(4) 12.3.06
ת. איינפי

תרגול עם שלומי קוטלר ☺

תרגול 1 - פתרונות נבחרים

שאלה 3: תהא f פונקציה רציפה על $\mathbb{R}$ ומחזורית עם מחזורים קטנים כרצוננו (= לכל מספר $\varepsilon > 0$ קטן כרצוננו קיים L שהוא $|L| < \varepsilon$ ומהווה מחזור של הפונ', כלומר $f(x+L)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$)
אז f קבועה.

למה להוכיח בעזרת נגזרת זה לא נכון?
להראות ש-f גזירה ב-x_0 משמע שהגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים, כלומר שלכל סדרה $h_n\to 0$ קיים $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$ ואיננו תלוי בסדרה h_n.
לפי תנאי השאלה אנחנו יכולים להראות זאת אך ורק לסדרות של מחזורים, ולא לכל סדרה שרירותית.

הגדרה: קבוצה $S\subseteq\mathbb{R}$ תקרא צפופה בממשיים אם לכל $r_1<r_2$ ממשיים קיים $s\in S$ כך ש- $r_1<s<r_2$.
במילים: קבוצה S היא צפופה אם בין כל 2 ממשיים יש מספר מהקבוצה.

טענה: העתקה רציפה נקבעת ע"י קבוצה צפופה.
כלומר, אם f,g 2 העתקות רציפות ו- S קבוצה צפופה ומתקיים $f(s)=g(s)$ לכל $s\in S$ אז $f\equiv g$.

הוכחה) נבחר $S=\mathbb{Q}$: כלומר, אנו מניחים ש- $f(q)=g(q)$ לכל $q\in\mathbb{Q}$. יהי $x\in\mathbb{R}$ כלשהו. כמוסבר קודם קיימת סדרה של רציונליים השואפת אליו $q_n\to x$.
f,g רציפות אז $f(q_n)\to f(x)$ ו- $g(q_n)\to g(x)$.
מיחידות הגבול $f(x)=g(x)$.

הוכחה (מקרה הכללי): S צפופה כלשהי. נראה שלכל ממשי $x\in\mathbb{R}$
קיימת סדרה $s_n\to x$ כאשר $s_n\in S$. ויהי נתון
$n\in\mathbb{N}$ נתבונן ב $x<x+\frac{1}{n}$. מהנתון (S צפופה) - קיים
איבר ב-S כלשהו ביניהם. נסמנו $s_n\in S$:

$$x<s_n<x+\frac{1}{n}$$

ועכשיו מסנדוויץ' $s_n\to x$ ולכן $f(s_n)\to f(x)$
ו- $g(s_n)\to g(x)$ ולכן $f(x)=g(x)$ מש"ל ☺

<u>הגדרה (שאלה)</u>: תהא f רציפה עם מחזורים קטנים כרצוננו. אזי f קבועה.

<u>הוכחה</u>: נרצה להראות כי $\{x\in\mathbb{R}: f(x)=f(0)\}$ היא צפופה. אם נראה זאת אזי f מתלכדת עם הפונ' הקבועה $g\equiv f(0)$ על קבוצה צפופה.

כעת נראה ש $\{x\in\mathbb{R}: f(x)=f(0)\}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$. יהיו $r_1<r_2$ ממשיים. היות שהמחזור קטן כרצוננו יש מחזור T כך ש $|T|<\frac{1}{2}(r_2-r_1)$. אחד מהמספרים מהצורה $0+nT$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$ חייב ליפול בין r_1 לבין r_2. נסמנו $0+n_0T$. אבל f מחזורית ב-T. ולכן $f(0)=f(0+n_0T)$ ולכן $r_1<n_0T<r_2$ ואז n_0T נמצא בקבוצה. מש"ל ☺

מה קורה אם הפונ' לא רציפה? אז הטענה אינה נכונה.
למשל, נתבונן בפונ' דיריכלה:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

ראינו שאינה קבועה.

זו פונ' מחזורית עם מחזורים קטנים כרצוננו. כי $f(x)=f(x+\frac{1}{n})$ לכל n טבעי. לכן $\frac{1}{n}$ מחזור של הפונ'. ויש מחזורים קטנים כרצוננו כי $\frac{1}{n}$ יכול להיות קטן כרצוננו.

(5) שאלה 4 כמה פתרונות יש למשוואה $ax^3+bx^2+cx+d=0$?

ראינו בתרגול שדי להבין כמה פתרונות יש
למשוואה מהצורה x^3+px+q.
כדי להבין זאת נחקור את $f(x)=x^3+px$.

רמז, מישהי שאלה למה זה כך: אם $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
אז ל- $h(x)=g(x-\frac{b}{3a})$ יש אותו מספר אפסים.
משום שיש התאמה חח"ע בין האפסים של
g לבין האפסים של h.

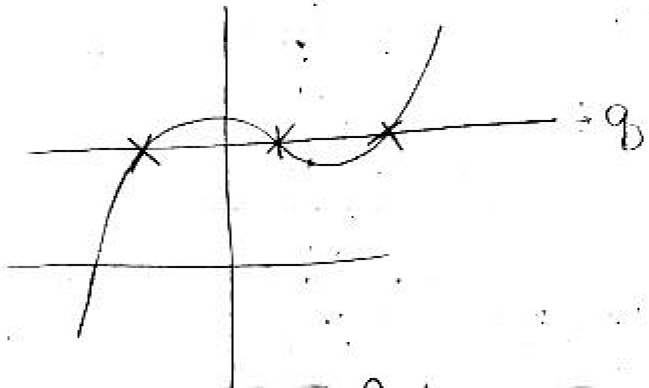
$$h(x)=g(x-\frac{b}{3a})=a(x-\frac{b}{3a})^3+b(x-\frac{b}{3a})^2+c(x-\frac{b}{3a})+d=$$

$$=ax^3+\left(-3\frac{ba}{3a}+b\right)x^2+\left(\text{השאר לא תורמים ל-}x^2\right)=$$

$$=ax^3+\tilde{p}x+\tilde{q}.$$

אבל ל- h אותו מספר אפסים כמו ל- $\frac{1}{a}h$.
לכן די להבין כמה פתרונות יש ל- $\frac{1}{a}h(x)=x^3+px+q$.

נרצה לחקור את $f(x)=x^3+px=-q$

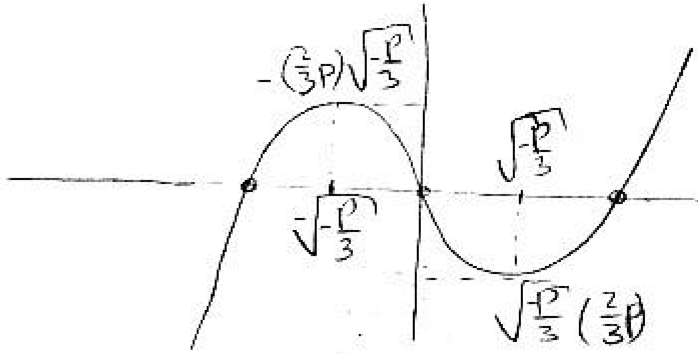


יש לנו את הגרף של $f(x)$ ואת הקו $-q$
ונרצה לדעת כמה פעמים הם נחתכים.

(1) ראינו בשיעור הקודם שאם $p>0$ אז ל- $f(x)=-q$ יש רק פתרון אחד.

(2) אם $p=0$ אז $f(x)=x^3=-q$ לכן גם יש רק פתרון יחיד.

③ אם $p<0$ אזי חקירה של $f(x)=x^3+px$ נותנת



אז בתחום שמעל המקס׳ המקומי או מתחת למינ׳ המקומי אז יש למשוואה פתרון יחיד:
באמצע יש 3 פתרונות ואם $|q|=-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$
יש 2 פתרונות.

כלל לופיטל

① למה לופיטל עובד? נוכיח את כלל לופיטל
בהנחות מקלות: $f(a)=g(a)=0$; $g'\neq 0$
f,g גזירות בסביבה של a והנגזרת רציפה.
רוצים להבין מהו $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. לפי לגרנז׳

$$f(x)=f(a)+f'(c_x)(x-a) \qquad x<c_x<a$$
$$g(x)=g(a)+g'(d_x)(x-a) \qquad x<d_x<a$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)(x-a)}{g'(d_x)(x-a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(d_x)}$$

אם $x\to a$ אזי $c_x\to a$ ו $d_x\to a$
משום שהנגזרת רציפה ואם הפונקציות

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c_x)}{g'(d_x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(2) <u>הבדלים</u>

(א) משפטי לופיטל דורש קיום גבול לנגזרות, אבל לא בהכרח יש נגזרת בנקודה. למשל,

$$f(x)=|x| \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=?$$
$$g(x)=\sin x$$

$$\frac{f'}{g'}=\frac{1}{\cos x}\xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 \Leftarrow \begin{cases} f'(x)=1 & x>0 \text{ ל} \\ g'(x)=\cos x & x>0 \text{ ל} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'}{g'}=1$$ ולפי מלופיטל

(ב) כלל לופיטל דורש יש נגזרת בנקודה

אם $g'(a)\neq 0$ אז $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

דוגמה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^2\sin\frac{1}{x}\end{cases} \qquad f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$
$$g(x)=x \qquad g'=1$$

ל $\frac{f'}{g'}$ אין גבול כי f' מתנודדת.

לכן כלל לופיטל המדבר על גבול הנגזרות לא עובד לדוגמה זאת, אם f וגם g גזירות ב-0

$$g'(0)=1$$
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{\cancel{h}}=0$$

$\Leftarrow$ אבל לופיטל מסוג קיום נגזרת בנקודה עובד

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=0$$ עכשיו

(3) <u>זהירות</u>

(א)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}=\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos x}}^{*}=\frac{0}{2}=0$$

מההצגה ? קודם צריך להראות שהגבול (*) קיים ורק אח"כ אפשר להשוות את השוויון.

(ג)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

ולכאורה אין גבול! אבל גם למונה הנגזרת אין גבול זה לא אומר שלמונה הפונק' אין גבול. ואיך בכל זאת נחשב?

$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \underset{\downarrow\atop 0}{x}\cdot\underset{\downarrow\atop 1}{\frac{x}{\sin x}}\ \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{חסום}} \longrightarrow 0$$

(ד)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} \overset{?}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

אבל אין לזה גבול. וגם כאן:

$$\frac{x+\sin x}{x} = 1+\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \underline{1}$$

(4) <u>גבולות של חזקות</u>

$$\lim(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = ?$$

כדי לדעת את הגבול הנ"ל: נבין קודם את:

$$\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{1}{\sin x}\ln(1+x) \longrightarrow ?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x} = \underline{1}$$ לפי לופיטל:

הפונק' $f(x)=e^x$ רציפה. לכן

$$\lim f(\text{סדרה מתכנסת}) = f(\lim(\text{הסדרה המתכנסת}))$$ לכן

$$\lim e^{\frac{1}{\sin x}\ln(1+x)} = e^{\lim\frac{1}{\sin x}\ln(1+x)} = e^1 = e$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}}$$

$\boxed{\text{תזכורת}}$ $x^y = e^{y\ln x}$

5 דוגמה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{1}$$

עברנו מביטוי מסובך לביטוי מסובך יותר!
אבל אפשר להסתדר. זה עם רק

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

(8) 21.03.06
ת. אינפי

שלי מרין shellyg@math.huji.ac.il

שעת קבלה: יום א' 16^{00} שפ' 207

תרגיל 3 - להגיש בשקית ליד משרד שפ' 207 עד יום ה' 1400

פולינומי טיילור

פולינומים הם פונקציות שמאוד קל לעבוד איתן. חוץ מזה אנחנו גם יודעים להעריך את השגיאה של הקירוב שלנו.

משפט: נתונה הפונקציה f. ונניח ש $f(x)$ גזירה n פעמים בנק' x_0. אזי קיימת סביבה של x_0 שבה מוגדרת פונקציה $\alpha(x)$, רק ש $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ וכן שבכל x בסביבה:

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{פולינום טיילור } P_n(x)}+\underbrace{\alpha(x)(x-x_0)^n}_{\text{שארית } R_n(x)}$$

נשים לב ש $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ כלומר..

$$R_n(x)=\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

תזכורת: "o קטן": $f=\underset{x\to x_0}{o}(g)$ אמ"מ קיימת פונק' רק ש- $f=\alpha\cdot g$ ו- $\alpha\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$.

מוטיבציה: טיפול בפולינומים. למשל, אם $x_0=0$

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \Rightarrow P(0)=a_0$

$P'(x)=a_1+2a_2x+\dots \Rightarrow P'(0)=a_1$

$P''(x)=2a_2+\dots \Rightarrow P''(0)=2a_2$

$\vdots$

$P^{(k)}(x)=k!\,a_k+\dots+n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k} \Rightarrow P^{(k)}(0)=k!\,a_k$

$P^{(n)}(x)=n!\,a_n \Rightarrow P^{(n)}(0)=n!\,a_n$

נציב את הנגזרות בנוסחה לפולינום טיילור.

$$a_0 + a_1x + \frac{2a_2}{2!}x^2 + \dots + \frac{n!\,a_n}{n!}x^n = P(x)$$

השארית היא כמובן $R_n(x)=0$

> האם שארית בנוסחת קושי שווה לשארית בנוסח לגרנז'? הא. איך לעזאזל פותרים את זה. הנוסחאות מאוד מסובכות. אבל $R_n(x)=f(x)-P(x)$ ולכן שארית זה שארית. לא משנה איך מציגים אותה...

<u>משפט חשוב</u>: יחידות פולינום טיילור.

אם $Q(x)=B_0+B_1(x-x_0)+\dots+B_n(x-x_0)^n$ פולינום ממעלה n

ויש עבורו פונק' $\beta(x)$ כך ש:

1) $\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$

2) $f(x)=Q(x)+\beta(x)(x-x_0)^n$

אז $Q(x)$ שווה לפולינום טיילור $P_n(x)$ של $f(x)$.

הערכת השארית

תהי f מוגדרת בקטע I בין x_0 ל-x, גזירה $n+1$ פעמים ו-$f^{(n)}$ רציפה ב-I.

<u>צורת קושי</u> - יש $x_0<c<x$ כך ש

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)(x-x_0)^n$$

- יש $0<\theta<1$ כך ש

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

<u>צורת לגרנז'</u> יש $x_0<c<x$ כך ש

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>הערה</u>: אם $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ אז $f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$ ומקבלים <u>טור</u> טיילור.

<u>דוגמה 1</u>: $f(x)=e^x$, $x_0=0$

לכל k $f^{(k)}(0)=1$, $f^{(k)}(x)=e^x$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

(9)

נעריך את השארית ע' לגרנג'

קיימת $0<c<x$ רק ש

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n} = \frac{e^{c}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן מתכנס טור טיילור לכן

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}$$

דוגמה: נניח שרוצים לחשב את $e=f(1)$ עד לרמת דיוק של $\frac{1}{1000}$

אז השארית במקרה ש $x=1$ היא $\frac{e^{c}}{(n+1)!}$

ו- $0<c<1$ לכן

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

ורוצים ש $\frac{3}{(n+1)!} < 0.001 \Leftarrow (n+1)! > 3000$

$\Leftarrow$ מספיק לקחת $n=6$

דוגמה: $f(x)=\sin x \quad x_0=0$

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & n=4k \\ \cos x & n=4k+1 \\ -\sin x & n=4k+2 \\ -\cos x & n=4k+3 \end{cases}$$

$$\sin^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \frac{x^{7}}{7!} + \dots$$

$f(x)=\cos x \quad x_0=0$

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n=4k \\ -\sin x & n=4k+1 \\ -\cos x & n=4k+2 \\ \sin x & n=4k+3 \end{cases}$$

$$\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} - \frac{x^{6}}{6!} + \dots$$

שארית

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le$$

כאשר $x>0 \quad 0<c<x$

$x<0 \quad x<c<0$

$$\le \frac{1}{(n+1)!}|x^{n+1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$|\cos|,|\sin| \le 1$

דוגמה

$f(x) = \sinh x \qquad x_0 = 0$

$$\sinh^{(n)}(x) = \begin{cases} \sinh x & n = 2k \\ \cosh x & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sinh^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$P_n(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$f(x) = \cosh x \qquad x_0 = 0$

$$\cosh^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x & n = 2k \\ \sinh x & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\cosh^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

אבל שני, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

אז אפשר פשוט להשתמש באריתמטיקה של טורים.

דוגמה: $f(x) = e^{-1/x^2}$ פונקציה שלא ניתנת לקירוב ע"י פולינומי טיילור כי $f^{(n)}(0) = 0$

אז יש פונקציות מרושעות שלא רצוי לעשות להן טיילור.

הערות לתרגול:

(2)

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$
$$g(x) = Q_n(x) + S_n(x)$$

P_n, Q_n פולינומי טיילור

R_n, S_n השאריות

* $f(x)g(x) = [P_n(x)Q_n(x)]_n + o(x^n)$
* $(f \circ g)(x) = [P_n(Q_n(x))]_n + o(x^n)$
* $(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$

(10)

<u>דוגמה</u> $f(x)=\ln(1+x)$ $\quad x_0=0$

$$f(x)=\ln(1+x) \Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0)=-1$$

אפשר להוכיח בעזרת אינדוקציה ש...

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

<u>מקרה 1</u> $0\le x\le 1$, נשתמש בלגרנז׳: $(0<c<x)$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{n!\,|x^{n+1}|}{(1+c)^{n+1}(n+1)!}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\to 0$$

<u>מקרה 2</u> $-1<x<0$

אם נשתמש בלגרנז׳: $x<c<0$ ואז $(1+c)^{n+1}\to 0$ אבל $\infty\to(n+1)$. לכן איננו יודעים להוכיח ש-$R_n(x)\to 0$ במקרה זה.

נשתמש בנוסחת קושי: $0<\theta<1$.

$$|R_n(x)|=\frac{1}{n!}\left|f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1}\right|=$$
$$=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\right|=\left|\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right|=$$
$$=\frac{(1-\theta)^n|x|^n}{(1-\theta|x|)^n}\cdot\frac{|x|}{(1-\theta|x|)}$$

אם $-1<x<0$ אז יש אי שוויון שאומר

$$\frac{(1-\theta)|x|}{1-\theta|x|}\le|x|$$

נבדוק: $(1-\theta)|x|\le|x|-\theta|x|^2$

$$|x|-\theta|x|\le|x|-\theta|x|^2$$

$|x|^2\le|x|$ וזה נכון כי $-1<x<0$

לכן $\frac{(1-\theta)^n|x|^n}{(1-\theta|x|)^n}\cdot\frac{|x|}{(1-\theta|x|)} \le |x|^n\frac{|x|}{1-|x|} \longrightarrow 0$

כי $|x|<1$.

כאן הצלחנו להבין את הבעיה בעזרת השארית בצורת קושי.

<u>שאלה</u>: מה קורה עבור $x=-1$?

ידוע ש "$\ln(0)=-\infty$"

ואז בטור נקבל $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=-\infty$

זה הטור ההרמוני".

אז לפחות אנחנו קונסיסטנטיים...

<u>מקרה 3</u>: מה אם $x>1$

<u>רעיון 1</u>: ננסה להשתמש בפולינום טיילור ישירות?

נשים לב שזה <u>לא טוב</u>, כי $\{R_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ לא שואף ל-0.

אם $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ היה מתכנס

וזה לא יתכן כי $\frac{x^n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

<u>רעיון 2</u> (<u>טוב</u>) החלפת משתנה

$$x=\frac{1+t}{1-t} \qquad t=\frac{x-1}{x+1}$$

ניתן לבדוק ש- $x>1$ אמ"מ $0<t<1$

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\ln(1+t)-\ln(1-t)=$$

$$=\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots\right]+$$

$$+\left[-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-\dots\right]=$$

ורשו זוגיות את הסימני t-ל $=2\left(t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+\dots\right)$

(11) 26.3.06
תרגיל

תרגול עם שלומי קוטלר ☺

פולינומי טיילור - חלק ב

תזכורת: בהינתן פונקציה גזירה n פעמים ב-a הוכחנו כי:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{} + o((x-a)^n)$$

$P_n(x)$ פולינום טיילור מסדר n סביב a

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad , \quad \lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

זה אומר שהשארית שואפת לאפס מאוד חזק!

<u>תזכורת</u>: אמרנו כי פולינומי טיילור של $f(x)$ <u>מקרבים</u> את $f(x)$ ב-x <u>הקרוב</u> ל-a. (ב-a יש ממש שוויון)

אם $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x \text{ קבוע}} 0$

בשיעור שעבר ראינו כי פולינומי טיילור של אחוז מקרבים את אחוז בכל $x\in\mathbb{R}$ (המטרה הכי טוב שניתן לקוות).

תרגיל: מתקיים גם עבור $e^x, \cos x$

נראה: $f(x) = e^x$

$P_n(x) = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$ ⋮ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
של לגרנז'

האם נוכל להעריך את השארית?

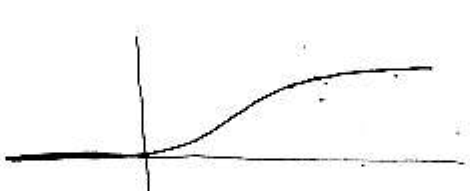
$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \left|\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \to 0$$

כי e^x מונוטונית, $e^c \le e^x$

אינפי 1

<u>הערה</u>: בקבוצה השנייה של התרגילים יש פונקציות שפולינומי טיילור שלהן לא מקרבים אותן ב-$\mathbb{R}$ כולו.

<u>דוגמה</u>: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$



זאת פונקציה רגילה! $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n)}(0)=0$ לכל n

לכן $P_n(x)\equiv 0$ לכל n. לכן לפי הגדרה השארית

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \longrightarrow x\neq 0\\ 0\end{cases}$$

ולהבדיל ארוע שיכול להיות!

אבל יש גם מקרי ביניים

דוגמא חשובה $f(x)=\ln(1+x)$: מהו פולינום טיילור שלה סביב $a=0$?

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\quad\dots\quad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\Rightarrow \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$$

<u>טענה</u>: פולינומי טיילור של $\ln(1+x)$ סביב $a=0$ מקרבים את $\ln(1+x)$ בתחום $-1<x<1$. כלומר

$R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{x\text{ קבוע}}0$ לכל $|x|<1$.

<u>הוכחה</u>: נחלק את התחום $(-1,1)$ למקרים

I $\quad 0<x<1 \Rightarrow 0<c<x<1$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\underbrace{\frac{(-1)^n}{n+1}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}}_{\text{חסום ע"י }1}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

II $\quad -\frac{1}{2}\le x<0 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<c<0$

$$|R_n(x)|=\frac{1}{n+1}\left|\frac{x}{1+c}\right|^{n+1}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\tfrac{1}{2}\le x<c<0\\&\tfrac{1}{2}\le 1+x<1+c<1\\&2\ge\frac{1}{1+x}>\frac{1}{1+c}>1\\&-1\le 2x\le\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+c}<x<0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left|\frac{x}{1+c}\right|<1$$

$\Leftarrow$ מאותו שיקול $R_n(x)\longrightarrow 0$

(12)

III $-1<x<-\frac{1}{2}$ בתחום זה המיון שעבד ב- I, II

לא עובד למשל אם $x=-\frac{3}{4}$ ו- c יוצא $-\frac{1}{2}$ אז

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{n+1}\frac{(-\frac{3}{4})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right| \longrightarrow \infty$$

אז זה לא אומר שהשארית תמיד יוצאת ∞, אבל ראינו שאם נשתמש בטכניקה הקודמת אז לא ילך לנו.
צריך לנסות להשתמש בשארית קושי

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}$$

במקרה שלנו:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^n}x^{n+1}\right|.$$

$0<\theta<1 \qquad -1<x\le -\frac{1}{2}$

$-\theta < \theta x \le -\frac{\theta}{2}$

$1-\theta < 1+\theta x < 1-\frac{\theta}{2}$

$\frac{1}{1-\theta} > \frac{1}{1+\theta x} > \frac{1}{1-\frac{\theta}{2}}$

$1 > \underbrace{\frac{1-\theta}{1+\theta x}}_{\text{שהרחקן מ-1}} \ge \frac{1-\theta}{1-\frac{\theta}{2}} \ge 0$

יש כאן טעות. ראה בתרגול של של תיקון.

$\Longleftarrow \quad R_n(x) \longrightarrow 0$

<u>הערה</u>: זה היה בלבול משום שהמיון שעבד ב- III היה עובד ב- I, II טומר תרגיל. הראו אך ורק בעזרת שארית קושי שפולי טיילור מקרבים את $\ln(1+x)$ ב- $-1<x<1$.

מתוך קושי אנחנו מסיקים שאם לגרנז' מתרנטת כי זה שתי דרכים להציג <u>אותו</u> ביטוי!

טיילור: הכה את המומחה

① חישובים קרובים:

$\sqrt{1.1} = ?$

נקרב את $f(x) = \sqrt{x}$ סביב $a = 1$ ע"י פולינום
טיילור מסדר 1 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$

$P_1(1.1) = 1\frac{1}{20} \Rightarrow \sqrt{1.1} \approx 1\frac{1}{20}$

אבל מה השארית?

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$ $\quad \sqrt{1.1} = 1\frac{1}{20} \pm$ שגיאה שרצינו נעריך

$$|R_1(1.1)| = \left| \frac{-\frac{1}{4}c^{-3/2}}{2!}(1.1-1)^2 \right| = \left| \frac{1}{8}\frac{1}{c^{3/2}} \cdot \frac{1}{100} \right| < \frac{1}{800}$$

כי $\frac{1}{c^{3/2}} < 1$

② חקירת פונקציות בעזרת טיילור.

נניח כי f גזירה פעמיים ב-a $f'(a) = 0$ ו-$f''(a) > 0$
אז a נקודת מינימום.
מה אם: $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(2n-1)}(a)$ ונתון $f^{(2n)}(n) > 0$
אז גם a נקודת מינימום. מדוע?

$$f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a) + \dots + \frac{f^{(2n-1)}(n)}{(2n-1)!}(x-a)^{2n-1}}_{0} + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n} + o((x-a)^{2n})$$

לכן $f(x) = f(a) + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n} + o((x-a)^{2n})$

נזכור שקיימת $R_{2n}(x) = o((x-a)^{2n})$ רק ש

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n} + R_n(x) =$$

$$= f(a) + (x-a)^{2n}\underbrace{\left[\frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^{2n}}\right]}_{*}$$

לכן בסביבה קטנה מספיק של a הביטוי * חיובי.

(13)

נוסף נקודת פיתול.

תזכורת: נניח כי f גזירה ב-a. אזי a נקודת קמירות של הפונקציה $f(x)$ נמצאת מעל המשיק לאורך הסביבה a.

נניח כי $f''(a) = 0$ וכי $f'''(a) \neq 0$ אזי a פיתול. למה?

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + o((x-a)^3)$$

$$f(x) - \overbrace{[f(a) + f'(a)(x-a)]}^{\text{משוואת המשיק}} = \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + o((x-a)^3)$$

אינטואיטיבית נובע ש-a נקודת פיתול.

הוכחה: קיים $R_3(x) = o((x-a)^3)$ כך ש

$$f(x) - \text{משוואת המשיק} = (x-a)^3\left[\frac{f'''(a)}{3!} + \underbrace{\frac{R_n(x)}{(x-a)^3}}_{\xrightarrow{x\to a} 0}\right] := (x-a)^3(*)$$

אם לה חיובי אז לסביבת a יהיה $(*)>0$ ולכן לכל $x>a$ התוספת החיובית ל-f מעל המשיק אם $x<a$ התוספת היא שלילית ו-f מתחת למשיק לכן a פיתול.

(3) e אינו רציונלי:

נניח בשלילה כי $e = \frac{m}{n}$ אדומים. ידוע כי

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{R_n(x)}_{o(x^n)}$$

נפתח עבור אותו n, x e.

$$\Rightarrow e^1 = e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1) = \frac{m}{n}$$

נכפיל שני אגפים ב-$n!$

$$n!\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1)\right) = \frac{m}{n}n!$$

$$\underbrace{n!\left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\right)}_{\text{שלם}} + n!R_n(1) = \underbrace{(n-1)!m}_{\text{שלם}}$$

$\Leftarrow$ $n!R_n(1)$ שלם. אבל $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

$\Leftarrow$ $n!R_n(1) = \frac{e^c}{n+1}$ אבל זה לא ייתכן

להיות מספר שלם! $c<1$, $e<3$ $\Leftarrow$ $e^c < 3^1 = 3$

לכן $|n! R_n(1)| \le \frac{3}{n+1}$ שלם לרציונה

לכן $n=0,1,2$. $n \neq 0$ כי $\frac{m}{n}$ מצומצם.

$n \neq 1$ כי $2<e<3$ $n \neq 2$ כי אז

$|n! R_n(1)| \le 1$ שלם $\Leftarrow$ $|2 R_n(1)| = 1$ $\Leftarrow$ $R_2(1) = \frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ $e = 1+1+\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

אבל זה לא יכול להיות כי $e = \lim(1+\frac{1}{n})^n$

וזו סדרה מונוטונית עולה. מספיק למצוא n

עבורו $(1+\frac{1}{n})^n > 2\frac{1}{2}$

<u>הערות לתרגיל 4</u>

(14) 4/4/06
ת. איפ׳

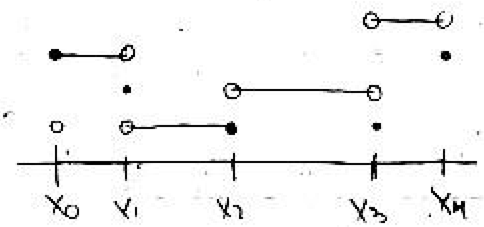
תרגול עם שי :)

האינטגרל המסויים

<u>הגדרה</u>: $\boxed{\text{חלוקה}}$ של קטע $[a,b]$ הינו קבוצה סדורה $\boxed{\text{סופית}}$ של נק׳ $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ כך ש- $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$.

<u>הגדרה</u>: פונק׳ φ המוגדרת בקטע $[a,b]$ תיקרא פונק׳ $\boxed{\text{מדרגות}}$ אם קיימת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש- φ קבועה בכל תת קטע $\boxed{\text{פתוח}}$ של P. כלומר, יש $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ כך ש $\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$ לכל $1\le i\le n$

<u>דוגמה</u>:



<u>הערות</u>:
1) בפונק׳ מדרגות יש מס׳ סופי של "מדרגות".
2) הערך בנק׳ החלוקה יכול להיות כל דבר.

אינטגרל של פונקצית מדרגות

"השטח" שמתחת לגרף ואשר אם הפונקציה מתחת לציר ה-x ה"שטח" שלילי. בפונקצית מדרגות השטח הוא סכום שטחי המלבנים עם סימן + או – בהתאם.

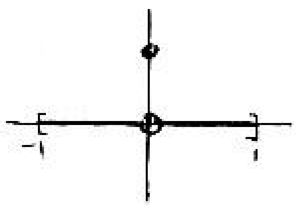
$$I_P(\varphi)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i-x_{i-1})$$

הערות:

(1) האינטגרל אינו תלוי בערכי הפונקציה בנקודות החלוקה וכו' זה מספר לנו למה לא אכפת לנו מהערכים האלה.

(2) האינטגרל אינו תלוי בחלוקה שבחרנו כל עוד כי אכן חלוקה שבה הפונק' היא פונק' מדרגות.

דוגמה: $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ בקטע $[-1,1]$



כי פונק' מדרגות. עם החלוקה $P=\{-1,0,1\}$ וכמובן היא מתאימה לעוד אינסוף חלוקות.

$f|_{(-1,0)}=0$

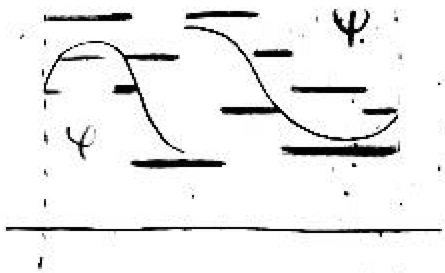
$f|_{(0,1)}=0$

$I_P(f)=0\cdot(0-(-1))+0(1-0)=0\cdot 1+0\cdot 1=0$

אינטגרל של פונקציות חסומות

מסמנים $B=B[a,b]$ - קבוצת הפונקציות החסומות של הקטע $[a,b]$. $S=S[a,b]$ - קבוצת פונק' המדרגות.

דוגמה: הנה פונקציה חסומה:



אבל כל מה שאנחנו יודעים לעשות בינתיים זה אינטגרל של פונק' מדרגות.

באופן זה יש שני סוגים של פונק' מדרגות - מתחת לפונקציה φ ומעל הפונקציה Ψ אז ננסה להתקרב ל-f ע"י פונקציות מדרגות מעל ומתחת.

★ אינטגרל של פונ' מדרגות שמקרבות את f מלמטה:

$$\Phi_f = \Phi_f[a,b] = \{ I_\varphi : \varphi \in S \,,\ \varphi \le f \}$$

★ הקירוב הכי טוב שאפשר לקבל מלמטה

האינטגרל התחתון של f ב$[a,b]$ - $\underline{I}(f) = \sup \Phi_f$

★ האינטגרל של פונ' מדרגות שמקרבות את f מלמעלה.

$$\Psi_f = \Psi_f[a,b] = \{ I_\psi : \psi \in S \,,\ f \le \psi \}$$

★ הקירוב הכי טוב שאפשר לקבל מלמעלה

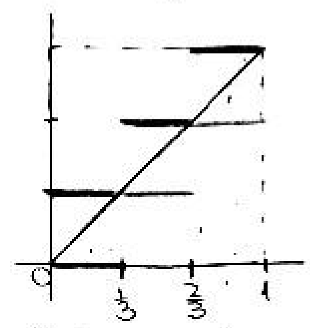
האינטגרל העליון של f ב $[a,b]$: $\overline{I}(f) = \inf \Psi_f$.

<u>הגדרה</u>: $f \in B$ תיקרא $\boxed{\text{אינטגרבילית}}$ ב $[a,b]$ אמ"מ

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

האינטגרל $\underline{I} = \overline{I}$ יסומן ע"י $\int_a^b f$

<u>דוגמה</u>: נחשב את האינטגרל של $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$



חלוקה ל-3 חלקים.

נשתמש בחלוקה $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$:

ונגדיר פונ' מדרגה

$$\varphi_n|_{(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} = \frac{i}{n}$$

$$\psi_n|_{(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} = \frac{i+1}{n}$$

למה דווקא החלוקה הזו? כי זה נוח לנו ואמרנו שהאינטגרל בלתי תלוי בחלוקה.

$$I_{\varphi_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$I_{\psi_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

<u>משפט</u>: אם קיימות 2 סדרות של פונ' מדרגות $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$

כך ש (1) $\varphi_n \le f \le \psi_n$

(2) $\lim_{n\to\infty} I_{\varphi_n} = \lim_{n\to\infty} I_{\psi_n}$

אז f אינטגרבילית והגבול ב-(2) הוא האינטגרל $\int_a^b f$

המקרה שלנו: $\lim_{n\to\infty} I_{\varphi_n} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} I_{\psi_n}$ ו- $\int_0^1 x = \frac{1}{2}$

וזה הגיוני גם מבחינה גיאומטרית (נוסחה של משולש)

וגם מבחינת מה שלמדנו בתיכון

* שימו לב: זאת ממש לא דרך יעילה לחשב אינטגרלים. אז פעם אחת עושים ביד ובשיעור הבא כשנדע הכל אודות אינטגרלים נוכל לגשת לדבר בגישה יעילה יותר.

<u>אנטי דוגמה</u>: פונק' דיריכלה אינה אינטגרבילית

$D(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ 1 & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[0,1]$

למה D לא אינטגרבילית?

תהי P חלוקה כלשהי של $[0,1]$ $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$

בפנים כל קטע (x_{i-1},x_i) יש נק' רציונליות עבורן $D(x)=1$

ונק' אי-רציונליות עבורן $D(x)=0$. לכן כל פונק' מדרגה

$\varphi\le D$ מקיימת: $\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}(x)\le D|_{(x_{i-1},x_i)}=0$

לכל $x\notin\mathbb{Q}$ ומההגדרה צריך להיות לכל x: $\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}(x)\le 0$.

באותו אופן, לכל $\psi\ge$ צריך להתקיים $\psi|_{(x_{i-1},x_i)}(x)\ge 1$

$$\Rightarrow\quad I_\varphi=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i-x_{i-1})\le 0$$

$$I_\psi=\sum_{i=1}^{n} C_i(x_i-x_{i-1})\ge 1$$

ולכן לא יכול להיות $\underline{I}=\overline{I}$ $\Leftarrow$ D לא אינטגרבילית.

עוד קצת סימונים.

$\mathcal{R}=\mathcal{R}[a,b]$ - קב' הפונקציות האינטגרביליות ב-$[a,b]$

$\mathcal{C}=\mathcal{C}[a,b]$ - קב' הפונקציות הרציפות ב-$[a,b]$

$\mathcal{M}=\mathcal{M}[a,b]$ - קב' הפונקציות המונוטוניות ב-$[a,b]$

<u>משפט</u>: $S\subsetneq\mathcal{R}\subsetneq\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{R}$, $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}$

למה חשוב הקטע סגור? <u>דוגמה</u>: $f(x)=\frac{1}{x}$ ב-$(0,1)$ רציפה ומונוטונית

אבל לא ברור אם היא אינטגרבילית כי $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$ בהמשך נלמד

אינטגרלים לא אמיתיים.

16 25.4.06
ת׳ אינפי

האינטגרל המסוים

הגדרות שקולות לפונ׳ אינטגרבילית בקטע [a,b]

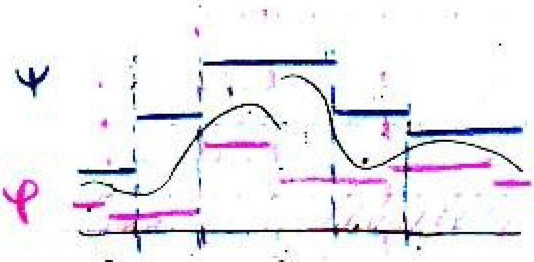
① לפי פונקציות מדרגות:

$f\in B[a,b]$ היא אינטגרבילית בקטע [a,b] אמ״מ

$\sup\{I_\varphi:\varphi\in S, f\ge\varphi\}=\underline{I}=\overline{I}=\inf\{I_\psi:\psi\in S, f\le\psi\}$

סימון: $\int_a^b f$

ציור:



• אחת מהפונקציות φ, ψ תלויה בחלוקה אחרת! החלוקה אינה מופיעה בתוך הגדרת פונ׳ המדרגות.
כי ההגדרה לא נוחה לחישוב אינטגרלים

② לפי סכומי רימן

תהי f מוגדרת ב-[a,b] ותהי חלוקה $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

סכום רימן של f עבור P הוא ביטוי מהצורה:

$$S_P(f)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

כאשר $x_{i-1}\le t_i\le x_i$ לכל $i=0,1,\dots,n$

פרמטר חלוקה: $\lambda(P)=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\}$

פונ׳ f בקטע [a,b] תיקרא אינטגרבילית לפי רימן ב-[a,b] אם יש $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך ש- $|S_P(f)-I|<\varepsilon$ לכל סכום רימן $S_P(f)$ עם $\lambda(P)<\delta$. במקרה זה אומר ש-

$$I=\lim_{\lambda(P)\to 0}S_P(f)$$

סימון: $I=\int_a^b f(x)dx$

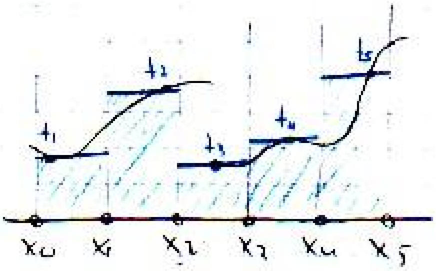
משפט: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f$

תנאי קושי לאינטגרביליות:

f אינטגרבילית לפי רימן אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$|S_P(f)-S_{P'}(f)|<\varepsilon$ לכל P, P' עם $\lambda(P),\lambda(P')<\delta$.

ציור:



הערה: האורך של הקטעים לא חייב להיות שווה

דוגמה: נוכיח (שוב) שפונק' דיריכלה אינה אינטגרבילית לפי רימן ב-$[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

נשתמש בתנאי קושי. ניקח $\varepsilon=\frac{1}{2}$, אז לכל δ עם $\lambda(P)<\delta$

נבחר את סכומי רימן הבאים

$\sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1$, $[x_{i-1},x_i]\ni y_i\in\mathbb{Q}$

$\sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\,\Delta x_i=0$, $[x_{i-1},x_i]\ni y_i\notin\mathbb{Q}$

כי סתירה.

(2) לפי סכומי דרבו:

תהי $f\in[a,b]$, $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$

הגדרה: $M_i=\sup\{f(t): x_{i-1}\le t\le x_i\}$

$m_i=\inf\{f(t): x_{i-1}\le t\le x_i\}$

נגדיר 2 פונק' מדרגה:

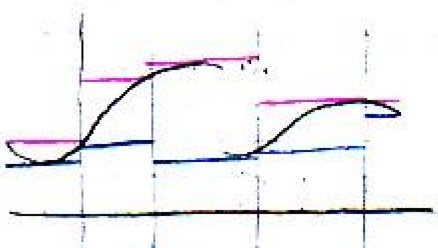
$\psi_P|_{(x_{i-1},x_i)}=M_i$; $\psi_P(x_i)=f(x_i)$

$\varphi_P|_{(x_{i-1},x_i)}=m_i$; $\varphi_P(x_i)=f(x_i)$

סימון: $U_P=\int_a^b\psi_P=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ סכום דרבו עליון

$L_P=\int_a^b\varphi_P=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ סכום דרבו תחתון

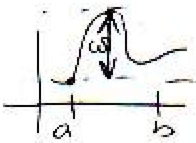
ציור



תנאי רימן לאינטגרביליות (I)

תהי $f\in B[a,b]$ אז f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ יש חלוקה P של $[a,b]$ כך ש- $|U_P-L_P|<\varepsilon$

(4) לפי תנודה:



הגדרה: תנודה של פונק' חסומה f בקטע $[a,b]$:

$$\omega_f[a,b]=\sup_{a\le x\le b} f(x)-\inf_{a\le x\le b} f(x)$$

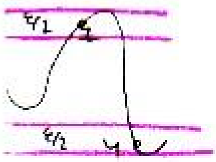
טענה: $\omega_f[a,b]=\sup_{y,z\in[a,b]}|f(z)-f(y)|$

הוכחה: $(\le)$ יהיו $y,z\in[a,b]$:

$$f(z)-f(y),\ f(y)-f(z)\le \sup f(x)-\inf f(x)$$

$$\Rightarrow |f(z)-f(y)|\le \sup f(x)-\inf f(x)$$

לכן $\sup|f(z)-f(y)|\le \sup f(x)-\inf f(x)=\omega$



$(\ge)$ לפי הגדרת sup ו- inf לכל ε יש $y,z\in[a,b]$ כך ש-

$$f(y)<\inf f(x)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$f(z)>\sup f(x)-\frac{\varepsilon}{2}$$

לכן $\sup f(x)-\inf f(x)\le (f(z)-\frac{\varepsilon}{2})-(f(y)-\frac{\varepsilon}{2})=$

$$=f(z)-f(y)+\varepsilon\le$$

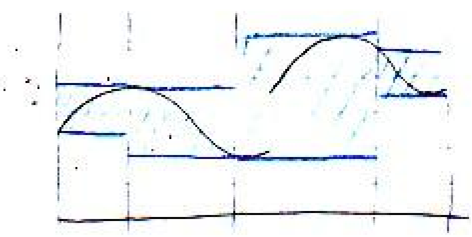
$$\le \sup|f(z)-f(y)|+\varepsilon$$

וזה אי שוויון שנכון לכל ε. לכן תמיד

$$\sup f(x)-\inf f(x)\le \sup|f(z)-f(y)|$$

תנאי רימן לאינטגרביליות (II):

f אינטגרבילית אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם P חלוקה עם $\lambda(P)<\delta$ אז $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon$, $\omega_i(f)=\omega_f[x_{i-1},x_i]$



<u>הערה</u>: בעצם מדובר בתנאי התנאי כי:

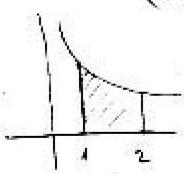
$$U_P - L_P = \sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i = \sum (M_i - m_i) \Delta x_i =$$

כי זו אותה חלוקה

$$= \sum (\sup f(x) - \inf f(x)) \Delta x_i = \sum \omega_i(f) \Delta x_i$$

<u>דוגמה</u>: (רמז עבה לשאלה ב-2)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}$$



נשים לב ש $\frac{1}{x^2}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ כי היא חסומה ומונוטונית / רציפה בקטע

אם הפונ' אינטגרבילית אז כל סכום רימן עם פרמטר חלוקה מספיק קטן יקרב לנו את האינטגרל.

(א) $P = \{1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \ldots, \frac{n+i}{n}, \ldots, 2\}$ נקח:

$$x_i = \frac{n+i}{n} \qquad \lambda(P) = \frac{1}{n}$$

$$[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{n+i-1}{n}, \frac{n+i}{n}\right]$$

ונבחר $t_i = \frac{n+i}{n}$, $f(t_i) = \frac{n^2}{(n+i)^2}$

אז:

$$S_P(f) = \sum_1^n f(t_i) \Delta x_i = \sum_1^n \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(n+i)^2}\right) =$$

$$= n \sum_1^n \frac{1}{(n+i)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

אז זה נותן לנו דרך יפה לחשב סכומים של טורים.

(ב) נסמן $\alpha = \sqrt[n]{2}$ וניקח חלוקה $Q = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n = 2\}$

$$[x_{i-1}, x_i] = [\alpha^{i-1}, \alpha^i] \quad t_i = \alpha^i \Rightarrow f(t_i) = \frac{1}{\alpha^{2i}}$$

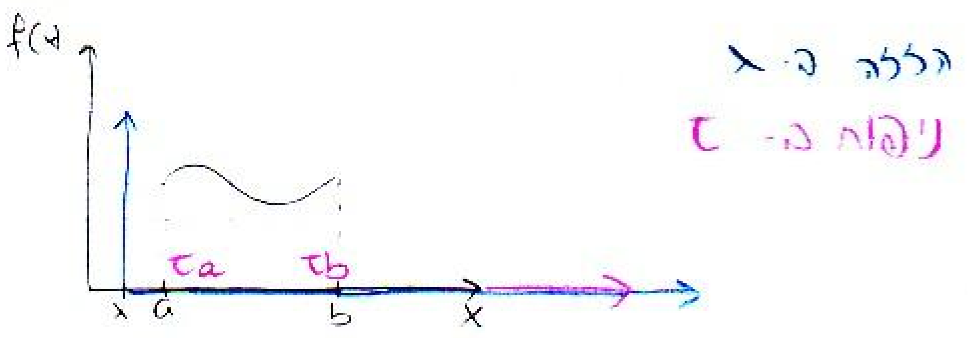
$$S_Q(f) = \sum_1^n f(t_i) \Delta x_i = \sum_1^n \frac{1}{\alpha^{2i}}[\alpha^i - \alpha^{i-1}] = \sum_1^n \frac{1}{\alpha^i} - \sum_1^n \frac{1}{\alpha^{i+1}} =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha} + \cancel{\frac{1}{\alpha^2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{\alpha^n}}\right] - \left[\cancel{\frac{1}{\alpha^2}} + \cancel{\frac{1}{\alpha^3}} + \ldots + \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right] = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right) = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

(18)

<u>הוכחה לשאלה 3:</u>



נוכיח במקרה ש-f פונ' מדרגה:

$$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$$

יהיו $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ כך שלכל $1\le i\le n$ $\quad f|_{(x_{i-1},x_i)}=c_i$

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^n c_i\Delta x_i$$

נוכיח את סעיפים ב' וג' במקרה של פונ' מדרגה.

<u>שלב 1</u> $\tau>0$

נגדיר $y_i=\tau x_i$ לכל $1\le i\le n$

נקבל חלוקה של $[a\tau,b\tau]$ $\quad Q=\{a\tau=y_0<y_1<\dots<y_n=b\tau\}$

אם $y_{i-1}\le x\le y_i$ אז $\tau x_{i-1}\le x\le\tau x_i$ ולכן

$x_{i-1}\le\frac{x}{\tau}\le x_i$ כלומר: $f(\frac{x}{\tau})=c_i$

אז $f(\frac{x}{\tau})$ פונ' מדרגה ביחס לחלוקה Q.

$$\int_{a\tau}^{b\tau} f\left(\frac{x}{\tau}\right)dx=\sum_{i=1}^n\Delta y_i c_i=\sum\tau\Delta x_i c_i=$$

$$=\tau\sum c_i\Delta x_i=\tau\int_a^b f(x)dx$$

<u>שלב 2</u> $\tau=-1$ נגדיר: $y_i=-x_i$ $\quad z_i=y_{n-i}=-x_{n-i}$

נגדיר חלוקה $R=\{-b=z_0<z_1<\dots<z_n=-a\}$

כמקודם $\quad y_{n-i+1}\le x\le y_{n-i}\Leftarrow z_{i-1}\le x\le z_i$

$$f(-x)=c_{n-i+1}\Leftarrow x_{n-i}\le -x\le x_{n-i+1}\Leftarrow$$

$f(-x)$ פונ' מדרגות לפי R.

$$\int_{-b}^{-a} f(x)dx=\sum_{i=1}^n(z_i-z_{i-1})c_{n-i+1}=\sum(-x_{n-i}+x_{n-i+1})c_{n-i+1}=$$

$$=\sum_{j=1}^n(x_j-x_{j-1})c_j=\int_a^b f(x)dx$$

שלב 3 סיג אז וגו -- ג
צריך שם לנסח וגם להפיק

(19) 30.4.06

תאוף

* תרגול עם שלומי קוטלר

כמה מילים על מידה אפס

אנחנו רוצים לדעת מתי לקבוצה $S\subseteq\mathbb{R}$ יש אורך (נפח) אפס?
פורמלית, נשאל מתי המידה היא אפס.
ברור שלקטע $[a,b]$ אין מידה אפס. למעשה, סביר להגדיר
את המידה שלו להיות $b-a$
בעולם שלנו מקובל שאורכים של קטעים לא משתנים בהזזה.
אבל זה לא תמיד כך, בכל אופן זה לא מה שמעניין אותנו.
ברור שלקטע יש מידה לא אפס ונרצה שלנקודה תהיה מידה אפס.

<u>הגדרה</u>: נאמר כי $S\subseteq\mathbb{R}$ היא ממידה אפס אם לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר בן מניה (לכל היותר) של קטעים $[a_i,b_i]$ כך ש- $S\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$ וגם ש- $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\varepsilon$:

<u>בפרט</u>:

א) נקודה היא ממידה אפס: תהי $x_0\in\mathbb{R}$. אז בהינתן $\varepsilon>0$ הקטע $[x_0-\frac{\varepsilon}{2},x_0+\frac{\varepsilon}{2}]$ מכיל את x_0 ואורכו ε.

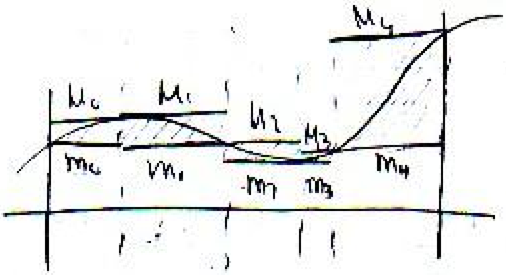
ב) מספר סופי של נקודות הוא ממידה אפס: נניח $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$
אז בהינתן $\varepsilon>0$ נסתכל על סדרת הקטעים $\{[x_i-\frac{\varepsilon}{2n},x_i+\frac{\varepsilon}{2n}]\}_{i=1}^{n}$
מקיימים $x_i\in[x_i-\frac{\varepsilon}{2n},x_i+\frac{\varepsilon}{2n}]$ ו- $\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}[x_i-\frac{\varepsilon}{2n},x_i+\frac{\varepsilon}{2n}]$
והאורך הכולל הוא ε.

ג) הרציונליים $\mathbb{Q}$ הם קבוצה ממידה אפס. כיוון ש- $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$
אז ניתן לרשום $\mathbb{Q}=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. בהינתן $\varepsilon>0$. נתבונן
ב- $[x_i-\frac{\varepsilon}{2^i},x_i+\frac{\varepsilon}{2^i}]$. ברור ש- $\mathbb{Q}\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}[x_i-\frac{\varepsilon}{2^i},x_i+\frac{\varepsilon}{2^i}]$
אבל סכום אורכי הקטעים הוא $\sum_{i=1}^{\infty}2\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=2\varepsilon$
שזה מספיק טוב כי ברור שכל התהליך של ε זה בסדר

<u>תנודה</u>

בהינתן f על $[a,b]$ חסומה ידוע כי היא אינטגרבילית אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ יש חלוקה P כך ש $U(P)-L(P)<\varepsilon$

מה זה ההפרש הזה? ננסה להבין אותו



$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

ההגדרה היא ש-

$$U(P) = \sum M_i \Delta x_i$$

$$L(P) = \sum m_i \Delta x_i$$

$$\Rightarrow U(P)-L(P) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i$$

נהוג לסמן - התנודה של f ב-$[x_{i-1},x_i]$ - $\omega_i = M_i - m_i$

ואז התנודה הכוללת $= \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = U(P)-L(P)$.

ואז בהינתן המושגים החדשים:

בהינתן f על $[a,b]$ חסומה f אינטגרבילית אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ יש חלוקה P כך ש- $\omega(P)<\varepsilon$ ($=$ התנודה הכוללת של f בהינתן החלוקה P).

<u>משפט</u>: אם f רציפה על $[a,b]$ אז f אינטגרבילית על $[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: די להראות שלכל $\varepsilon>0$ יש חלוקה P כך ש $\omega(P)<\varepsilon$

f רציפה על קטע סגור לכן רציפה במ"ש שם. לכן בהינתן $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ יש δ כך ש אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon_1$

נחלק את $[a,b]$ בחלוקה שווה כך ש $\Delta x_i<\delta$. ואז

$\omega_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f(x) - \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ וזה שווה ל- $\sup_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x')-f(x'')|$

אבל לכל x', x'' כאלה $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_1$

$$\Rightarrow \omega_i \le \varepsilon_1 \Rightarrow$$

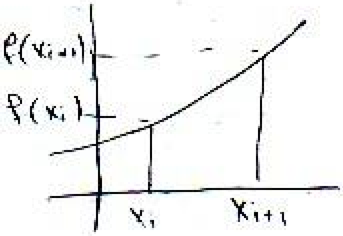
$$\omega = \sum \omega_i\Delta x_i \le \varepsilon_1\sum\Delta x_i = \varepsilon_1(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

בצורה דומה אפשר להוכיח את המשפט על המונוטונית

<u>טענה:</u> f מונוטונית חסומה ב $[a,b]$ היא אינטגרבילית.

<u>הוכחה:</u> בהינתן $\varepsilon>0$ נחפש P רק ש $\omega(P)<\varepsilon$

נניח f מונוטונית עולה.

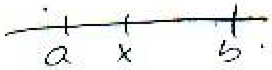


$$\Rightarrow \omega(P)=\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)]\Delta x_i \le$$
$$\le \lambda(P)\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)] =$$
$$= \lambda(P)[f(b)-f(a)] \quad \text{(טלסקופי)}$$

$\Leftarrow$ בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר חלוקה שווה של $[a,b]$ רק ש $\lambda(P)<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

<u>תנודה בנקודה</u>

תהא x נקודה ו- f פונק' המוגדרת על $[a,b]$ ו- $x\in[a,b]$.



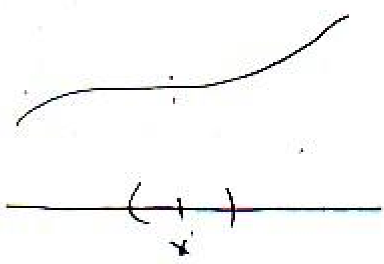
אם ניקח $[c,d]\subseteq[a,b]$ ברור ש $\omega_f([a,b])\ge\omega_f([c,d])$

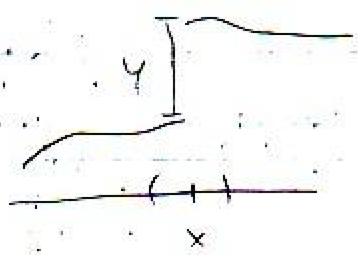
נגדיר את התנודה של f בנקודה x להיות

$$\omega_f(x)=\inf_{\delta>0}\omega_f([x-\delta,x+\delta])$$

<u>טענה:</u> f רציפה ב- x אמ"מ $\omega_f(x)=0$.

<u>ציור:</u>





כל רגע שמתקרבים ל-x התנודה קטנה ויורדת לאפס

ראינו כבר שלא משנה כמה נתקרב ל-x התנודה תמיד לא תהיה קטנה מ-y ובגבול היא בדיוק y

מה הקשר בין תנודה בנקודה לבין תנודה בקטע?

נזכור, אם f חסומה ואינטגרבילית על $[a,b]$ אז אפשר לדאוג שהתנודה הכוללת $\omega=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$ תהיה קטנה כרצוננו!

יש פה בלבול קל: במילה תנודה השתמשנו ב-3 הקשרים.

① תנודה בקטע $\omega_f(I) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$

② תנודה בנקודה $\omega_f(x) = \inf_{I: x\in I} \omega_f(I)$

③ תנודה כוללת $\omega(P) = \sum_{i=0} \omega_f([x_i, x_{i+1}])\Delta x_i$

מהיות $a>0$ נתבונן ב- $U_a = \{x\in[a,b] : \omega_f(x) > a\}$

אלה נקודות אי רציפות שבהן התנודה לפחות a.

$\underset{\text{אי רציפות}}{\text{נק'}} = \bigcup_{a>0} U_a = \{x\in[a,b] : \omega_f(x) > 0\}$

נתבונן בקטע $[x_i, x_{i+1}]$. לכל $x\in(x_i, x_{i+1})$ $\omega_f(x) \le \omega_i$ כי

$\omega_f(x) = \inf_{\delta>0} f([x-\delta, x+\delta])$.

לכן אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ ו-P חלוקה אז

$\omega(P) = \sum \omega_i \Delta x_i = \sum_{\omega_i > a} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\omega_i \le a} \omega_i \Delta x_i$.

U_a מוכל בקטעים שבהם $\omega_i > a$

$a \cdot \sum_{\omega_i > a} \Delta x_i < \sum_{\omega_i > a} \omega_i \Delta x_i \le \omega(P)$.

לכן U_a מוכלת בקטעים שסכום האורכים שלהם $\le \frac{\omega(P)}{a}$.

אבל $\omega(P)$ קטן כרצוני ולכן U_a ממידה אפס

וזאת ראינו לכל a.

לכן $\{x : \text{אי רציפות } x\} = \{x : \omega_f(x) > 0\} =$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : \omega_f(x) > \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\frac{1}{n}}$

$\underset{\text{קבוצה ממידה אפס}}{}$

תרגיל: איחוד בן מניה של קבוצות ממידה אפס הוא ממידה אפס.

כלומר אם לכל $n\in\mathbb{N}$ $A_n \subseteq \mathbb{R}$ היא ממידה 0 אז $\bigcup_{1}^{\infty} A_n$

גם כן ממידה אפס.

ההוכחה דומה להוכחה כי $\mathbb{Q}$ ממידה אפס.

$\Leftarrow$ נק' אי הרציפות של f הן ממידה אפס.

לסיכום:

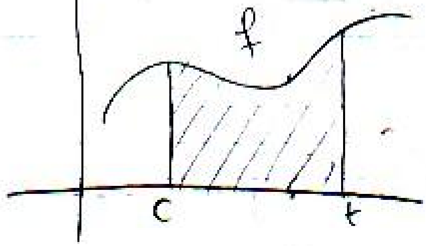
אם f אינטגרבילית על $[a,b]$ אז נקודות אי הרציפות של f הם ממידה אפס.

וזהו תנאי ממשפט לבג:

f אינטגרבילית על $[a,b]$ אמ"מ נק' אי הרציפות ממידה 0.

$\boxed{\text{המשפט היסודי}}$

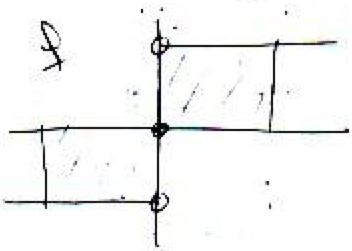
בהינתן פונק' אינטגרבילית f על $[a,b]$ ($\Rightarrow$ היא אינטגרבילית על כל תת קטע), מגדירים את $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ עבור $c\in[a,b]$ ע"י: $F(t)=\int_c^t f$. במילים $F(t)$ זה השטח מתחת לגרף בין c ל- t.



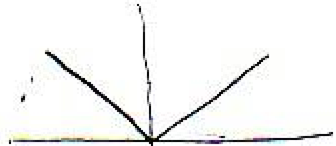
ראינו בכיתה ש $F(t)$ תמיד פונק' רציפה (ולהקל: f חסומה בגלל האינטגרביליות).

דוגמה: $f(x)=sgn(x)$ ב: $[-1,1]$

$$=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



$$\Rightarrow F(t)=\int_0^t f=\begin{cases}t & t>0\\ -t & t<0\\ 0 & t=0\end{cases}$$



כלומר $F(t)=|t|$

לשים לב!

המשפט היסודי: בהינתן f אינטגרבילית על $[a,b]$ ו- $c\in[a,b]$ אז $F=\int_c^t f$ היא פונק' רציפה, וגזירה בכל x_0 שבה f רציפה ובנקודה כזו $F'(x_0)=f(x_0)$

<u>מסקנה</u>: <u>נוסחת ניוטון-לייבניץ</u>

תהא f רציפה ב $[a,b]$. לכן f אינטגרבילית שם. לכן ניתן להגדיר $F(t)=\int_a^t f$. מהמשפט היסודי $F'(x)=f(x)$ לכל x בקטע כי f רציפה בקטע.

כלומר לכל פונק' רציפה בקטע יש פונק' קדומה.

שזה דבר מאוד עמוק לפונק' המוזרה הזו:

יש פונק' קדומה והיא מתקבלת ע"י חישוב השטח מ-a עד x.

אם G פונק' קדומה אחרת של f. אז $F-G$ קבוע. לכן

$$G(b)-F(b)=G(a)-F(a) \Rightarrow \int_a^b f = G(b)-G(a)$$

כאשר $F(b)=\int_a^b f$ ו-$F(a)=0$, ו-G קדומה כלשהי של f.

וזו נוסחת ניוטון לייבניץ.

השערוריה הראשונה: אם ידוע ש-F גזירה וידוע ש-$f=F'$ ואם ידוע ש-f אינטגרבילית על $[a,b]$ אז $\int_a^b f=F(b)-F(a)$. כאן הנחנו רק אינטגרביליות ואילו בנוסחת לייבניץ דרשנו גם רציפות.

<u>שימוש</u>: לצורך חישוב אינטגרלים מסוימים שיודעים להם את הפונק' הקדומה שלהם

$$\int_0^{7\pi}\cos t = \sin(7\pi)-\sin(0)=0$$

$(\sin t)'=\cos t$

(22) 9.5.06
ת' אופי

השבוע הבא - בוחן!

נושאים: - האינטגרל המסוים

- המשפט היסודי של החדו"א

- תרגילים 5, 6, 7

היום נלמד שיטות אינטגרציה. להסתכל על שיטות הוכחת אינטגרלים על הלוח זה כמו ללמוד שחיה מהתכתבות. עד שלא קופצים למים לא לומדים לשחות.

שיטות אינטגרציה

נתונה פונק' $f(x)$ בתחום (a,b). הפונקציה $F(x)=\int f(x)dx$ נקראת האינטגרל הלא מסוים או הפונק' הקדומה של $f(x)$ בתחום (a,b) אם לכל $a<x<b$ מתקיים $F'(x)=f(x)$.

דוגמאות

אינטגרלים מיידיים: לבדוק אותם פשוט ע"י גזירה

* $n \neq -1 \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
* $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
* $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
* $\int e^x dx = e^x + C$
* $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

למה יש ערך מוחלט? נגזור ונראה מה קורה:

$x>0 \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x<0 \Rightarrow \ln|x| = \ln(-x) \Rightarrow (\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$

אינטגרציה בחלקים

אינטואיציה אם $u(x)$, $v(x)$ שתי פונקציות אז

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

אם נאטגר את שני האגפים

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

נעביר אגפים

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

דוגמאות

* $\int xe^x dx$

כשרואים מכפלה זה אמור להדליק לנו נורה קטנה במוח עבור אינטגרציה בחלקים.

איך יודעים את מה לגזור ואת מה לאנטגרל?

אז מה שמפשט את הבעיה! עקרונית אפשר פשוט לנסות את שתי האופציות ולראות מה יוצא.

למשל, אם היינו בוחרים $u'=x$ $\quad v=e^x$

$u=\frac{x^2}{2}$ $\quad v'=e^x$

אז היינו צריכים לחשב את $\int uv'dx = \frac{1}{2}\int x^2e^x dx$

שזה יותר מסובך ממה שהתחלנו איתו

אז נבחר $u'=e^x$ $\quad v=x$

$u=e^x$ $\quad v'=1$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

הערה חשובה: במבחן לא יסלחו על טעויות חישוב באינטגרלים. חייבים חייבים חייבים בסוף האינטגרל לגזור כדי לוודא שעשינו נכון

ואכן $((x-1)e^x)' = 1\cdot e^x + (x-1)e^x = xe^x$

(23)

$$* \int \ln x \, dx = \int 1 \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$u'=1 \quad v=\ln x$

$u=x \quad v'=\frac{1}{x}$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

ואכן $(x \ln x - x)' = 1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$

$$* \int \sin(\ln x) \, dx = \int 1 \cdot \sin(\ln x) \, dx =$$

$u'=1 \quad v=\sin(\ln x)$

$u=x \quad v'=\cos(\ln x) \frac{1}{x}$

$$= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx$$

אמנו! מה נעשה? נעשה שוב אינטגרציה בחלקים

$$\int \cos(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$$

$u'=1 \quad v=\cos(\ln x)$

$u=x \quad v'=-\sin(\ln x) \frac{1}{x}$

לכן

$$\int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx$$

נעביר אגפים ונקבל

$$\int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))}{2} + C$$

השיטה הבאה עם העברת האגפים טובה
לאינטגרלים עם sin ו- cos כי 2 פעמים
שעושים אינטגרל הם עוברים אחד לשני

שיטת ההצבה

נניח שאני רוצה לחשב את $\int f(x)dx$

נניח שאנחנו שמים ❤ שיש פונקציה $t=t(x)$ רק ש-

$$\int f(x)dx = \int f(t(x))t'(x)dx$$

משום ש- $t'(x)=\frac{dt}{dx}$ נוכל לכתוב את האינטגרל בצורה $\int f(t)dt$. עכשיו "נשכח" ש- $t(x)$ פונקציה, ופשוט נמצא את הפונקציה הקדומה $F(t)=\int f(t)dt$. בסוף "ניזכר" ב-x ונקבל את הפונקציה הקדומה $F(t(x))$

דוגמאות

* $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

קל לראות שאם נסמן $t=x^2+1$

אז $dt=2x\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+c =$$
$$= \ln|x^2+1|+c$$

* $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

איזו פונק' נסמן ב-t? ניסוי וטעיה..

נניח שהיינו מנסים $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x\,dx$

אבל באינטגרל שיש לחשב מופיע $\frac{1}{\cos x}$ אז זה לא טוב.

נציב כמו שצריך $t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t|+c = -\ln|\cos x|+c$$

נוסחאות נסיגה

נניח שיש לנו סדרת אינטגרלים $\int f_n(x)dx = I_n$
ונניח שאנו יודעים למצוא את הפונק' הקדומות
של האיברים הראשונים בסדרה $I_0, I_1, \dots$
אם יש לנו נוסחת נסיגה מהצורה

$$I_n(x) = f(x) + g(x)\, I_{n-1}(x)$$

או $I_n(x) = f(x) + g(x) I_{n-1}(x) + h(x) I_{n-2}(x)$ וכו'.
הרי שאנו יודעים לחשב את I_n לכל n (ברקורסיה)

דוגמה $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

ידוע ש- $I_1 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^1} = \arctan x$

עכשיו ננסה למצוא נוסחת נסיגה

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,(2x)}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

עכשיו נעשה אינטגרציה בחלקים

$u = x \qquad v' = \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}$

$u' = 1 \qquad v = \int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int \frac{dt}{t^{n+1}} = \frac{1}{-n t^n} = \frac{1}{-n(1+x^2)^n}$

$t = 1+x^2$
$dt = 2x\,dx$

$$I_n = I_{n+1} + \frac{1}{2}\Bigg[\frac{x}{-n(1+x^2)^n} - \underbrace{\int \frac{dx}{n(1+x^2)^n}}_{\frac{1}{n} I_n}\Bigg]$$

$$\Rightarrow I_n = I_{n+1} - \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n} I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n-1}{n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + C$$

עכשיו שיש לנו נוסחת רקורסיה אפשר לחשב את I_2, I_3 וכו'

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2(1+x^2)} + C = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

$$I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{x}{4(1+x^2)^2} + C = \frac{3}{8}\arctan x + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2} + C$$

וכן הלאה

המשפט היסודי

① אם $f \in R[a,b]$ ול-f יש פונק' קדומה ב-$[a,b]$, כלומר $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in [a,b]$

אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

דוגמה

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

② תהי $f \in R[a,b]$ ונגדיר $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ ע"י $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. אז F רציפה וגזירה לכל $x \in [a,b]$ שבה f רציפה ומתקיים $F'(x) = f(x)$

פונקציות קדומות של פונק' רציונליות

פולינום הוא ביטוי מהצורה $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

ברור שלכל פולינום ניתן למצוא:

$$\int p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + C$$

פונקציה רציונלית היא מנה של שני פולינומים $\frac{p(x)}{q(x)}$

מטרה להשתכנע שלכל פונק' רציונלית יש פונק' קדומה ולהסביר איך למצוא אותה.

הערה כל פולינום ניתן לפרק למכפלת
גורמים לינאריים $(x-\alpha)$ וגורמים ריבועיים ללא
שורש ממשי x^2+bx+c

למה? מהמשפט היסודי של האלגברה לכל פולינום
ממעלה n יש n שורשים מרוכבים:
או שורש ממשי או 2 שורשים מרוכבים צמודים.
שהרי אם λ שורש מרוכב אז $\sum a_i\lambda^i = p(\lambda)=0$
נצמיד $0=\overline{p(\lambda)}=\overline{\sum a_i\lambda^i}=\sum a_i\bar{\lambda}^i = p(\bar{\lambda})$.
כלומר גם $\bar{\lambda}$ שורש כעת

$$(x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) = x^2+bx+c$$

הוא פולינום ריבועי ללא שורש ממשי.

נאנגרל פונק' רציונלית בשלבים

שלב א' פונק' מהצורה $\frac{P(x)}{(x-a)}$ $\deg p(x)\geq 1$

תזכורת אם $p(x)$ פולינום ממעלה n
$q(x)$ פולינום ממעלה m $n\geq m$
אז יש פולינומים $s(x)$ ו- $r(x)$ יחידים כך ש-
$p(x)=q(x)s(x)+r(x)$ כאשר $\deg r(x)\lneq \deg q(x)$

$\Leftarrow$ $p(x)=s(x)(x-a)+\alpha$ (כי השארית היא מדרגה "אפס").

$$\Rightarrow \int\frac{P(x)}{x-a}dx = \underbrace{\int s(x)\,dx}_{\text{יודעים לחשב}} + \underbrace{\int\frac{\alpha}{x-a}dx}_{\alpha\cdot\ln|x-a|+c}$$

דוגמה $\int\frac{x^3-2}{x+1}dx = ?$

ראשית יש לבצע חלוקת פולינומים.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{x^2-x+1} & \\
\cline{1-1}
x^3-2 & x+1 \\
x^3+x^2 & \\
\cline{1-1}
-x^2-2 & \\
-x^2-x & \\
\cline{1-1}
-2+x & \\
1+x & \\
\cline{1-1}
-3 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad x^3-2=(x^2-x+1)(x+1)-3$$

טעויות חישוב בחילוק פולינומים לא נסלחות!

תמיד יש לבדוק בסוף!

ואכן $(x^2-x+1)(x+1)-3=x^3-x^2+x+x^2-x+1-3=$
$=x^3-2$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-2}{x+1}\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-3\ln|x+1|+C$$

שלב ב'

מה קורה אם ל- $q(x)$ יש שורש ממש עם ריבוי?

דוגמה

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}=\begin{cases}\ln|x-a|+C & n=1\\ -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C & n>1\end{cases}$$

הטיפול בשורשים עם ריבוי הוא מורכב

שלב ג' אינטגרלים מהצורה $\int \frac{p(x)}{x^2+bx+c}\,dx$

אם $\deg p(x)\geq 2$ אז נבצע חלוקת פולינומים ונקבל

$$p(x)=S(x)(x^2+bx+c)+(\alpha x+\beta)$$

$$\Rightarrow \int \frac{p(x)}{x^2+bx+c}\,dx=\underbrace{\int S(x)\,dx}_{\text{ידועים}}+\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}\,dx$$

נרשום $\alpha x+\beta=\frac{\alpha}{2}(2x+b)+\left(\beta-\frac{\alpha b}{2}\right)$

$$\Rightarrow \int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}=\underbrace{\frac{\alpha}{2}\int\frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx}+\left(\beta-\frac{\alpha b}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+bx+c}$$

מהצבה: $t=x^2+bx+c$

$dt=(2x+b)\,dx$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{\alpha}{2}\ln|t|+C=\frac{\alpha}{2}\ln|x^2+bx+c|+C$$

(26) 16.5.06
ת. אינפי

פונקציות קדומות של פונקציות רציונליות

נרצה לחשב את $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ כאשר $p(x), q(x)$ פולינומים.

שלב א $\int \frac{p(x)}{x-a}dx \xleftarrow{\text{רדוקציה}} \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$

שלב ב $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ ידוע

שלב ג $\int \frac{p(x)}{x^2+bx+c}dx \xleftarrow{\text{רדוקציה}} \int \frac{\alpha + x\beta}{x^2+bx+c}dx \xleftarrow{\text{רדוקציה}} \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$

יש 3 אפשרויות ל- x^2+bx+c:

1) למשוואה $x^2+bx+c=0$ יש 2 שורשים ממשיים

ננית ש- $x^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$

נמצא קבועים A, C כך ש-

$$\frac{A}{x-\alpha} + \frac{C}{x-\beta} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{x^2+bx+c}$$

$$\Rightarrow \frac{A(x-\beta)+C(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{x(A+C)-(-A\beta-C\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

נשווה מקדמים:

$A+C=0 \Rightarrow A=-C$

$-A\beta-C\alpha=1 \Rightarrow -A\beta+A\alpha=1$

$\Rightarrow A(\alpha-\beta)=1$

לכן $A=\frac{1}{\alpha-\beta}$

$C=\frac{1}{\beta-\alpha}$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\int\frac{dx}{x-\alpha} - \int\frac{dx}{x-\beta}\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\ln|x-\alpha| - \ln|x-\beta|\right) + C$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| + C$$

2) למשוואה $x^2+bx+c=0$ יש שורש ממשי יחיד

יש שורש ממשי יחיד אמ"מ $b^2-4c=0 \Leftarrow$

השורש היחיד הוא $-b/2$

$$\int\frac{dx}{x^2+bx+c}=\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2})^2}=-\frac{1}{x+\frac{b}{2}}+c$$

3) למשוואה $x^2+bx+c=0$ אין פתרונות ממשיים

אין פתרונות ממשיים אמ"מ $b^2-4c<0 \Leftrightarrow c>\frac{b^2}{4}$

נסמן $\gamma^2=c-\frac{b^2}{4}$ ואז

$$\int\frac{dx}{x^2+bx+c}=\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2})^2+\gamma^2}=\frac{1}{\gamma^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+b/2}{\gamma}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\gamma}\right)+c=\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right)+c$$

דוגמאות

1) $$\int\frac{dx}{x^2+5x+6}$$

ברור ש- $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

אז נחפש A,B רק ש-

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0 & \Rightarrow B=-A\\ 3A+2B=1 & \Rightarrow A=1,\ B=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2+5x+6}=\int\frac{dx}{x+2}-\int\frac{dx}{x+3}=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+c$$

2) $$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

<u>הערה</u> אי שווא מאוזן שיעצרו!

(27)

שלב 3 ‏ $\int \frac{x+d}{(x^2+bx+c)^n}$ כאשר ל- $x^2+bx+c=0$ אין שורשים ממשיים.

$$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\gamma^2 \qquad \left(\gamma^2=c-\frac{b^2}{4}\right)$$

$$\frac{x+d}{(x^2+bx+c)^n}=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}}_{①}+\underbrace{\frac{d-b/2}{(x^2+bx+c)^n}}_{②}$$

① $$\int\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}dx \underset{\substack{\text{הצבה}\\ t=2x+b}}{=} \begin{cases} \ln|x^2+bx+c|+C & n=1\\ -\frac{1}{(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} & n>1\end{cases}$$

② $$\int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\gamma^2\right)^n}=\frac{1}{\gamma^{2n}}\int\frac{dx}{\left[\left(\frac{x+b/2}{\gamma}\right)^2+1\right]^n}$$

נציב $y=\frac{x+\frac{b}{2}}{\gamma}$ $\Leftarrow$ $dy=\frac{1}{\gamma}dx$

בשיעור הקודם חישבנו נוסחת נסיגה ל- $In(y)=\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{(x^2+bx+c)^n}=\frac{1}{\gamma^{2n-1}}\int\frac{dy}{(y^2+1)^n}=\frac{1}{\gamma^{2n-1}}In\left(\frac{x+b/2}{\gamma}\right)$$

אלגוריתם לחישוב $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$ עבור פולינומים $p(x)$, $q(x)$

שלב 1 חילוק עם שארית: $p(x)=s(x)q(x)+r(x)$

כאשר $\deg r<\deg q$ ואז $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\underbrace{\int s(x)dx}_{\text{ידוע}}+\underbrace{\int\frac{r(x)}{q(x)}dx}_{\text{דרוש לחשב}}$

שלב 2 פירוק $q(x)$ לגורמים אי פריקים: לינאריים וריבועיים.

$$q(x)=\underbrace{(x-a)^r \ldots}_{\text{שאר הלינאריים}}\underbrace{(x^2+bx+c)^n \ldots}_{\text{שאר הריבועיים}}$$

שלב 3 למצוא קבועים $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

$$\frac{r(x)}{q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{(x-a)^i}+\text{שאר הלינאריים}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i x+\gamma_i}{(x^2+bx+c)^i}+\text{שאר הריבועיים}$$

שלב 4 לעשות אינטגרציה לשלב 3 ואת זה אנחנו יודעים לעשות לפי ה החישובים קודם.

למה זה עובד? השאלה היא בעצם למה שלב 3 עובד.

- כי יש מספיק משוואות בנעלמים $א_i$, $ב_i$, $ג_i$.

ראשית נשים לב שמספר המשוואות הוא $\deg r+1$

ומספר הנעלמים $\deg q = \underbrace{(r+\dots)}_{\text{לינאריים}} + 2\underbrace{(m+\dots)}_{\text{ריבועיים}}$

דוגמה

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)^2} = ?$$

נחפש A, B, C, D כך ש-

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

להשוות מקדמים יהיה פה לא נעים אז נשתמש בטריק אחר. השוויון בין המונים אמור להתקיים לכל x אז נציב x-ים שונים שיעזרו לנו

$x = 1 \Rightarrow 3 = 9B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$x = -2 \Rightarrow 3 = 9D \Rightarrow D = \frac{1}{3}$

עכשיו או ע"י השוואת מקדמים או ע"י הצבות נוספות אפשר לקבל $A = \frac{1}{9}, C = -\frac{1}{9}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx = \int \frac{1/9}{x-1}dx + \int \frac{1/3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-1/9}{x+2}dx + \int \frac{1/3}{(x+2)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{9}\ln|x+2| - \frac{1}{3(x+2)} + C$$

אינטגרלים לא אמיתיים

מוטיבציה: באינטגרל רימן הנחנו 2 דברים: הראשון, שהתחום חסום, והשני שהפונקציה חסומה. היינו רוצים להתמודד עם אינטגרלים שלא מקיימים הנחות אלה. למשל היינו רוצים לחשב $\int_a^\infty f(x)dx$ או $\int_a^b f(x)dx$ כאשר $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$!

הבעיה היא שלפעמים האינטגרל קיים ($\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$) ולפעמים לא ($\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$).

אז מה עושים? אפשר להשתמש במשפט היסודי בשביל לחשב $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$.

ישנם מבחני התכנסות: קריטריון קושי, קריטריון ההשוואה (להתכנסות בד"כ משווים ל-$\frac{1}{x^2}$ ולהתבדרות בד"כ משווים עם $\frac{1}{x}$).

(28) 23.05.06

ת' אנפי'

הערות לתרגיל 9: שאלה 4:

ג) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. צ"ל: $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cos(nx)f(x)dx=0$

הוכחה: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$u=f(x) \qquad u'=f'(x)$$

$$v'=\cos(nx) \qquad v=\frac{\sin(nx)}{n}$$

$$\int_0^1 \cos(nx) f(x)dx = \frac{f(x)\sin(nx)}{n}\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \underbrace{f'(x)\sin(nx)dx}$$

$$0 \leftarrow \frac{f(1)\overset{\text{חסום}}{\sin n}}{n}$$

פונק' רציפה ולכן האינטגרל קיים וגם

$$\left|\int_0^1 f'(x)\sin(nx)dx\right| \le \int_0^1 |f'(x)|dx$$

ולכן כל זה שואף לאפס

ד) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה. צ"ל: $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cos(nx)f(x)dx$

הוכחה: המטרה הייתה לה שתמש בס.א' ובתרגיל 7 שאלה 2:

אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה אז לכל $\delta>0$ הגדרנו

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)dt$$

ראינו ש- F_δ יש נגזרת רציפה

ובקטע $[a,b]$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$

$$|F_\delta(x)-f(x)|<\varepsilon$$

בנספח לפתרון גם זה היינו צריכים להשתמש בזה ש f רציפה במ"ש ב-$[a,b]$. זה חשוב כי לכל $x\in[a,b]$ אנחנו צריכים את אותו ה-δ: יהי $\varepsilon>0$. נתבונן ב-

$$F_\delta(x)-f(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))dt$$

מהרציפות במ"ש יש $\delta>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים שאם $|t|<\delta$ אז $|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon$ ולכן

$$|F_\delta(x)-f(x)| \le \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t)-f(x)|dt < \frac{2\delta\varepsilon}{2\delta}=\varepsilon$$

המסקנה מזה היא שכל פונק' רציפה f ב-$[a,b]$ ניתן לקרב במ"ש ע"י פונקציה גזירה ברציפות - F_δ.

נרשום (תזכורת) f- שונה.

יהי $\varepsilon>0$. לפי תרגיל 7 יש $\delta>0$ ופונ' F_δ גזירה ברציפות כך, שלכל $x\in[0,1]$ $|F_\delta(x)-f(x)|<\varepsilon$ לכן

$$\int_0^1 \cos(nx)f(x)\,dx = \int_0^1 \cos(nx)F_\delta(x)\,dx - \int_0^1 \cos(nx)(f(x)-F_\delta(x))\,dx$$

$\int_0^1 \cos(nx)F_\delta(x)\,dx \to 0$ (לפי סעיף א')

$$\left|\int_0^1 \cos(nx)(f(x)-F_\delta(x))\,dx\right| \le \int_0^1 |\cos nx|\,|f(x)-F_\delta(x)|\,dx \le 1\cdot 1\cdot \varepsilon$$

$\Leftarrow$ אז זה שואף לאפס.

לכן, לכל $\varepsilon>0$ יש N כך, שלכל $n>N$ $\left|\int_0^1 \cos(nx)f(x)\,dx\right|<2\varepsilon$.

אינטגרלים לא אמיתיים

יש שני אבות טיפוס קיצוניים: תחום לא חסום ופונק' לא חסומה

תחום לא חסום: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$

$\alpha\neq 1$:

$$= \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_0^b = \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}+\frac{1}{1-\alpha}$$

$\alpha<1$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\infty$

$\alpha>1$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$

$\alpha=1$:

$$\ln x\Big|_1^b = \ln b - 0 \xrightarrow[b\to\infty]{} \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\infty$$

מסקנה: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס אמ"מ $1<\alpha$.
שזה הגיוני וכד' גם דומה למה שאנו מכירים.

פונקציה לא חסומה:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

$\alpha \neq 1$:

$$\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$\alpha < 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

$\alpha > 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$

$\alpha = 1$:

$$\ln x\Big|_\varepsilon^1 = 0 - \ln\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$$

טענה $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס
אמ"מ $\alpha < 1$.

ע"י החלפת משתנה אפשר לראות שהבעיות שקולות
ולכן רואים שההוכחות הן ממש דומות.
הערה: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ לא מתכנס לשום α!!

דוגמאות:

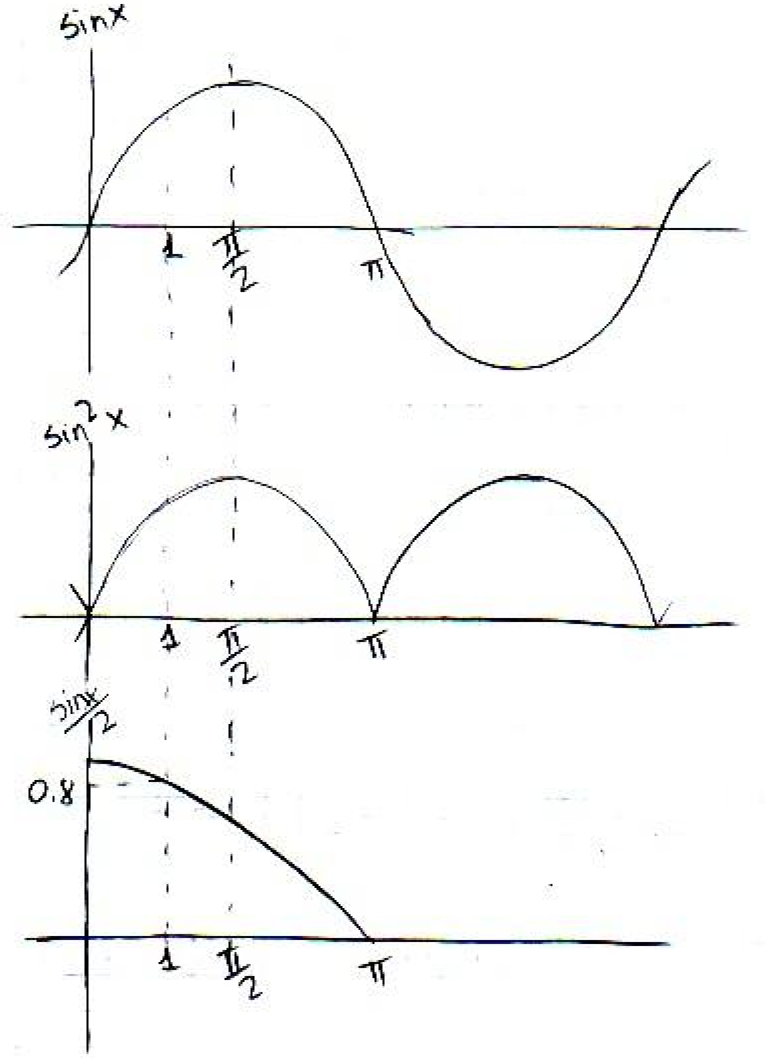
1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ מתכנס
2. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ מתבדר
3. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ מתבדר

אלו התנהגויות מפתיעות!
תכף נדון בזה. בכל אופן
נשים ♡ שבכל אינטגרל יש
2 בעיות!

(1) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ מתכנס לפי "אבל".
משפט: f רציפה ב- $[a,\infty)$ $(a>0)$ ויש M כך שלכל b:
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < M$$
אז לכל $\alpha>0$ $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx$ מתכנס.

במקרה שלנו: $\left|\int_1^b \sin x\,dx\right| = \left|\cos x\big|_1^b\right| = |\cos b - \cos 1| \le 2$

מה עם $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$? נזכור ש- $\frac{\sin x}{x} \to 1$ $\Rightarrow$ הפונקציה
$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ רציפה $\Rightarrow$ האינטגרל קיים כי פונקציה רציפה!



הנה הציורים: סתם בשביל האינטואיציה:

② $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ - ראשית נשים לב שלא ניתן להשתמש במשפט כי $\int_1^b \sin^2 x\,dx \to \infty$

נוכיח פורמלית שזה מתבדר: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x}}_{\text{מתבדר!}} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,dx}_{\text{מתכנס.}}$$

$\Leftarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ מתבדר. $\Leftarrow$ בוודאי שגם האינטגרל מתבדר כי זה הזנב שלו.

אבל בכל זאת $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\sin x\,dx$

מתכנס!

כי: $0.8 < \frac{\sin x}{x} < 1$

$0 \le \sin x$

ומכפלה של 2 פונק' רציפות וחסומות ולכן יש אינטגרל.

(3) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ מתכנס לפי המשפט עבור $\alpha=2$

אבל $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ מתבדר.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{x}\,dx > 0.8\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

וזה מתבדר

הקשר בין אינטגרלים לטורים:

$f(x)$ פונק' חיובית לא עולה ב-$[a,\infty)$ $(a>0)$

ואינטגרבילית בכל $[a,b]$ כאשר $b>a$

אז הטור $\sum_{k=0}^{\infty} f(k+a)$ והאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנסים

ומתבדרים יחדיו. כאשר a שלם יש $\sum_{k=a}^{\infty} f(k)$

<u>דוגמאות ידועות:</u>

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$; $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנסים אמ"מ $\alpha>1$

<u>דוגמה</u> מתי $\sum_2^\infty \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ מתכנס?

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

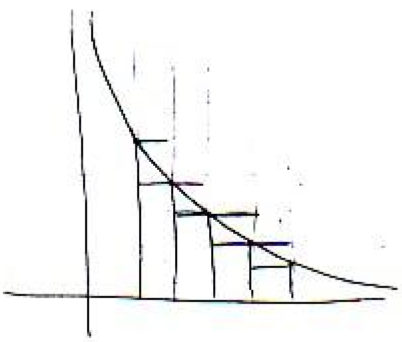
מתכנס $\alpha>1$

מתבדר $\alpha\le 1$

$t=\ln x$

$dt=\frac{1}{x}dx$

הערכת טורים ע"י אינטגרלים.



$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sim 1\frac{2}{3}$.

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} > \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1+\sum_2^\infty \frac{1}{n^2} < 1+\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1+1 = 2$$

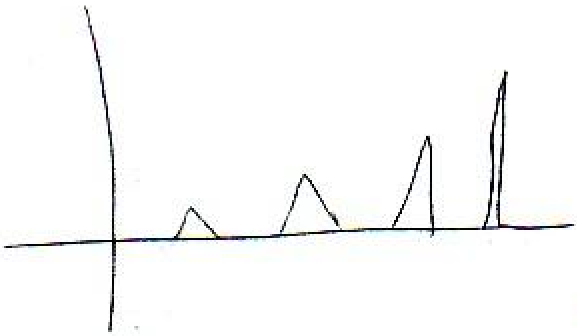
$\Leftarrow$ הדיוק לחשב: $1<\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}<2$

הערות לתרגיל 9 שאלה 7:

ג) אם f רציפה ו- $\int_1^\infty f(x)dx$ קיים אז f חסומה

<u>לא נכון!</u>

נגדיר f באופן הבא:



סביב n נבנה משולש שבסיסו

$[n-\frac{1}{n^3}, n+\frac{1}{n^3}]$

וגובהו n. ובשאר הנק' $f \equiv 0$

שטח המשולש: $\frac{1}{2} n \cdot \frac{2}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

$\int_1^\infty f(x)dx = \sum_2^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$

(31) 30.5.06

ת. אינפי

תרגיל 10 - שאלה 12'

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}dx$ מתכנס אמ"מ $0<s<2$.

ידוע לפי משפט ש- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s}dx$ מתכנס לכל $s>0$

נראה התבדרות עבור $s\le 0$ - ניתן לראות לפי קריטריון קושי

עבור $2n\pi \le x \le (2n+1)\pi$ מתקיים $\sin x \ge 0$ ואז אפשר

להשתמש בקריטריון ההשוואה:

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^s}dx \ge \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx = 2$$

וזה לפי קושי אומר לנו שהאינטגרל מתבדר

מה עם $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^s}dx$? נראה שמתכנס עבור $s<2$.

ידוע ש $\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$ ולכן $\frac{\sin x}{x}$ חסומה בקטע $[0,1]$.

[illegible] $0.8<\frac{\sin x}{x}<1$ ואז

$$\underbrace{0.8\int_0^1 x^{-s+1}dx}_{\text{מתבדר עבור } s\ge 2} \le \int_0^1\frac{\sin x}{x^s}dx \le \underbrace{\int_0^1 x^{-s+1}dx}_{\text{מתכנס עבור } s<2}$$

פונקציית גמא

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

(1) התכנסות האינטגרל עבור $\alpha>0$:

<u>שלב 1</u> המקרה $\alpha\ge 1$. נבחר $\alpha-1\le n\in\mathbb{N}$ ואז

$x^n e^{-x}\ge x^{\alpha-1}e^{-x}$ ידוע כי $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{x/2}}=0$

לכן יש M כך שלכל $M\le x$: $x^n\le e^{x/2} \Rightarrow x^n e^{-x}\le e^{-x/2}$

לפי מבחן ההשוואה $\int_M^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\le\int_M^\omega x^n e^{-x}dx\le\int_M^\omega e^{-x/2}dx=$

$$=-2e^{-x/2}\Big|_M^\omega \xrightarrow[\omega\to\infty]{} -2e^{-M/2}$$

לכן $\int_M^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ מתכנס.

כאשר $1\le\alpha$ $\int_0^M x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ הוא אינטגרל של פונקציה רציפה על קטע סגור. ולכן קיים האינטגרל.

סעיף 2 $\quad 0<\alpha<1$

$x>1$: $0<x^{\alpha-1}<1$: $\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \le \int_1^\infty e^{-x}dx < \infty$

$0\le x\le 1$: $e^{-x}\le 1$: $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx \le \int_0^1 x^{\alpha-1}dx < \infty$

נוסחת סטירלינג: $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac12} e^{-x}$

*) אומר ש $f(x)\sim g(x)$ אם $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 1$

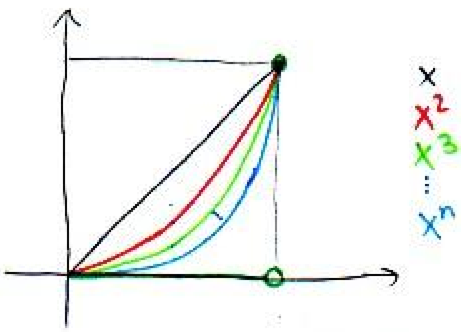
$$\Rightarrow n! = n\Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac12} e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

למה זה טוב? דוגמה:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

סדרות של פונקציות

דוגמה) $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0,1]$



נגדיר פונ' חדשה: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

יש פה 2 בעיות:

(1) $f(x)$ אינה רציפה למרות ש-$f_n(x)$ רציפה לכל n.

(2) לא ניתן להפוך את סדר הגבולות:

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$$

<u>מוטיבציה:</u> נתבונן בנקודה x_0. אז הסדרה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$
זו פשוט סדרה של מספרים ממשיים
לכן התכנסות $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ זו ההתכנסות הרגילה מאינפי א'.

נתון $X\subseteq\mathbb{R}$ תחום - כלומר תת קבוצה של $\mathbb{R}$ (או דווקא קטע). ונתונות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $f(x)$ פונקציות המוגדרות ב- X.

<u>התכנסות נקודתית:</u> נאמר ש $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לפונקציה $f(x)$ בתחום X אם:
<u>לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$</u> יש N (<u>שתלוי ב-x וב-ε</u>) כך שלכל $N<n$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
כלומר לכל $x_0\in X$ $f_n(x_0)\longrightarrow f(x_0)$.

<u>התכנסות במ"ש:</u> נאמר ש $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$ בתחום X אם:
<u>לכל $\varepsilon>0$</u> קיים N (שתלוי <u>רק ב-ε</u>) כך שלכל $N<n$ <u>ולכל $x\in X$</u> מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

נחזור לדוגמה שלנו:
(1) יהי $0<\eta<1$, אזי $f_n(x)=x^n$ מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1-\eta]$ לפונקציה $f(x)=0$.
<u>הוכחה:</u> נסמן $y=1-\eta$. אזי $\lim_{n\to\infty}y^n=0$. לכן לכל $0<\varepsilon$ יש N כך שלכל $N<n$ $y^n=|y^n|<\varepsilon$. לכן לכל $0<\varepsilon$ יש N כך שלכל $N<n$ ולכל $0\le x\le 1-\eta=y$ מתקיים $|x^n-0|=|x^n|\le|y^n|<\varepsilon$.
(2) בקטע $[0,1]$ $f_n(x)=x^n$ לא מתכנסת במ"ש, כי הפונקציה הגבולית $f(x)$ אינה רציפה (לפי משפט).
(3) בקטע $[0,1)$ $f_n(x)=x^n$ אינה מתכנסת במ"ש ל- $f(x)\equiv 0$.
<u>הוכחה:</u> ניקח $x_n=1-\frac{1}{n}$ ונתבונן ב $f_n(x_n)=(1-\frac{1}{n})^n\longrightarrow\frac{1}{e}>\frac{1}{4}$
לכן אם ניקח $\varepsilon=\frac{1}{4}$ אז לכל N יש $N<n$ ו- x_n כך ש $|f_n(x_n)|=(1-\frac{1}{n})^n>\frac{1}{4}$.

טורי פונקציות

דוגמה:

$$u_1(x)=x$$
$$u_2(x)=x^2-x$$
$$\vdots$$
$$u_n(x)=x^n-x^{n-1}$$

נגדיר $u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x)$ 1) מהי $u(x)$? 2) האם $u(x)$ רציפה?

הטור $\sum_{i}^{\infty}u_i(x)$ והסדרה $\{S_n(x)\}$ $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)=x+x^2-x+\dots+x^n-x^{n-1}=x^n$
מתכנסים ומתבדרים ביחד. לכן $u(x)=\begin{cases}0 & \text{אחרת}\\ 1 & x=1\end{cases}$ והיא
כמובן לא רציפה.

טורים		סדרות
$\sum_{i}^{\infty}u_i(x)$	$\Rightarrow$	$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$, $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$
$u_1=f_1(x)$, $u_i(x)=f_i(x)-f_{i-1}(x)$, $(S_n(x)=\sum^{n}u_i(x)=f_n(x))$, $u(x)=\sum_{i}^{\infty}u_i(x)$	$\Leftarrow$	$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

<u>אינטואיציה</u>: נתבונן בנקודה x_0. $\sum_{i}^{\infty}u_i(x_0)$ להיו טור של מספרים ממשיים (כמו בסמסטר א').

נתון <u>תחום</u> $X\subseteq\mathbb{R}$. $\sum_{i}^{\infty}u_i(x)$ טור של פונק' המוגדרות ב-X.
$u(x)$ פונקציה המוגדרת ב-X.

<u>התכנסות נקודתית</u>: נאמר ש-$\sum_{i}^{\infty}u_i(x)$ מתכנס בתחום X וסכומו הוא $u(x)$ אם:
<u>לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$</u> יש N (שתלוי <u>ב-x וב-ε</u>) כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\sum_{i}^{n}u_i(x)-u(x)\right|<\varepsilon$.

התכנסות במ"ש: הטור $\sum_1^\infty u_i(x)$ מתכנס במ"ש בתחום X וסכומו הוא $u(x)$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש N (שתלוי רק ב-ε) כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in X$ מתקיים $\left|\sum_1^n u_i(x)-u(x)\right|<\varepsilon$

?	טורים $\sum_1^\infty u_i(x)$	סדרות $\{f_n(x)\}_1^\infty$
קריטריון קושי	הטור מתכנס במ"ש ב-X אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n>N$ ולכל m ולכל $x\in X$ מתקיים $\left\lvert\sum_{i=n+1}^{n+m} u_i(x)\right\rvert<\varepsilon$	הסדרה מתכנסת במ"ש ב-X אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n>N$ ולכל $x\in X$ $\lvert f_n(x)-f_m(x)\rvert<\varepsilon$!
רציפות	יהי $\sum_1^\infty u_i(x)$ טור של פונקציות רציפות המתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$. אז הסכום של הטור הוא פונקציה רציפה ב-$[a,b]$. במקרה זה $\lim_{x\to x_0}\sum_1^\infty u_i(x)=\sum_1^\infty \lim_{x\to x_0} u_i(x)$	תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות המוגדרות בקטע $[a,b]$ ומתכנסות שם במ"ש לפונקציה $f(x)$. אם בנקודה x_0 הפונקציות $f_n(x)$ רציפות אז גם $f(x)$ רציפה שם. במקרה זה $\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$

דוגמאות - סדרות

$f_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}$ בקטע $[0,1]$ $\qquad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)\equiv 0$

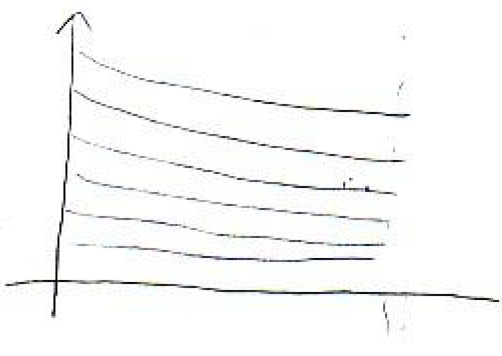
$g_n(x)=\frac{1}{x+n}$ בקטע $[0,1]$ $\qquad g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)\equiv 0$

נראה ששתיהן מתכנסות במ"ש:

יהי $\varepsilon>0$. ניקח $N>\frac{1}{\varepsilon}$, אז לכל $n>N$ ולכל $x\in[0,1]$

$$\frac{1}{x^2+n^2}\le\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}<\varepsilon$$

$$\frac{1}{x+n}\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}<\varepsilon$$



דוגמאות: טורים

$$(1)\quad u(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$$

$$(2)\quad v(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x+n}$$

(1) מתכנס לפי ויירשטרס: אם $u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x)$ טור פונקציות המוגדרות ב-X, ואם יש טור חיובי מתכנס של מספרים קבועים $\sum_{1}^{\infty}a_i$ כך שלכל $x\in X$ $|u_i(x)|\le a_i$ אז $u(x)$ מתכנס במ"ש.

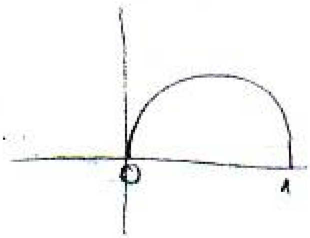
המבחן שלי $\frac{1}{x^2+n^2}\le\frac{1}{n^2}$ והטור $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.

(2) מתבדר לכל x שהרי לפי השוואה:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{x+n}\ge\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{1+n}\longrightarrow \text{מתבדר}$$

שאלה: האם רציפות הפונקציה הגבולית מבטיחה שההתכנסות היא במ"ש?

לא נכון: לדוגמה $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ $\quad X=[0,1]$



$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\equiv 0$$

ההתכנסות אינה במ"ש: $x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\left|\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)-0\right|=\tfrac{1}{4}$$

כי אם ניקח $\varepsilon<\frac{1}{4}$ "נדפק לנו העניין".

(34) 6/6/06
ת. אינפ.

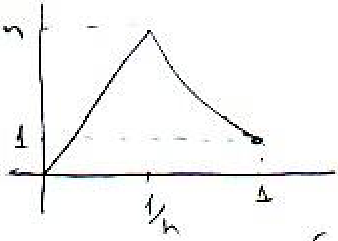
<u>בשבוע הבא</u>: בוחן 3
נושאים: אינטגרלים לא אמיתיים
סדרות וטורי פונקציות
תרגילים 8, 9, 10, 11

<u>הערה לבוחן 2</u>:
תנאי המונוטוניות נותן רק מונוטוניות חלשה:
$f \geq g$ אינטגרביליות ב $[a,b]$ אז $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
ברור שזה לא אמת: יכול להיות שהאינטגרלים שווים אבל $f \neq g$
לדוגמה: $f \equiv 0$ $\quad g$:
$f \equiv 0$ $\quad g$ = פונק' רימן
<u>טענה</u>: אם $f \geq 0$ בקטע $[a,b]$ ורציפה בנק' x_0, ו- $f(x_0)>0$ אז $\int_a^b f(x)dx > 0$.
<u>משפט</u> (קשה!): אם f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו- $f(x)>0$ לכל $x \in [a,b]$ אז $\int_a^b f(x)dx > 0$.
<u>מסקנה</u>: $f>g$ אינטגרביליות ב- $[a,b]$ אז $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

<u>אינטגרציה של סדרות פונקציות</u>: נתבונן בסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ של פונק' המוגדרות ב- $[a,b]$. נניח ש- $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ לכל $x \in [a,b]$.
נניח ש- $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$ ואולי אף רציפות.

<u>שאלות</u>:
1) האם $f(x)$ אינטגרבילית ב $[a,b]$? (הכוונה אינטגרבילית רימן)
2) האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$?
3) אם (1) ו- (2) נכונים האם $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
כלומר, האם אפשר להחליף את $\lim$ ו- $\int$.
כנ"ל לגבי טורים: טור $\sum_1^{\infty} u_n(x)$ פונק' אינטגרביליות ב- $[a,b]$, מתי
$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

דוגמה 1:



$X = [0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

ברור ש f_n רציפות, חסומות ואינטגרביליות

טענה: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x} & \text{אחרת} \end{cases}$

הסבר: * אם $x=0$ אז $f_n(0)=0$ לכל n ולכן $f(0)=0$.

* אם $x>0$ אז קיים N כך ש- $x > \frac{1}{N}$ ולכן, לכל $n>N$

$$x > \frac{1}{N} > \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{x}$$

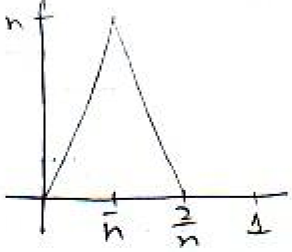
תשובות לשאלות:

1) $f(x)$ לא אינטגרבילית, כי אינה חסומה.

2) $$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{1/n} n^2x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x} = n^2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/n} + \ln x\Big|_{1/n}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \ln n \longrightarrow \infty$$

דוגמה 2



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 2/n \le x \le 1 \\ n^2x & 0 \le x \le 1/n \\ 2n - n^2x & 1/n \le x \le 2/n \end{cases}$$

טענה: $f_n \longrightarrow f$ כאשר $f(x) \equiv 0$

הסבר: * אם $x=0$ אז $f_n(x)=0$ לכל n ולכן $f(0)=0$

* אם $x>0$ אז קיים N כך ש- $x > \frac{2}{N}$ ולכן לכל $n>N$ $f_n(x)=0$

תשובות לשאלות:

1) כן: $\int_0^1 f(x)dx = 0$

2) לא: $\int_0^1 f_n(x)dx \underset{\text{משולש}}{\overset{\text{שטח}}{=}} \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\,n = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \ne 0 = \int_0^1 f(x)dx$$

דוגמה 3: $f_n(x)=x^n$ $\quad X=[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases} \Longrightarrow \int_0^1 f(x)dx=0$$

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

התשובות ל-(1), (2), (3) הן "כן". למרות שאין התכנסות במידה שווה!

משפטי אינטגרציה איבר איבר

סדרות

יהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונק' אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, המתכנסת שם במ"ש לפונק' $f(x)$. אז גם $f(x)$ אינטג' ו- $\int_a^x f_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} \int_a^x f(t)dt$

טורים

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ טור של פונק' אינטגרביליות המתכנס במ"ש ב-$[a,b]$, וסכומו הוא $u(x)$. אזי $u(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$! $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)dx=\int_a^x u(t)dt$

גזירה:

דוגמה: $f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ $\quad X=[0,1]$

טענה: $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ל- $f(x)\equiv 0$ ב- $[0,1]$:

הסבר: יהי $\varepsilon>0$ ניקח $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$ ואז לכל $n>N$ ולכל $x\in[0,1]$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{N}}<\varepsilon$$

סדרת הנגזרות: $f_n'(x)=\frac{n\cos nx}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cos(nx)$

סדרת הנגזרות אינה מתכנסת אפילו נקודתית ל- $f'(x)=0$!

אז עם הנגזרות, אפילו התכנסות במ"ש לא עוזרת לנו!

משפטי גזירה איבר איבר

סדרות

תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונ' גזירות ברציפות ב-$[a,b]$ המתכנסת לגבול פונ' ב-$x_0 \in [a,b]$. נניח כי סדרת הנגזרות $\{f'_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ב-$[a,b]$ אזי $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש לגבול $f(x)$ ו- $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$

טורים

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ טור המתכנס פונ' ב-$x_0 \in [a,b]$. נניח כי $u_n(x)$ גזירות ברציפות ב-$[a,b]$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$ ובנוסף $u(x)$ מקיים $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'(x)$

<u>דוגמה:</u> $X = [0, \frac{1}{2}]$

$f_n(x) = x^n + 1 \longrightarrow 1$

$f'_n(x) = n x^{n-1}$

$\Longrightarrow f(x) = 0 \quad f'(x) = 0$

$f'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f'$ במ"ש בקטע $[0, \frac{1}{2}]$ אבל $f_n \not\longrightarrow f$ אפילו נקודתית. אז מטרת x_0 היא לתת את קיום האינטגרציה המוצבר מ-f' ל-f

טורי חזקות

<u>טור חזקות</u> הוא ביטוי מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

<u>הערה טפשית:</u> a_n הוא ביטוי שתלוי ב-n בלבד ולא ב- x !!!

<u>טעות אידיוטית:</u> $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ $a_n = \frac{1}{1+x^{2n}} \Rightarrow$ טור חזקות. אבל זה <u>לא</u> טור חזקות.

טור חזקות הוא בפרט טור פונקציות. אז ברור שכל המשפטים של טורי פונקציות תקפים גם במקרה הזה אבל לטורי חזקות ישנם הרבה מאפיינים יחודיים.

דוגמאות

	תחום התכנסות	קריטריון קושי	קריטריון ד'למבר
① $\sum_0^\infty n^n x^n$ מתבדר לכל $x\neq 0$ · כי אם $x\neq 0$ האיבר הכללי $n^n x^n$ לא שואף ל-0	$\{0\}$	$c=\overline{\lim}\sqrt[n]{n^n}=\lim n=\infty \Rightarrow R=0$	$\lim\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=0=R$
② $\sum_0^\infty x^n$ מתכנס לכל $x\in(-1,1)$ לפונק' $\frac{1}{1-x}$. ב-$x=1$ וב-$x=-1$ הטור מתבדר וכן לכל x עם $\|x\|>1$ כי האיבר הכללי לא שואף לאפס	$(-1,1)$	$a_n=1\ \forall n \Rightarrow R=1$ כי $C=1$	
③ $\sum\frac{x^n}{n^2}$ - ידוע כי $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן גם $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ לכן לכל x עם $\|x\|\le 1$ הטור מתכנס (מבחן ההשוואה) ולכל x עם $\|x\|>1$ הטור מתבדר - כי האיבר הכללי לא שואף לאפס	$[-1,1]$	$a_n=\frac{1}{n^2}$ $C=\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\overline{\lim}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=1 \Rightarrow R=1$	$\lim\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2}=\lim\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$
④ $\sum\frac{x^n}{n}$ מתכנס לכל $-1\le x<1$ לפונק' $-\ln(1-x)$ - $x=1$ מתבדר כי זה הטור ההרמוני. $x=-1$ מתכנס כי זה לייבניץ. ועבור $\|x\|>1$ מתבדר בגלל שהאיבר הכללי לא שואף ל-0	$[-1,1)$	מהטענה בסמוך הקודם יוצא $R=1$ (קבל) $R=1$	
⑤ $e^x=\sum_0^\infty\frac{x^n}{n!}$, $\sin x=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos x=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ מתכנסים לכל $x\in\mathbb{R}$	$(-\infty,\infty)$	$\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\overline{\lim}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0 \Rightarrow R=\infty$ עבור e^x ובאופן דומה גם ל-$\sin x$ ו-$\cos x$	$\lim\frac{1/n!}{1/(n+1)!}=\lim(n+1)=\infty$

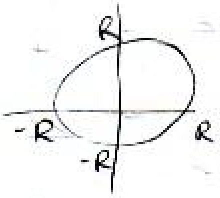
דוגמה אחרונה: טורי טיילור (כמובן דוגמאות 2, 4, 5).

<u>משפט אבל:</u> אם טור חזקות $\sum_0^\infty a_n x^n$ מתכנס בנק' $\alpha \neq 0$ אז הוא מתכנס לכל x עם $|x|<|\alpha|$

<u>משפט:</u> לכל טור חזקות יש מס' R $(0\le R\le\infty)$ כך שהטור מתכנס בהחלט לכל x עם $|x|<R$.

<u>מסקנה:</u> תחום ההתכנסות של טור חזקות יכול להיות רק:
$[-R,R], [-R,R), (-R,R), (-R,R]$ (וגם $R=\infty$, $R=0$)

<u>אינטואיציה:</u> "רדיוס התכנסות": במישור המרוכב $\sum a_n z^n$ $(z\in\mathbb{C})$ מתכנס בפנים המעגל (עם בעיות בשפה)



כשאנחנו ב-$\mathbb{R}$ נשאר רק ציר ה-x.

<u>משפט קושי-הדמר:</u> יהי $\sum_0^\infty a_n x^n$ טור חזקות. נסמן $C=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ אז

$$R=\begin{cases}\frac{1}{C} & 0<C\in\mathbb{R}\\ \infty & C=0\\ 0 & C=\infty\end{cases}$$

<u>תנאי ד'אלמבר:</u> אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ אז הוא שווה ל-R.

<u>טענה:</u> אם רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_0^\infty a_n x^n$ הוא R אז גם רדיוס ההתכנסות של $\sum n^k a_n x^n$ לכל $k\in\mathbb{R}$

<u>הוכחה:</u> נחשב את רדיוס ההתכנסות לפי קושי הדמר:

$$C_2=\overline{\lim}\sqrt[n]{|n^k a_n|}=\overline{\lim}\underbrace{\sqrt[n]{n^k}}_{\to 1}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=C_1$$

<u>הערה חשובה:</u> הקריטריונים לא אומרים מה קורה ב-$\pm R$!

(37) 13.6.06

ת. אינפי

לתלונות על: הקורס, התרגילים, הבדיקה והחיים בכלל,

נא לפנות לאביב גודין - יום ב' 15^{15} - 16^{30} שפ' 209.

הערות לתרגיל ט שאלה 1ג':

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{x^s}{x+x^2}dx$$ מתכנס אמ"מ $0<s<1$

נחלק את האינטגרל לשני חלקים:

$(*)$ $\int_1^\infty \frac{x^s\,dx}{x+x^2}$

$x^2 \le x+x^2 \le 2x^2$

לכן האינטגרל $(*)$ ו-$\int x^{s-2}dx$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

מתכנס אמ"מ $s<1$ $\Rightarrow$

$(**)$ $\int_0^1 \frac{x^s}{x+x^2}dx$

$x \le x^2+x \le 2x$

לכן $(**)$ ו-$\int_0^1 x^{s-1}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

מתכנס אמ"מ $s>0$ $\Rightarrow$

טורי חזקות

תרגיל: פתחו לטור חזקות את $f(x)=\frac{4x+1}{x^2-4x-5}$.

רעיון 1: לפי טיילור: זה קצת מסובך כי עלינו לחשב את $f^{(n)}(0)$ לכל n.

רעיון 2: נפשט את הביטוי. $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$

$$\frac{4x+1}{x^2-4x-5} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-5B}{(x-5)(x+1)}$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=4 \\ A-5B&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A&=6 \\ B&=1 \end{aligned}$$

קיבלנו $f(x)=\frac{6}{x-5}+\frac{1}{1+x}=$

$$=\underbrace{\frac{-6/5}{1-\frac{x}{5}}}_{(i)}+\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{(ii)}$$

נזכור את הפיתוח $(*)\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (*)$

(i) נציב ב-(*) $x := \frac{x}{5}$ ונקבל

$$\frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{5^n}x^n$$

(ii) נציב ב-(*) $x := -x$ ונקבל

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

מסקנה: $f(x) = -\frac{6}{5}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{5^n}x^n + \sum_{0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{6}{5^{n+1}} + (-1)^n\right]x^n$$

רדיוסי ההתכנסות: (i) $R=5$

(ii) $R=1$

אז מה רדיוס ההתכנסות של $f(x)$? $R=1$

- לפי קריטריון קושי $C = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|-\frac{6}{5^{n+1}}+(-1)^n\right|} =$
- נימוק נוסף: $|x|<1$ - (i) ו-(ii) מתכנסים

$1\le|x|<5$ - (i) מתכנס ו-(ii) מתבדר $\Rightarrow$ התבדרות

$|x|>5$ - שניהם מתבדרים (ואינם מבטלים) $\Rightarrow$ התבדרות

<u>טענה</u>: אם ל-f ול-g יש פיתוח לטורי חזקות עם רדיוסי ההתכנסות R_f ו-R_g בהתאמה. אז גם ל-$f+g$ ול-$f\cdot g$ יש פיתוח לטור חזקות עם רדיוס לפחות $\min\{R_f, R_g\}$.

<u>הערה</u>: אין שוויון כי למשל $f=\frac{1}{1-x}$, $g=-\frac{1}{1-x}$ אז $R_f=1=R_g$, אבל $f+g=0=\sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n$ ורדיוס ההתכנסות הוא $R=\infty$.

<u>הוכחה:</u> נרשום $f(x)=\sum a_n x^n$

$g(x)=\sum b_n x^n$

$$\Rightarrow (f+g)(x)=\sum_0^\infty (a_n+b_n)x^n$$
$$(f\cdot g)(x)=\sum_{n=0}^\infty c_n x^n \quad c_n=\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

כאשר $|r|<R_f$ וגם $|r|<R_g$ אז $f(r)$ ו- $g(r)$ מתכנסים (ואפילו בהחלט). לכן כטורים רגילים (של מספרים) סכומם $(f+g)(r)$ ומכפלתם (קושי) $(f\cdot g)(r)$ מתכנסים ☺

תזכורת:
טור חזקות מתכנס בתחום מהצורה:
$[-R,R]$, $(-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R)$

<u>משפט CH:</u> $c=\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ואז
$$R=\begin{cases}\frac{1}{c} & 0<c\in\mathbb{R}\\ 0 & c=\infty\\ \infty & c=0\end{cases}$$

<u>קריטריון ד'למבר:</u> אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ אזי הוא שווה ל- R.

<u>הבעיה:</u> לא ידוע לפי הקריטריונים מה קורה ב- $\pm R$?
ראינו דוגמאות גם להתכנסות וגם להתבדרות.

<u>מה הקשר להתכנסות במ"ש של הטור?</u>

דוגמה: $\sum_{n=0}^\infty x^n=\frac{1}{1-x}$ תחום ההתכנסות $(-1,1)$. בכל נק' בתחום הטור מתכנס אבל ההתכנסות אינה במ"ש.
אילו ההתכנסות היתה במ"ש, אז סדרת השאריות $R_n(x)$ היתה מתכנסת במ"ש ל- 0. למה?

הטור $\sum u_n(x)$ מתכנס במ"ש בתחום X לסכומו $u(x)$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in X$ $|u(x)-\sum_{i=0}^n u_i(x)|<\varepsilon$
זה אומר $|R_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^\infty u_i(x)\right|=\left|\sum_{i=0}^\infty u_i(x)-\sum_{i=0}^n u_i(x)\right|<\varepsilon$

אבל זה בדיוק אומר שסדרת הפונקציות $\{R_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ב- X לפונקציה הקבועה אפס.

אז נחזיר לדוגמא שלנו. $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k=x^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{x^{n+1}}{1-x}$

אם ניקח $x_n=\sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}$ אז $R_n(x_n)=\frac{1/2}{1-\sqrt[n+1]{\frac12}}>\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ אין התכנסות במידה שווה לאפס!!!

<u>משפטים:</u>

* יהי $R>0$ רדיוס ההתכנסות של טור החזקות אז לכל $0<r<R$ טור החזקות מתכנס במ"ש ב $[-r,r]$
* אם טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $0<R<\infty$ מתבדר בנק' $x=R$ (או $x=-R$) אז ההתכנסות ברווח $(-R,R)$ אינה יכולה להיות במ"ש.

<u>משפט:</u> נניח כי $\alpha>0$ (או $\alpha<0$) ו- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha^n$ מתכנס, אז הטור מתכנס במ"ש ב $[0,\alpha]$ (או $[\alpha,0]$).

<u>משפט דיני:</u> סדרה מונוטונית של פונק' רציפות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $[a,b]$ מתכנסת לפונק' רציפה אזי ההתכנסות היא במ"ש.

<u>טענה:</u> יהי $f(x)$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R, אז $f(x)$ רציפה ב- $(-R,R)$.

<u>משפט הגבול של אבל:</u> אם הטור מתכנס גם בנק' R (או $-R$) אז $f(x)$ רציפה משמאל (או מימין) בנק' $x=R$ (או $x=-R$).

(39) 20.6.06

ת. יופי

הערות למבחן -

שאלה 2: $\int_0^\infty \sqrt{x}\sin x^2\, dx$ מציבים $y=x^2$

ומקבלים $\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^{1/4}}\, dy$. היה תרגיל שלפיו

$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^s}\, dy$ מתכנס אמ"מ $0<s<2$.

זה לא נכון להשתמש בקריטריון דיריכלה כי הוא תקף

רק ל $\int_a^\infty \frac{\sin y}{y^\alpha}\, dy$ עבור $0<a$.

עבור $[0,1]$ הנימוק הוא שונה:

$$\int_0^1 \frac{\sin y}{y^{1/4}}\, dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}\, y^{3/4}\, dy$$

וזה כמובן אינטגרבילי.

שאלה 4: בתרגיל קודם הראנו את הדוגמה הבאה:

$$f_n(x) = x^n(1-x^n) \qquad x=[0,1]$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0$$

למרות שגם $\{f_n(x)\}$ וגם $f(x)$ רציפות ראינו ש-

$f_n(x) \underset{\text{במ"ש}}{\not\rightarrow} f(x)$.

$\{u_n(x)\}$, $u(x)$ רציפות, $x=[0,1]$, $u(x)=\sum_1^\infty u_n(x)$ לכל

$x\in[0,1]$. צ"ל: ההתכנסות לא בהכרח במ"ש.

אז הנה דוגמה נגדית:

$$u_n(x) = x^n(1-x^n) - x^{n-1}(1-x^{n-1}).$$

טורי חזקות

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות שסכומו $S(x)$ עם רדיוס התכנסות R.

אינטגרציה	גזירה
הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}x^n$ המתקבל מהטור המקורי ע"י אינטגרציה איבר-איבר הוא בעל רדיוס התכנסות R	הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ המתקבל מהטור המקורי ע"י גזירה איבר-איבר הוא בעל רדיוס התכנסות R
לכל x עם $\|x\|<R$ $\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt$ (*)	לכל x עם $\|x\|<R$ $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'$ (**)
אם הטור המקורי מתכנס בנק' $x=R$ אז גם טור האינטגרלים מתכנס בנק' זו ומתקיים (*)	אם טור הנגזרות מתכנס בנק' $x=R$ אז גם הטור המקורי מתכנס בנק' זו ומתקיים השוויון (**)

דוגמאות:

(1) $e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad R=\infty$

$$(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

(2) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$ $\quad R=\infty$

$$(\sin x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(2n-1)x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!}x^{2n-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos x$$

נשים לב שאפשר גם לרשום $\cos x = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & n \text{ זוגי} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

זו דוגמה מצוינת למתי שאי אפשר הקריטריון ד'אלמבר

כי הגבול הזה לא קיים $R = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$

בכל הקושי ~~הזה~~ תמיד אפשר להשתמש כי הגבול עליון תמיד קיים ויוצא: $\frac{1}{R} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$

(3) $\frac{1}{1-x} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots$ מתכנס ב $(-1,1)$

נציב $x:=-x$ ואז $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ ב $(-1,1)$

נעשה אינטגרציה: $\int_0^y \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)|_0^y = \ln(1+y)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^y x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n}$$

וכשלמדנו פיתוח טילור ראינו שזה הפיתוח של $\ln(1+y)$

אבל פה תחום ההתכנסות הוא $(-1,1]$.

(4) $f(x)=\arctan x$.

נציב ב-(*) $-x=t^2$ ואז

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

ותחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$. אז

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

וכאן תחום ההתכנסות הוא $(-1,1]$

$$\Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots$$

(5) הערכת אינטגרלים: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = ?$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

וגם פה רדיוס ההתכנסות הוא $R=\infty$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\Big|_0^1 - \dots$$

$$\approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600} = 0.946$$

והשארית כאן קטנה מ- $\frac{1}{36000}$ (לפי נוסחת השארית של טור טילור).

משפט ויירשטראוס:

משמעות: לכל פונק' רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ קיימים פולינומים $P_n(t)$ כך ש $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)$ וההתכנסות היא במ"ש ב-$[a,b]$

נוסח שקול: כל פונקציה רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ניתנת לקירוב במ"ש ע"י פולינומים.

כלומר יש סדרת פולינומים $\{Q_n(t)\}$ שמתכנסת ל-f במ"ש ב-$[a,b]$

הכללה: משפט סטון ויירשטראס - קירוב פונק' אינטגרביליות רימן ע"י טורי פורייה.

סעיף הרצאה מהתרגול: $x_1<\dots<x_{n+1}$

$y_1<\dots<y_{n+1}$

$\exists$ פולינום ממעלה n עם $P(x_i)=y_i$

פולינומי האינטרפולציה

$$P_k(t)=\frac{\prod_{i\neq k}(t-x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)} \qquad k=1,\dots,n+1$$

פולינום ממעלה n

$$P_k(x_j)=0 \quad j\neq k$$

$$P_k(x_k)=1$$

$$P(t)=\sum_{k=1}^{n+1}y_k P_k(t)$$

פונקציות מרובות משתנים

$$\mathbb{R}^n=\{\bar{x}=(x_1,\dots,x_n):\ x_i\in\mathbb{R}\}$$

ב-$\mathbb{R}^n$ מוגדרת מטריקה $d(\bar{x},\bar{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

תכונות: 1) $d(\bar{x},\bar{y})\geq 0$ ושוויון אמ"מ $\bar{x}=\bar{y}$

2) $d(\bar{x},\bar{y})=d(\bar{y},\bar{x})$

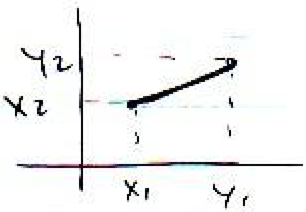
3) אי ש' ה Δ $d(\bar{x},\bar{y})+d(\bar{y},\bar{z})\geq d(\bar{x},\bar{z})$

פונקציות ב-2 משתנים:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2) = t$$

מטריקה: $d(\bar x,\bar y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

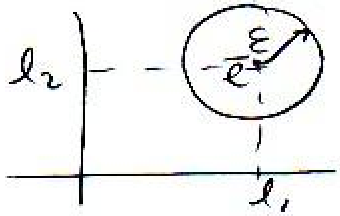
כמובן מתקיימות 3 התכונות של המטריקה.



סדרה: $(\bar x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1^n, x_2^n)$

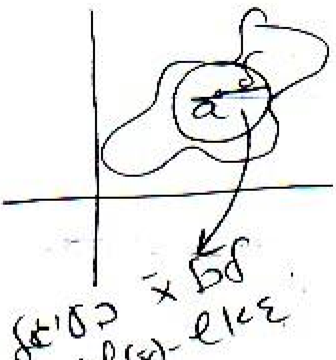
זה כאילו לקחנו 2 סדרות ב-$\mathbb{R}$ וסדרנו אותן בזוגות.

גבול: $\bar l = (l_1, l_2)$ הוא גבול של $(\bar x_n)_{n=1}^{\infty}$ אמ"מ
לכל $\varepsilon>0$ יש N רק שלכל $n>N$ $d(\bar x_n, \bar l)<\varepsilon$



החל מ-N מסוים כל איברי הסדרה הם בתוך העיגול.

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונק' המוגדרת בסביבת נק' $\bar a = (a_1, a_2)$
(פרט אולי לנק' $\bar a$ עצמה).
נאמר שהגבול של f כאשר $\bar x\to\bar a$
הוא l אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ רק
שאם $d(\bar x,\bar a)<\delta$ אז $|f(\bar x)-l|<\varepsilon$



מסמנים בדרך הבאה:
$$l = \lim_{\bar x\to\bar a} f(\bar x) = \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2}} f(x_1,x_2)$$
וזה נקרא גבול כפול.

רציפות: f רציפה ב-$\bar a$ אם $f(\bar a) = \lim_{\bar x\to\bar a} f(\bar x)$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall\bar x : d(\bar x,\bar a)<\delta \Rightarrow |f(\bar x)-f(\bar a)|<\varepsilon$

דוגמה:
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

הפונק' אינה מוגדרת ב-$(0,0)$, אך היא מוגדרת בכל סביבה של $(0,0)$. אפילו על הצירים היא מוגדרת

$f(0,y)=0 \quad y\neq 0 \qquad f(x,0)=0 \quad x\neq 0$

נראה שלא קיים גבול ב-$(0,0)$ ע"י שימוש בסדרות.

$$(x_n, y_n) = \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$$
$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$(x_n, y_n) = \left(\tfrac{1}{n}, 0\right) \longrightarrow (0,0)$$
$$f\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) = 0 \neq \frac{1}{2}$$

דוגמה:
$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$
$$\lim_{\bar{x}\to(0,0)} f(\bar{x}) = 0$$

גבול חוזר:
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

נשאלות שאלות: 1) האם הם קיימים?
2) אם כן, האם הם שווים?
3) אם הם שווים, האם הם שווים לגבול הכפול?

בדוגמה הקודמת:
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

הגבולות החוזרים קיימים ושווים, אבל אין גבול כפול!!

דוגמה:
$$f(x,y) = \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$
$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}(1+x) = 1$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(-1+y) = -1$$

(42) 25.6.06

תשנ׳פ׳

תרגול השלמה

פולינומי טיילור -

הנה משפט שאנחנו אמורים להכיר: יהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנק' x_0 וגזירה ב-x_0 פעמיים.

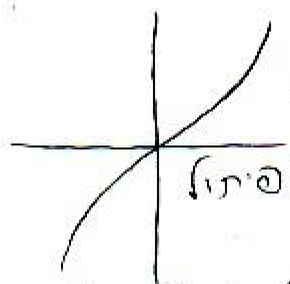
אם $f'(x_0)=0$ ו-$f''(x_0)\neq 0$ אזי x_0 נק' אקסטרמום.

אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 נק' מינימום מקומי

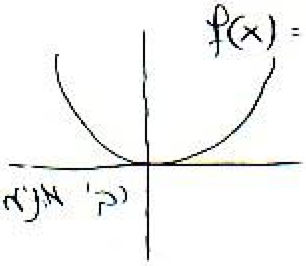
אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 נק' מקסימום מקומי.

מה קורה אם $f''(x_0)=0$?– ממשיכים הלאה...

דוגמאות:



$0=f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)$
$=f''''(0)$
$f^{(5)}(0)=5!$



$0=f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)$
$f^{(4)}(0)=4!$

הכללה של המשפט: יהי $f(x)$ פונקציה גזירה n פעמים ב-x_0 ונניח ש-

$$f'(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$$

ו- $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, אזי:

* אם n אי-זוגי: אין ב-x_0 נק' קיצון
* אם n זוגי $f^{(n)}(x_0)<0$ - מינימום מקומי

$f^{(n)}(x_0)>0$: מקסימום מקומי

הוכחה: נפתח את $f(x)$ לפולינום טיילור סביב x_0 מסדר n:

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)(x-x_0)^n \quad , \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right)(x-x_0)^n$$

הואיל ו- $\alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ הרי קיים $\delta > 0$ כך שבכל $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ הסימן של $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$ שווה לסימן של $f^{(n)}(x_0)$.

נניח ש- n זוגי:

$$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0-\delta < x < x_0+\delta$$
$$\Rightarrow \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x-x_0)^n > 0$$
$$\Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow$$ נק' מינימום

ובאותו אופן אם $f^{(n)}(x_0) < 0$ מתקבלת נק' מינימלית.

אם n אי-זוגי: נניח $0 < f^{(n)}(x_0)$ אז לכל

$x_0-\delta < x < x_0+\delta$ $\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) > 0$

אם $x - x_0 < 0$ אז $\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x-x_0)^n < 0$

אם $x - x_0 > 0$ אז $\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right](x-x_0)^n > 0$

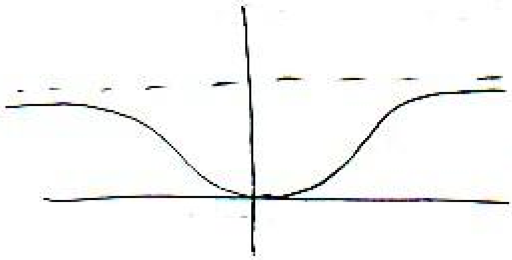
כלומר אם $x_0 < x$ $\quad f(x) > f(x_0)$

אם $x < x_0$ $\quad f(x) < f(x_0)$

כלומר זו לא נק' אקסטרמום.

<u>שאלה</u>: ואם יש פונק' עם $f^{(n)}(x_0)=0$ לכל n

שבפרט לאת יש לה נק' קיצון?



כן! $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$f^{(n)}(0)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$

אבל בפרט לאת $x_0=0$ נק' מינימום.

אינטגרל לבג:

המטרה: קריטריון שקובע מתי $f\in B[a,b]$ היא אינטגרבילית רימן.

<u>פונקציות אינטגרביליות</u>

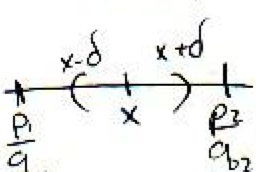
- פונק' רציפות (הוכחנו)
- פונק' מונוטוניות (הוכחנו)
- פונק' רימן $f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q} \end{cases}$

<u>פונק' לא אינטגרביליות</u>

- פונק' דיריכלה $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$

* פונק' דיריכלה <u>אינה</u> רציפה בשום נקודה (כי בכל סביבה של $x\in[0,1]$ תמיד יהיו גם נק' רציונליות y (עם $f(y)=1$) וגם נק' אי רציונליות z (עם $f(z)=0$).

* פונק' רימן <u>לא</u> רציפה בנק' רציונליות אבל רציפה בנק' האי-רציונליות. יהי $\varepsilon>0$. קיים N טבעי כך ש- $\frac{1}{N}<\varepsilon$. נתבונן ב- $x\notin\mathbb{Q}$. נתבונן בקבוצה $\{\frac{p}{q} : q\le N$ מצומצם$\}$. יש רק מס' סופי של איברים בקבוצה הזאת. לכן קיימות 2 נקודות מהקבוצה - האחת הכי קרובה ל-x מימין והשנייה משמאל. ניקח סביבה של x כמו בציור.



נתבונן בנק' בסביבה $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

$y\notin\mathbb{Q} \Rightarrow f(y)=0 \Rightarrow |f(x)-f(y)|=0<\varepsilon$

$y\in\mathbb{Q} \Rightarrow f(y)=\frac{1}{q}<\frac{1}{N} \Rightarrow |f(x)-f(y)|=\frac{1}{q}<\frac{1}{N}<\varepsilon$

$\Leftarrow$ פונק' רימן רציפה בנק' אי-רציונליות.

מסקנה: קבוצת נקודות אי הרציפות צריכה להיות "קטנה"

הגדרה: נאמר שקבוצת נק' E על הישר היא בעלת מידה 0 אם לכל $\delta>0$ יש סדרת קטעים $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש- $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ ו- $\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|<\delta$.

הערה: כל קבוצה בת מניה היא בעלת מידה 0.

הסבר: אם E בת מניה $E=(a_1,a_2,a_3,\ldots)$

נבחר סביב כל נק' a_i קטע J_i כך ש $|J_i|<\frac{\delta}{2^i}$

ואז $\sum_{i=1}^{\infty}|J_i| < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i} = \delta$

משפט: פונק' חסומה f היא אינטגרבילית ב $[a,b]$ אמ"מ קבוצת נק' אי הרציפות שלה היא ממידה 0.

- בתרגול 6, שאלה 4ג הוכחנו את הכיוון $(\Leftarrow)$.

שאלות ממבחנים:

1) לכל $n\geq 2$ תהי $f_n(x)=\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n-1}}{n-1}$

א) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{2}^{\infty} f_n(x)$

ב) האם ההתכנסות במ"ש?

ג) באיזה תחום קיים השוויון $\left(\sum_{2}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{2}^{\infty} f_n'(x)$

תשובות:

נחשב את סדרת הסכומים החלקיים שלו

$$S_N(x)=\sum_{n=2}^{N} f_n(x) = \cancel{\frac{x^2}{2}}-x+\frac{x^3}{3}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\dots+\frac{x^N}{N}-\cancel{\frac{x^{N-1}}{N-1}} = \frac{x^N}{N}-x.$$

תחום ההתכנסות כאן הוא $[-1,1]$: אם $|x|\leq 1$ אז $\frac{x^N}{N}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$ ולכן $S_N(x)\to -x$.

כאשר $|x|>1$ $\frac{x^N}{N}$ מתבדר.

ההתכנסות היא במ"ש: לכל $\varepsilon>0$ יש $N>\frac{1}{\varepsilon}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$\left|\sum_{2}^{\infty} f_k-(-x)\right| = \left|-x+\frac{x^n}{n}-(-x)\right| = \frac{|x|^n}{n}\leq\frac{1}{n}<\varepsilon$$

44

נבדוק את עניין הגזירות: $\left(\sum_{2}^{\infty} f_n(x)\right)' = -x' = -1$

$$f_n'(x) = n\frac{x^{n-1}}{n} - (n-1)\frac{x^{n-2}}{n-1} = x^{n-1} - x^{n-2}$$

$$S_N(x) = \sum_{2}^{N}(x^{n-1} - x^{n-2}) = x^{N-1} - 1$$

עבור $(-1,1)$ בחר ש- $-1 \longrightarrow x^{N-1} - 1$.

כאשר $|x|<1$ $x^{N-1} \longrightarrow 0$ ולכן $S_N(x) \longrightarrow -1$

כאשר $x=1$ $S_N(x) \longrightarrow 0$ אין שוויון!

כאשר $x=-1$ $S_N(x)$ לא מתכנסת בכלל.

אם $|x|>1$ $S_N(x)$ מתבדר.

(2) יהיו $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{0}^{\infty} b_n x^n$ טורי חזקות R_1, R_2.

איזו מן הטענות הבאות לא נכונה?

(1) רדיוס ההתכנסות של $\sum (a_n+b_n)x^n$ הוא לפחות $\min(R_1,R_2)$

(2) רדיוס ההתכנסות של $\sum (na_n-b_n)x^n$ הוא לפחות $\min(R_1,R_2)$

(3) רדיוס ההתכנסות של $\sum a_n b_n x^n$ הוא לפחות $\min(R_1,R_2)$

(4) רדיוס ההתכנסות של $\sum c_n x^n$ הוא לפחות $\min(R_1,R_2)$

כאשר $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

תשובה: 3

ברור ש-(1) ו-(4) נכונים. עבור (2) לאחר של- $\sum n^k a_n x^n$ ול- $\sum a_n x^n$ יש אותו רדיוס התכנסות.

והנה דוגמא נגדית ל-(3): $a_n = b_n = 2^n$

$\sum 2^n x^n = \sum (2x)^n$ $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$

$\sum 2^n \cdot 2^n x^n = \sum (4x)^n$ $R = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

(3) תהי $f(x)$ פונק' הגזירה ברציפות אם סדר $n \geq 1$ על כל $\mathbb{R}$. יהי $S(x) = \sum a_n x^n$ טור טיילור של $f(x)$ סביב 0.

איזו טענה נכונה?

(א) קיים $R>0$ כך שלכל $|x|<R$ $s(x) = f(x)$

(ב) הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס ל- $f(x)$ אם רדיוס ההתכנסות שלו הוא ∞ לפחות עבור מספר אחד $x>0$.

(2) אם רדיוס ההתכנסות של $\sum a_n x^n$ הוא $R>0$ אזי $f(x)=S(x)$ לכל $-R \le x \le R$.

(3) לכל $n \ge 1$ $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{x^n}=0$

תשובה: ברור ש-(3), קודם כל כי זו ההגדרה של טור טיילור.

וחוץ מזה e^{-1/x^2} סותר את הטענות האחרות.

(45) 27/6/06

ת. אינפי

פונקציות ממשיות ב-2 משתנים

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto z$$

(1) **גבולות:**

גבול כפול $\quad l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

גבולות חוזרים $\quad \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

ראינו דוגמאות:

- הגבולות החוזרים שונים זה מזה $\quad f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$
- הגבולות החוזרים קיימים ושווים אך הגבול הכפול לא קיים $\quad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

משפט: תהי $f(x,y)$ פונק' המוגדרת בסביבה מלבנית $[a,b]\times[c,d]$ של הנק' (x_0,y_0).
אם קיים הגבול הכפול $l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ ואם לכל $y\in[c,d]$ קיים הגבול $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, אזי קיים גם הגבול החוזר $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ ושווה ל-l.

מסקנה: אם בנוסף קיים הגבול $\psi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ אזי קיים גם הגבול החוזר $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ ושווה ל-l.

דוגמה: $\quad [0,1]\times[0,1] \quad f(x,y)=D(x)\cdot y$

כאשר $D(x)$ פונק' דיריכלה

קיים הגבול הכפול $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

והגבול החוזר $\quad \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$.

אבל לא קיים $\lim\limits_{x\to 0} D(x)y$ ולכן גם לא קיים הגבול החוזר השני.

② **רציפות:**

נאמר ש- f רציפה בנק' (x_0,y_0) אם

$$f(x_0,y_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

דוגמה: ראינו שהפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אינה רציפה ב- $(0,0)$.

הערה (*)

$$0 \le (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}$$

דוגמה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פונקציה זו רציפה ב- $(0,0)$ לפי כלל ה  ו- (*)

③ **גזירות:**

אם הגבולות המתאימים קיימים, אז הם מוגדרים להיות הנגזרות החלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

טכניקה: 1) לפי הגדרה

2) בשביל לחשב את $\frac{\partial f}{\partial x}$, נחשוב על y כקבוע ונגזור רק לפי x.

(46)

דוגמה

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

בנק' $(x,y)\neq(0,0)$ אין בעיה לגזור כמו שאנחנו יודעים ברגיל:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$ ומהסימטריה במשתנים.

בנק' $(0,0)$ צריך לגזור לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

ובדומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

שאלה מעניינת: לחשב את $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

(כי הרי הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ הן 0)

עבור $(x,y)\neq(0,0)$ נגזור כרגיל ונקבל

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cdot\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+y\cdot\frac{2y(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left(-x^6-y^6+5x^4y^4+5x^2y^4\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$

משיקולי סימטריה

באופן כללי, כמעט תמיד הנגזרות המעורבות שוות, לא רק כאשר הפונקציה סימטרית.

לדוגמא $f(x,y)=x^2y$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2xy\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=x^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}&=2x\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=2x\end{aligned}$$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ אינה רציפה ב-$(0,0)$

אבל הנגזרות החלקיות תמיד קיימות.

זה בניגוד לפונק' במשתנה יחיד שבשם גזירות גוררת רציפות.

אז בפונק' מרובות משתנים המושג המקביל לגזירות

הוא <u>דיפרנציאביליות</u>:

תהי $z=f(x,y)$ פונק' המוגדרת בסביבת (x_0,y_0)

$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ (סימון)

נאמר ש- $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0)

אם אפשר לרשום את Δz כ-

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

כאשר A,B קבועים !

$\begin{cases}\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)\\ \beta=\beta(\Delta x,\Delta y)\end{cases}$ פונק' השואפות ל-0 כאשר $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$

ניסוח שקול ויותר נוח:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho$$

כאשר A,B קבועים, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

ו- $\varepsilon=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ מקיימת $\varepsilon\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$.

משפט: אם f דיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0), אז היא גם רציפה שם.

דוגמה: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}\\ 0\end{cases}$ אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$

(כי אינה רציפה שם) למרות שהנגזרות החלקיות קיימות ושוות ל-0.

(47)

<u>משפט</u>: תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות:

אם $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנק' (x_0,y_0)

אז: קיימות ל $f(x,y)$ נגזרות חלקיות לפי x ולפי y

ו- $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\quad B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$!

<u>משפט</u>: תנאי מספיק לדיפרנציאביליות

אם לפונק' $z=f(x,y)$ קיימות בסביבת הנק' (x_0,y_0) נגזרות חלקיות לפי x ולפי y, והנגזרות הללו רציפות ב (x_0,y_0) אז $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0)

<u>דוגמה</u>: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

הפונק' רציפה ב $(0,0)$ ויש לה גם נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

נניח שהיא דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ אז

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho$$

אבל $A=0=B$. אזי

$\Delta z=\varepsilon\rho=\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, כלומר

$$\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{3/2}}$$

ניקח למשל $\Delta y=\Delta x\to 0$ ואז

$$\varepsilon=\frac{(\Delta x)^3}{(2(\Delta x)^2)^{3/2}}=\frac{1}{2\sqrt2}\not\to 0$$

בסתירה לכך ש $\varepsilon\xrightarrow[\rho\to 0]{}0$

$\Rightarrow f$ לא דיפרנציאבילית ב $(0,0)$

דוגמה:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{cases}$$

* קל לראות שהפונ' רציפה ב-$(0,0)$ ולא נבע. זה מהרציפות

* ל- $f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות ב-$(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} = 0$$

בדומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

* f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

צריכים להוכיח שפונ' ε נשאפת ל-0.

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho$$

חייב להיות $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow$ $\Delta z = \varepsilon\rho$

מצד שני $\Delta z = \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$

$$= \rho^2 \sin\frac{1}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \rho \sin\frac{1}{\rho}$$

ואז $\varepsilon \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$.

* הנגזרות החלקיות אינן רציפות ב-$(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

נראה שהנגזרת לא רציפה ב $(0,0)$:

נציב בפרט $y=0$ ואז

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \underbrace{\frac{x}{|x|}\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)}_{\text{ולזה אין גבול}}$$

לכן הגבול לא קיים!

קבוצות פתוחות וסגורות

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת פתוחה אם לכל $a \in A$ יש

כדור של רדיוס פתוח $a \in B^0_r(a) \subseteq A$.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סגורה אם $B = A^c$ פתוחה.

<u>דוגמאות:</u>

	ב- $\mathbb{R}$	ב- $\mathbb{R}^2$
קבוצה פתוחה	(a,b)	$B^0_r(a) = \{x : \lvert x-a\rvert < r\}$
קבוצה סגורה	$[a,b]$	$\bar{B}_r(a) = \{x : \lvert x-a\rvert \le r\}$
קבוצה לא פתוחה ולא סגורה	$(a,b]$	

<u>טענה:</u> הכדור הפתוח $B^0_r(a)$ הוא קבוצה פתוחה

<u>הוכחה:</u> תהי $(x,y) \in B^0_r(a)$. אז $d((x,y),(a_1,a_2)) < r$

לכן יש $\varepsilon > 0$ כך ש- $d((x,y),(a_1,a_2)) = r - \varepsilon$

אז כדור פתוח $B^0_{\varepsilon/2}(x,y)$ יהיה מוכל ב- $B^0_r(a)$:

ניקח $(z,w) \in B^0_{\varepsilon/2}(x,y)$. אז

$$d((z,w),(a_1,a_2)) \le d((z,w),(x,y)) - d((x,y),(a_1,a_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + r - \varepsilon$$

בדומה, עבור הכדור הסגור

$$(\bar{B}_r(a))^c = \{x : d(x,a) > r\}$$

היא קבוצה פתוחה. לכן $\bar{B}_r(a)$ סגורה.

הערות לתרגיל או:

שאלה 2- זה מקרה פרטי של טענה יותר כללית:

הקבוצה $C = \{(x,y) : F(x,y) < 0\}$

כאשר F רציפה היא פתוחה

שאלה 5 - $\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(\pi x n!)$

(ב) להפריד בין $x\in\mathbb{Q}$ לבין $x\notin\mathbb{Q}$

אם $x\in\mathbb{Q}$ st $x=\frac{a}{b}$

אפשר להניח ש- n קבוע מספיק גדול $(n>b)$.

(ג) $\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2k}(\pi e n!)$

בעצם תוכיח קודם ש- $en!$ קרוב מאוד

למס' שלם, כאשר n גדול, $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$,

ואז נסתכל על הגורם $n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

שאלה 4 - $F(x,y)=|P(x+iy)|$ רציפה -

להשתמש בהגדרת הרציפות ל- ε.