_{[c, d]} = \varphi|_{[c, d]} \quad \text{רק ב-} [c, d] \quad \text{ל-} \epsilon$$

(כ- f אינטגרליות ב- $[c, d]$)

ניתן להרחיב את ψ, φ באופן הבא:

$$\psi|_{[a, c]} := M =: \varphi|_{[a, c]}$$

$$\psi|_{[d, b]} := m =: \varphi|_{[d, b]}$$

כאשר $m \leq f \leq M$ ב- $[a, b]$. להאפשר כ- f חסומה

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^c (\psi - \varphi) + \int_c^d (\psi - \varphi) + \int_d^b (\psi - \varphi) <$$

$$< (M - m)(c - a) + \epsilon + (M - m)(b - d)$$

בחר מספיק קטן d ו- c כך ש-

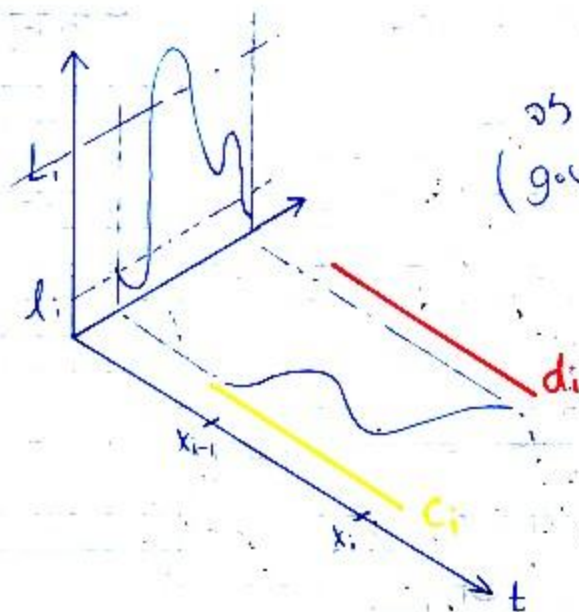
$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < 3\epsilon \quad \Leftarrow$$



מסקנות:
 - אם $f \in \mathcal{R}[a, b]$ חסומה ב- $[a, b]$ ורציפה ב- (a, b) אז $f \in \mathcal{R}[a, b]$
 - אם f רציפה למקוטעין ב- $[a, b]$ (חסומה יש חלקה)
 ספיק שלם חלק שלם f רציפה $\Leftarrow f$ חסומה אז $f \in \mathcal{R}[a, b]$

- אם f חסומה ומקוטענת ב- $[a, b]$ אז $f \in \mathcal{R}[a, b]$

משפט: תהי f אינטגרלית ב- $[a,b]$ ומקיימת $m \leq f \leq M$. תהי $g: [m,M] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אזי $h := g \circ f$ אינטגרלית ב- $[a,b]$.
 נוחת: g רציפה ב- $[m,M]$ אכן רציפה ב- a .
 בהינתן $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $s, t \in [m,M]$ אם $|s-t| < \delta$ אז $|g(s)-g(t)| < \varepsilon$.



(ההפצה נעשה היא שאם $\psi \leq f \leq \varphi$ לא בהכרח אומר ש $g \circ \psi \leq g \circ f \leq g \circ \varphi$)

יהיו $\varphi, \psi \in \mathcal{B}[a,b]$ כך ש $\psi \leq f \leq \varphi$. ניקח $\mathcal{P} = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ אותה תלכדה אותם n נקודות.

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i, \quad \psi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv d_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\varphi(x_i) = f(x_i) = \psi(x_i)$$

φ, ψ (תצור) שתי פונקציות מדרגות $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $n \geq 0$

$$L_i = \varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = \max \{g(t) : c_i \leq t \leq d_i\}$$

$$l_i = \psi|_{(x_{i-1}, x_i)} = \min \{g(t) : c_i \leq t \leq d_i\}$$

בהינתן n נקודות $a \leq c_i \leq d_i \leq M$ אחרת נבחר את תחום φ, ψ ונשים לב ש $\varphi \leq f \leq \psi$ (ההפרה של g)

אם $d_i - c_i < \delta$ אז $L_i - l_i < \varepsilon$ אחרת היה מקיים $\delta \leq d_i - c_i$ אז $\delta \leq d_i - c_i$

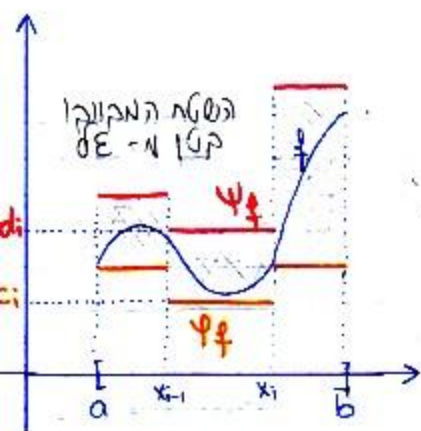
$$(x) = \sum_{i \in B} \Delta x_i + \sum_{i \in A} \Delta x_i$$

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (d_i - c_i) \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (d_i - c_i) \Delta x_i = \int_a^b (\varphi - \psi) < \delta \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in B} \Delta x_i < \varepsilon$$

משפט: $f \in R[a,b]$ ו- $g \in C[m,M]$ $m \leq f \leq M$ אז
 $R[a,b] \ni h = g \circ f$

הוכחה (שנייה): יהי $0 < \varepsilon$. נבחר $\delta > 0$ כך ש- $\int_a^b (\psi_h - \psi_h) < C\varepsilon$ (לדבר 0 < C < 1).
 g רציפה בג' $[m, M]$ כך שדבור ε זה קיים $\delta > 0$
 כך ש- $\forall s, t \in [m, M] \quad |s - t| < \delta \Rightarrow |g(s) - g(t)| < \varepsilon$
 $f \in R[a,b]$ אזי קיימת $\psi_f \leq f \leq \psi_f$ כך
 ש- $\int_a^b (\psi_f - \psi_f) < \delta$ (זה נראה קצת fishy אבל זה בסדר כי
 השלב הזה δ כבר נתן וקבוע).



ניתן להניח ש- ψ_f, ψ_f מוצגות באמצעות
 אותה החלוקה $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$
 ומתקיים $\psi_f|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i \leq d_i = \psi_f|_{(x_{i-1}, x_i)}$
 בהכרח ניתן להניח ש- $m \leq c_i \leq d_i \leq M$
 אם $n \geq 1$ אזי אחת נרחיב את תחום
 ההגדרה של g ברציפות והאופן קבוע

הקצוות כך שהתכונה הנ"ל תתקיים - בואו יהיה δ ישתנה
 יהיו $\psi_h, \psi_h \in S[a,b]$ מוגדרות בעזרת אותה החלוקה P :

$$\psi_h|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv \max\{g(t) : c_i \leq t \leq d_i\} = L_i$$

$$\psi_h|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv \min\{g(t) : c_i \leq t \leq d_i\} = l_i$$

$$\psi_h(x_i) = f(x_i) = \psi_h(x_i)$$

ברור ש- $\psi_h \leq h \leq \psi_h$ נחשב את האינטגרל:

$$\int_a^b (\psi_h - \psi_h) = \sum_{i=1}^n (L_i - l_i) \Delta x_i$$

אזיר G כך: $i \in G \Leftrightarrow d_i - c_i < \delta$ ואז $L_i - l_i < \varepsilon$

אזיר B כך: $i \in B \Leftrightarrow d_i - c_i \geq \delta$

אז

$$\sum_{i=1}^n (L_i - l_i) \Delta x_i = \sum_{i \in G} (L_i - l_i) \Delta x_i + \sum_{i \in B} (L_i - l_i) \Delta x_i$$

$$\sum_{i \in G} (L_i - l_i) \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i \in G} \Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon [b-a]$$

$$\int_a^b \sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (d_i - c_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (d_i - c_i) \Delta x_i = \int_a^b (\psi_f - \varphi_f) < \delta \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in B} \Delta x_i < \varepsilon$$

רעז

$$\int_a^b (\psi_h - \varphi_h) = \sum_{i=1}^n (L_i - l_i) \Delta x_i = \sum_{i \in G} (L_i - l_i) \Delta x_i + \sum_{i \in B} (L_i - l_i) \Delta x_i \leq$$

$$\leq \varepsilon (b-a) + (L-l) \varepsilon = \varepsilon (b-a + L-l)$$

$$l = \min \{ g(t) : m \leq t \leq M \}$$

רעז

$$L = \max \{ g(t) : m \leq t \leq M \}$$

☺) רעז

רעז

רעז
רעז
רעז

$$f^2 \in R[a,b]$$

וכ

$$f, g \in R[a,b].$$

$$|f| \in R[a,b]$$

$$f \cdot g \in R[a,b]$$

$$\text{וכ } m < 0 \text{ ו } M < 0 \rightarrow m \leq g \leq M \text{ וכ}$$

$$\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in R[a,b]$$

$$i(t) = \frac{1}{t}, v(t) = |v|, s(t) = t^2 \quad \text{הורחב: רעז}$$

$$f^2 = s \circ f$$

רעז

$$|f| = v \circ f$$

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

$$\frac{1}{g} = i \circ g$$

☺)

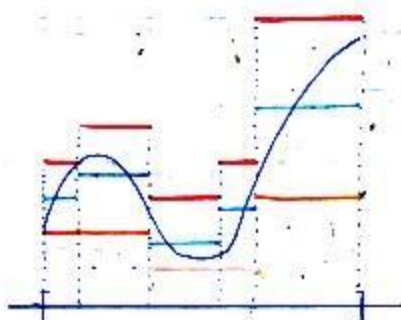
סכום רימן

אנחנו רוצים את נוסח האינטגרל לפי המסורת היוונית - השיטה הישנה.
 אבל התורה נוסחה את שאלת רימן - מתמטיקאי גרמני - והוא פיתח
 את הנושא הזה שנקרא קרייז.

הוא לא לקח פונקציה מציאותית אלא הפכים. הוא לקח
 לקח תחלקה של התחום, אז פיצה את הפונקציה בכל תת-קטע ולקח
 הפיזור האולי בנייה פונקציה מציאותית.

= שיטה ישנה

- שיטה חדשה



זה פתח פתח לחשיבה חדשה: נותן לחלק את התחום הראשי
 בכוחי שהתחלקת תחלקה אם נחלק את האינטגרל של = התוצאה או
 תהיה תחלקה מהתחלקה של - כל שנעזר את התחלקה כנראה
 זה גם מהלך מהלך יתקבל: זה אולי

תחלק מהלך גלוי של האינטגרל הוא ה $\sup$ של $\inf$ - זה $\sup$
 של $\inf$ ראשי $\sup = \inf$ יש בתורה מקום רק למספר אחד,
 והוא הוא האינטגרל. אז האחר בפועל תחלקה קטנה. זה.
 בין $\sup$ $\inf$ -

המחלקה תהי P מציאות: $[a, b]$ ותהי $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
 תחלקה של $[a, b]$. (כנה בשם **סכום רימן**) של P עבור P
 סכום מציאות $S = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$ כאשר $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$

$$L(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \quad \text{כמה גדול התחלקה}$$

הצגה: f תוכנה אנטימורפית לפי רמון אם קיים מספר $I \in \mathbb{R}$
 כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta < 1$ כך שלכל סכום רמון S של f
 עבור חלוקה P של $[a, b]$ אם $\delta < \rho(P) < 1$ מתקיים
 $|S - I| < \varepsilon$

משפט: אם f אנטימורפית לפי רמון ה $[a, b]$ אז קיים
 $I \in \mathbb{R}$ אחד ויחיד אשר מתקיים את ההצגה
 $I = \int_a^b f(x) dx$ (מסו)

הוכחה: יש שלמה הסיוע ה-1 ו-2 באצו סמון פס לא שלמה
הצגה: בגז' יש לנו 3 סיועים: I, I_1, I_2 ו- I_1, I_2
 1. $I_1 = I$ ו- $I_2 = I$
 2. $I_1 = I_2$ ו- $I_1 = I_2$
 3. $I_1 = I_2$ ו- $I_1 = I_2$
 בהמשך נראה שההצגה של אנטימורפיות לפי רמון שקטל אהצגה
 הקודמת של אנטימורפיות.

הוכחה: יהיו $I, I' \in \mathbb{R}$ שני מספרים בהצגה
 הנתונה. $\varepsilon > 0$
 לפי סיוע 1 יש לנו $\delta < 1$ כך שלכל סכום רמון S של f
 עבור חלוקה P אם $\delta < \rho(P) < 1$ מתקיים
 $|S - I| < \varepsilon$ ו- $|S - I'| < \varepsilon$
 אז $|I - I'| < 2\varepsilon$
 מכאן $|I - I'| < 2\varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$
 לכן $I = I'$

$|I - I'| = |I - S + S - I'| < |I - S| + |S - I'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$
 זה (מון) $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow I = I'$



תכונות f מוגדרת בקטע $[a, b]$. נאמר ש- f אינטגרלית
לפי רימן אם קיים $I \in \mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$
כך שלכל סכום S רימן של f עבור חלוקה P של $[a, b]$
עם פחמטר $\lambda(P) < \delta$ מתקיים $|S - I| < \varepsilon$
אז מסמנים $I = \int_a^b f(x) dx$

הינתנים שני מונחים שונים: אינטגרליות ואינטגרליות
רימן. נראה שלכן זהו זהה, והוא, אדרבא - $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$

בריכוז קלוי:

תהי f מוגדרת בקטע $[a, b]$. f אינטגרלית לפי רימן
ה $[a, b]$ אם ורק אם $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $\varepsilon < |S - S'|$
עם S, S' סכומי רימן של f עבור חלוקה P, P' בהתאמה
כך ש- $\lambda(P), \lambda(P') < \delta$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- f אינטגרלית. בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $\delta > 0$
שמתאים ש- $|S - \int_a^b f(x) dx| < \varepsilon/2$ עם S סכום רימן של f
עבור חלוקה P עם פחמטר $\lambda(P) < \delta$. יהי S' סכום
כר"ס אז

$$|S - S'| \leq |S - \int_a^b f(x) dx| + |S' - \int_a^b f(x) dx| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Rightarrow$) נניח שהריכוז קלוי מתקיים. נבנה סדרה של חלוקות P_n עם
פחמטרים $\lambda(P_n) = \delta_n = \frac{1}{n}$ וסכומי רימן S_n של f עבור אותן
החלוקות בהתאם.

נסתן (S_n) סדרת קלוי יהי $\varepsilon > 0$ יהי $\delta > 0$ שמתאים
לפי הקריטריון. יהי $N \in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{N} < \delta$. אז אם $N < n \in \mathbb{N}$
אז $\delta_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$. לכן עבור $N < m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים
 $|S_n - S_m| < \varepsilon$ (לפי הנתון). לכן (S_n) מתכנסת ויהי
 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$$I = \int_a^b f(x) dx - \epsilon \quad (\text{ראה})$$

יהי $\epsilon > 0$ ויהי $\delta > 0$ נתאים לו ע"פ הקירוב. (קח $n \in \mathbb{N}$)
 מסוים אשר מקיים בז'אנז את שני התנאים הבאים:

$$(i) \quad n \text{ מספיק גדול רק ל-} |S_n - I| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$(ii) \quad \delta < \lambda(P_n) \text{ ואז } |S - S_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

אזי לכל S סכום רימן של f עבור חלוקה P עם פחות מ- n מקיים $0 < \delta$

$$|S - I| \leq |S - S_n| + |S_n - I| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$



דוגמה

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & t = a \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(1) תהי φ מוגדרת ב- $[a, b]$
 $a \leq x \leq b$ (נתון מראש)

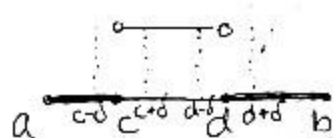


לכל $\epsilon > 0$ יו"פ S סכום רימן של φ
 $0 \leq S \leq 2\delta$

בהנחת $\epsilon > 0$ (בחר $\delta < \epsilon/2$). אזי לכל S סכום רימן של φ
 עבור חלוקה עם פחות מ- $\lambda(P) < \delta$ וקח ל-

$$|S - 0| < \epsilon$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx = 0 \quad \text{ואחרים } \Leftarrow \varphi \text{ איננה פונקציית רימן}$$



(2) יהיו $a < c < d < b$. מוגדרת

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in (c, d) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ב- } [a, b]$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx = d - c \quad (\text{ראה ל-})$$

לכל $\epsilon > 0$ S סכום רימן של φ מקיים

$$(d-c) - 2\delta \leq S \leq (d-c) + 2\delta$$

$$\Rightarrow |S - (d-c)| \leq 2\delta$$

בהינתן $0 < \epsilon < \frac{\epsilon}{2}$ נבחר δ ונאמר S סכום
רימן של φ עבור חלוקה P עם פרמטר קטן מ- δ
ונקבל $|S - (d-c)| < \epsilon$

משפט: אם f, g אינטגרליות רימן ב- $[a, b]$
ו- $c \in \mathbb{R}$ אז

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f+g)(x) dx$$

$$c \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (cf)(x) dx$$

לומר האנטגרל של כמות הוא פונקציה מ- $\mathbb{R}$ למרחב
הפונקציות האינטגרליות. $\mathbb{R}$ -ו. הוכחה: תיבאר (זהו דבר ממש)

$$S_{f+g} = (f+g)(t_1) \Delta x_1 + \dots + (f+g)(t_n) \Delta x_n =$$

$$= [f(t_1) \Delta x_1 + \dots + f(t_n) \Delta x_n] + [g(t_1) \Delta x_1 + \dots + g(t_n) \Delta x_n] = S_f + S_g$$

זהו אם S_f קרוב לאינטגרל של f ו- S_g קרוב
לאינטגרל של g אז נקח את הפרמטר המשותף וזה
יזל האופן דומה עבור מרחב הסקלר
בספר של Rosenlicht יש פיק (שלאו ש) אינטגרציה

משפט: אם $\varphi \in \mathcal{E}[a, b]$ אז φ אינטגרלית רימן
ב- $[a, b]$ ומתקיים

$$\int_a^b \varphi(x) dx = I\varphi = \int_a^b \varphi$$

הוכחה: נניח ש- φ מתפרק במצבים החלוקה P
ומתקיים $\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i$

(לדבר $\varphi_i \in \mathcal{E}[a, b]$ האופן הבא:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} c_i & t \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & t \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

הפונקציה $\psi = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ מתאפסת חוץ מהמספר סופי של נקודות בקטע $[a, b]$ (הנקודות הכולקיות יורו להיות שאינה מתאפסת). לכן היא ניתנת לרציפה בסגור של הפונקציות מדימה (1). אלה פונקציות אנטי-רדיוס והאינטגרל שלהן מתאפס

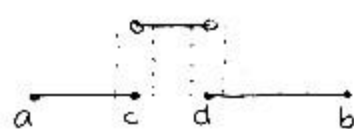
לכן $\psi = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ אינטגרליות לפי רימן ולפי האינארווה האינטגרל מתאפס אלו אם $\sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ אנטי-רדיוס רימן כי זה צריך לעמוד של פונקציות מדימה (2) לכן האינארווה

$$0 = \int_a^b \left(\psi - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i \right) dx = \int_a^b \psi dx - \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n c_i \psi_i \right) dx =$$

$$= \int_a^b \psi(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \psi_i(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \psi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \psi_i(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i = I_\psi$$

של (11)



תיקון לסעיף הקודם:

אחריו של $\delta < \epsilon$ לכל סכום רימן S

של ψ מתקיים $(d-c) - \delta \leq S \leq (d-c) + \delta$

אבל זה לא בדיוק נכון. זה נכון רק אם S

שמוקדם של חלוקה P עם פרמטר $\delta < \lambda(P)$.

למה יהיו $g \leq f \leq h$ - g, h אינטגרליות לפי רימן

ב- $[a, b]$. אזי לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך של

$$\int_a^b g(x) dx - \epsilon < S < \int_a^b h(x) dx + \epsilon$$

לכל סכום רימן S של f עבור חלוקה P עם $\delta < \lambda(P)$.

אכן, לכל S' סכום רימן של f

עבור חלוקה עם פרמטר קטן מ- δ .

מתקיים:

$$|S - S'| < \int_a^b (h - g)(x) dx + 2\epsilon$$

הוכחה:

בהנחת $\epsilon < \delta$ יש δ כך שלכל S_h שבה

עם חלוקה שהפרמטר שלה קטן מ- δ מתקיים

$$|S_h - \int_a^b h(x) dx| < \epsilon.$$

קיים $\epsilon_g < \delta$ כך שלכל S_g שבה עם חלוקה שהפרמטר

שלה קטן מ- ϵ_g מתקיים $|S_g - \int_a^b g(x) dx| < \epsilon$.

נבחר δ כזה ש S_h, S_g שבהים מתקיימים שפרמטר

שלהם קטן מ- $\delta = \min(\epsilon_g, \delta_h)$.

$$\int_a^b h(x) dx - \epsilon < S_h < \int_a^b h(x) dx + \epsilon$$

$$\int_a^b g(x) dx - \epsilon < S_g < \int_a^b g(x) dx + \epsilon$$

עבור S_h, S_g סכומי רימן של h, g בהתאמה עבור חלוקה

זה פתור קטן נ-ד.

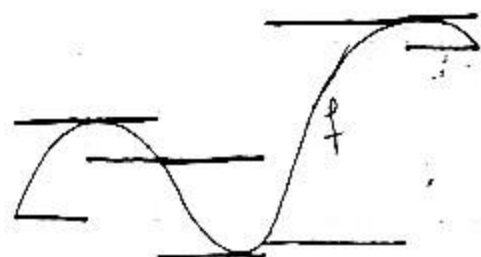
יהי S סכום רימן של f עבור חלוקה מסוימת קטן מ- δ .

$$S_g = \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i \leq S = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n h(t_i) \Delta x_i = S_h$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x) dx - \varepsilon < S_g \leq S \leq S_h < \int_a^b h(x) dx + \varepsilon$$



תהי f חסומה ב $[a, b]$



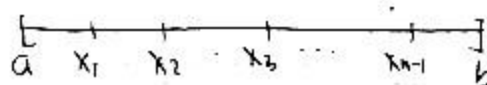
בהינתן חלוקה

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$\psi_P \leq f \leq \Psi_P$$

יהי

מחזורי



$$\Psi_P|_{(x_{i-1}, x_i)} = M_i = \sup \{f(t) : x_{i-1} \leq t \leq x_i\}$$

$$\psi_P(x_i) = f(x_i) = \psi_P(x_i)$$

$$\psi_P|_{(x_{i-1}, x_i)} = m_i = \inf \{f(t) : x_{i-1} \leq t \leq x_i\}$$

ההגדרה הראשונה נכונה כי f חסומה. במקרה של $\sup$ ו- $\inf$.

$$U(P) = I_{\Psi_P} = \int_a^b \Psi_P = \int_a^b \Psi_P(x) dx = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{(הערה)}$$

$$L(P) = I_{\psi_P} = \int_a^b \psi_P = \int_a^b \psi_P(x) dx = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

(קראו סכום Darboux של P)

צביק מבקש שנתאר על החומר לפני שתלמד מהחומר.

"בימים ההם כלמן הלה..."

דברנו על אינטגרציה והצגנו את זה $f \in R[a,b]$ כן הייתה
 עבודה פריק - ע"י קירובים ממוצעים וקירובים למעלה. המספר היחיד
 שבאמצע הוא $\int_a^b f$
 אח"כ הצגנו אינטגרל לפי סכומי רימן. הסתכלנו על חלוקה P של
 $[a,b]$ והצגנו סכום רימן S_P . שצגנו את הפונקציה בין
 נקודות החלוקה ואם $S_P = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$ הסכום הלה קרוב לאינטגרל.
 למה זה טוב? המתמטיקה טובה. שיש דרכים שונות למשל לאותה
 בעיה. חול' מזה מה שטוב בסכומי רימן. הוא שהם מבוססים על
 דגימות של הפונקציה. הקירובים ממוצעים ואמטה הם רעיון
 אמטרי נחמד אבל כלשהם תלם למשל אינטגרל מה יותר טוב.
 מלכתחילה ממש נקודות על הפונקציה?

למה יהיו $g \leq f \leq h$ כאשר g, h אינטגרליות לפי רימן.
 אזי אם $0 < \epsilon$ קיים $0 < \delta$ וק ש-

$$\int_a^b g(x) dx - \epsilon < S < \int_a^b h(x) dx + \epsilon$$

כאן S סכום רימן של f . אם פריט חלוקה P אם $\lambda(P) < \delta$
 בפרט, אם S, S' הנה מתקיים

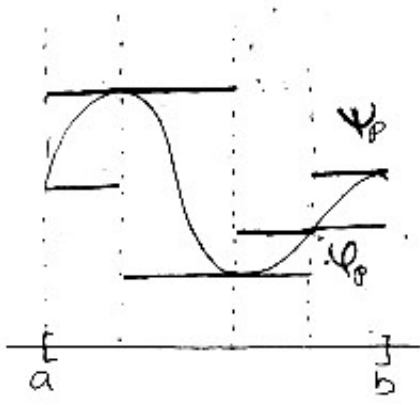
$$|S - S'| < \int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx + 2\epsilon$$

Ⓢ כללי דרבו (Darboux)

בהנחת חלוקה יש את פונק' המפרידה
 הכי קרובה למעלה למטה

$$M_i = \sup \{ f(t); x_{i-1} \leq t \leq x_i \}$$

$$m_i = \inf \{ f(t); x_{i-1} \leq t \leq x_i \}$$



זרשון (מציור) $\varphi_p \leq f \leq \psi_p$ רק

$$\begin{cases} \psi_p|_{(x_{i-1}, x_i)} = M_i \\ \varphi_p(x_i) = f(x_i) = \psi_p(x_i) \\ \varphi_p|_{(x_{i-1}, x_i)} = m_i \end{cases}$$

$\varphi_p, \psi_p \in S[a, b]$ פונקציות מציור

אולי נזכור
סמל רימן
למשך קצר

$$U(p) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b \psi_p = \int_a^b \psi_p(x) dx \quad \text{זרשון}$$

$$L(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b \varphi_p = \int_a^b \varphi_p(x) dx$$

משפט: (לרמן הטנדנציה) f : אינטגרלית לפי רימן ב- $[a, b]$

אז $\epsilon > 0$ קיימת δ אינטגרליות לפי רימן

ב- $[a, b]$ רק ש- $g \leq f \leq h$ וכן

$$\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx < \epsilon$$

הוכחה: אם f אינטגרלית מספק, לבחור $g = f = h$

בכיוון השני, נניח שהתנאי מתקיים ונבחר שקריטצין קושי מתקיים

אם $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ רק ש- $g \leq f \leq h$ וכן $\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx < \epsilon$

אזי עם חלוקה שנויה אך ובלעדיה פרמטר קטן δ , אז

ההפרש בין סכומים אלה קטן δ .

מספיק להראות שלא $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ אשר $\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx < \epsilon$ (ס' > 0)

אם S, S' סכומי רימן של f : עבור חלוקות מהתנאי עם פרמטרים

קטנים מ- δ .

בהיותן $\epsilon > 0$ יהיו $g \leq f \leq h$ עם הנחת הקריטצין, רק ש- $\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx < \epsilon$

לפי הניחה הקודמת קיים $\delta > 0$ לבחור δ זה וזכור h, g אלה

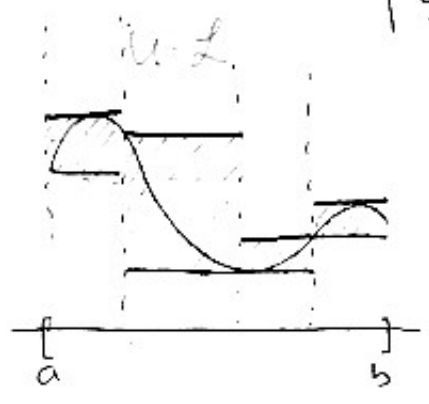
רק שלא S, S' סכומי רימן של f עבור חלוקות מהתנאי עם פרמטרים

$$|S - S'| < \int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx + 2\epsilon < 3\epsilon$$

☺

(31)

למה 1: תהי P חלוקה של $[a, b]$ אזי לכל $0 < \epsilon$ קיים $\delta < \epsilon$ כך שלכל סכומי רימן של f עבור חלוקות עם פרמטרים בטנים $n \geq \frac{1}{\delta}$ מתקיים
 $|S - S'| < U(P) - L(P) + 2\epsilon$



למה 2: לכל חלוקה P של $[a, b]$ ולכל $0 < \eta$ קיימים S, S' סכומי רימן של f עבור P אשר מתקיים
 $U(P) - S < \eta(b-a)$
 $S' - L(P) < \eta(b-a)$
ועוד $U(P) - L(P) < S - S' + 2\eta(b-a)$

משפט: (תנאי רימן לאנטיגוראביליות) תהי $f \in B[a, b]$ אזי f אנטיגוראבילית לפי רימן בקטע $[a, b]$ אם ורק אם לכל $0 < \epsilon$ קיימת חלוקה P של $[a, b]$ כך של- $U(P) - L(P) < \epsilon$ פובחתה: נניח ש- f אנטיגוראבילית ב- $[a, b]$ בהנחת $\epsilon > 0$ לפי קריטריון קושי קיים $\delta < \epsilon$ כך שלכל S, S' סכומי רימן של f עם חלוקות קצרות פרמטרים $n \geq \frac{1}{\delta}$ מתקיים $|S - S'| < \frac{\epsilon}{2}$. יהי $\eta = 4(\frac{\epsilon}{b-a}) < \epsilon$ תהי P חלוקה עם פרמטרים קטן $n \geq \frac{1}{\eta}$ (סקריבלר) מקריטריון קושי) לפי למה 2 אם נשתמש ב- S, S' סכומי רימן של f עבור אותה חלוקה P נקבל
 $U(P) - L(P) < S - S' + 2\eta(b-a) \leq |S - S'| + 2\eta(b-a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

בכיוון השני, (וריד את) נכונות של קריטריון קושי.

הנחת $\epsilon > 0$ צריך למצוא $\delta > 0$ אשר מבטיח ש $|S - S'| < \epsilon$ (0 < C)
לכל S, S' סכומי רימן של f עבור חלוקה עם פרמטרים קטנים מ- δ .
ידוע שבפונקציה אחת $\epsilon > 0$ קיימת δ אם $U(P) - L(P) < \epsilon$
תהי P רצף. עי' למד δ קיים $\delta > 0$ רק של S, S' סכומי
רימן של f עבור חלוקה עם פרמטרים קטנים מ- δ יתקיים
 $|S - S'| < U(P) - L(P) + 2\epsilon < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon$

(32) 26.4.06
איתי

אנחנו חוסים בפונקציות חסומות $f \in B$. (סמן ב- $R^*[a,b]$) את קבוצת הפונק' האינטגרליות לפי רימן ב- $[a,b]$.

קירוב בעזרת פונק' אדרגה אומצתה חסר משמעות כשמצבים ϵ פונק' לא חסומה אבל סביר כיון אפשר לתקן את הפונק' לא חסומה אז לראות אפשר לתקן לפונקציה לפי רימן היא אינך חזק יותר מאשר באינטגרציה לפי קירוב אומצתה ואומצתה אך לא יתקן יותר. אפשר לראות שאם פונק' אינטגרליות רימן אז היא חסומה ופונק' חסומה.

תזכורות

משפט (המבורגר) $f \in R^*$ איה לכל $0 < \epsilon$ קיימת $g, h \in R$ כן $g \leq f \leq h$ ו- $\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx < \epsilon$.

משפט (קריטריון רימן) $f \in R^*$ איה לכל $0 < \epsilon$ קיימת חלוקה P כן $U(P) - L(P) < \epsilon$.

משפט (קריטריון קושי) $f \in R^*$ איה לכל $0 < \epsilon$ קיים $0 < \delta$ כן לכל S, S' סביר כיון δ עבור חלוקות S, S' פריטרים $|S - S'| < \epsilon$ מתקיים.

משפט שנויה איה

תהי $f \in B$ $f \in R \iff f \in R^*$ ובמקרה זה $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$.

משפט $f \in B$ אז $f \in R^*$ איה לכל $0 < \epsilon$ קיימת פונק' אדרגה $\psi, \varphi \in S$ כן $\psi \leq f \leq \varphi$ ו- $\int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx < \epsilon$.

הוכחה:

($\Rightarrow$) נניח שנתנו מקיים מספר קטן δ $S \subseteq R^*$ לפי $f \in R^*$ מקיים קריטריון המבורגר סומר.

($\Leftarrow$) הכיוון השני, נניח ש- $f \in \mathcal{R}^*$ בהנחתן $0 < \epsilon$ קיים δ חיובי
 כיוון תלוקה P כך ש- $U(P) - L(P) < \epsilon$ מספיק רחב -

$$U(P) = \int_a^b \psi_P(x) dx$$

$$L(P) = \int_a^b \varphi_P(x) dx$$



1. $\varphi_P, \psi_P \in \mathcal{S}[a,b]$, $\varphi \leq f \leq \psi$

משפט: תהי $f \in \mathcal{R}$ $\Leftrightarrow f \in \mathcal{R}^*$ ובמקרה זה

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

הוכחה: נניח משפט קודם $f \in \mathcal{R}$ אזי $0 < \epsilon$ קיימים פונקציות $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ כך ש- $\varphi \leq f \leq \psi$ ו- $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \epsilon$.
 אבל $\int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi(x) dx$ ו- $\int_a^b \psi = \int_a^b \psi(x) dx$!

כך גורמים הקודם $f \in \mathcal{R}$ אזי $f \in \mathcal{R}^*$
 נותר להראות ש- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$ (*)

(כבר גמלנו): יהיו $g \leq f \leq h$ כאשר $g, h \in \mathcal{R}^*$ אזי $0 < \epsilon$
 קיים $\delta < \epsilon$ כך שלכל S סכום רימן של f עבור תלוקה P עם
 פרמטר קטן מ- δ מתקיים

$$\int_a^b g(x) dx - \epsilon < S < \int_a^b h(x) dx + \epsilon$$

נבחר את (*) יהיו $0 < \epsilon$ ויהיו $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ כך ש-

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx < \epsilon$$

לכל S סכום רימן של f עבור תלוקה P עם δ ו- $\lambda(P) < \delta$

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \epsilon < S < \int_a^b \psi(x) dx + \epsilon$$

נניח אנוסטר ונניח והתלוקה האמצעית נבחר פונקציות

$$\int_a^b \varphi(x) dx - \epsilon \leq \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \psi = \int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx + \epsilon$$

עבור אותו $\epsilon < \delta$ קיים $\delta_2 < \delta$ אשר מבטיח

לכל S סכום רימן של f עם פרמטר קטן מ- δ_2 נבחר S

סכום רימן של f עבור תלוקה עם פרמטר $\min(\delta_1, \delta_2)$

אזי נקבל

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b f - S \right| + \left| S - \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx + 2\epsilon < 4\epsilon$$



אחר ש- ϵ שרירותי נקבל את (*)

משפט: $f \in R$: $I = \int_a^b f$ $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I$ $\Leftrightarrow I = \int_a^b f$
סדרה של סכומי רימן של f עבור סדרה (P_n) של חלוקה
עם $\lambda(P_n) \rightarrow 0$

נזכיר אתו האמצע ה-.

משפט: תהי $f \in R^*$ $\Leftrightarrow f \in R$ $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$
יך ל- ϵ $U(P) - L(P) < \epsilon$ לכל חלוקה P עם $\lambda(P) < \delta$
הוכחה:

($\Rightarrow$) אם התנאי מתקיים אז מתקיים קריטריון רימן. בהיותו $\epsilon > 0$
קיים $\delta > 0$ מתאים ומספיק לבחור חלוקה P עם $\lambda(P) < \delta$
($\Leftarrow$) נניח ל- $f \in R$ ויהי $\epsilon > 0$. לפי קריטריון קיים $\delta > 0$
אשר מבטיח $|S - S'| < \epsilon/2$ עבור S, S' בהתאם.
נבחר את η כך: $\delta = \eta(b-a)$ ונבחר $\eta < \delta$ קיימים
 S, S' סכומי רימן של f עבור P אשר מקיימים
 $U(P) - L(P) < S - S' + 2\eta(b-a)$.
תהי P חלוקה עם $\lambda(P) < \delta$ לפי הוגדר עבור P עם
 $\eta = \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ קיימים S, S' סכומי רימן של f עבור P עם
 $U(P) - L(P) < \epsilon$ $\therefore U(P) - L(P) < S - S' + \frac{\epsilon}{2}$
כי $S - S' \leq |S - S'| < \epsilon/2$
($\Rightarrow$)

דרישון (ציון גבוה במשפט הראשון)

($\Leftarrow$) דלי גזירה $I = \int_a^b f(x) dx$ איה $\delta > 0$ קיים $\epsilon > 0$
יך ל- ϵ $|S - I| < \epsilon$ לכל S סכום רימן של f עבור חלוקה P
עם $\lambda(P) < \delta$.
תהי (P_n) סדרה של חלוקה יך ל- δ $\lambda(P_n) \rightarrow 0$ עבור סדרה
זו (בהנחה סדרה (S_n) של סכומי רימן בהתאם: בהנחתו $\epsilon > 0$
יהי $\delta > 0$ המתאים קיים $N \in \mathbb{N}$ אשר מבטיח שלם $n < N$ $\lambda(P_n) < \delta$
לכן לכל $n < N$ $|S_n - I| < \epsilon$ ומכאן $S_n \rightarrow I$.
($\Rightarrow$) הדיקק השלילה (נניח שלקיים $\epsilon > 0$ יך שלם $\delta > 0$ קיים
סכום רימן S יך $|S - I| \geq \epsilon$

נתבונן בסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ קצתו סדרה זו היא סכום רימן של f
 מתארים S_n נקראים c - $S_n \rightarrow c$, אבל $S_n \rightarrow I$ אזי $I = c$
 $|S_n - I| \geq \varepsilon$. סתירה. $\textcircled{u}$

הצדקה: תהי $f \in R[a,b]$ (לדור) c
 $a \leq c \leq b$ $\int_a^b f(x) dx = 0$
 כל $\int_a^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx$ כחן

הצדקה: חמא $\int_a^b f(x) dx$ חסר גשמות מחנותנו כי פיתנו על
 תיקוח של $[a,b]$ ואילו רמק הם מפעים מסדר הפוק.
 אלא הטיחה להצדקה הכללית התינו. אנתנו מולים להצדקה
 $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$
הצדקה: על מוסט קודם, אם $f \in R[a,b]$, אם $f \in R$
 שתי 1.1 וצורה. בחוק ל.

$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
 מונס? $-|f| \leq f \leq |f|$ מהחנותנו
 (קב) ל- $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$
 $(-a \leq b \leq a \Leftrightarrow |b| \leq a)$ $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \Leftarrow$

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי
 אם $f \in R[a,b]$ ו- $F' = f$ ב- $[a,b]$ אז
 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

הצדקה חשבה: מאוד חשובה רמק הדינלר ל- $f \in R$. המשפט
 נכח יכח להבין אותנו לחשוב לשם נקח פוק: אכורה, (לכור
 אותה ואכ נטעיה) (קב) אר הפוקציה המקורית.
 אלא, יש פוקציות אכורות שהנחה לכן אינה אנטימורלית!!!
 אכור, אלא נכון!

הוכחה: (ראה ש- $\int_a^b \varphi \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b \psi$ אם $\varphi, \psi \in \mathcal{S}[a,b]$ ו- $\varphi \leq f \leq \psi$.)

יהיו φ, ψ ואלה מהכ נותן וקניה ש- φ, ψ מיוצגות באמצעות אותה חלוקה $\mathcal{P}$, (אחרת ניתן לאחד את החלוקות)
 $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

F גזירה ב- $[a,b]$ עם גזירה בכל נקודה. אם נשטח הערך הממוצע לפי אגרגט עבור F בקטע $[x_{i-1}, x_i]$ קיים $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ כך ש- $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i) \Delta x_i$ (גזירה טור של חתום):

$$F(b) - F(a) = (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) = \\ = f(t_n) \Delta x_n + \dots + f(t_1) \Delta x_1 = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

(לכור ש- $\varphi \leq f \leq \psi$) $\Leftarrow \varphi(t_i) \leq f(t_i) \leq \psi(t_i)$

$$\sum_{i=1}^n \varphi(t_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \psi(t_i) \Delta x_i \Leftarrow \varphi(t_i) \Delta x_i \leq f(t_i) \Delta x_i \leq \psi(t_i) \Delta x_i \Leftarrow$$

אם נאמר ש- t_i נמצא בקטע פתוח של φ ו- ψ בהתאמה

$$\int_a^b \varphi \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b \psi \Leftarrow \sum_{i=1}^n \varphi(t_i) \Delta x_i = \int_a^b \varphi \quad \text{!} \quad \sum_{i=1}^n \psi(t_i) \Delta x_i = \int_a^b \psi$$

במקרה (מקרה ש- f איננו גזירה) נלקח יש סדרה פונקציות מדרגה

שמתקרבות אותה מאחור ומלפנים ומהפסקים בין האינטגרלים שלהם מתאפס וזהו הווא האינטגרל של f גבול המשפט (II)

משפט היסודי: תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ גזירה $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

מאפן הפסגה: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ אם $F \in \mathcal{C}[a,b]$ ו- $F'(c) = f(c)$ וקודם

F גזירה בכל וקודה $a \leq c \leq b$ ש- f רציפה ב- c ומתקיים $F'(c) = f(c)$

35

30.4.06
אנר

המשפט היסודי

תהי $f \in B[a,b]$ אם $f \in R[a,b]$ ואז $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

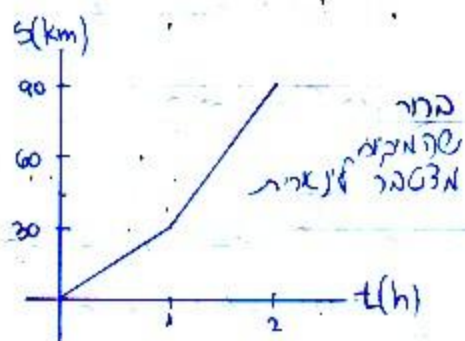
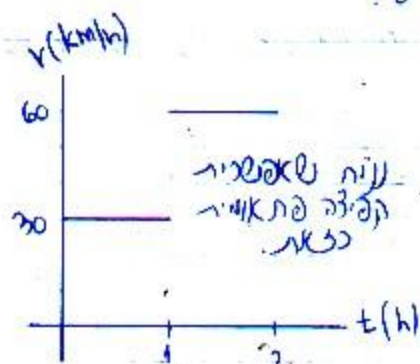
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

אם F רציפה ב- $[a,b]$ אם f רציפה ב- $c \in [a,b]$ אז F איננה בו-1 $F'(c) = f(c)$

הדוגמה

(תכנון של תנועה של חלקיק של מסלול יש- $s = p(t)$ -

מתאר את המיקום כפונקציה של הזמן במערכת קואורדינטות (תנועה

תהי $v(t)$ המהירות הרגעית בזמן t 

$$F(x) = \int_0^x v(t) dt = \begin{cases} 30x & 0 \leq x \leq 1 \\ 30 + 60(x-1) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$F(x)$ יותר פשוט - $f(x)$ - היא רציפה ב- x קודם! חלף מזה טבעי
 לחשב על f כנגזרת של F . אבל זה לא תמיד נכון. במקרים שבהם
 f רציפה אך F איננה נגזרת של F . אבל במקרים אחרים הרצפות
 של f הם לא מתקיימים.

הוכחה

(כאשר F מקימה את תנאי רימן-סטיר, $[a,b]$ היא רציפה
 בו (אפילו במידה שונה).

יהיו $x, y \in [a, b]$ ויהי

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq$$

$$\leq M \left| \int_y^x 1 dt \right| = M(x-y)$$

$\downarrow$
 $|f| \leq M$
 תנאי f

וזה תנאי ריבוע $\Leftarrow$ $[a, b]$ ו F רציף
 כעת נניח f רציף $a \leq c \leq b$ ו

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt \right] = f(c) \quad \text{צריך להראות ש-}$$

$$\left| \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt - f(c) \right| < \varepsilon \quad 0 < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt - f(c) &= \frac{1}{x - c} \left[\int_c^x f(t) dt - \int_c^x f(c) dt \right] = \\ &= \frac{1}{x - c} \int_c^x (f(t) - f(c)) dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt - f(c) \right| = \left| \frac{1}{x - c} \int_c^x (f(t) - f(c)) dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{x - c} \right| \left| \int_c^x |f(t) - f(c)| dt \right| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{הצבה מותרת וכן} \\ \text{למקרה ש- } x < c \end{array}$$

f רציפה ב- $c \Leftarrow$ כל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 \leq |x - c| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

בהנחה $c < \varepsilon$ (קראו דבור $|x - c| < \delta$ (דבור ה- δ המתאים)

$$= (*) \leq \frac{1}{|x - c|} \left| \int_c^x \varepsilon dt \right| = \frac{|x - c|}{|x - c|} \varepsilon = \varepsilon$$



F מוגדרת בקטע I תיקרא **קדומה** של f ב- I אם
 $f = F'$ ב- I .

הצגה

אם f רציפה ב- I אז לכל המשפט היסודי היא מקבלת
 קדומה בכל קטע סגור ב- I - $\int_I f(t) dt = F(x)$ - $F'(x) = f(x)$ -

הצגה

המשפט היסודי (בגרסה הראשונה) טוען שאם f אינטגרלית!
 F קדומה שלה, אז ניתן לחשב את $\int_a^b f$ באמצעות F
 באופן הבא: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

הצגה

ברור שיתרה לעיור פונקציה אינטגרלית לאין זה פונק' קדומה
 והקדומה היא טריוויאלית. פונק' מדידה הן אינטגרליות אך
 אינן מקיימות את תכונת ערך המצויים ולכן לא יכולות להיות (גזרות
 של פונק' אחרת (אם דבריו).

הצגה

יתכן המצב ש- f מקבלת פונק' קדומה אבל איננה אינטגרלית
 למשל,
$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

בטאנס הקלפס כאן. ש- F גזירה בכל נקודה והגזרתה היא

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x} \cos(\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אבל פונק' זו אינה אינטגרלית בקטע שמכיל את 0
 משום שאינה תסומה בקטע כזה.

אל מה שאנחנו מסיקים מכל ההצגה הזו הוא שראינו שפונק'
 פונק' אינטגרלית שקול לעיור פונק' בעלת קדומה.

אכן, נשים לב שהמשפט היסודי (בין היתר) שהתא' הראשון שלו
 נטו ש- $f \in \mathbb{R}[a,b]$

מה שכן (כזו) הוא שגם פונק' היא אינטגרלית. כל ישר זה פונק'
 מצטברת ופונק' הלאה אפילו רציפה. אבל הפונק' המצטברת
 היא לא בהכרח הפונק' הקדומה, אלא רק אם הפונק' המקורית היא
 רציפה.

פונק' אינטגרלית יכולה להיות פתולוגית מאוד: אם מאסכים אותה
 מקבלים משהו רציף, ואם מאסכים את זה אז אפילו מקבלים
 משהו גמור. זה (לדבריה) לא רק. הטענה זאת, אם נחשוב על זה,
 היא שאינטגרל עדיף מידות במובן מסוים. הוא אוסף מידע את הקטע
 כולו (לדבר דיוק) אפילו אם ההתנהגות

הסימון של אינטגרל

$$\{F : F' = f\} = \int f(x) dx \quad \text{באינטגרל הוא מסומן}$$

הזרה

אם F, G קדומות של f בקטע I אז

$$I \ni (G-F)' = 0 \iff I \ni F' = f = G'$$

$$\iff \text{אם מושלם הדיפרנציאל בנקודה אחת וקבוע קבוע} \iff G-F \equiv c$$

$$\Rightarrow F + c = \{F : F' = f\} = \int f(x) dx$$

יש להבחין בין כמה מושגים:

- indefinite integral $\int f(x) dx$ באינטגרל הוא מסומן

- indefinite integral with a base point

$\int_a^x f(x) dx$ הפונקציה המצטברת

- primitive function $F' = f$ הפונקציה הקדומה

- definite integral $\int_a^b f(x) dx$ באינטגרל המסומן

שיטות אינטגרציה

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

↓
אזה שונות בין קבוצות!!

$$\int k f(x) dx = \int k f(x) dx \quad k \in \mathbb{R}$$

שני החוקים האלה הם תוצאה של הליניאריות של האינטגרל.

יש עוד שני חוקים חשובים לריבועים: (חוק של מנה) ו(חוק של מכפלה)

של (הרכבה) שבהם (הם) שני חוקים חשובים לריבועים: (חוק של מנה) ו(חוק של מכפלה)

שיטת ההצבה:

$$\int \cos(x^2) 2x dx = \sin(x^2) + C$$

$$\int \cos(e^x) e^x dx = \sin(e^x) + C$$

$$\int \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx = \sin(\ln x) + C$$

$$2 \int \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sin(\sqrt{x}) + C$$

אם יש לנו ממונה הדומה לאיבר האחר הוא הבל. והוא:

$$F'(t) = f(t) \quad \text{בומר} \quad \int f(t) dt = F(t) + C \quad \text{ל (נ!)} \quad \Leftarrow$$

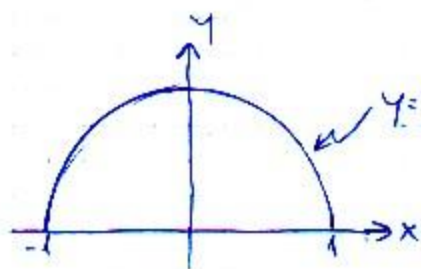
$$F'(g(x)) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$= f(g(t)) \cdot g'(t)$$

$$\Rightarrow \int f(g(t)) g'(t) dx = F(g(x)) + C$$

אינטגרציה לפי חלקים - המסק

אנחנו נשאל חציים לחשב $\int f(g(t))g'(t) dt$ - אך
 זה בדיוק כמו לחשב $\int f(x) dx$ - אך



דוגמה $\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$

כדי (נראה של חצי מעגל)
 במעגל לפני לחשבו בקואורדינטות
 פוטנציות

$x = g(t) = \cos t$
 $g'(t) = -\sin t$

$\Rightarrow \int \sqrt{1-(\cos t)^2} (-\sin t) dt =$

$= \int \sin t (-\sin t) dt$
 כי אנחנו מנסים
 להתאים את
 הפונקציה

$= -\int \sin^2 t dt$ ואיך לפתור את זה?

נשתמש בזה כמנה נגזרות טריגונומטריות

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t =$

$= 1 - \sin^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$

$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$

$\Rightarrow \int \sin^2 t dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$

$= \frac{1}{2} \left[\int 1 dt + \int \cos 2t dt \right]$

$\int \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) \cdot 2 dt = \frac{1}{2} \sin 2t$

$\Rightarrow \int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] + C$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-\cos^2 t} (-\sin t) dt = -\frac{1}{2} [t - \cos t \sin t] + C$$

זהו צירוף אחרים אחר t ו- x ונכון חזרים
שחשוב להוציא שאלו תהיה הפיכה

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} [\arccos x - x\sqrt{1-x^2}] + C$$

לסיכום מה שעשינו היה הצבה חזרה

$$\int f(x) dx = H(g^{-1}(x)) + C$$

$$\downarrow \quad x=g(t) \quad \uparrow$$

$$\int f(g(t))g'(t) dt = H(t) + C$$

האם התחלנו מה ראש?

$$\frac{dH(g^{-1}(x))}{dx} = H'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{dg^{-1}(x)}{dx} =$$

$$= f(g(g^{-1}(x))) \cdot g'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$$

משפט: יהי f הציבה ב $[a,b]$ g פונקציה ברציפות

ב $[c,d]$ ומק"מ $a=g(c)$, $b=g(d)$, $a \leq g \leq b$ כאשר

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(x))g'(x) dx$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \cdot \int_0^{\pi} -\sin^2 t dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{למשל}$$

הוכחה: f רציפה $\Leftarrow$ אינטגרלית $\Leftarrow$ צב $\Leftarrow$ שלם ב"ם g פונקציה g

רציפה $g \Leftarrow$ אינט $\Leftarrow$ $f \circ g$ אינט g' רציפה $\Leftarrow$ g' אינט $\Leftarrow$

$(f \circ g)$ אינט $\Leftarrow$ צב $\Leftarrow$ ב"ם

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ $\Leftarrow$ F קדומה של f $\Leftarrow$ רציפה

אז ש $F(g(t))$ פונקציה עם גזירה $\Leftarrow$ $f(g(t))g'(t)$ אינט קדומה של



$$\int_c^d f(g(t))g'(t) dt = F(g(d)) - F(g(c))$$

שיטת ההצבה

(זכור מה שיטת ההצבה אחרת)

$$\int f(x) dx \leftrightarrow \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

$x = g(t)$

דוגמה דוגמא

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx \leftrightarrow \int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$e^x = t$$

$$x = g(t) = \ln t$$

$$dx = g'(t) dt = \frac{1}{t} dt$$

ואכן מתקבלים את האינטגרל החדש? איתנו (לא בתור)
שלם. פונקציה רציפה איתנו יתאים לחשב את האינטגרל.
זה כדור, כל מיני מניפולציות אלגוריתם שלה לא תמיד קל / גשמי
ללא עזרה מחשב, אבל כל אופן הבחנה פתירה.

השיטה האינטגרלית רוצים לחשב את $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$

אם $\deg p(x) \geq \deg q(x)$ אז ישר מחלקים מחלקים
אישית. ביטוי שכמוכן יהיה קל לעשות או אינטגרל.
אחרתם הבחנה המהותית היא כאשר $\deg p(x) < \deg q(x)$

$$\int \frac{1+t}{(1-t)t} dt = ?$$

נפרק את השבר לגורמים אי פרקים:

$$\frac{1+t}{(1-t)t} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t}$$

אם איך (מצאנו) את A ואת B

(כפול) ה- $1-t$ ונקבל:

$$\frac{1+t}{t} = A + (1-t) \frac{B}{t} \Rightarrow \underset{\substack{\text{נציב} \\ t=1}}{A=2}$$

(כפול) ה- t ונקבל:

$$\frac{1+t}{1-t} = t \cdot \frac{A}{1-t} + B \Rightarrow \underset{\substack{\text{נציב} \\ t=0}}{B=1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left(\frac{2}{1-t} + \frac{1}{t} \right) dt = -2 \ln|1-t| + \ln|t| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = -2 \ln|1-e^x| + \ln e^x + C$$

שיטת הדיפרנציאלים

משוואה דיפרנציאלית מסוג זה נקראת משוואה דיפרנציאלית מסוג מספר 1.

הגדרה תהי $y = f(x)$ פונקציה. אז הדיפרנציאל של y :

$$dy = f'(x) dx$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

ההפרש Δy ו- Δx הם ההפרשים של x ו- y בהתאמה.

האם יש שיטה אחרת להגדרת דיפרנציאל? לא, זוהי הגדרה בסיסית. $f'(x)$ היא הפונקציה שנותנת את הדיפרנציאל של y ביחס ל- x .

למשל, נניח:

$$y = x^2$$

$$x = \sin t$$

$$dy = 2x dx$$

$$dx = \cos t dt$$

$$dy = 2x \cos t dt = 2 \sin t \cos t dt$$

$$y = \sin^2 t$$

$$dy = 2 \sin t \cos t dt$$

40

אם יש פה ביקססנטואר וזה הודות לזה השלמה.

זהו נוסח של הבחנה הקדמה. ונראה שנוח להשתמש בדפנרציות ראיו הם מתנהלים כמו לבריום:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+e^x}{1-e^x} \cdot \frac{dt}{e^x} = \int \frac{1+e^x}{1-e^x} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \frac{e^x dx}{dt} dt$$

$e^x = t$
 $dt = e^x dx$
 $dx = \frac{dt}{e^x}$

אם זו שדה של פיסקאם ואז אנו (המתמטיקאים הנאורים) להשתמש בה.

דוגמה נוספת

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = ?$$

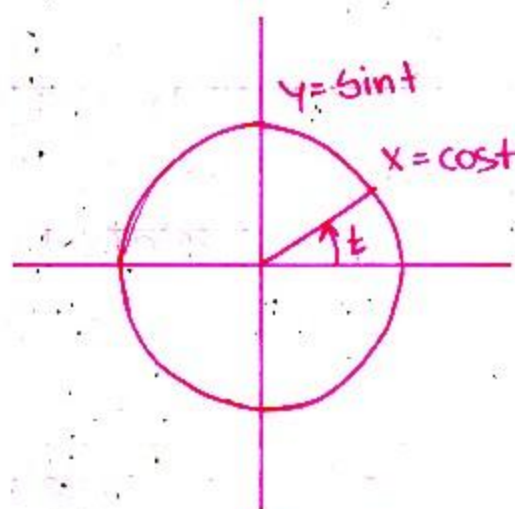
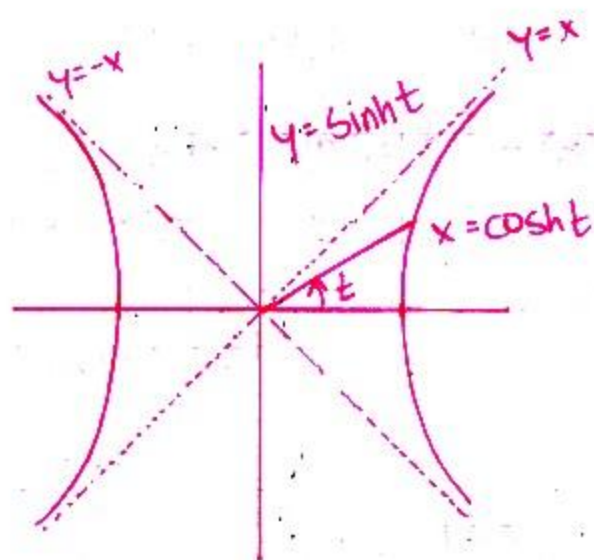
$$y^2 = x^2 - 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$\leftarrow y = \sqrt{x^2-1}$$

נסו

זו משוואה של היפרבולה!



אם כן ניקח לטיוח של
ההיפרבולה האמצעית הפונה
ההיפרבולות ואז מתקם
 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

ניקח להסתכל על טיוח של המעגל
כתלות בזווית ואז מתקם
 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

אם הפקודה היא אוטורי, כלומר מלכתה אותו, אז:

$$\int \sqrt{x^2-1} dx \rightarrow \int \sqrt{\cosh^2 t - 1} \sinh t dt =$$
$$x = g(t) = \cosh t$$
$$dx = \sinh t dt$$
$$= \int \sinh^2 t dt$$

הכלל לעתיד, זה (למעשה) השיטה הזוהר שדחתנו בסוף
 $\int \sin^2 t dt$ (קישור)

אינטגרציה לפי חלקים

אנחנו יודעים את הנוסחה לנגזרת של מוצא:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow \int (fg)' = \int f'g + \int fg'$$
$$fg =$$

(זהו אולי ויקס)

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

כלומר, נוסחה שמאפשרת לנו לחשב את האינטגרל של $f'(x)g(x)$ אם אנחנו יודעים לכתוב $f(x)$ ו- $g(x)$ כך ש- $f'(x)g(x) = f(x)g'(x) + f(x)g'(x)$

דוגמה

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx =$$
$$= e^x x - e^x + C$$

$$f(x) = e^x$$
$$g'(x) = 1$$

ואם לה היה הפוק:

$$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f' \quad g$

$f(x) = \frac{x^2}{2}$
 $g'(x) = e^x$

היה סבבה. אבל בעצם זה שיש לנו כאן הוכחה

3 הערות:

$$\int x e^x$$
$$\int x^2 e^x$$
$$\int e^x$$

אפשרות אחרת לפתור את השניה. זו שרשרת של
הערות ואם הסתם נתקול את החלוקה החלשה

דוגמה

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $f' \quad g$

$f(x) = e^x$
 $g'(x) = \cos x$

אמנו! מה נעשה? (רק בשיטה הישראלית - הכח!)

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $F' \quad G$

$F(x) = e^x$
 $G'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) =$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$$

בזמנה אה בראגרא $\int \sinh^2 x dx$ אפשר לפתור
 ע"י שימוש בנוסחה $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ או על ידי דיפרנציאציה
 (פתור את זה בחלקים)

$$\int \sinh^2 t dt = \int \underbrace{\sinh t}_{f'} \cdot \underbrace{\sinh t}_g dt = \cosh t \cdot \sinh t - \int \cosh t \cdot \cosh t dt$$

$f(t) = \cosh t$
 $g'(t) = \cosh t$

$$\Rightarrow \int \sinh^2 t dt = \cosh t \sinh t - t$$

$$\Rightarrow \int \sinh^2 t dt = \frac{\cosh t \cdot \sinh t - t}{2} + C$$

אין אחת $\int \ln x dx = ?$
 או ואולי! מה נעשה? טיפ, נאמר שאנחנו עוסקים באינטגרציה
 של חלקים נראה אפשרות זו לא כדאית.

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_g dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

האופן של השיטה הזאת נראה מתישם על אינטגרלים של
 פונקציות פשוטות: $\int f'(x) dx = \int 1 \cdot f'(x) dx = \dots$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx \quad \text{אנחנו}$$

ראש f, g פונקציות מציאותיות ב $[a, b]$

הוכחה:

תחילת של הוכחה אופיינית:

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b (f(x) g(x))' dx = f(x) g(x) \Big|_a^b$$

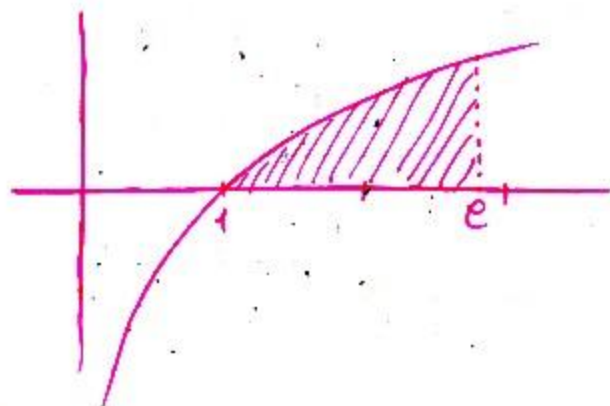
אינטגרל דיפרנציאלי
 אינטגרל
 אינטגרל



$$\int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 1 \cdot dx =$$

$$= (e - 0) - (e - 1) = 1$$

זה אגרטל פה: בין 1 לבין e יש חצי אחר
 של שטח - כמו ריבוע:



אגרטל זה אגרטל. זה אגרטל אגרטל
 ש יש חצי - אגרטל אגרטל
 ש יש חצי - אגרטל אגרטל

אינטגרלים לא אמיתיים

עד כה מושג האינטגרל היה בהשקלנו תסום (פונ' תסומה) וסדר (תחום סגור). מה קרה אם אנו עוסקים בפונ' לא תסומה או בקטע פתוח לא תסום? האם ניתן להרחיב את מושג האינטגרל גם למקרים אלה?

היום נדבר על איסכום בקטע לא תסום. נניח שיש לנו פונ' $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, שהערכים שלה הם $f(n)$. יש משמעות לסכום האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. במקרה של פונ' על תחום רציף זה הסכום יהיה "רציף" $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

הצורה תי f מוגדרת על קטע גבול $[a, b]$ אם a קטוע $\neq b$ ואינסופיות בו. (תבונן ב-)

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx$$

פונקציה של הקצה בעליון אם $\lim_{b \rightarrow \infty} I(b)$ קיים. אנו סופי לאחר ש- $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס. אחרת (לאחר ש- $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתפזר).

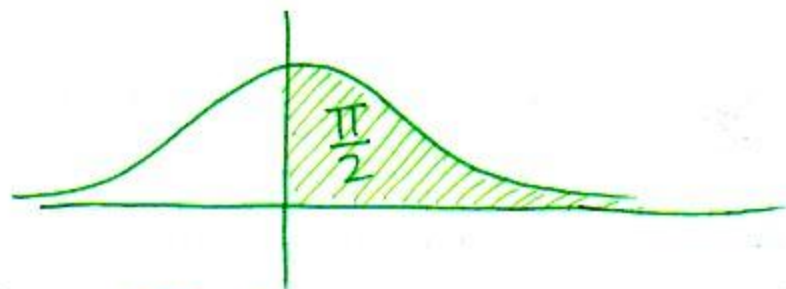
דוגמאות

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \quad (1)$$

$\frac{1}{1+x^2}$ פונ' רצפה ולכן לפי המשפט היסודי של החצ"א $\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^b = \arctan b - \arctan 0$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

אחתה לאומטריה - אם נסתב על הפסח שנתה. אצל הפונ' בצד החיים של ציר ה- x הפסח תא סופי.



יש בזה משקל מדהים. נניח שאנחנו רוצים לזהות את השטח
הזה. אם אנחנו צובעים בקצב אחיד על ציר ה- x לה ייקח
לנו אינסוף זמן, אבל אם לא (לדקק) זכאות סופית של צבע.

אם אנחנו מסתמים על זה כאנאלוג הרצוף של טורים אינסופיים
אז מהינה אינטואיטיבית יש המון תכונות דומות.
למשל לא מפתיע ש $\sum \frac{1}{1+n^2}$ מתכנס שהרי $\sum \frac{1}{n^2}$
מתכנס. לכן נצפה ש- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס.

(2) ידוע ש $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר ומה עם $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$?

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln b - \ln 1] =$$

מספר אינסופי

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$$

האינטגרל מתבדר.

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos b + 1) \quad (3)$$

מספר אינסופי

הגבול הזה לא קיים. לכן האינטגרל מתבדר.

הערה: הסימן $\int_a^\infty f(x) dx$ משמש לשני מושגים - הן
ה"אינטגרל" והן הגבול.

מהקשר זה לא נכון כ"ל לזהות $\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos b + 1)$
משום שהגבול הזה לא קיים בכלל. אנחנו כותבים סימן שוויון
ראש הגבול קיים.

תכונות

יהיו f, g פונקציות מוגדרות על קטע $[a, b]$ ויהי a נקודת קבוע. $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח ש- $a < b$.

① אם $0 \leq f$ אז $0 \leq \int_a^\infty f(x) dx$ חלוקה

② אם $f \leq g$ אז $\int_a^\infty f(x) dx \leq \int_a^\infty g(x) dx$ מונוטוניות

③ $\int_a^\infty (f+g)(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx + \int_a^\infty g(x) dx$ סגוריות

④ אם $k \in \mathbb{R}$ אז $\int_a^\infty (kf)(x) dx = k \cdot \int_a^\infty f(x) dx$

⑤ אם $a < c$ אז $\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$ אגרגציה

משפט התכנסות

משפט (קריטריון קושי) יהי f פונקציה מוגדרת על קטע $[a, b]$ ויהי $a < b$. אז $\int_a^b f(x) dx$ מתכנס אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים B כך שלכל $B < b$ מתקיים $|\int_B^b f(x) dx| < \epsilon$

הוכחה: לפי ההגדרה $\int_a^b f(x) dx$ מתכנס אם ורק אם קיימים גבולות $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ משפט אחרת (קריטריון קושי) עבור גבול זה. לכן קיים X כך שלכל $X < x, x' < \infty$ מתקיים $|\int_x^{x'} f(x) dx| < \epsilon$

משפט (קריטריון ההשלמה) יהיו f, g כמו קודם. נניח כי $0 \leq f(x) \leq g(x)$ עבור $0 < k < \infty$ אז

אם $\int_a^\infty g(x) dx$ מתכנס אז $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס
אם $\int_a^\infty f(x) dx$ מתבדר אז $\int_a^\infty g(x) dx$ מתבדר

הערה אם $0 \leq h(x)$ אז $\int_a^\infty h(x) dx$ מתכנס אם
 $I(b) = \int_a^b f(x) dx$ חסומה. שיהי משוואה $0 \leq h(x)$
 לקבל ש- $I(b)$ מונוטונית עולה ומכאן ההערה.
 הוכחה המשפט (נמצא מההערה הקודמת) 😊

$$1 \leq x \Rightarrow x \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq -x$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

דוגמה

$$\Rightarrow \int_1^b e^{-x^2} dx \leq \int_1^b e^{-x} dx$$

יש משפט שאומר שאם נוסחה סדרה מסוימת
 עבור הפונקציה הקדומה של e^{-x^2}
 אבל את e^{-x} אנחנו צוברים וצדים לאט.

$$\int_1^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^b = e^{-1} - e^{-b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$$

סומה $\int_1^\infty e^{-x} dx$ מתכנסת. לפי קריטריון ההשוואה
 $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ מתכנסת ואפילו אנחנו יכולים לחסום את
 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ בזה. מהאדסטיביזם במחשבים $\frac{1}{e}$.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{משפט יפהפה. (הוכחה במחשב)}$$

הערה הקריטריון נתקן אם במקרה שהתנאי מתקיים עבור x
 $a \leq a' < \infty$. שיהי לפי האדסטיביזם מספיק להסתכל
 על האינטגרלים רק התנאי המקום מסוים.

דוגמה אין אנליזה מלאה בין טורים לאינטגרלים. (לכור שבטורים)
 אם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \rightarrow 0$. האינטגרלים אין לה רק
 למשל אם $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$ סדרה ש- $f(x) \rightarrow 0$ וכן סדרה ש-
 $\int_0^\infty f(x) dx = 0$

45

משפט (קריטריון זרמי) יהיו f, g כמו קודם.

נניח ש- $0 \leq f(x) \leq g(x)$! $0 \leq f(x)$

אם קיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}$ אזי $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס אם ורק אם $\int_a^\infty g(x) dx$ מתכנס.

הוכחה: בהינתן $x \in \mathbb{R}$ שט קיים $\epsilon > 0$ נבחר ϵ מתחת

$$k - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \epsilon$$

$\Downarrow$

$$(k - \epsilon)g(x) < f(x) < (k + \epsilon)g(x)$$

■ אם $k < \epsilon$ (קריטריון זרמי) $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס.

משפט תלמודי :

אם $0 < a$ נתון p . $\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$ עבור $0 < p$

לפי המשפט היסודי :

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_a^\infty = \begin{cases} \text{מתבדר} & 0 < p < 1 \\ -\frac{a^{-p+1}}{-p+1} & 1 < p \end{cases}$$

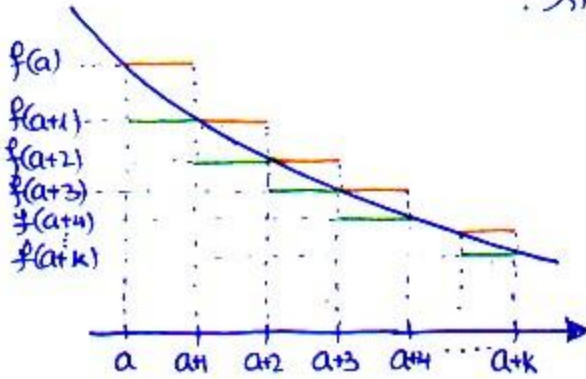
שאלה נוספת : p באן הוא קו פרסה והוא $p=1$.
אם עבור $p=1$ האינטגרל הוא $\ln x$. האם אנוניו מציבים
שכר ל p מתקרב ל-1 האינטגרל יתקרב ל- $\ln x$? $p=1$!
אם זה לא נכון . אנוניו נאמד על רק בהמשך .

משפט : תבי f תומכת ויחד בקטע $[a, \infty)$ ($0 < a$)

ואנטיגרליו של קטע מכלול $[a, b]$. אזי

$$\sum_{k=0}^\infty f(a+k) \text{ מתכנס אם } \int_a^\infty f(x) dx \text{ מתכנס .}$$

הוכחה : הדגילה ל- f אנטיגרליו בעזרת מיתר משום של
נבדל ישירות מר f . אנטיגרליו יחד .



הוכחה :

$$\int_a^{a+k+1} f(x) dx \leq f(a) + \dots + f(a+k) = S_k$$

$$S_k - f(a) = f(a+1) + \dots + f(a+k) \leq \int_a^{a+k} f(x) dx$$

מסקנה : אצל שטח תומי מתכנס אם הטר תומי .

כמו כן אנטיגרל לא אחיד של פונ' תומית מתכנס אם האנטיגרל

הפוקציה של הטרליון תומי .

$$\int_a^{a+k+1} f(x) dx \leq S_k < \sum_{k=0}^\infty f(a+k) \text{ אזי } \sum_{k=0}^\infty f(a+k) < \infty$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^\infty f(a+k) \text{ מתכנס כי } \int_a^\infty f(x) dx \text{ מתכנס}$$

$$S_k = f(a) + \int_a^{a+k} f(x) dx \leq f(a) + \int_a^\infty f(x) dx \text{ אזי } \int_a^\infty f(x) dx \text{ מתכנס}$$

אזי (S_k) תומית (תומית ומסומה) . (11)

התכנסות בהחלט

תהי $\mathbb{R} \rightarrow (a, \infty): f$ פונקציה כזו שיש לה $[b, \infty)$.

הכוונה היא שיש לה $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\infty |f(x)| dx$ מתכנס.

אם $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס אבל לא בהחלט, (אחר שזהו מתכנס מתנאי:

משפט: מתנאים אלה אם $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס בהחלט אזי הוא מתכנס.

הוכחה: אם קייסיון קושי מספיק רבדוק של $\epsilon > 0$ קיים B כך

של $B < b, b' < B$ $\int_b^{b'} f(x) dx < \epsilon$.

ההיפוך $\epsilon > 0$, אם קייסיון קושי אדור התכנסות $\int_a^\infty |f(x)| dx$

הי B כזו שתכונה $|\int_b^{b'} f(x) dx| < \epsilon$ של $B < b, b' < B$

(קרי) $|\int_b^{b'} f(x) dx| \leq |\int_b^{b'} |f(x)| dx| < \epsilon$



אנטידומה $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס רק בתנאי. אז הוא שלם אינו שלם.

התכנסות התנאי והתכנסות ההתכנסות

דוגמאות

① $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ מתכנס בהתכנס. מדוע?
 $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ וידוע ש $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס.
 לפי קריטריון ההשוואה מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

② דוגמה זו של דיווח - מתכנס בהתכנס:
 כאשר ביקשנו להראות מזהר ב- $x=0$.
 אכן זה בעצם רק סימון. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$.
 (מתבטל על אנטיגרים מהצורה $\int_a^{\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$ כאשר $a, \alpha > 0$.
 1- f רציפה ב- $[a, \infty)$.
 נניח ש $\int_a^b f(x) dx = F(b)$ חסומה על טווח, כלומר $|F| \leq M$ לכל $b \in [a, \infty)$.

התנאים אלה האנטיגרים חלבו אחת. מתכנס. למה?
 f רציפה $\Leftrightarrow F$ קדומה של f ב- $[a, \infty)$ (לפי המשפט היסודי).
 עקשו נעשה אנטיגרים עם תנאים (שהתאחדו הרצף). וזה
 למעשה של אנטיגרים לא אחידים.

$$\int_a^{\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x^\alpha} dx = \underbrace{F(x) \cdot \frac{1}{x^\alpha}}_{\text{הגדל חסום}} \Big|_a^{\infty} - \underbrace{\int_a^{\infty} F(x) \cdot \left(-\alpha\right) \cdot \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx}_{\text{הגדל חסום } F \cdot \text{הגדל חסום}} < \infty$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 F' G
 $\frac{F(x)}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$
 $\frac{-F(a)}{a^\alpha}$ מתקבל

$$\left| \int_a^{\infty} F(x) \cdot \left(-\alpha\right) \cdot \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx \right| \leq M \alpha \int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx < +\infty$$

$\alpha > 0$

כלומר (באנטיגרים מתכנס בהתכנס) ולכן מתכנס.

לכן קיבלנו $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ מתכנס

אם נסתכל על האינטגרל אני מתכנס בהתאם.
 הרי $\frac{\sin^2 x}{x} \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \Leftrightarrow \sin^2 x \leq |\sin x|$
 וזה נכון כי $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right]$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right) dx = "$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ מתכנס
 $\underbrace{\hspace{10em}}$ מתכנס מאותה סיבה כמו $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$\Rightarrow$ לא ייתכן שהאינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ מתכנס. כלומר $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ אינו מתכנס בהתאם.

נניח שהגדרה של $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$
 חזונו אנלוגי אבל זה יהיה $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx$

אם יש לנו פונקציה f אז מהחזונו $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

אם $\lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ אז $\lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ קיים כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ מתכנס ואז $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ שווה לאיבר זה.

אם לא נאסוב את הגדרת $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$? כי אם לא $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ פונקציה אינלוגית אז זה תמיד יוצא אפס.

אינטגרל של פונק' לא חסומות

הנה כמה דוגמאות:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \ln x \Big|_0^1 = \infty \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arctan x \Big|_{-1}^1 = \pi \end{aligned}$$

הציון אינטגרלים באופן איכותי
לא מתאפשר להקצות
התחלפות בלבד להפיוק

הגדרה תהי f מוגדרת ב- $[a, b]$, אינטגרליות ב-
קטע מוגדרת $[c, b]$ עם $a < c$ ואנחנו חסומה ב-
ימין של a אזי לכל $0 < \epsilon$ $\int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ מוגדר
אם קיים הגבול $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ (אזי
 $\int_a^b f(x) dx$ מתקיים, אזי נאמר שהתכנסה
במקרה של התכנסות הסוג השני
האופן אנונימי מוגדרים למקרה שבו b (וה) הקצה הימני,
אז אפילו שלהם.

החלפה

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2} dy$$

$x = a + \frac{1}{y}$ $y = \frac{1}{x-a}$
 $dx = \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy$

ובכיוון זה ניתן לתרגם אינטגרל לא אמיתי מהסוג הרחב
לאינטגרל זה אמיתי מהסוג הישן.

קריטריון קושי - בתנאים אלה, תנאי הכרחי ואספק איתתכסור
האינטגרל $\int_a^b f(x) dx$ קיים:

11
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall a < c, c' < b : \left| \int_c^{c'} f(x) dx - \int_c^b f(x) dx \right| < \epsilon$
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \delta_1, \delta_2 > 0 (\delta_1, \delta_2 < \delta) \Rightarrow \left| \int_{a+\delta_1}^{b+\delta_2} f(x) dx - \int_{a+\delta_1}^b f(x) dx \right| < \epsilon$

פונקציה מאוזת משוקה פונקציה יחידה

$$1 \leq \alpha \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

זה אינטגרל לא אמיתי, אלא תחתית.

זהו הפרטים לא חשובים (הפונקציה) לא תעלה בקריטריון הפיתרון הוא לחתך אפילו באמצע ולספקם בעזר בפרט.

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^\infty - n \int_0^\infty -e^{-x} \cdot x^{n-1} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

אם נמשיך את האינטגרציה בתנאים חזר ושוב בסוף (קרי)

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

בעזרת זה אפשר לקרוא את $n!$ אינטגרל לריבוי

שבו הוא שלב חילוף רצוף.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$0 \leq t \quad e^{-t} \leq 1 \Rightarrow t^{\alpha-1} e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$$

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} = \frac{t^\alpha}{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$t^{\alpha-1} e^{-t} = t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \leq M e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{2}} = 0$$

$$\int_1^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \leq M \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt$$

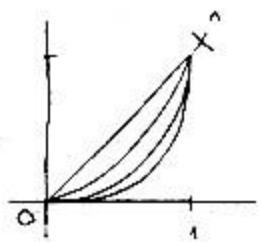
יהיה חשוב עליך אינטגרל מהצורה

$$M \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt$$

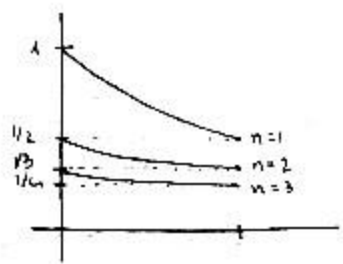
סדרות פונקציות

סמן $B^A = \{ f : A \rightarrow B \}$ קבוצת הפונקציות מ-A ל-B

הגדרה יפה: $X \subseteq \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות (ממשות) ב-X הפנה
 $f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto f_n$ כאשר $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^X$



① $f_n(x) = x^n \quad X = [0, 1]$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$
 מתבסס (גדול) לא $\lim$



② $g_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \quad X = [0, 1]$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ כן

משפטים חשובים

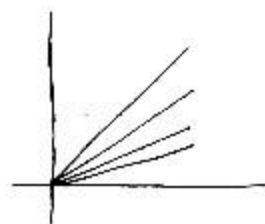
- האיט סדרת פונקציות מתכנסת (ויש להגדיר את זה בדיוק)
- אם היא מתכנסת, האיט רציפה, יחידות, אינטיגרליות
- חשיבות בינונית: מה סדרה שמתכנסת
- אנחנו נראה בהמשך שלא ולאחר מזה נראה בדיוק לענות בשיטאות פתולמיוס

הגדרה יפה: (f_n) ויפה $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ - סדרות ב-X
 נאמר ש- $f_n \rightarrow f$ (נקודתית) אם (f_n) סדרה
 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

וביונות

$\forall x \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$
 תלוי ב-x ב-epsilon

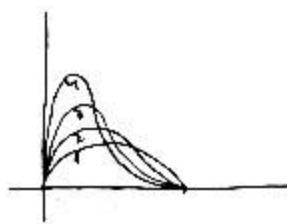
$$h_n(x) = \frac{x}{n}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \equiv 0$$

התכנסות בנקודה שווה

$$j_n(x)$$



אם רואים באופן מפורש אולי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} j_n(x) \equiv 0$$

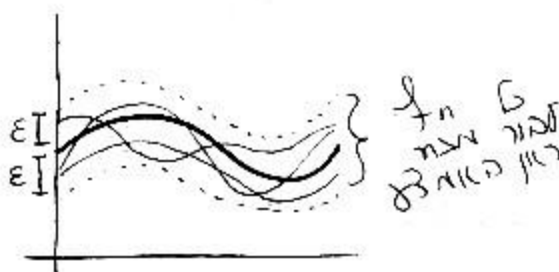
התכנסות נקודתית

הגדרה יפוי (f_n) - f מוגדרת ב X . (אולי ש-)

$f_n \rightarrow f$ בנקודה שווה ב X אם

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in X \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ההבדל הוא להתכנסות בנקודה שווה ב X תלוי רק ב- ϵ ולא ב- x .
זה אומר שניתן N מסוים שתלוי ב- ϵ ויכולים לתתם את ϵ הפונקציות
המשותף ϵ מוגדר.



נשאלים איך ההגדרה של התכנסות בנקודה שווה:

(f_n) - f מוגדרת ב X . $f_n \rightarrow f$ ב- X אם בנקודה שווה אם

$$\exists \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists x \in X |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$$

זה אומר שיש תמיד סדרה (f_{n_k}) וסדרה (x_k) כך

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \epsilon$$

זה כמובן יוצא מוקדית היתה $f_n \rightarrow f$.

דוגמה 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ על $[0,1]$ רק x בהחלקה שווה

$f_k(x_k) = \frac{1}{2}$ וכן $x_k = \sqrt[k]{\frac{1}{2}} \rightarrow 1$
 $|f_k(x_k) - f(x_k)| = \frac{1}{2}$ וכן
 $x_k \neq 1$

$\Leftarrow$ אם ניקח $\frac{1}{2} > \epsilon$ נראה שלכל n (התכנסות בהחלקה שווה)

$g_n(x) = \frac{1}{x^{2+n}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ על $[0,1]$ שני, דוגמה

והתכנסות נכזבת בהחלקה שווה

בהנחה $0 < \epsilon$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{N} < \epsilon$ כל $n \in \mathbb{N}$
אם $N < n$ אז $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$ אז $\frac{1}{x^{2+n}} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |\frac{1}{x^{2+n}}| < \epsilon$

הערה: יהיו (f_n) פונקציות X -המשותפות $\sum f_n$ שיהיה
אחרים נקודתית f -סדר אם $f(x) = \sum f_n(x)$ $x \in X$ כל
 $\forall x \in X \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |\sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x)| < \epsilon$

הערה: יהיו (f_n) פונקציות X -המשותפות

אם $\sum f_n$ מתכנס f -סדר בהחלקה שווה X -המשותפות
 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in X |\sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x)| < \epsilon$

דוגמה 2

$f_n(x) = x^n$ $X = (-1, 1)$ (1)
 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$
כיוון $n=1$ $\downarrow$ $\frac{1}{1-x}$ $\downarrow$ -1
הקטנה x^n $\downarrow$ x^n $\downarrow$ x^n

$g_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ (2)
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x^2 \left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}} - 1 \right) & x \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

כי $\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Leftarrow x^2 \geq 0$ כל x (דגש: $1 < 1+x^2$)

כל מתכנס בכל $\mathbb{R}$ אבל לא בהחלקה שווה

(3) סדר גודל אינסוף כסדרה ואינסוף

$$h_1(x) = x$$

$$h_n(x) = x^n - x^{n-1} \quad 1 < n$$

$$h_1(x) + \dots + h_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots + (x^n - x^{n-1}) = x^n$$

x^n אינו פונקציות מתכנסות אלא במידה שווה

אם הסדר $\sum h_n$ מתכנס אבל לא במידה שווה

משפט (קריטריון קושי): (f_n) מתכנסת במידה שווה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

אם $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כזה שכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ אז

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad x \in X$$

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח (f_n) מתכנסת $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ במידה שווה יו"י $\epsilon > 0$

יו"י $N \in \mathbb{N}$ מספר מסוים שכל $N < n$ אז $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad x \in X$

אם $n, m > N$ אז $x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

($\Rightarrow$) מתר

18.5.06
 אנה

קריטריון קושי - (f_n) מוגדרת ב- X . (f_n) מתכנסת במידה X -ב-
 שווה אם $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in X \quad N < n, m \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

הוכחה:
 $(\Leftarrow)$ הוכחנו את זה.

$(\Rightarrow)$ למה שמתקיים הקריטריון. ברצונו בהוכחה קריטריון קושי
 וצריך מוגדר למעלה.

נשים לב שלב $x \in X$ בסדרה $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ בעזרת סדרת קושי,
 ולכן מתכנסת. אזי נובל להגדיר $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ כך

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

נראה ש- $f_n \rightarrow f$ במידה שווה

בהנחת $0 < \epsilon < \epsilon' < \epsilon$. עבור $\epsilon' > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$
 אשר לכל הקריטריון מתקיים

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad N < n, m \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon'$$

נסמן שלב $n \in \mathbb{N}$ וכל $x \in X$ יתקיים הדבר הבא:

$$N < n \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

וכך מוכיח את ההתכנסות במידה שווה. אז נראה את
 הסדרה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש- $N < n, m$. אזי לכל $x \in X$
 $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon'$ (קבע את n ונתן $\delta = m$ למשל)
 באינסוף ונקבל עבור $N < n$: $x \in X$



$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon' < \epsilon$$

קריטריון קושי עבור סדרת פונקציות:
 (f_n) מוגדרת ב- $X \subset \mathbb{R}$. $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה אם $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in X \quad N < n < m \Rightarrow |\sum_{j=n}^m f_j(x)| < \epsilon$

התאמה להתכנסות במידה שווה (הוכחה)

קריטריון ווייטשטראס

תפי (f_n) מוגדרת ב- $X \subseteq \mathbb{R}$. תפי (M_n) סדרה ב- $\mathbb{R}$ אם
שלילית אשר מק"מ:

$$(i) \sum M_n \text{ מתכנס}$$

$$(ii) x \in X \text{ לכל } |f_n(x)| \leq M_n$$

אז $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה ב- X .

דוגמה: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$. $| \frac{\sin nx}{n^2} | \leq \frac{1}{n^2} = M_n$

ידוע ש- $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס. $\Leftarrow \sum \frac{\sin nx}{n^2}$ מתכנס בא"ש ב- $\mathbb{R}$.

הוכחת הקריטריון: נניח שמתקיים אלה מתקיים קריטריון קאשי
למתכנסות במידה שווה של סדרים.

בהינתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$ אשר ממטיח (לפי קאשי עבור $\sum M_n$)

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad N < n \Rightarrow \left| \sum_{j=n+1}^m M_j \right| < \varepsilon$$

אזי (נקרא עבור $N < n < m$)

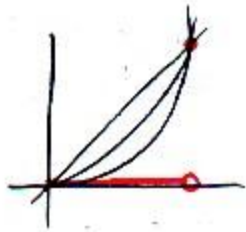
$$\left| \sum_{j=n+1}^m f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^m |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^m M_j < \varepsilon$$

Ⓜ

מסקנה מההוכחה: $\sum |f_n|$ מתכנס. לכן בתנאי הקריטריון
 $\sum f_n$ מתכנס בהתאם ובמידה שווה.

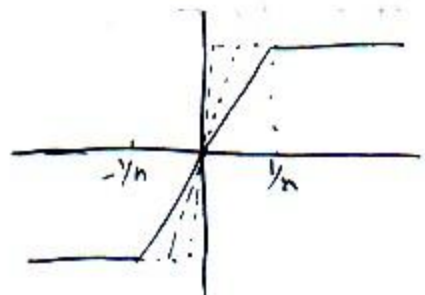
התכנסות הנצחה שווה ורציפות (1)

במאמר אחר:



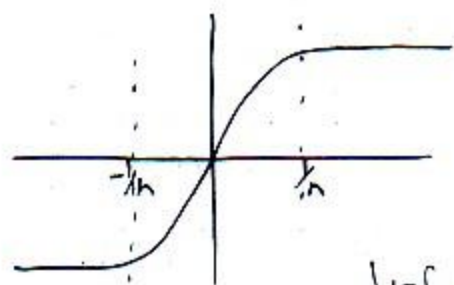
(1) כאן, נניח: $f_n(x) = x^n$ $X = [0, 1]$
 $f = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ $f_n \rightarrow f$

אבל! הסיקציה רציפה אבל הגבול לא!



(2) $g_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$
 $g_n \rightarrow g$
 $g(x) = \text{sign}(x)$

אבל! הסיקציה רציפה אבל הגבול לא!



(3) $h_n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \sin(n\frac{\pi}{2}x) & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$
 $h_n \rightarrow \text{sign}$ כאן
 אבל! הסיקציה רציפה אבל הגבול לא!
 אלא! אלו

(4) $d_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^{2m}$

$n!x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos n! \pi x = \pm 1 \Rightarrow (\cos n! \pi x)^{2m} = 1 \Rightarrow d_n(x) = 1$
 $n!x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow -1 < \cos n! \pi x < 1 \Rightarrow (\cos n! \pi x)^{2m} < 1 \Rightarrow d_n(x) = 0$

$\Rightarrow d_n \rightarrow d$ $d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

לא פונקציה רציפה!
 Oh my God!

האם יש פונקציה רציפה?
 כן! $n!x \in \mathbb{Z}$
 כן! $x \in \mathbb{Q}$
 כן! $x \in \mathbb{Q}$

משפט דני: תהי (f_n) סדרת פונקציות בקטע I . ונניח $f_n \rightarrow f$ במובן I .
אם f_n רציפה ב- $a \in I$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אז f רציפה ב- a .
הוכחה: זריק, פורמלי, שלילי (הגדרת הרצפות):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

יהי $0 < \varepsilon$. היותו הרצפות במובן I של f נובע מ- $n \in \mathbb{N}$ אשר מספיק
גדול כך ש- $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. היותו הרצפות של f_n ב- a עבור אותו

ε יהי $0 < \delta$ אשר מספיק קטן ש- $|x-a| < \delta$ אז

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{לכל } x \in I \text{ וקבל עבור } x \in I \text{ עם } |x-a| < \delta$$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

כא $a \in I$

□

משפט דני: יהיו (f_n) ו- f רצפות בקטע סגור I .
אם (f_n) מונוטונית ושושלת נוקטת f , אז $f_n \rightarrow f$ במובן I .

הערה: (f_n) מונוטונית זה אומר שלכל $x \in I$ או $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ או $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

הוכחה: בהינתן $f_n \leq f_{n+1}$ (אחרת (תבנו ב- $(-f_n)$ וב- $(-f)$)
נבחר סדרה חדשה $g_n = f - f_n$.

(g_n) סדרה של פונקציות רצפות, אי שליליות אשר שואפת
מונוטונית ונקודתית לאפס. כלומר

(i) g_n רצפה ב- I

(ii) $0 \leq g_n$ ב- I

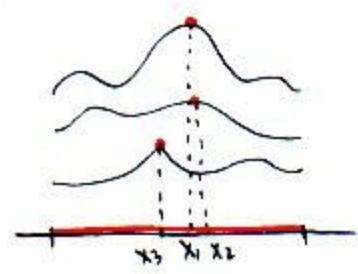
(iii) $g_{n+1} \leq g_n$

(iv) $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ לכל $x \in I$

מספיק לראות ש- $g_n \rightarrow 0$ במובן I .

נבחר $\varepsilon > 0$. נגדיר $M_n = \max_{x \in I} g_n(x)$. זה בסדר כי g_n רצפה בקטע
סגור וחסום.

מספיק להראות ש $M_n \rightarrow 0$ -
 בהנחת $\forall n \in \mathbb{N} \quad N < n \Rightarrow M_n < \varepsilon$
 $\Rightarrow g_n(x) \leq M_n < \varepsilon$



אם נראה באחד ש $M_n \rightarrow 0$

ובין $x_n \in I$ רק ש $M_n = g(x_n)$

(x_n) סדרה ב- I קטע חסום וסגור. לפי משפט בולצ'ונו
 וירשטראס תפי (x_n) ת"ס מתכנסת ל- c .
 I סגור $\Leftarrow c \in I$. (תמוך בסדרה $(g_n(c))$ בדיור ש-
 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = g(c)$ במלל פונקציות הנקלציות
 בהנחת $\forall n \in \mathbb{N} \quad J < n$ אש מבטיח שלב $J < n$
 $g_n(c) < \varepsilon$

צד נפרד ב- c . לכן קיים δ אש מבטיח שלב

$$0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon \quad x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I$$

ידי $K \in \mathbb{N}$ קי $x_{n_k} \in (c-\delta, c+\delta) \cap I$ ואז $J \leq n_k$
 ידי $N = n_k$. תרשו לך $N < n$

$$g_n(x) \leq g_{n_k}(x) \leq M_N = g_{n_k}(x_{n_k}) \leq \varepsilon$$

מנוסחה

11

צביק אפחין אמתו לקוחים את ההונאה בעין וקולל את
 המשפט - להוכיח הנחות ולהבא דוגמה נכונה



$$f_n \rightarrow f \text{ נקח } f$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{כאשר}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\text{אם } f_n \in C \quad \text{אז}$$

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

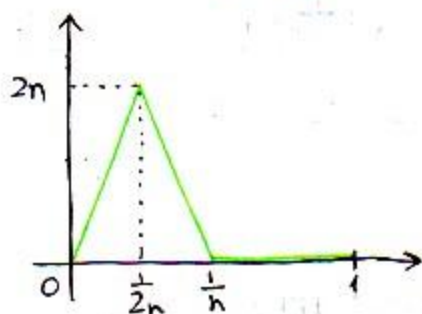
התחלנו

$$\text{אם } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{אז } f \in C \quad \text{אז}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

ואז תמיד נשים f_n - ע - f ונבדוק. אחת זה לא נכון שגם זה תמיד לא נכון.

התחלנו במידה שווה ואנחנו



אנחנו נראה:

f_n מתכנסת ל-0

ברור ש- f_n מתכנסת ל-0

פונקציות האם $f \equiv 0$

ובדוק גם $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ זה אכן נכון?

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

אז כן! אנחנו רואים שזה לא תמיד מתקיים...

משפט: תהי (f_n) סדרה של פונקציות (חסומות!) אינטגרליות

ה- $[a, b]$ אשר מתכנסת ב- $[a, b]$ במידה שווה לפונקציה f .

אזי f אינטגרלית ב- $[a, b]$ ומתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

הוכחה: נראה ל- f אינטגרלית ב- $[a, b]$.

מספיק להראות שלכל $0 < \varepsilon$ קיימות $g \leq f \leq h$ אינטגרליות

ב- $[a, b]$ כך ש $\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx < \varepsilon$

יהי $N \in \mathbb{N}$ אשר אמטיה

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N < n \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon / (b-a)$$

$$-\frac{\varepsilon}{(b-a)} + f_n(x) < f(x) < \frac{\varepsilon}{(b-a)} + f_n(x) \quad \text{באור}$$

נקבע $N < n$ ונגדיר עבורו

$$g(x) = -\varepsilon/4(b-a) + f_n(x)$$

$$h(x) = \varepsilon/4(b-a) + f_n(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx = 2 \int_a^b \frac{\varepsilon}{4(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

נראה עתה ש- $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

בהינתן $0 < \varepsilon$ יהי $N \in \mathbb{N}$ מספיק גדול (בהתאם להתכנסות במידה שווה)

אשר אמטיה $N < n$ כך ש $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\Rightarrow \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$



מסקנה מהבוכחה: בתנאי המשפט, אם נגדיר עבור $x \in [a, b]$

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

מתכנסת ב- $g = \int_a^x f(t) dt$ במידה שווה

$$\left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon$$

ולא תלוי ב- x

$$f_n(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! x \pi))^{2m} \quad \text{ראונו}$$

$$f_n(x) \rightarrow D(x)$$

האם f_n אינטגרליות?

$f_n(x) = 0$ אם x שלם ו- $x \in \mathbb{Z}$. זה מספר סופי של נקודות בקטע $[a, b]$ הסופי. יתכן ש- $\int_a^b f_n(x) dx = 0$ אבל ודאי ש- $D(x)$ פונקציה אנה אינטגרלית. $\Leftarrow$

התכנסות אחידה שווה וזכורות

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad \text{אנטי צימוד}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$f_n \rightarrow f = 0 \quad \Leftarrow$$

$$f'_n(x) = \cos nx \cdot \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cos nx \quad \text{אם}$$

(f'_n) אינה מתכנסת!!!

מה??? רשעושים אנטגרה באופן מסוים מתחילים פתולוגיה, אבל רשעושים (גלגל צוקא) גדג'ילים אומר!

משפט: תהי (f_n) סדרה של פונקציות ^{רציפות} גזירות בקטע I יק ש-

אם (f'_n) בינו סדרה של פונקציות רציפות ב- I אשר מתכנסת בג'ם לפונקציה g בא קטע סגור ב- I . אז f גזירה ב- I ומתקיים $f' = g$. (f_n) מתכנסת ל- f !

בוחנה: נשים $\heartsuit$ (f'_n) סדרה של פונקציות רציפות. לכן g גזירה רצפה בינו והתכנסות אחידה בא קטע סגור ב- I . יתכן ש- (f'_n) סדרה של פונקציות אינטגרליות בא תת קטע סגור ב- I . לכן עבור $x \in I$

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{\text{לפי גזירה חשבונית}} \int_a^x g(t) dt$$

(לפי גזירה חשבונית)

($f_n(x)$) לפי $f_n(x) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_n(a) + \int_a^x g(t) dt \right]$ $x \in I$ כדי
 $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ וכן $x \in I$ מתקיים כדי

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_n(a) + \int_a^x g(t) dt \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \int_a^x g(t) dt$$

← אזי ישנו יחיד כי g רציפה

$$f'(x) = 0 + g(x)$$

(לפי גזירה חשבונית)

סדרת חזקות (Power Series)

יהיו $a \in \mathbb{R}$ ו- (c_n) סדרה ב- $\mathbb{R}$
הסדר $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ נקרא סדר חזקות.

דוגמאות:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $c_n = \frac{1}{n!}$, $a=0$. ידוע ש- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ לכל x .

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $c_n = 1$, $a=0$. ידוע שלה מתכנס רק ב- $(-1, 1)$.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, $c_n = n!$, $a=0$. קל להשתכנע שסדר זה מתכנס רק ב- $x=0$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a=0$. ברור שהסדר מתכנס ב- $(0, 1)$.

כי הוא מתכנס לשם ההדדיות. כמו כן, ב- $x=1$ מתקבל סדר זיכרון לכן מתכנס, אבל ב- $x=-1$ מתקבל הסדר ההדדיותי שאינו מתכנס. סדר זה מתכנס ב- $[-1, 1)$.

* נניח מעולם
 ש- $a=0$

הדוגמאות האלה משאנות אותנו ל...

משפט:

בהינתן סדר חזקות מהצורה $\sum c_n x^n$ מתקיים אחד מהבאים:

- (1) הסדר מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$
- (2) קיים $R \in \mathbb{R}$, $0 < R$ כך שהסדר מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$ רק ש- $|x| < R$.
 (מתקבל לכל $x \in \mathbb{R}$ רק ש- $|x| < R$.)
- (3) הסדר מתכנס רק עבור $x=0$.

זו כן, ניתן לדבר על קטע ההתכנסות I של הסדר.
 קטע זה ניתן סימטרי ביחס לאפס ואורכו הותאם ל-
 (1) $R=\infty$ (2) R (3) $R=0$

ניתן לדיוס ההתכנסות של הסדר.

למדה: אם הסדר $\sum C_n x^n$ מתכנס עבור $x \in \mathbb{R}$ אזי הוא מתכנס עבור $\mathbb{R}$ אם $x \in \mathbb{R}$ כן ש- $|x| < |r|$.

הוכחה: יהי $r \in \mathbb{R}$ $0 \neq r$ כן ש $\sum C_n r^n$ מתכנס. אזי $(C_n r^n)$ שואפת לאפס ולכן תסומה. יהי $M \in \mathbb{R}$ אזי לקיים $|C_n r^n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

יהי $x \in \mathbb{R}$ כן ש- $|x| < |r|$. נראה שהסדר $\sum C_n x^n$ מתכנס בהתאם.

$$\sum |C_n x^n| = \sum |C_n (\frac{x}{r})^n \cdot r^n| \leq M \sum |(\frac{x}{r})|^n$$

והי $|\frac{x}{r}| < 1$ ולכן $\sum |\frac{x}{r}|^n$ מתכנס.

הוכחת המשפט: יהי $I = \{x \in \mathbb{R} : \sum C_n x^n < \infty\}$

$I \neq \emptyset$ כי $0 \in I$. נניח ש- I חסומה למעלה ויהי $R = \sup I$.

בהנחת $x \in \mathbb{R}$ כן ש $|x| < R$. קיים $r \in I$ כן ש $|x| < r \leq R$.

אזי $\sum C_n r^n$ מתכנס ולכן $\sum C_n x^n$ מתכנס ולכן $x \in I$.

הקרא המעבר ישם אם שבמקרה $R = 0$ אז $I = \{0\}$.

אחרת, אם היה $0 < r < R$ אז לפי הנחה היה $|r| < r' < R$.

ה- I בסתירה לכן ש- $\sup I = 0$.

אם I אינה חסומה למעלה. בהנחת $x \in \mathbb{R}$ כן ש $|x| < R$ ויהי $r \in I$.

כך ש $|x| < r$. $\sum C_n r^n$ מתכנס ולכן $\sum C_n x^n$ מתכנס.

ולכן $x \in I$. (שהרי לפי הנחה אם $\sum C_n r^n$ מתכנס ו- $|x| < r$ אזי עבור x גם $\sum C_n x^n$ מתכנס).

אזי עבור x גם $|x| < r$ אז $x \in I$ אלא $-x \in I$. (ii)

משפט (קושי-הדלמר): בהנחת $\sum C_n x^n$ אזי

$$R = 0 \quad \frac{1}{R} = \infty$$

$$R = \infty \quad \frac{1}{R} = 0$$

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|C_n|}$$

הוכחה: גססוק רובעלי את קריטריון השורש עבור הסדר

$$\sum |C_n x^n| : (*) = |x| \cdot \limsup \sqrt[n]{|C_n|} = \limsup \sqrt[n]{|C_n x^n|}$$

אם $(*) > 1$ אז $\sum |C_n x^n|$ מתכנס.

אם $(*) < 1$ אז $\sum |C_n x^n|$ מתבדר.

אם שמש ידבין בתכנסות להתבדרות הלא $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|C_n|}$ (ii)

57

משפט: הדרגת $\sum C_n x^n$ שזו לה מתכנס המידה שווה גם
קטע סגור $[r, r]$ שמוט נקטע והתכנסות I .
פונקציה: אם $|x| \leq r$ מתקיים

$$\sum |C_n x^n| \leq \sum |C_n r^n|$$

הטענה נובעת מקריטריון וירשטראס (M -Test): אם $\sum M_n$
מתכנס ו- $|f_n(x)| \leq M_n$ אז $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש.
וכאן הרי $C_n r^n$ הם מספרים. (11)

נשים לב: עבור $x \in I$ הסדר $\sum C_n x^n$ מחזור
פונקציה $f(x) = \sum C_n x^n$. זו פונקציה רציפה גם
תת קטע I של I . לכן יש להתכנסת היא קבוע
ואנחנו מצביים על פונקציות שהם רציפים, יפים וכו'.

משפט (אבל): נניח שהסדר $\sum C_n$ מתכנס. תהי
 $f(x) = \sum C_n x^n$ מוגדרת עבור $-1 < x < 1$. אז

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum C_n = f(1)$$

הוכחה: (12) $S_n = C_0 + \dots + C_n$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_k x^k &= S_0 + \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) x^k = \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^n S_k x^k - \sum_{k=1}^n S_{k-1} x^k = \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^n S_k x^k - x \sum_{k=1}^n S_{k-1} x^{k-1} = \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^n S_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k = \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^n S_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k + S_n x^n = \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^n S_k x^k - x \sum_{k=1}^n S_k x^k - S_0 x + S_n x^n = \\ &= S_0 + \left[\sum_{k=1}^n (S_k x^k) \right] (1-x) - x S_0 + S_n x^n = \\ &= (1-x) \sum_{k=1}^n S_k x^k + S_n x^n \end{aligned}$$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ מתקיים $f(x) = \sum C_n x^n$ עבור $-1 < x < 1$ ואם $x \rightarrow 1^-$
גם מתכנס. והי S הגבול שלה $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$. $-1 < x < 1$
 $S_n x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff x^n \rightarrow 0 \iff$

סדרת פולינומים $(\sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k)$ - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k = f(x)$ מתכנסת (נקרא $f(x)$)
 מתכנסת ומתקיימת $f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k$
 נשים לב ש $S = f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$ (סדרת פולינומים)

$$f(1) - f(x) = S - (1-x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k \right) =$$

$\downarrow$
 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$

$$= S \cdot 1 - (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k = S(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k - (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k =$$

$$= (1-x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (S - S_k) x^k \right)$$

נבחר $0 < \varepsilon$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך ש $|S - S_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ עבור $N \leq k$
 $f(x) - f(1) = (1-x) \left(\sum_{k=0}^N (S - S_k) x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} (S - S_k) x^k \right)$

$$\Rightarrow |f(x) - f(1)| \leq (1-x) \left(\sum_{k=0}^N (S - S_k) x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x|^k \right) (1-x)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \leq |(1-x) g_N(x)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

משפט אבס: נניח שסדר $\sum C_n$ מתכנס. יהי $f(x) = \sum C_n x^n$

אוליגדת עבור $-1 < x \leq 1$. אז $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum C_n = f(1)$

המשק הברחה: בשורה הקודם הגענו לזה -

עבור $x \neq 1$ $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

מכאן קושי של סדרים:

$$(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$$

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

ע"י מכאן קושי של סדרים (נ"ח ל- $\sum d_n = \sum x^n \sum C_n x^n = \sum d_n$ אז $d_n = \sum_{i+j=n} x^i C_j x^j = x^n \sum_{j=0}^n C_j$ וזה אכן מה שקיבלנו בס
אני צריכה עקרון בשורה הקודם. (אז אולי היה צריך לזכור)
בשיטה זו מראש ...)

$$(*) f(1) - f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (S - S_n) x^n$$

אנחנו רוצים להראות ל- $(*) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.
בנקודה $0 < \epsilon$ ניקח $N \in \mathbb{N}$ אשר מבטיח ל- $0 < \epsilon$ $|S - S_n| < \frac{\epsilon}{2}$ $N < n$ ואז

$$f(1) - f(x) = (1-x) \sum_{i=0}^N (S - S_i) x^i + (1-x) \sum_{i=N+1}^{\infty} (S - S_i) x^i$$

עבור $0 < x < 1$ מתקיים

$$|f(1) - f(x)| \leq (1-x) \sum_{i=0}^N |S - S_i| x^i + (1-x) \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=N+1}^{\infty} x^i \leq$$

$$\leq \underbrace{(1-x) \sum_{i=0}^N |S - S_i| x^i}_{\substack{\text{זה פשוט} \\ g_N(x) \in \mathbb{R}[x]}} + \frac{\epsilon}{2} \underbrace{(1-x) \sum_{i=0}^{\infty} x^i}_{=1}$$

$(x-1)g(x)$ פולינום. על ϵ פונקציה רציפה ב- R , נבחר $\delta > 0$ כזה ש- $0 < \delta < 1$ ו- $0 < x < 1 + \delta$ אז $|g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.
 עבור $0 < \delta < 1$ ו- $0 < x < 1 + \delta$ אז $|g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.
 שיהי דראני ש- $|f(x) - f(1)| < \epsilon$.
 (11)

משקלה: נניח ש- $\sum C_n x^n$ רצוף בתכונות $0 < R < \infty$ ו- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ אז $x = R$.
 מוחרת בקטע $-R < x \leq R$ ורציפה משמאל ב- $x = R$.
 (וכן) לזכו התכונות ב- $x = -R$.
 הוכחה:

נגדיר $g(x) = f(xR)$ לזכו g עומדת בתנאי משפט אבס (בשלב המוקד השלישי) אז $h(x) = f(-xR)$ וזהו עומדת בתנאי משפט אבס.
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow R^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow R^-} f(xR) = g(1) = f(R)$
 $\lim_{x \rightarrow -R^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -R^+} f(-xR) = h(-1) = f(-R)$
 וזהו מדוכחה של פונקציה נובעת. (11)

גזירה ואינטגרציה של סורי חזקות

משפט: יוני $\sum C_n x^n$ סרי חזקות בעל רציוס התכונות $0 < R$ נתבון בפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ עבור $|x| < R$. אז f גזירה עבור $|x| < R$ ומתקיים ש- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$

משפט: יוני $\sum C_n x^n$ סרי חזקות בעל רציוס התכונות $0 < R$. יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ עבור $|x| < R$. אז $f \in \mathcal{R}[a, b]$ וזה $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b$

הוכחה בוג: אנשים אחרות שלטחים

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n C_n X^{n-1}$
- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} X^{n+1}$

אנחנו רוצים להתנסות R. זאת זה צריך לשאר לכן בתנאים.
כמז: $\frac{1}{R} = \limsup |C_n|^{1/n}$

אם אפשר זה יותר יפה: אחרות שלם (1) מתכנס ב- $x=r$.
אז זה (2) ו- (3) מתכנסים שלם. ואם עזי התכנסות של
(גזרת והאינטגרל) אפשר אחרות להתבונן חיים אחרות לזה.

מסקנה: אם f מוגדרת במחלקה אזי f בעלת גזרת מכל
סדר ב- $|x| < R$!

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} C_n X^{n-k}$$

יתר על כן: $C_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ שלה כמו סדר טיילור.
אז חלקות הוא למעשה רישים אלגנטי של פונקציות טיילור
אם הסדרים סביב המרכז.

זה לא נכון של פונקציה אשר לדרגה כמו חלקות. למשל ראו
בתחילת הסמסטר את $f(x) = e^{-x^2}$.
אבל ג-א (א) נובע שלם יש הדרגה חסר חלקות אל היא יחידה!

חלל שמחה!

4/6/06

מבטאים
פרקטוריאלי
♡♡♡♡

הפונקציות האלמנטריות

(1)

$$C_n = \frac{1}{n!} \quad a=0 \quad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

סדר זה מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$ (ר"ל סדר טור)

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \quad \text{ו} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \quad \text{אם}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}} = \infty$$

כאן נסדר חקירה גור אנטוס בעזרים. (גור)

$$\begin{aligned} E'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x) \end{aligned}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left(\frac{E(x)}{e^x} \right)' = \frac{E'(x)e^x - E(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{E(x)e^x - E(x)e^x}{(e^x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E(x)}{e^x} = C \in \mathbb{R} \Rightarrow E(x) = C e^x$$

$$1 = E(0) = C \cdot e^0 = C \quad \text{וב} \quad x=0 \quad \text{נקמה}$$

אפשר נובע בעזרים שכל יס פונק' f שלטורה בקטע פתוח
ש בקטע זה מתקיים $f(x) = C \cdot e^x$ וכל יצורים
תנאי היותה זה אומר למצוא את C .

(2)

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

לכל קטע לאו - דברים: - אלה פיתוחי טיילור של $\cos x$ ו $\sin x$

- רדיוס ההתכנסות אינסופי $R = \infty$

$$C(0) = 1 \quad C'(x) = -S'(x)$$

$$S(0) = 0 \quad S'(x) = C(x)$$

$$[C^2(x) + S^2(x)]' = 2C(x)(-S(x)) + 2S(x)C(x) \equiv 0$$

$$\Rightarrow C^2(x) + S^2(x) \equiv K \in \mathbb{R}$$

$$K=1 \quad (\text{d.h. } x=0 \text{ a})$$

$$[(\cos x - C(x))^2 + (\sin x - S(x))^2]' =$$

$$= 2(\cos x - C(x))(-\sin x + S(x)) + 2(\sin x - S(x))(\cos x - C(x)) \equiv 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - C(x))^2 + (\sin x - S(x))^2 \equiv K$$

$$x=0 \Rightarrow K=0$$

$$C(x) = \cos x \quad \text{sk. } \cos(0) = 1 \text{ a } \sin(0) = 0$$

$$S(x) = \sin x$$

$$Ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (3)$$

$$Sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$Ch'(x) = Sh(x)$$

$$Sh'(x) = Ch(x)$$

$$Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad R=1 \quad (4)$$

$$|x| < 1 \quad G(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$G'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

$$G''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

$$\vdots$$

$$G^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-(k+1)} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad \text{jele } 1/x$$

④

ואם הסדר הנמוך אפס אז לא נחשב איבר ויציג
 שהסכום של האינסוף יהיה האקסטרם של הפונקציה.

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

היה יכול להיות הפרש של קבוע אבל ע"י הנחה $x=0$
 מקבלים שלאן הפרש.

אם $|x| < 1$ אז $|x|^2 < 1$ (יותר קטן)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

$$\Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

$-1 < x \leq 1$ מתכנס עבור

ב- $(-1, 1)$ ראוי ל- $L(1+x) = \ln(1+x)$

לפי משפט אבל זה בסדר אם ב- $[-1, 1]$

$$-1 < x \quad B_\alpha(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (5)$$

מה קורה אם $\alpha \notin \mathbb{N}$ מחזירים

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{n!}$$

וכך מתאחד עם ההגדרה למקרה ש- $\alpha \in \mathbb{N}$

קיבלנו את $R=1$ (ע"י נוסחת הנדסה)

$$B_\alpha(1+x) = f(x) = (1+x)^\alpha \quad -1 < x < 1$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha f(x)$$

אם נראה ש- $f'(x) = \alpha f(x)$ (נזכר את זה ביום רביעי)

נזכר לראות את הטענה:

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{((1+x)^\alpha)^2} =$$

$$= \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - (1+x) f'(x) (1+x)^{\alpha-1}}{((1+x)^\alpha)^2} \equiv 0$$

$$\Rightarrow f(x) \equiv C(1+x)^\alpha$$

$$x=0 \Rightarrow C=1$$

62 4.6.06
א"ב

$$\alpha \notin \mathbb{N} \quad |x| < 1 \quad -\delta \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha \quad \underline{\text{ד"ר}}$$

נניח שאנחנו מאמינים בשוויון. אז חסרת הוכחה אנחנו פה.
אם נגזור את זה בשוויון:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow (1+x) f'(x) = \alpha(1+x)^\alpha = \alpha f(x)$$

אם נגזור (זהו) את זה (קראו) שוב לא בשוויון. אז נראה
של $(1+x) f'(x) = \alpha f(x)$ מתקיים $-1 < x < 1$ (קראו)
הוכחה:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n$$

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{(n+1)n!} = \frac{\alpha}{n+1} \cdot \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots((\alpha-1)-n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{\alpha}{n+1} \binom{\alpha-1}{n}$$

$$\Rightarrow (1+x) f'(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^n =$$

$$= \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right] x^n = \alpha + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n =$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad = \alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha f(x)$$

אז אם נקבל? זה תהיה $\alpha - 2$...

הגדרה: תהי f מוגדרת בקטע I . נאמר ש- f אנליטית ב- I אם לכל $a \in I$ קיימים (a_n) ב- $\mathbb{R}$ וסביבה $U \subset I$ של a כך של- $x \in U$ נכון $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$.

משפט: תהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ עבור $|x-a| < R$. אזי f אנליטית בקטע $I = (a-R, a+R)$.

המילים אחרות, נכון $b \in I$ קיים (b_n) ב- $\mathbb{R}$ כך של- $|x-b| < R - |b-a|$ נכון $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-b)^n$.

דוגמה: $f(x) = \frac{1}{x}$ אנליטית עבור $0 < x$.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a-(a-x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-(\frac{x-a}{a})} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-x}{a}\right)^n$$

$$\begin{aligned} & \text{כך} \\ & \left| \frac{a-x}{a} \right| < 1 \\ & \Leftrightarrow \\ & |x-a| < a \end{aligned}$$

הוכחה המשפט: יהי $b \in I$. נ"ל $|x-b| < R - |b-a|$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(x-b) + (b-a)]^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right) =$$

$$\stackrel{\substack{\text{כך } \binom{n}{i} \\ \text{מתאפיין } i=0 \dots n}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right) =$$

$$\stackrel{\substack{\text{אפשר לכתוב } \\ \text{כי הסדר הרגיל} \\ \text{מתאים בהחלט}}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (b-a)^{n-i} \right)}_{b_i \text{ (כך)}} (x-b)^i$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-b)^n$$



$$x: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(i,j) \longmapsto x_{ij}$$
$$x_{ij} \longrightarrow x$$

סדרה רפואה:
התכנסות:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m > N \quad |x_{nm} - x| < \epsilon$$

כמו סדרה רפואה אפשר להסתכל על טור רפואה. לטור רפואה יש סדרה רפואה שהיא סדרת סכומים חלקיים והטור מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת.

סידור של הסדרה הרפואה (x_{ij}) הינו פונקציה חתום וזה $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. g יהיה ככה $x \circ g$ אנתנו מקבלים סדרה רפואה (לא רפואה). $\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$. התפקיד של g הוא למנות פעם אחת ורק פעם אחת את כל האיגרות (j_i) . ההרכבה פשוטת רק: $n \mapsto g(n) = (i_n, j_n) \mapsto x_{g(n)} = x_{i_n j_n}$

משפט: בהיותן סדרה רפואה (x_{ij}) נניח שלקיים סידור $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ חתום וזה רק ל- $\sum_{n=0}^{\infty} x_{g(n)}$ מתכנס בהחלט וסכמו x . אז $\sum_{n=0}^{\infty} x_{h(n)}$ סדרה אחר $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ חתום וזה הטור מתכנס (בהחלט) וסכמו זה x .
יתר על כן לכל $i \in \mathbb{N}$ הטור $\sum_{j=0}^{\infty} x_{ij}$ מתכנס (בהחלט) ונניח ל- r_i . אז הטור $\sum_{i=0}^{\infty} r_i$ מתכנס (בהחלט) וסכמו x .
כך גם לידי העמודות.

בגור בחירה למשפט מהשיעור הקודם. נניח של $|x-a| < R$ מתקיים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

ויהי $b \in I$ רק ל- $|x-b| < R - |b-a|$ אז

$$(*) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(x-b) + (b-a)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right]$$

זה טור רפואה. ואם נשמיט את סמני סמני הסכום אז יש לנו פה סדרה רפואה. נרשום את איבריה:

$$\begin{aligned}
 & a_0 \binom{0}{0} (x-b)^0 (b-a)^0 \quad a_1 \binom{1}{0} (x-b)^0 (b-a)^1 \quad a_2 \binom{2}{0} (x-b)^0 (b-a)^2 \dots \\
 & a_1 \binom{1}{1} (x-b)^1 (b-a)^0 \quad a_2 \binom{2}{1} (x-b)^1 (b-a)^1 \\
 & a_2 \binom{2}{2} (x-b)^2 (b-a)^0 \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

זהו א בינוק סור כפול. זהו סור שהקניסו בו סוגריים לפי
הקנויים הורודים. אלה באותו סופן אנתו יחלים להסתם על
הסור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |x-b|^i |b-a|^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| [|x-b| + |b-a|]^n$
אם $|x-b| + |b-a| < R$ ולכן זה מתכנס (לפי הקנון).
אם זה סור חילוי ולכן ניתן להשאט אר הסוגריים ולסך
הסור של הסדרה בכפולה למשל מתכנס בהתלס ולכן ניתן
להשתמש במשפט:

אמנסכס סור כפול זה קנדם לפי שורות ואח"כ לפי עמידות
(קבל אר אותו הסכום):

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (b-a)^{n-i}}_{b_i} \right) (x-b)^i$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-b)^i$$

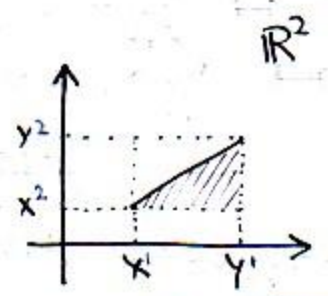
קיבלנו הצגה באמצעות חלקת של $(x-b)$

הנולא (האחרון)

אנטיציה: משוואת הגז האידיאלי: $PV = nRT$
 הטמפרטורה של הגז תלויה רק ב-P וב-V (הנפח).
 טמפרטורה היא פונקציה של שתי משתנים: $T = T(P, V)$

סיומן: יהי $p \in \mathbb{N}$
 $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_p = \{(x^1, \dots, x^p) : x^i \in \mathbb{R}\}$
 (אנחנו חתמים את האנצקט (אמצע) כדי

שנוכל לכתוב סדרות של נקודות ולשמור את אנצקט הסדרה (אמצע).
 נגדיר מרחק בין שתי נקודות: הרעיון הוא להכיל את התמונה
 לשפתנו מכירים במישור.



$$x = (x^1, x^2) \quad y = (y^1, y^2)$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2} = |y - x|$$

$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x^i - y^i)^2}$ האופן דומה בהנחה $x, y \in \mathbb{R}^p$ מוגדרים
 אלה נשים $\heartsuit$ שם $d(x, y) = |y - x|$ קונסיסטנטי עם
 הרעיון במרחב $\mathbb{R}$ ה- $\mathbb{R}$

המרחק הוא פונקציה $d: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. למשל, זו מטריקה,
 $(x, y) \mapsto d(x, y)$

טמפרטורה מרחק מרחק (הנאות):

- ① חיוביות $0 \leq d(x, y)$ - ! $d(x, y) = 0$ אם $x = y$
- ② סימטריה $d(x, y) = d(y, x)$
- ③ אי-שוויון ה- Δ $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

אי-שוויון ה- Δ זו התכונה היא ספציפית (היחידה). ראוי הוכחה
 באמצעות אי-שוויון ה- Δ אי-שוויון קושי-שוורץ.

סדרות ב- $\mathbb{R}^p$:

$$X : \begin{matrix} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ n & \longmapsto & x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p) \end{matrix}$$

כל שיקוף עמדת p סדרות ב- $\mathbb{R}$ (אחת לכל קואורדינטה)

הגדרה: $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^p$ נקרא סדרה מתכנסת אם קיים $x \in \mathbb{R}^p$ כך ש-

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall n' \in \mathbb{N} \ n > n' \Rightarrow |x_n - x| = d(x_n, x) < \varepsilon$$

והיחס d (הוא) נחשב (כנראה) זה המקרה הרגיל. וההנחה לה

עבור סדרה ב- $\mathbb{R}$.

משפט: תהיה $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^p$! $x \in \mathbb{R}^p$ אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) = 0 \in \mathbb{R}^p \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i \quad 1 \leq i \leq p \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad (ii)$$

למה: לכל $x, y \in \mathbb{R}^p$ מתקיים לכל $1 \leq i \leq p$

$$(x^i - y^i)^2 \leq (x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^p - y^p)^2 \leq p \max_{1 \leq j \leq p} (x^j - y^j)^2$$
$$\Rightarrow |x^i - y^i| \underset{(**)}{\leq} |x - y| \underset{(*)}{\leq} \sqrt{p} \max_{1 \leq j \leq p} |x^j - y^j|$$

הוכחה: נניח

הוכחת המשפט:

(i) נניח:

(ii) נניח: אם נרשם כך לא:

$$\Rightarrow \text{ידי } \varepsilon > 0 \text{ קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך של } 1 \leq i \leq p \text{ } |x_n^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$$

עם $n > N$ (בעצם N הוא המקסימום של כל המספרים

ב- $\mathbb{R}$ קואורדינטה בנפרד). לכן אם נא $|x_n - x| < \varepsilon$

$$\iff \text{הוכחה } \varepsilon > 0 \text{ קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך של } n > N \text{ } |x_n - x| < \varepsilon$$

$$\text{אם אז } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \iff \text{אם } (**) \text{ } |x_n^i - x^i| < \varepsilon \text{ } 1 \leq i \leq p$$



הגדרה: $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^p$ סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m > N$ מתקיים $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

משפט: $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^p$ מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ טריוויאלי

$(\Rightarrow)$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m > N$ $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

מהמחלק נקבל שלכל $i \in \{1, \dots, p\}$ $|x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$.

לכן (x_n^i) סדרת קושי ב- $\mathbb{R}$ ולכן מתכנסת. יהי x^i

הגבול שלה, $x^i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i$. יהי $x = (x^1, \dots, x^p)$.

אז $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ולכן נובע מהמשפט.



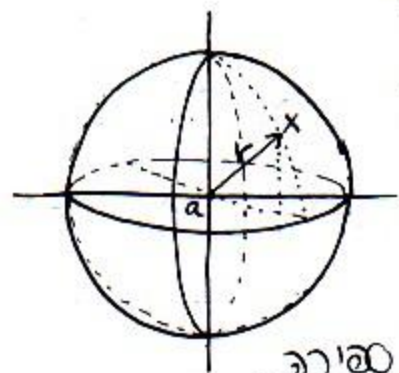
מבוא ל- $\mathbb{R}^p$

נזכיר (להרחיב את מושג הקטע).

כדור ב- $\mathbb{R}^p$: $0 < r \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^p$:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, a) < r\}$$

הכדור פתוח שמרכזו a עם רדיוס r .



$$\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, a) \leq r\}$$

כדור סגור שמרכזו a ורדיוס r .

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, a) = r\}$$

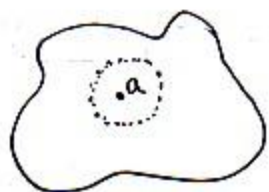
אפשר להרחיב את מושג הקטע זה ע"י תיבות:

$$I_i = \{x^i \in \mathbb{R} : a^i < x^i < b^i\} \text{ כאשר } I = I_1 \times \dots \times I_p \subseteq \mathbb{R}^p$$

$$a^1, \dots, a^p, b^1, \dots, b^p \in \mathbb{R}$$

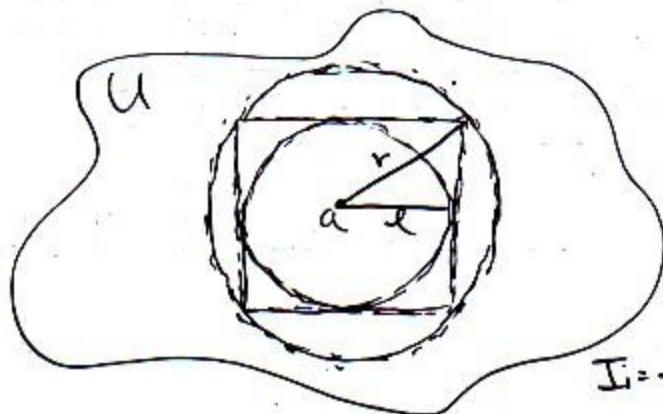
התורה היא פתוחה אם I_i פתוחים.

הגדרה: $U \subseteq \mathbb{R}^p$ תיקרא סביבה של $a \in \mathbb{R}^p$ אם קיים רדיוס פתוח שמרכזו a ונמצא כולו ב- U .



$$\exists r \in \mathbb{R} \quad B(a, r) \subseteq U$$

תנאי שקול הוא שלם קטן פתוח I ו- $a \in I \subseteq U$.



$$2\ell^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

$$I = \{x \in \mathbb{R}^p : |x - a| < \frac{\sqrt{2}}{2} r\}$$

אוקמה

הגדרה: תהי f פונקציה מ- $\mathbb{R}^p$ ל- $\mathbb{R}$ מוגדרת הסביבה של $a \in \mathbb{R}^p$ יהי $\ell \in \mathbb{R}$. (אמר שלדברו של f האשר $x \in \mathbb{R}^p$ שאלו a -סביבה הנו ℓ אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^p$ אם $0 < d(x, a) < \delta$ אז $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

אם $0 < d(x, a) < \delta$ וכן $0 < |x - a| < \delta$ אז $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
אם $d(x, a) = 0$ אז $x = a$ ואז $|f(x) - \ell| = |f(a) - \ell|$ וזה קטן מכל ε אם $\ell = f(a)$.

הגדרה: תהי f פונקציה מ- $\mathbb{R}^p$ ל- $\mathbb{R}$ מוגדרת הסביבה של $a \in \mathbb{R}^p$. נאמר ש- f רציפה ב- a אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

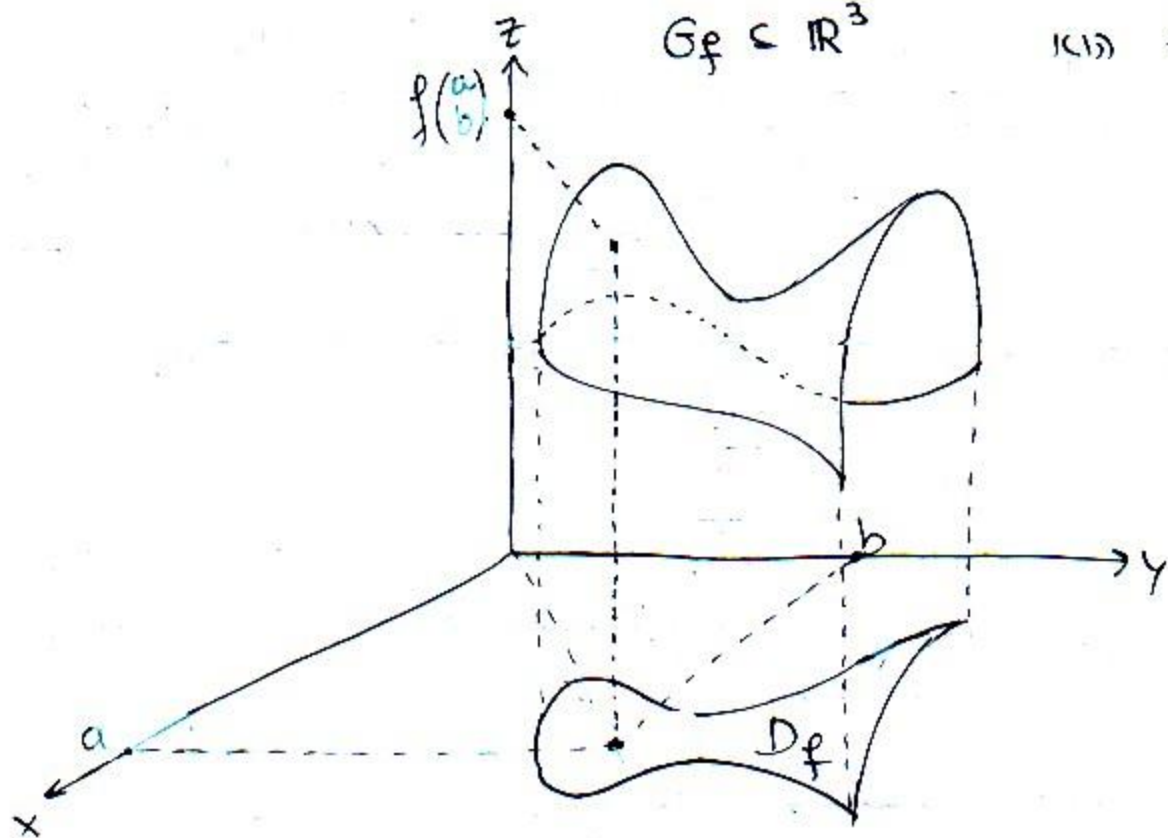
האמנות $p=2$

$$z = f(x, y) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto z$$

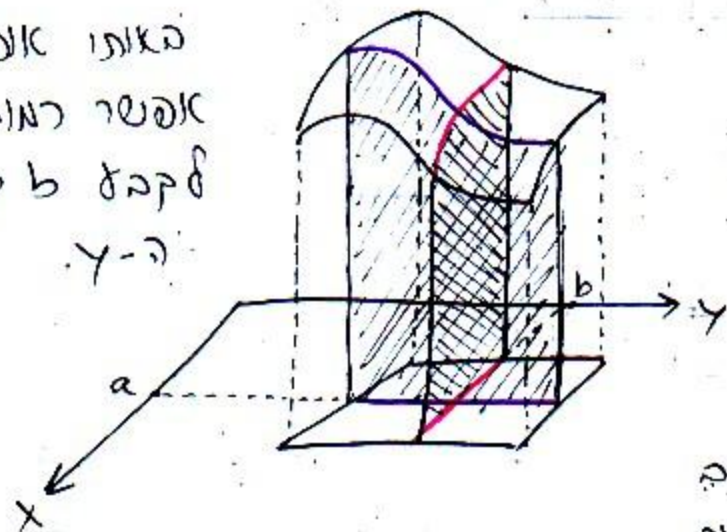
$$G_f \subset \mathbb{R}^3$$

הגרף הוא



אם ההמשלה היא אפס עם קצה בימין אחרים...
המאדים

באותו אופן
אפשר לחשוב
על קצה ב של צ
ה-y



אפשר להסתכל על
a בקבוצה ואז
העצם יש לנו פונקציה
של משתנה אחד
ואם (פרוט) או
הצורה הנתונה ממדי
לרקמות בקו (קבוצה) חופים
של פונק' במשתנה יחיד

זו הבעיה הראשונה אשר זה מסתב על פונקציה ארבע משתנים בלבד.
 על פונקציה במשתנה אחד.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{פונקציה}$$

הנה שאלתנו תלמידים עליה בבעיה אחת: אם פונק' (תורה ע')
 נוסחה xy מקבלת עומד. שיתחם ההגדרה שלה (אילו אם (אחר אחר)
 הוא ב הנקודה לבדן היא מלדור היטב.

$$\leftarrow \text{באן } D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

האם הפונקציה היא רציפה? בחר שהבעיה יורה לדור יקב - (0)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{נקבע את } x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{נקבע את } y.$$

פונקציה היא רציפה. a -אם: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ שמתקשר a - δ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \neq 0 \leftarrow f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{עם } x \text{ אחרים}$$

$\leftarrow$ הפונקציה אינה רציפה.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{פונקציה}$$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |x| \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|}{2}$$

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{|x|}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

הגדרה: הנה אם תלמי בכיוון שאלתנו. אחרת מלדור.

$\leftarrow$ אפשר להגדיר את ההגדרה הפונק' באופן רציף.

(67)

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xy - x + y}{x + y}$$

מאריך

$$y \neq 0 \quad f\left(\frac{0}{y}\right) = 1$$

$$x \neq 0 \quad f\left(\frac{x}{0}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{0}{y}\right) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{0}\right)$$

$(0) - 2$ לא $f - \delta \Leftarrow$



$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} y \sin \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

מאריך

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{לכל } y \neq 0 \quad \text{אם}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \quad \text{אם } x \text{ קבוע}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$|f\left(\frac{x}{y}\right)| \leq |y|$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

כמו ק"מ דבר

$(0) - 2$ לא $\Leftarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f\left(\frac{x}{y}\right)$$

הערות: תוצאות

משפט: ליה f מוגדרת בקטע $I = I_1 \times I_2$ פתוח
אם $x \in I_1$ ו- $\lim_{y \rightarrow b} f\left(\frac{x}{y}\right) = l$ אז $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f\left(\frac{x}{y}\right) = l$

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f\left(\frac{x}{y}\right) = l$$

הוכחה: נניח $x \in I_1$ ו- $\lim_{y \rightarrow b} f\left(\frac{x}{y}\right) = l$

היה $0 < \varepsilon < \delta$ קיים $\delta < \varepsilon$ ו- $0 < |x - a| < \delta$ אז

$$|f\left(\frac{x}{y}\right) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{אם } 0 < |y - b| < \delta$$

$$|l(x) - l| \leq |l(x) - f\left(\frac{x}{y}\right)| + |f\left(\frac{x}{y}\right) - l|$$

אם $0 < |y - b| < \delta$ אז $y \in I_2$ ו- $x \in I_1$

$$|l(x) - l| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |l(x) - f\left(\frac{x}{y}\right)| < \frac{\varepsilon}{2}$$



הגדרות חלקיות

תהי $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מסתירה $a \in \mathbb{R}^p$ אם קיים הגדרה

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a^1, \dots, a^i+t, \dots, a^p) - f(a^1, \dots, a^p)}{t}$$

נסמך $D_i f(a)$ ייכנה אותו ההגדרת החלקית של f לפי המשתנה ה- i ב- a .

סמנים אחרים: $f'_i(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

דוגמה 1: $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$ (צור חלקי לפי 2 המשתנים):

$$D_1 f(x, y) = y x^{y-1}$$

$$D_2 f(x, y) = x^y \ln x$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{דוגמה 2}$$

עבור (קצרות) שונות מהרשומות מתקיים

$$D_1 f(x, y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = y \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2 f(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

בראשית צריך לחשב לפי ההגדרה: די ברור ש-

$$D_1 f(0) = 0 = D_2 f(0)$$

לפי אתמול ראינו ש- f אינה רציפה ב- $(0, 0)$.

במסגרת הקורס ראינו שמשלם הגזירה יותר חלקי מוציאה -

פונקציה חייבת להיות רציפה בשליל להיות גזירה.

אז נאן נראה שהגזירה החלקית לא משקפה את

המשלם המשמעותי של ההגדרת המבנה החזק מאד:

(גזירה) תהי $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה סקלרית
 ו- $a \in \mathbb{R}^p$ נקודה (צירוף) f ו- a

ק"מ $\lambda: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

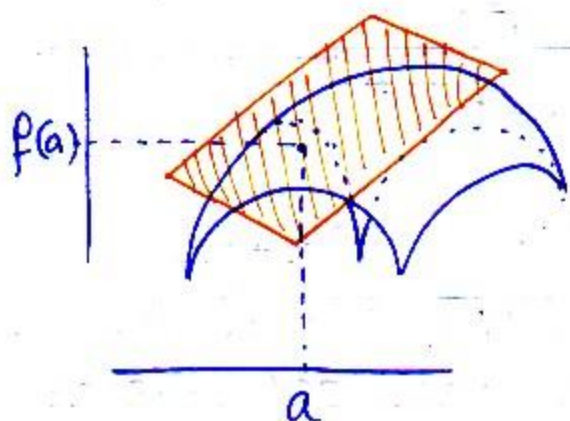
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{\|h\|} = 0$$

ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ ק"מ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - (\lambda_1 h^1 + \dots + \lambda_p h^p)}{\|h\|} = 0$$

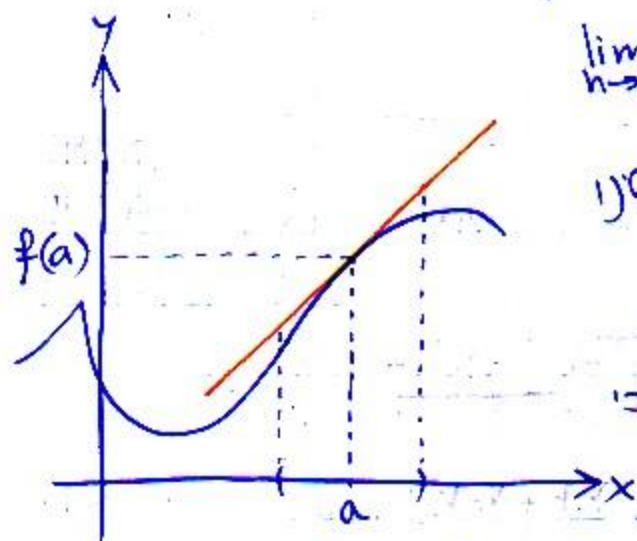
הגדרה: $\lambda: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ גורם לינארי אם קיימים
 $(h_1, \dots, h_p) = h \in \mathbb{R}^p$ כגון $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$
 $\lambda(h) = \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i$ מתקיים

אם לא נראה שיש פונקציה ליניארית שדומה לפונקציה אחרת?
 אפשר לחשוב על זה באופן גאומטרי:



הגדרה: $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת בטבעה פתוחה U של a
 גורם ליניארי (צורת טאנזנט) ב- a אם קיימת
 $\lambda: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ליניארית כך שמתקיים

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{\|h\|} = 0$$



לאחר מכן נסתכל על זה שמשני
 הצדדים נתנו מאדו זה סימולר.

ראובספיקצו שההפרשים חכו

ויקטנו. אלא כצונו שלד יקרה הכי

אם גל הישרים הנאחרים,

ואפוא אם מתקיים ב- h עדין

הגדול (ויא) אפס: $\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \sim 0$

המקרה של $p=2$ ויש לנו $f = f(x, y)$ ונקודה (a, b)
 אז נשבור ל- f תהיה צפופה בנקודה (a, b) בנק
 לנתונים $R \in \mathbb{R}^{m, n}$ ונקודה (a, b)

$$\lim_{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (mh + nk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

והמקרה הכללי: קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\lim_{\begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \frac{f\left(\begin{pmatrix} a^1 + h^1 \\ \vdots \\ a^p + h^p \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix}\right) - (\lambda_1 h^1 + \dots + \lambda_p h^p)}{\sqrt{(h^1)^2 + \dots + (h^p)^2}} = 0$$

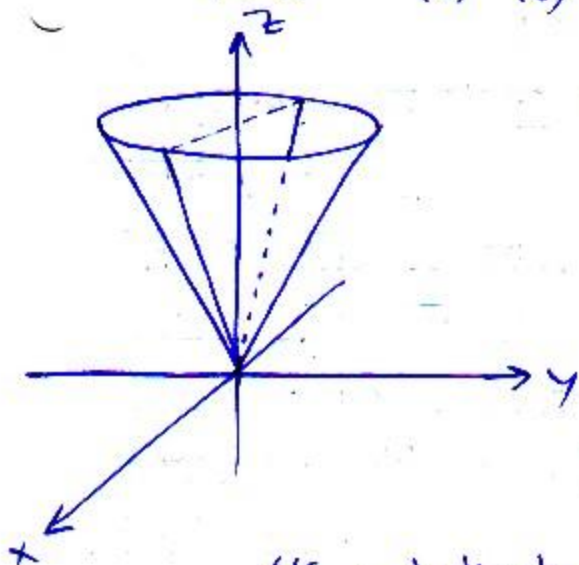
דוגמה: $f(x, y) = mx + ny$ $m, n \in \mathbb{R}$ נקודים

f מוגדרת ב- $\mathbb{R}^2$ ונסתן שלט $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
 (בנקודה) f הדרגה: מספק לבחור $\lambda_1 = m, \lambda_2 = n$

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - (mh + nk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \frac{m(a+h) + n(b+k) - (ma + nb) - (mh + nk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{h^2 + k^2}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} 0$$



דוגמה: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

f אנוני גזירה במישור. אחרת,
 הן קיימים $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{h^2 + k^2} - (\lambda_1 h + \lambda_2 k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left| 1 - \frac{\lambda_1 h + \lambda_2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = 0 \quad \text{אם}$$

אבל זה לא יתכן לזהירות כי נאמר ש-

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)t}{\sqrt{2}\sqrt{t^2}} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\text{sign } t}{\sqrt{2}} \right|$$

ולכן אין זה

(70)

משפט: אם $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה ו- a נקודה

קיימת $\lambda: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ כזו ויחידה כך, ש-

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{|h|} = 0$$

(גומר) λ , $\dots$, ו- μ מוגדרים באופן יחיד (אם).

נרצה לראות ש- $\mu: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ היא הפונקציה היחידה

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mu(h)}{|h|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a) - \mu(h)}{|h|} - \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{|h|} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(h) - \mu(h)}{|h|} = 0$$

אם $0 \neq x \in \mathbb{R}^p$ אז

$$\lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{\lambda(tx) - \mu(tx)}{|tx|} = \lim_{0 < t \rightarrow 0} \frac{t\lambda(x) - t\mu(x)}{t|x|} = 0$$

כלומר לכל x נקודתיות $\lambda(x) = \mu(x)$ $\Leftarrow$ חיים זהים

(11)

גומר $\lambda = \mu$

משפט: אם $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה ו- a נקודה

נרצה: אם $\lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h) - f(a)| = 0$ אז

אם, הנתונה כאן היא שהפונקציה f מתנהגת כמו פונקציה

$$(*) \quad \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h) + \lambda(h)|}{|h|} \quad \text{[סדרה]}$$

היטוי זה מוגדר עבור $0 \neq h \in \mathbb{R}^p$ ו- $|h|$ מספק קטן.

$$(*) \leq \underbrace{\frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|}}_{(i)} |h| |\lambda(h)| \rightarrow 0$$

כי $(i) \rightarrow 0$ על ידי ההנחה $|f(a+h) - f(a)| \rightarrow 0$

הפונקציה λ היא פונקציה ליניארית ו- $\lambda(h) \rightarrow 0$ כי $|h| \rightarrow 0$

(11)

לפיכך.

$f(x_4) = \begin{cases} \frac{x_4}{x_4^2 + y_4^2} & \text{אחרת} \\ 0 & (x_4, y_4) = (0, 0) \end{cases}$
 אנונה לטובה ב- $(0, 0)$, כי
 אנו בצורה קטנה

מוגדר: $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ איננה לטובה ב- $a \in \mathbb{R}^p$ אם יש i כזה $1 \leq i \leq p$
 קיימת $D_i f(a) = \lambda_i$ ו- $D_i f(a)$ אינו קיים
 הוכחה:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \frac{|f(a', \dots, a_i+h, \dots, a^p) - f(a', \dots, a^p) - \lambda_i(h)|}{|h|} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{0 < h \rightarrow 0} \frac{|f(a', \dots, a_i+h, \dots, a^p) - f(a', \dots, a^p) - \lambda_i|}{h} = 0$

קיימת $D_i f(a)$ ומתקיים השוויון המבוקש.

יש פה אישור כי זה אכן מתקיים.

71) 21.6.06
ע"פ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{|h|} = 0$$

תיקון מהשטח
הקובץ:

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{נקודת } i$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(a', \dots, a' + t, \dots, a^p) - f(a', \dots, a^p) - \lambda_i t|}{|t|} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(a', \dots, a' + t, \dots, a^p) - f(a', \dots, a^p)}{t} - \lambda_i \right| = 0$$

$$\Rightarrow \exists D_i f(a) \wedge D_i f(a) = \lambda_i$$

iii)

$\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת $a \in \mathbb{R}^n$ גזירה ב- a אם $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ש- λ היא

$$(*) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{|h|} = 0$$

הגדרה שקולה והרבה פחות נוחה היא:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |h| < \delta \Rightarrow |f(a+h) - f(a) - \lambda(h)| \leq \varepsilon |h|$$

בגדרה: תהי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת בסביבה פתוחה של $a \in \mathbb{R}^n$.
נאמר ש- f היא גזירה ברצפות ב- a אם קיימות
סוגיות $D_1 f, \dots, D_n f$ בסביבה של a
ורצפות ב- a .

משפט: תהי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברצפות ב- $a \in \mathbb{R}^n$. אז
 f גזירה ב- a .

הערה: נזכור שלא הרצפות של הנגזרות חלקיות לא בהכרח
נכון!!!

הוכחה: במאמר הבא.



$$f(a+h) - f(a) =$$

$$= f(a'+h', a^2, \dots, a^n) - f(a', \dots, a^n) + \\ + f(a'+h', a^2+h^2, a^3, \dots, a^n) - f(a'+h', a^2, \dots, a^n) + \\ + \dots + \\ + f(a'+h', \dots, a^n+h^n) - f(a'+h', \dots, a^{n-1}+h^{n-1}, a^n) =$$

ושים לב שורה הראשונה כמו פונקציה בשורה
* באופן זה אפשר להפחית את המעלה של הפונקציה (המקור)

$$f(a'+h', a^2, \dots, a^n) - f(a', \dots, a^n) = D_1 f(\underbrace{b^1}_{c_1}, a^2, \dots, a^n) \cdot h'$$

$$f(a'+h', \dots, a^n+h^n) - f(a'+h', \dots, a^{n-1}+h^{n-1}, a^n) = D_n f(\underbrace{a'+h', \dots, a^{n-1}+h^{n-1}}_{c_n}, b^n) h^n$$

$a'+h' - \delta a^i$ b^i $1 \leq i \leq n$ δ קטן

$$\Rightarrow |f(a+h) - f(a) - (D_1 f(a) h' + \dots + D_n f(a) h^n)| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n D_i f(c_i) h^i - \sum_{i=1}^n D_i f(a) h^i \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n (D_i f(c_i) - D_i f(a)) h^i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |D_i f(c_i) - D_i f(a)| |h|^i$$

אם נבחר $|h| \leq |h|$
אז $|h| \leq |h|$

$1 \leq i \leq n$ δ קטן $\alpha \in \mathbb{R}$ a -כך $D_i f(a)$ קיים ודיוק שם $|x-a| < \delta$ אז $|D_i f(x) - D_i f(a)| < \frac{\epsilon}{n}$ δ קטן וקראו את הטענה מהאופן השלם של האיכות.

* בחור זה הפונקציה ליצירה בקטע $[a', a'+h)$ (כי ניתן שיש (גזירה חלקית)). אבל אפשר להקטין קצת מ'מין' המרחק אך זה מקטע סגור ואז הן גם רציפות בקטע סגור.



(*)

באינפי 1 הוכחנו ש f גזירה ב- a אם ורק אם קיימת $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מתונה בסביבה של a ורציפה ב- a כך ש-

$$f(x) - f(a) = \psi(x)(x-a)$$

באופן שקול, f גזירה ב- a אם ורק אם קיימת $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (אם ψ היא ψ כמקודם) מתונה בסביבה של a ורציפה ב- a כך ש-

$$f(a+h) - f(a) = \psi(h)h$$
 ומתקיים $\psi(0) = f'(a)$

למה: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- $a \in \mathbb{R}^n$ אם ורק אם קיימת $\psi_1, \dots, \psi_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ מתונות בסביבה של $a \in \mathbb{R}^n$ ורציפות
 ב- a כך ש-

$$f(a+h) - f(a) = \psi_1(h)h^1 + \dots + \psi_n(h)h^n$$
 ומתקיים לכל $1 \leq i \leq n$ $\psi_i(0) = D_i f(a)$
 (הוכחה: תרגיל. ראו: $\psi_i(0) = D_i f(a)$)

$$\psi_i(h) = D_i f(a) + \frac{r(h)}{|h|^2} h^i ; h \neq 0 ; \psi_i(0) = D_i f(a)$$

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - \sum x(h)$$

מסלול: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ תיקרא מסלול

$$t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^1(t) \\ \vdots \\ g^m(t) \end{pmatrix}$$

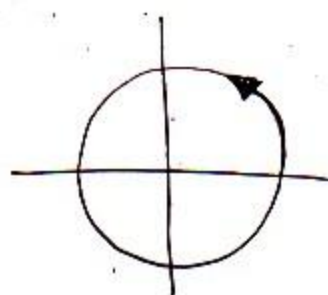
$$g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

דוגמה:

$$x = g^1(t) = \cos t$$

$$y = g^2(t) = \sin t$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



בפונקציה g יש יותר מ'יחס' אחד רק בציר של המסלול.
 הוא מראה לנו התאמה בין זמן למיקום והיא מראה גם
 שהמהירות הנגזרת של המסלול היא קבועה.

* Peano מצא שיטת מסילות שיכלות לעסות את $\mathbb{R}^2$.
 זה מדהים: דבר קו זה משהו ממימד אחד, אבל יש מסילות
 כזויות שהן יוצרות מסילות זכ צפוף שהוא ממימד 2.
 ופרקטיים מאוד: יוצרים מבנים ממימדים שונים.

לפנינו $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ מתפרטת לגזרת באופן דומה למקרה
 החד-ממדי.

$$g'(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t_0+t) - g(t_0)}{t}$$

וכך נעשה בחומר קואורדינטה קואורדינטה. אז

$$\begin{bmatrix} Dg'(t_0) \\ \vdots \\ Dg^m(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^1(t_0+t) - g^1(t_0)}{t} \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^m(t_0+t) - g^m(t_0)}{t} \end{bmatrix}$$

אז $g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ אז $g'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

נשים לב שהוקטורים $g(t)$ ו- $g'(t)$ הם
 אורתוגונליים!!! כלומר, וקטור המהירות תמיד ניצב
 למסלול.

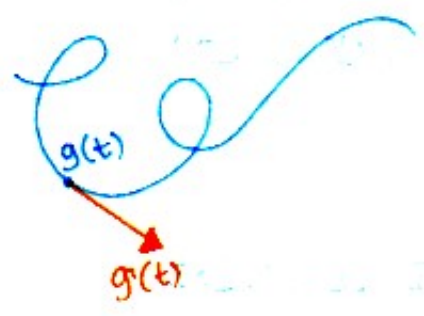
ומה אם התאווה? $g''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$



פונקציה של מסלול $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$
 בעלת כיוון כמו m פונקציות בבת אחת:

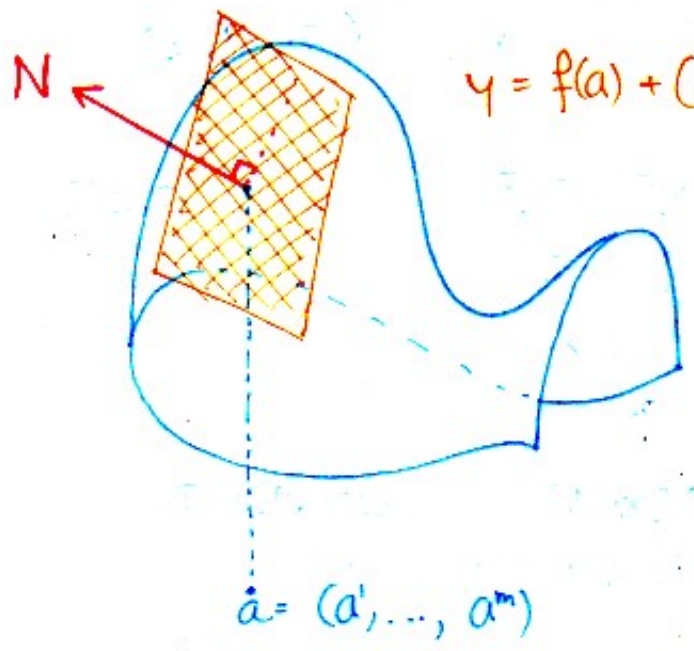
$$g(x) = \begin{pmatrix} g^1(x) \\ \vdots \\ g^m(x) \end{pmatrix}$$

למצוא מסלול זה כמו למצוא m פונקציות. תנאי לזיהוי הרצפות.
 פשוט הרגש כן קורה לפי קואורדינטות.



$$g'(t) = \begin{pmatrix} Dg^1(t) \\ \vdots \\ Dg^m(t) \end{pmatrix}$$

זה שנקרא אולי שקורה בפונקציה אחרת. המסלול זה הרבה יותר פשוט.

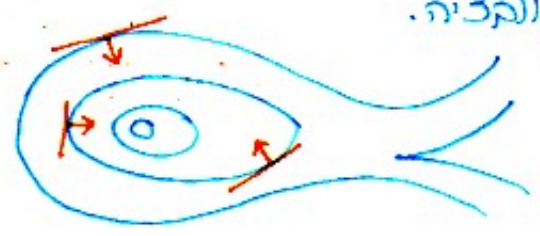


$$y = f(a) + (D_1 f(a), \dots, D_m f(a)) \begin{pmatrix} x^1 - a^1 \\ \vdots \\ x^m - a^m \end{pmatrix}$$

$$y = f(x^1, \dots, x^m)$$

$$a = (a^1, \dots, a^m)$$

הגרדיאנט של f ב- a : $\nabla f(a) = (D_1 f(a), \dots, D_m f(a))$
 הגרדיאנט נמצא לקווי המפה של הפונקציה ופונה לכיוון הגדולה (המקסימום) של הפונקציה.



איך עושים תחזית מכלל אנליזה?
 מודדים עתה הכוחות הנקודתיים שנותנים אותם
 קווים איזובריים.

רוח (זהו מרחק) עשוק. אנליזה חישבנו ואנליזה
 של היתר שהתקבל, הופכים אותו וזה כיוון הרוח. היתר
 של היתר אנליזה מייצג את מרחק הרוח.

צילום: $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(תקור את הנקודה $(1, 2)$). $f(1, 2) = 3$

$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$

$\nabla f(1, 2) = (-3, 9)$

המשוואה של המישור המשיק בנקודה $(1, 2)$ היא

$z = 3 + (-3)(x-1) + 9(y-2)$

$\Rightarrow (-3)(x-1) + 9(y-2) + (-1)(z-3) = 0$

$(-3, 9, -1)$ הוא הנורמל בנקודה זו.

$y = f(x) = x^3 - 3x^2$

צילום:

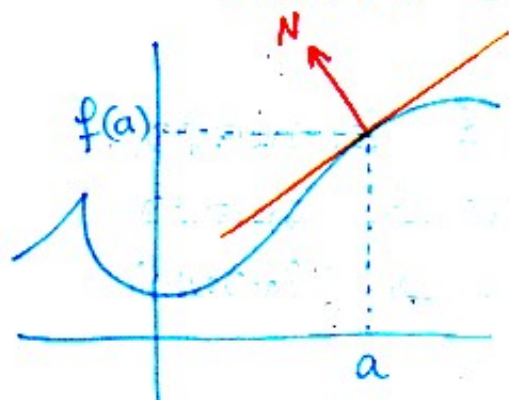
$a = 1 \quad f(1) = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(1) = -3$

המשק היא $y = (-2) + (-3)(x-1)$

או $(-3)(x-1) + (-1)(y-(-2)) = 0$



הנורמל: $(-3, -1)$

המשק: $(1, -3)$

שבת שלום!

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto g(x) = y$$

כמה מילים על פונקציות

הגדרה: אם g מוגדרת בסביבה פתוחה של $a \in \mathbb{R}^n$
 (אם g - ערכה a - אם

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

כלומר

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \underbrace{|x - a| < \delta}_{(n\text{-ווארד ב-}\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \underbrace{|g(x) - g(a)| < \varepsilon}_{(n\text{-ווארד ב-}\mathbb{R}^m)}$$

נשים ♥ לבנות פונקציה $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ זה הזדמן כמו למת
 m פונקציות $\{g^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}$

$$g = \begin{pmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^m \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} y^1 = g^1(x) \\ \vdots \\ y^m = g^m(x) \end{matrix}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

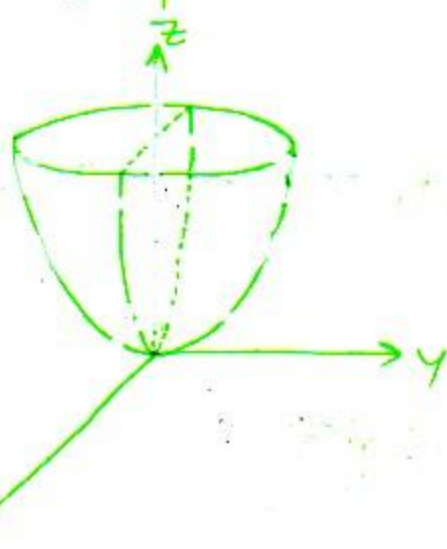
$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 1 - r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x = g^1(r, \theta) = r \cos \theta$$

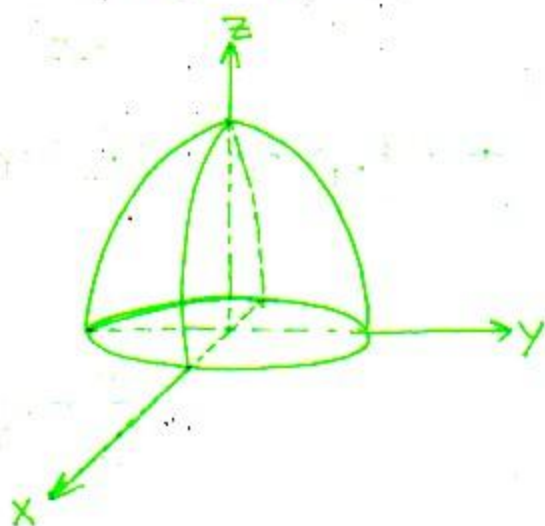
$$y = g^2(r, \theta) = r \sin \theta$$

$$z = g^3(r, \theta) = 1 - r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



$$z = 1 - r^2$$



משפט: g רציפה ב- a אם ורק אם g^j רציפה ב- a לכל $1 \leq j \leq m$
הוכחה: g רציפה ב- a אם ורק אם $(x_n) \in N_N(a)$ אז $x_n \rightarrow a$
 מתקיים $g(x_n) \rightarrow g(a)$ כלומר $(g(x_n))$ מתכנס ל- $g(a)$ לכל $\epsilon > 0$
 $g^j(x_n) \rightarrow g^j(a)$ לכל $1 \leq j \leq m$ כי $(g(x_n))$ מתכנס ל- $g(a)$
 ב- a (☺)

הגדרה: $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה ב- a אם ורק אם קיימת פונקציה $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ כך של

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a) - \lambda(h)}{|h|} = 0 \in \mathbb{R}^m$$

הערה: $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה ב- a אם ורק אם g^j פונקציה ב- a לכל $1 \leq j \leq m$

כאן השלטה

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

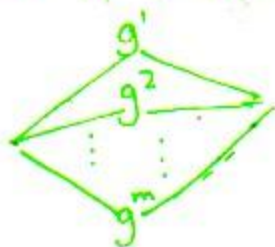
אם f ו- g פונקציות

$$D(f \circ g)(a)$$



(השלטה דומה לזו שלקחים פורמלים)

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad n=1 \quad l=1$$



$$D(f \circ g)(a) = [D_1 f(a), \dots, D_m f(a)] \begin{bmatrix} Dg^1(a) \\ \vdots \\ Dg^m(a) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^m D_i f(a) \cdot Dg^i(a)$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad : \text{Df}$$

$$t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$x = g^1(t) = \cos t$$

$$y = g^2(t) = \sin t$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot y$$

קודם נחשב ישירות את ההרכבה:

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \mapsto \cos t \cdot \sin t$$

$$D(f \circ g)(a) = -\sin^2 a + \cos^2 a$$

אפשר לראות זאת גם באמצעות:

$$Dg(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$Df\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [y \quad x]$$

$$g(a) = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$$

$$D(f \circ g)(a) = [\sin a, \cos a] \begin{bmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{bmatrix} =$$

$$= -\sin^2 a + \cos^2 a$$

Wow! זה אותו הדבר.

אם יש לנו $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ נוסף שלב אחד של ההרכבה.

הנלמד (התלמיד) של b אחד n הנלמדים של a (ההרכבה).

נניח שיש m קודים: $g(a) = b$ אם

$$1 \leq i \leq n \quad D_i(f \circ g) = \sum_{j=1}^m D_j f(b) D_i g^j(a)$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x+y+z$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 1-r^2 \end{pmatrix}$$

מטרה

קודם (נרשם) את ההרכבה, כדי שלא נשכח:

$$f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 1-r^2 \end{pmatrix} \mapsto r \cos \theta + r \sin \theta + (1-r^2)$$

$$D_1(f \circ g)(\vec{\theta}) = \cos \theta + \sin \theta - 2r$$

$$D_2(f \circ g)(\vec{\theta}) = -r \sin \theta + r \cos \theta$$

האם זה מתאר עם הנגזרות? הן של θ

$$[D_1 f(b), \dots, D_m f(b)] \begin{bmatrix} D_1 g'(a) & \dots & D_n g'(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g''(a) & & D_n g''(a) \end{bmatrix}$$

באופן כללי:

$$[1, 1, 1] \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \\ -2r & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [\cos \theta + \sin \theta - 2r, -r \sin \theta + r \cos \theta]$$

! PARTY

קירובים אנליטיים

$$y = f(x) \quad \text{המשוואה יחידה:}$$

$$y = l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$y = q_b(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$z = f(x_y) \quad \text{מה הם שני משתנים?}$$

$$z = l(x_y) = f\left(\frac{a}{b}\right) + D_1 f\left(\frac{a}{b}\right)(x-a) + D_2 f\left(\frac{a}{b}\right)(y-b)$$

אם זה גם הקירוב הרצוי? לא מיידי

"פונקציה" ממשתנה שני?

$$z = q_b(x_y) = l(x_y) + \frac{1}{2!} [D_1 D_1 f\left(\frac{a}{b}\right)(x-a)^2 + D_2 D_1 f\left(\frac{a}{b}\right)(x-a)(y-b) + D_2 D_2 f\left(\frac{a}{b}\right)(y-b)^2 + D_1 D_2 f\left(\frac{a}{b}\right)(y-b)(x-a)]$$

השורה הבאה נראה שפונקציה פתולוגית

$$D_2 D_1 f(x_y) = D_1 D_2 f(x_y)$$

הכלל: קיבלנו משוואה מהצורה $q(x_y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$

איך לה (פורה)? האם זה החד ממדי יש רק או

שתיים? או שזהו צורתו... כאן יש

יותר אפשרויות... למשל יתכן וצאנו אולי:

$$z = x^2 - y^2$$

זהים טיפוס של פורה למין
אם התחלנו בצורה מאוד
פשוטה



לפי זה איננו
נראים מקום -
תלוי מאפה כיוון
למסלול

: נפתר עבור SK $A \neq 0$ OK

$$q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A \left[x^2 + 2 \frac{B}{A} xy + \frac{C}{A} y^2 \right] =$$

$$= A \left[\left(x + \frac{B}{A} y \right)^2 - \left(\frac{B}{A} y \right)^2 + \frac{C}{A} y^2 \right] =$$

$$= A \left[\frac{(Ax + By)^2}{A^2} + \frac{AC - B^2}{A^2} y^2 \right]$$

$\Delta = AC - B^2$ OK



OK



SK

$0 < \Delta$

OK



OK

SK

$\Delta < 0$

OK

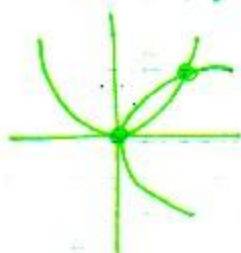
$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3 + y^3 - 3xy$ פונקציה

איתור נקודות קיצון קריטיות:

$D_1 f(x) = 3x^2 - 3y$ $D_2 f(x) = 3y^2 - 3x$

$D_1 f(x) = 0 = D_2 f(x)$ נקודות קיצון

$(1, 1), (0, 0)$ נקודות קיצון קריטיות

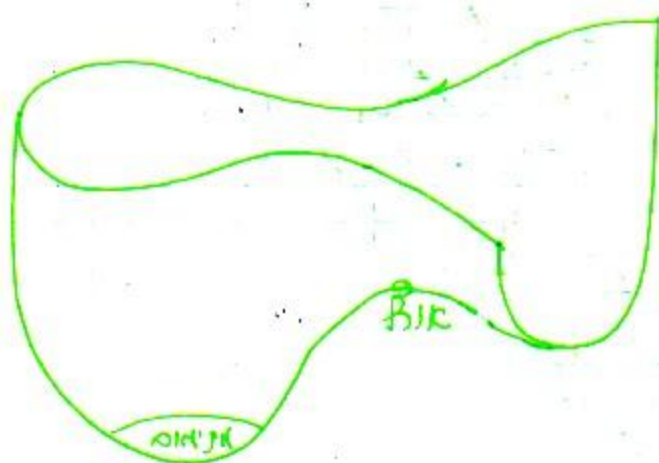


$D_1 D_1 f(x) = 6x$

$D_2 D_2 f(x) = 6y$

$D_1 D_2 f(x) = D_2 D_1 f(x) = -3$

		$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
A	$6x$	0	6
B	$6y$	0	6
C	-3	-3	-3
Δ		$-$	$+$
		פסגה	נקודת קיצון



77 29.6.06
 תאריך
 מס' עמ'
 !חתימה

$$\begin{matrix} x & & y & & z \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & b & & \end{matrix} \quad \text{כאשר}$$

$$D_i(f \circ g)(a) = \sum_{j=1}^m D_j f(b) D_i g^j(a)$$

$x = (x^1, \dots, x^n)$ $y = (y^1, \dots, y^m)$ כאשר $z = f(y)$ -!

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{\partial z}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial y^m} \cdot \frac{\partial y^m}{\partial x^i}$$

⊙
 נוסחת סטור

(וסטור): הפונקציה המשלמה ותוצאה:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

נרשם כאן להבדל בין הצורה (ה) :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{(b-a)}{1!} D f(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} D^2 f(a) + \dots + \\ &+ \frac{(b-a)^n}{n!} D^n f(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} D^{n+1} f(c) \end{aligned}$$



הצורה: עבור $a, b \in \mathbb{R}^n$ מהתחבורה

$$[a, b] = \{ a + t(b-a) : 0 \leq t \leq 1 \}$$

$$(a, b) = \{ a + t(b-a) : 0 < t < 1 \}$$

משפט: תהי $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה (לרבות חלקיות) רציפה וזוהי

הסביבה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $a \in U$. $b \in \mathbb{R}^m$ כך ש- $[a, b] \subseteq U$

קיים $c \in (a, b)$ ו-

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{1}{1!} ((b^1 - a^1) D_1 + \dots + (b^m - a^m) D_m) f(a) + \\ &+ \frac{1}{2!} ((b^1 - a^1) D_1 + \dots + (b^m - a^m) D_m)^2 f(a) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} ((b^1 - a^1) D_1 + \dots + (b^m - a^m) D_m)^{n+1} f(c) \end{aligned}$$

$$(b-a')D_1 + \dots + (b^m - a^m)D_m = (b-a) \cdot [D_1, \dots, D_m] = (b-a) \cdot D$$

$$f(b) = f(a) + ((b-a)D)f(a) + \dots + \frac{1}{n!}((b-a)D)^n f(a) + \frac{1}{(n+1)!}((b-a)D)^{n+1} f(c)$$

$$g(t) = a + t(b-a) \quad \text{ר"ל} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{פונקציה ליניאר}$$

$$g(0) = a$$

$$g(1) = b$$

$$g([0,1]) \subseteq U$$

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} a' + t(b' - a') \\ \vdots \\ a^m + t(b^m - a^m) \end{pmatrix}$$

$$(f \circ g)'(t) = \sum_{j=1}^m D_j f(g(t)) \cdot (b^j - a^j) =$$

$$((b' - a')D_1 + \dots + (b^m - a^m)D_m) f(g(t))$$

$$\Rightarrow (f \circ g)' = ((b-a)D) f \circ g$$

$$(f \circ g)^{(i)} = ((b-a)D)^i f \circ g \quad \text{כל } i \leq n$$

$$(f \circ g)(1) = (f \circ g)(0) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} ((b-a)D)^i f \circ g(0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} ((b-a)D)^{n+1} f(g(\xi)) \quad 0 < \xi < 1$$

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} ((b-a)D)^i f(a) + \frac{1}{(n+1)!} ((b-a)D)^{n+1} f(c)$$

(11)

$c = g(\xi)$ ר"ל

מאקרה ל - $m=2$

$$((b^1 - a^1) D_1 + (b^2 - a^2) D_2) f =$$

$$= (b^1 - a^1) D_1 f + (b^2 - a^2) D_2 f$$

$$((b^1 - a^1) D_1 + (b^2 - a^2) D_2)^2 f =$$

$$= (b^1 - a^1)^2 D_1^2 f + (b^2 - a^2)(b^1 - a^1) D_2 D_1 f +$$

$$+ (b^1 - a^1)(b^2 - a^2) D_1 D_2 f + (b^2 - a^2)^2 D_2^2 f$$

משפט: תהי $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מסוימת פתוחה U
 $a \in \mathbb{R}^m$ כל $a \in \mathbb{R}^m$ כך ל-
 $D_1 D_2 f, D_2 D_1 f, D_1 f, D_2 f$
 נצרכות - U . אז $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$.

המשפט - האותה מתכונת הוא איננו 1 -

משפטים

תוצאות

אקסיומות