(1) 3/11/05
תלינזרים

המתרגל: יוסי שמאי yossi.sh@math.huji.ac.il

שעת קבלה: יום ד' 14:00-16:00

בנין איינשטיין חדר 308

אם יש לו תא בבנין איינשטיין ואפשר להשאיר שם מכתבים

שעות עבר - אפשר לבקש עזרה בתרגילים, בחומר. יושבים שם מאוטרקטים שהתפקיד שלהם לענות על שאלות במתמטיקה. לא בהכרח בלינארית. בכל קורס! קונה שלין א'-ד' 14:00-16:00

- לפעמים בתרגיל נסתמך על דברים שלומדים באינפי
- יש תרגיל בשבוע שצריך להגיש
- ביום סופי - 10 תרגילים
- יהיו אם בחינים שקלים יהיו יותר פרטים בהמשך

היום נכנסה דיסציפלינה של שדות ולא שדות.

לפני שעשינו את זה דבר ע פעמים ניפגש שוב אות כל הקבוצות המספריות הרגילות:

טבעיים - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

לפעמים $0 \in \mathbb{N}$ ולפעמים $0 \notin \mathbb{N}$. אה תלוי בספר / באינבר סיטה

מבחינה מתמטית אין לזה שום חשיבות. בלינארית נשתמש הרבה ב-0 נלכן אנחנו כולל אותו בטבעיים.

שלמים - $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} =$
$= \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}$

(ה- $\pm$ שאנחנו משתמשים פה הינו ה- $\pm$ שאנחנו מכירים מחיבור וחיסור. אבל בהקשר של תורת השדות יש לזה משמעות קצת אחרת)

רציונליים - $\mathbb{Q} = \{ \frac{n}{m} : n,m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \}$

הערה: כל מספר רציונלי אפשר להציג בדרכים אחרות. למשל $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

מתי יש שוויון בין שני מספרים רציונליים? -

- נאמר כי $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$ כאשר $an = bm$.

יש כמה בעיות מסוימות כי לא הגדרנו מה זה חילוק.

כדי לבדוק הגדרה חילוקים ע"י כפל של שברים ואת זה אנחנו מניחים שאנחנו יודעים איך מחברים רציונליים:

$$\frac{n}{m} + \frac{a}{b} = \frac{nb + am}{mb}$$

כאן החיבור הוא של שברים ואת זה אנחנו מניחים שאנחנו מכירים

כפל של רציונליים: $\frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{mb}$

האם הפעולות האלה מוגדרות היטב? אנחנו רוצים שהתוצאה לא תשתנה אם אנחנו כותבים את השברים בצורה אחרת.

טענה: החיבור בין מס' רציונליים מוגדר היטב

כלומר, אם $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2}$ ו $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ אז:

$$\frac{n_1}{m_1} + \frac{a_1}{b_1} = \frac{n_2}{m_2} + \frac{a_2}{b_2}.$$

* בעצם מספיק לבדוק רק $\frac{n_1}{m_1} + \frac{a_1}{b_1} = \frac{n_2}{m_2} + \frac{a_1}{b_1}$, אבל שזה א', שיעור ראשון, לא נעים...

הוכחה:

$$\frac{n_1}{m_1} + \frac{a_1}{b_1} = \frac{n_1 b_1 + m_1 a_1}{m_1 b_1} = \frac{(n_1 b_1 + m_1 a_1) m_2 b_2}{m_1 b_1 m_2 b_2} =$$

כי לפי הגדרת שוויון $\frac{n}{m} = \frac{nk}{mk}$ לכל k.

$$= \frac{n_1 b_1 m_2 b_2 + m_1 a_1 m_2 b_2}{m_1 b_1 m_2 b_2}$$

(2) מהנתון: $a_1b_2 = a_2b_1$ ו- $n_1m_2 = n_2m_1$

$$\Rightarrow \frac{m_1b_1m_2b_2 + m_1a_1m_2b_2}{m_1b_1m_2b_2} = \frac{m_1n_2b_1b_2 + b_1a_2m_1m_2}{m_1b_1m_2b_2} =$$

$$= \frac{(n_2b_2 + a_2m_2)m_1b_1}{m_1b_1m_2b_2} = \frac{n_2b_2 + a_2m_2}{m_2b_2} = \frac{n_2}{m_2} + \frac{a_2}{b_2}$$

ניתן לצמצם את m_1b_1 לפי הגדרה

לפי הגדרה של שוויון ב- $\mathbb{Q}$.

משו"ל

נשים ♡ שהשתמשנו בהגדרה רק בתכונות של המספרים השלמים ובהגדרות על $\mathbb{Q}$. לאורך הקיץ להוכיח את התכונות של השלמים אבל שוב, אנחנו יודעים שאנחנו יודעים את זה.

<u>טענה:</u> הכפל תלוי שהגדרנו אותו ב- $\mathbb{Q}$ מוגדר היטב.

כלומר, $\frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{a_1}{b_1} = \frac{n_2}{m_2} \cdot \frac{a_2}{b_2}$ (כאשר $n_{1,2}, a_{1,2}, m_{1,2}, b_{1,2}$ קבועים)

<u>הוכחה:</u> באופן דומה להוכחת החיבור.

למה בכלל עשינו את כל זה? אם אין ספק לא קיים להגדיר שזה מוגדר היטב, אבל ספציפית פה אפשר לבנות כל איבר בדרכים שונות ומראש אל אחד לא הבטיח שהתנהגות יהיו זהות לכל אותה מהה בדיוק.

<u>הגדרה:</u> אוסף F של איברים ופעולות $(+),(\cdot)$ (שיקראו כפל וחיבור בהתאמה) יקרא שדה אם מתקיימות האקסיומות הבאות:

<u>חיבור</u>

א) סגירות לחיבור: לכל $a,b \in F$ $a+b \in F$

ב) קומוטטיביות: לכל $a,b \in F$ $a+b=b+a$

ג) אסוציאטיביות לכל $a,b,c \in F$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

ד) קיים איבר ניטרלי לחיבור (נסמנו ב- 0_F) לכל $a \in F$ $a+0_F=a$

ה) קיים איבר נגדי לחיבור: לכל $a \in F$ קיים $(-a) \in F$ כך ש $a+(-a)=0_F$

* הגדרה: דוגמה לפעולה: סגירות לחיבור:

$\frac{n}{m}, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ כלומר $\frac{n}{m} + \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

הוכחה: $\frac{n}{m} + \frac{a}{b} \underset{\text{הגדרה}}{=} \frac{nb+ma}{mb}$

שמים סגורים לחיבור וכפל $\Leftarrow$ $nb+ma \in \mathbb{Z}$

$m,b \neq 0 \Leftarrow mb \neq 0$.

$\Leftarrow \frac{nb+ma}{mb}$ הינו מהצורה שהגדרנו עבור רציונליים

$\Leftarrow \frac{n}{m} + \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. יפה ☺

המשך אקסיומות:

כפל

1. סגירות
2. קומוטטיביות $ab = ba$
3. אסוציאטיביות $a(bc) = (ab)c$
4. איבר ניטרלי לכפל: קיים $1_F \in F$ כך שלכל $a \in F$ $1_F \cdot a = a$
5. קיום הפכי: לכל $0_F \neq a \in F$ קיים $a^{-1} \in F$ כך ש- $a \cdot a^{-1} = 1_F$.

תכונה שמקשרת בין חיבור לכפל:

6. דיסטריבוטיביות: לכל $a,b,c \in F$ $a(b+c) = ab + ac$

אפשר להראות ש- $0_F \neq 1_F$ אבל זה כך כבר לגמרי מאיתנו להתייחס להבדלות עם איבר אחד כשדה.

טענה: $\mathbb{Q}$ עם החיבור והכפל שהגדרנו מהווה שדה.

הוכחה: צריך לעבור על כל אקסיומות השדה ולבדוק שפן מתקיימות. אנחנו מוכיחים את זה על סמך התכונות שאנחנו מכירים של המספרים השלמים.

שאלה: האם $\mathbb{N}$ אחודה שדה?

תשובה: קודם כל השאלה חסרת משמעות. צריך להגיד מהן הפעולות. אלא נניח שהפעולות הן החיבור והכפל שאותנו מכירים. אז $\mathbb{N}$ לא שדה! למה?

- אין איבר נגדי, אין איבר הפכי.

לדוגמה: לא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $1+n=0$.

שאלה: האם $\mathbb{Z}$ עם הפעולות הרגילות אחודה שדה?

תשובה: שוב, התשובה היא לא כי אין הפכי.

לדוגמה לא קיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש- $2n=1$.

שאלה: האם $A=\{n\in\mathbb{Z}: \exists k\in\mathbb{Z}: n=2k\}$ עם הפעולות הרגילות שדה?

תשובה: לא. אין הפכי, אין נגדי, אין ניטרלי לכפל...

שאלה: האם $B=\{q\in\mathbb{Q}: -1\le q\le 1\}$ עם הפעולות הרגילות שדה?

תשובה: לא. אין סגירות $1+1\notin B$. אין הפכי $2=(\frac{1}{2})^{-1}\notin B$

שאלה: $C=\{\pm\frac{n^2}{m^2}: n,m\in\mathbb{Z}, m\neq 0\}$. הראו שכל מספר בקבוצה אחדות בתוצאה אחת שמופיע בשאלה. אבל האם זה עם סגירות? $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. אבל ברור שאין n,m כך ש $\frac{1}{2}=\frac{n^2}{m^2}$. סתם בשביל הספורט, נראה את זה:

נניח $\frac{1}{2}=\frac{n^2}{m^2} \Rightarrow 2=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2=m^2 \Rightarrow m^2$ זוגי.

$\Rightarrow m$ זוגי (כי מרבוע של אי זוגי היא אי זוגית) $\Rightarrow$

m^2 מתחלק ב-4 $\Rightarrow n^2$ זוגי $\Rightarrow n$ זוגי וזאת סתירה

כי הנחנו ש m ו- n זרים. נשלם ☺

שדות סופיים:

אם יש שדה עם שני איברים אז אוטומטית אותו אחד צריך להיות איבר היחידה והשני אפס, פשוט כי לאחר הדרישה שם לשדות

אז נניח שה שדה הנוכחי $F=\{a,b\}$ ונניח ש $0_F=a$ - $1_F=b$

את הפעולות נגדיר ע"י טבלאות

+	a	b
a	a	b
b	b	a

מוכתבת ע"י התכונות של איבר האפס ואיבר היחידה.

כי אם $b+b=a$ אזי $b=a$

·	a	b
a	a	a
b	a	b

ע"י מוכתבת תכונות האיברים

בהתאם לדרישה ש $a\cdot 0_F=0_F$ בגלל ש $a\in F$.

אחרי שהגדרנו את הפעולות צריך לבדוק את התכונות את הן צריך לעשות בעזרת טבלאות...

נרשום ניסיון שרוצים לבנות שדה עם 3 איברים

$F=\{0,1,2\}$ אזי לא ה - 0,1,2 הרגילים

שנתנו מדברים סתם בתרגול שאות כאלה

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

לפי הגדרת האיברים

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

לפי הגדרת הכפל איברים

טבלה זו לא לגיטימית כי אין לו הופכי.

$2+1=1 \Rightarrow 2=0$

$2+1=2 \Rightarrow 2=0$

לא ייתכן להיות 1 כי

לא ייתכן להיות 2 כי

$1+1\overset{?}{=}0$

$1+2=0$

סתירה $\Rightarrow 1=2$

$0=1 \Rightarrow 1\overset{?}{=}1+1$

סתירה

$2+2=0,\ 2+1=0$

$\Rightarrow$ סתירה $\Rightarrow 1=2$

$2+1\overset{?}{=}2 \Rightarrow 1=0$ סתירה

לא ייתכן להיות 2 כי אז לא יהיה לו הופכי.

$\Leftarrow$ אם בנים שדה עם 3 איברים הנו יחיד.

נשאר להראות שלה מבנים את האקסיומות

יש גם שדה עם 4, 5, 7, 8, 9 איברים.

(4) 10.11.05
ת. לינארית

אדמיניסטרטיבי:

תרגילים. צריך להגיש לפחות 70% ובדיון הסופי 5%

2 בחנים - כל בוחן 5% מהציון ואם יהיה רק להשלות.

אי שלא עומד בחובת הגשה לא יוכל לגשת לבחינה.

הערות לתרגיל 1

① (א) בגלל: לכל $a,b,c \in F$, $c \neq 0$ מתקיים $ac=bc \Rightarrow a=b$

הוכחה: $c \neq 0 \Rightarrow c^{-1}$ קיים. נכפיל את שני אגפי

המשוואה ונקבל $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$

$a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ אסוציאטיביות

$a \cdot 1 = b \cdot 1$

$a = b$ משל ☺

רבים שכותבים יותר אנשים שמסבירות מה אנחנו עושים

בכל ההוכחה שלנו ברורה יותר - לבודק, לקוראה לעמיתה וכו'.

(ב) בגלל: לכל a $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

הוכחה: $0 \cdot a = (0+0)a = 0a + 0a$

דיסטריבוטיביות

$0 \cdot a = 0a + 0$

$\Leftarrow$ לפי חוק הצמצום $0 = 0a$. מקומוטטיביות $a \cdot 0 = 0 \cdot a$

משל ☺

טענה: קיים איבר ניטרלי (לחיבור) יחיד בשדה

הוכחה: נניח כי $0' \in F$ ניטרלי ונראה כי $0 = 0'$.

לכל a $a+0=a$, $a+0'=a$ $\Leftarrow$ לפי חוק הצמצום $0=0'$.

משל ☺

באותו אופן מוכיחים את יחידות האיבר הניטרלי לכפל.

זה מספיק לנו את הדרישה ש-0 אין הופכי. נניח שהיה 0^{-1}. לפי הגדרה $0\cdot 0^{-1}=1$ אבל מצד הוכחנו ש- $0\cdot 0^{-1}=0$

ו- $0\neq 1$ וזאת סתירה.

ג) בל: לכל $a\neq 0$ $(a^{-1})^{-1}=a$

הוכחה: $\begin{cases}(a^{-1})(a^{-1})^{-1}=1\\ (a^{-1})\cdot a=1\end{cases}$ $\Leftarrow$ חוק הצמצום $(a^{-1})^{-1}=a^{-1}$

אבל בדיוק הוכחנו ש- $a^{-1}\neq 0$ כדי להשתמש בחוק הצמצום.

נניח $a^{-1}=0$ $\Leftarrow$ $1=aa^{-1}=0$ וזאת סתירה.

לפי הנ"ל לפי הגדרה

אשר ☺

ד) בל: $(-a)(-b)=ab$

הוכחה: $(-a)(-b)\overset{1}{=}((-1)a)((-1)b)=((-1)(-1))(ab)=$

$(-(-1))(ab)\overset{2}{=}1\cdot(ab)=ab$

אשר ☺

ה) בל: לכל $a,b\in F$, $a,b\neq 0$ מתקיים $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

הוכחה: $(ab)^{-1}(ab)=1=$

$=a^{-1}(a\cdot b)b^{-1}=(a^{-1}b^{-1})(ab)$

לפי חוק הצמצום $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

למה $ab\neq 0$? - נניח $ab=0$ $\Leftarrow$ לפי שאר 4 $a=0$

או $b=0$ $\Leftarrow$ $ab\neq 0$. אשר ☺

3) $n\in\mathbb{N}$, $a\in F$. מגדירים $\underbrace{(a+a+\dots+a)}_{n\text{ פעמים}}\equiv n\times a$

משתמשים בסימן $\times$ כי זה לא רפל בשדה.

n הוא לא חלק מהשדה.

יש לנו הגדרה אינדוקטיבית: $\begin{cases}1\times a=a\\ (n+1)\times a=n\times a+a\end{cases}$

בל: $n\times(a+b)=n\times a+n\times b$ לכל n ב- $\mathbb{N}$, $a,b\in F$.

זה לא חוק הפילוג כי זה לא פעולות בתוך השדה.

הוכחה:

אפשר להוכיח בנפרד יחדיו: $n\times a = \underbrace{a+\dots+a}_{n \text{ פעמים}}$

$$\Rightarrow \quad n\times(a+b) = \underbrace{(a+b)+\dots+(a+b)}_{n \text{ פעמים}}$$

אחרי שימוש n פעמים באסוציאטיביות וקומוטטיביות

נקבל $= \underbrace{(a+b)+\dots+(a+b)}_{n \text{ פעמים}} = \underbrace{(a+\dots+a)}_{n \text{ פעמים}} + \underbrace{(b+\dots+b)}_{n \text{ פעמים}}$

$$= n\times a + n\times b$$

אבל שלוש הנקודות (...) לא מאוד ברור. ולכן

כדי להוכיח אפיוקים נדרש באינדוקציה.

עבור $n=1$ $\quad 1\times a + 1\times b = a+b \quad 1\times(a+b) = a+b$

נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח שהיא נכונה ל- $n+1$.

$$(n+1)\times(a+b) \underset{\text{הגדרה}}{=} n\times(a+b) + (a+b) =$$

$$\underset{\text{הנ"ל}}{=} n\times a + n\times b + (a+b) \underset{\text{קומוטטיביות ואסוציאטיביות}}{=} (n\times a + a) + (n\times b + b) =$$

$$\underset{\text{הגדרה}}{=} (n+1)\times a + (n+1)\times b$$

משל ☺

מרוכבים

$$\mathbb{C} = \{a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\}$$

$$(a+bi)+(c+di) = (a+b)+(c+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i$$

הטענה היא ש- $\mathbb{C}$ עם הפעולות כמו שהגדרנו

הוא שדה.

דוגמאות:

$(2+i)+(3-2i) = 5-i$

$(2+i)(3-2i) = 6+3i-4i+2 = 8-i$

$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$

יהי $z=a+bi$ אז

$\operatorname{Re} z = a$

$\operatorname{Im} z = b$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{z} = a-bi$

מתקיימות התכונות הבאות:

$z+\bar{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z$

$z-\bar{z} = (a+bi)-(a-bi) = 2bi = 2i\cdot\operatorname{Im} z$

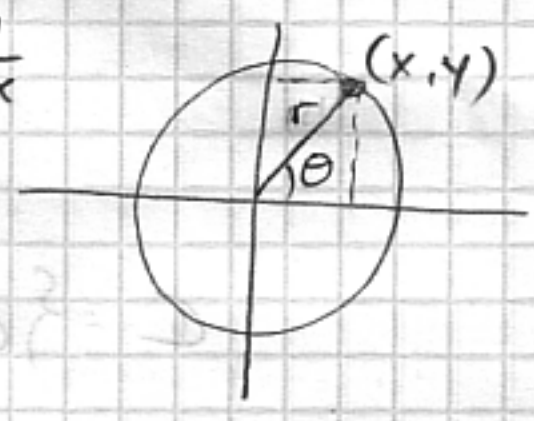
$z\cdot\bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

$\Rightarrow \frac{2+i}{2-i} = \frac{2+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{(2+i)^2}{2^2+1} = \frac{(2+i)^2}{5}$

הצגה קוטבית של מס' מרוכב. $z=x+yi$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$ $\quad 0\le\theta<2\pi$



$\Rightarrow x = r\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\sin\theta$

$\Rightarrow z = r\cos\theta + r\sin\theta\, i =$

$= r(\cos\theta + \sin\theta\, i) \equiv r\operatorname{cis}\theta$

(6)

משפט דה-מואבר

$z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$

$z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$

$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$

$\Rightarrow z_1/z_2 = r_1/r_2 \operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$

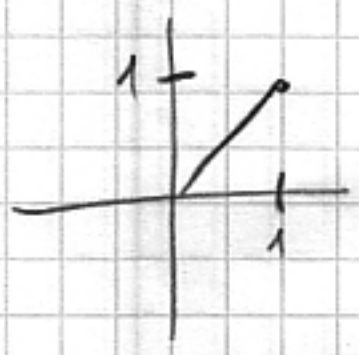
$\Downarrow$

$z_1^n = r_1^n \operatorname{cis} n\theta$

$\Leftarrow$ בשביל לחשב $(1+i)^{17}$ לא פותחים סוגריים 17 פעמים מוצאים את $1+i$ בצורה קוטבית ומשתמשים במשפט דה-מואבר.

$z = 1+i \Rightarrow r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{5\pi}{4}$



אבל $1+i$ נמצא ברביע הראשון

$\Leftarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z^{17} = (\sqrt{2})^{17}\operatorname{cis} 17\cdot\frac{\pi}{4} =$

$= (\sqrt{2})^{17}\operatorname{cis}(4\pi+\frac{\pi}{4}) =$

$= (\sqrt{2})^{17}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^{16}(1+i)$

(7) 17/11/05
תלמידים

הגדרה: יהי F שדה, $S \subseteq F$ תת־קבוצה של F. נאמר כי S תת־שדה אם S שדה והפעולות מתלכדות עם הפעולות של F.

טענה: כדי להבדיל $S \subseteq F$ תת־שדה, מספיק להבדיק:

1. סגירות תחת חיבור וכפל
2. קיום איברים נייטרליים 0 ו־1
3. קיום הופכי חשבי

פתרון כל מערכת שאלות מתחומים z אבל היה מטומטם יכולים שוב סיבה לרשום אותם כאן.

משפט: ב־$\mathbb{Z}_p$ לכל $x \in \mathbb{Z}_p$ $x^p = x$

$\Leftarrow$ לכל $x \neq 0$ $x^{p-1} \equiv 1$

$\Rightarrow$ ב־$\mathbb{Z}_p$ למשוואה $x^{p-1} - 1$ קיימים $p-1$ פתרונות

ב־$\mathbb{C}$ ל־$z^n = w$ יש n פתרונות שונים ($w \neq 0$, $n \geq 1$):

$$\sqrt[n]{|w|}\, cis\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

המשפט היסודי של האלגברה: $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ אז קיים $z \in \mathbb{C}$ כך ש־$p(z) = 0$. למעשה יש n פתרונות, אך הם יכולים להתלכד.

טענה: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

הוכחה: אפשר גם ע"י הצגה הרטסיאנית קוטבית

א. שוויון המשולש

לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$

הוכחה:

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{cases}$$ נראה ש $\sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2}$

נעלה את שני האגפים בריבוע

$$(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2 \overset{?}{\leq} a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

$$a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2$$

$\Leftarrow$ נצמצם משני האגפים ונוכיח להוכיח כי

$$a_1a_2 + b_1b_2 \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

מספיק להוכיח $|a_1a_2 + b_1b_2| \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}$:

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \overset{?}{\leq} (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$$

$$a_1^2a_2^2 + \cancel{b_1^2b_2^2} + 2a_1a_2b_1b_2 \overset{?}{\leq} a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + \cancel{b_1^2b_2^2}$$

נותר להוכיח

$$2a_1a_2b_1b_2 \leq a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2$$

נעביר אגפים $\quad 0 \overset{?}{\leq} a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2a_2^2$

$\downarrow$

לה נכון כי זאת נוסחת כפל מקוצר ל $(a_1b_2 - b_1a_2)^2$

טענה: יהי $p(z)$ פולינום מעל המרוכבים עם מקדמים ממשיים. אם $w \in \mathbb{C}$ ו $p(w)=0$ אז $p(\bar{w}) = 0$

הוכחה: $p(w) = \sum_{i=0}^{n} a_i w^i = 0$. $z \in \mathbb{C}$. $a_i \in \mathbb{R}$. $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$

$$p(\bar{w}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{w}^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (\overline{w^i}) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i w^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i w^i} = \bar{0} = 0$$

מש"ל

(8) 24.11.05
ת. לינארית

הערות לתרגיל 3

(1) שדה בן 4 איברים יש רק אחד! (עד כדי איזומורפיזם כמובן...)
תמיד יתרקל בחישוב טבלת הכפל אל (תחו) בה:

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

כדי שלא האיברים יהיה הפכי

אז ירצו לדרוש $2\cdot 3=0 \Rightarrow 2=0$ או $3=0$
$2\cdot 3=2 \Rightarrow 3=1$
$2\cdot 3=3 \Rightarrow 2=1$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

אם $1+1=0$ אז $2+2=2(1+1)=0$
פולוס
$3+3=3(1+1)=0$

הדרך הטובה? לקח לו $\mathbb{Z}_4$, כי ה"שדה" $\mathbb{Z}_4$ יכלל בו את פעולות החיבור והכפל מודולו 4, ו- $\mathbb{Z}_4$ אינו שדה בכלל כי 4 פריק!

נחזור רגע על המשפטים:

- $\mathbb{Z}_n$ שדה אמ"מ n ראשוני
- קיים שדה יחיד באורך p^n לכל ראשוני p ולכל $n\geq 1$.
נשים לב שהשדה הלא הכי לא $\mathbb{Z}_{p^n}$.

האלגוריתם של השדה שמצאנו פה הינו 2 ולכן המינימלי כי השדה באורך $2^2=4$

הגדרה: יהי F שדה. $m\in\mathbb{N}$ יקרא האלגוריתם של F ונסמן $\operatorname{char}F=m$ אם:
(א) $m\cdot 1_F=0_F$ (ב) m מינימלי.

אם אין $m\neq 0$ כלשהו שמאפיין הינו אפס $\operatorname{char}F=0$.

דוגמה: $\operatorname{char}\mathbb{Q}=0$, $\operatorname{char}\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=0$
לכל p ראשוני $\operatorname{char}\mathbb{Z}_p=p$

הערות לתרגיל 4

(1) $0 \neq a \in F$ ונתון כי $n \times a = 0$, $n \neq 0$.

נג: $\mathrm{char}\,F$ מחלק את n. כלומר קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-

$n = k\,\mathrm{char}\,F$. תזכרו קודם כי $\mathrm{char}\,F \neq 0$ ותשתמשו בכל אי-

תכונות של אדיר כמו אינאלות.

$(n \times a)a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} \Leftarrow$ ניתן לחסר בהפכי של a $\Leftarrow$ a הפיך כי שונה מאפס

$\Leftarrow 0_F = 1_F \times n \Leftarrow$ המדרגה $\geq n$.

שאר הערות לתרגיל 3

(3) האם יש $\mathbb{R} \subset F \subset \mathbb{C}$ כך ש-F שדה? כמובן הכלה היא

עם בקבוצות האיברים אם בפעולות שמוגדרות עליהם.

טענה: לא קיים שדה F המוכל ב-$\mathbb{C}$, מכיל את $\mathbb{R}$ ושונה מ-$\mathbb{C}$

ומ-$\mathbb{R}$.

מאלים אחרת: נניח כי $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$ ו-$\mathbb{R} \neq F$ ונוכיח כי $F = \mathbb{C}$.

הוכחה: נוכח כי $\mathbb{C} \subseteq F$. מהיות $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$ קיים $z = x + yi \in F$ $(z \notin \mathbb{R})$

כך ש-$y \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ (כי $F \neq \mathbb{R}$). נראה ש-i נמצא ב-F:

$i = \frac{z - x}{y}$. $x, y, z \in F$ כי $F \supseteq \mathbb{R}$ מסגירות F נקבל $i \in F$

$\Leftarrow$ לכל $a, b \in \mathbb{R}$ $a + bi \in F$, כי $a, b, i \in F$ $\Leftarrow$ $\mathbb{C} \subseteq F$

$\Leftarrow F = \mathbb{C}$. אש"ל (ב)

(5) (1) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ לה שדה. הדבר היחיד

שלא טריוויאלי הוא קיום הפכי. אכן

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-b^2 2} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

חשוב להדגיר - אותר לנו לחלק ב-$(a-b\sqrt{2})$ כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Leftarrow a - b\sqrt{2} \neq 0$.

דוגמה: אם $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi ; a, b \in \mathbb{Q}\}$ שדה וההוכחה לזה כמו להוכחה

ש-$\mathbb{C}$ שדה או ש-$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ שדה בעזרה לכל $\alpha \notin \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}[\alpha]$ שדה.

(2) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ לא שדה כי לא מתקיימת סגירות לכפל.

טענה: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

הוכחה: נניח בשלילה ש-$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

$\Leftarrow \sqrt{3}(\sqrt{2} - c) = a + b\sqrt{2} \Leftarrow \sqrt{3} = \frac{a + b\sqrt{2}}{\sqrt{2} - c} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ כי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ שדה

(9) $\Leftarrow \sqrt{3} = x + y\sqrt{2}$, $x,y \in \mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ $3 = x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2$

$\Leftarrow \sqrt{2} = \frac{3-x^2-2y^2}{2xy} \in \mathbb{Q}$ כי $x,y \in \mathbb{Q}$ והרי שזה אבל לא סתירה. הערה: $2xy \neq 0$: אם $y=0$ אז $x=\sqrt{3}$ ולא סתירה.

אם $x=0$ אז $\sqrt{3} = y\sqrt{2}$ $\Leftarrow$ $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ולא סתירה כמובן,

צריך להוכיח ש $\sqrt{\frac{3}{2}} \notin \mathbb{Q}$, ונוותר את זה בלקח הבא.

(3) $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}]$ שזה שוה, מה שלא ברור כאן זה קיום הסכום.

נשים ♡ שהבבר הזה הוא אותו שראינו מקר:

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} = a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}(c+d\sqrt{2}) =$$

$$= x + y\sqrt{3}, \quad x,y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

אז מה קיבלנו? $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}] = (\mathbb{Q}[\sqrt{2}])[\sqrt{3}]$:

$$= \{x + \sqrt{3}y;\ x,y \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\}$$

זה שזה והוכחה נתה להוכחה ש-$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ שזה כי בהוכחה

של קיום הכפל השתמשנו רק בכך ש-$\mathbb{Q}$ שזה ו- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

באותו אופן $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ שזה ו- $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(4) F שזה ו- $F_1 = \{n \times 1_F : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq F$.

(5) $|F| < \infty$ הרי $F_1 = F$? לא. לדוגמא השדה שמדברנו

בשאלה 1 הוא סופי $|F_4| = 4$ ו- $F_1 = \{0, 1, -1\}$.

לדוגמה $F_1 = F$ אמר F איזומורפי ל $\mathbb{Z}_p$ לשהו ראשוני.

אבל הוא לא יכול את זה.

(6) הגדרה: יהיו F_1, F_2 שדות. פונקציה $\varphi: F_1 \to F_2$ תיקרא

הומומורפיזם אם: לכל $a,b \in F_1$

- φ שומרת על חיבור $\varphi(a +_{F_1} b) = \varphi(a) +_{F_2} \varphi(b)$

- φ שומרת על כפל $\varphi(a \cdot_{F_1} b) = \varphi(a) \cdot_{F_2} \varphi(b)$

הגדרה: $\psi: F_1 \to F_2$ תיקרא איזומורפיזם אם ψ הומומורפיזם

והגרעין של ψ חח"ע ועל.

הגדרה: $\psi: F_1 \to F_2$ תיקרא חח"ע אם $\psi(x) = \psi(y) \Leftarrow x = y$

הגדרה: $\psi: F_1 \to F_2$ תיקרא על אם לכל $w \in F_2$ קיים $z \in F_1$ כך ש $\psi(z) = w$

דוגמאות:

- $F_1 = F_2 = \mathbb{R}$ והעתקה $f(x) = x^2$

f לא חח"ע כי $f(2) = f(-2)$

f לא על כי לא קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש $x^2 = -1$.

- $F_1 = F_2 = \mathbb{C}$ והעתקה $f(z) = z^2$

f לא חח"ע כי גם $f(2) = f(-2)$

f על כי לכל w קיים z כך ש $w = z^2$, לפי הגדרת מספר מרוכב.

- $F_1 = F_2 = \mathbb{R}_+$ ו- $f(x) = x^2$

כאן f דווקא כן חח"ע ועל. הייתה חח"ע כי הפולינום לא בתחום ההגדרה אבל אין פונקציות כמו $f(x) = f(-x)$

f לא על כי לפלוס מספר חיובי יש שורש!

- נגדיר $\varphi: F_1 \to F_2$ ע"י $\varphi(x) = 0_{F_2}$ לכל $x \in F_1$ העתקת האפס

φ הומומורפיזם: $\varphi(x) + \varphi(y) = 0_{F_2} + 0_{F_2} = 0_{F_2} = \varphi(x+y)$

$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0_{F_2} \cdot 0_{F_2} = 0_{F_2} = \varphi(xy)$

ברור ש- φ לא חח"ע ואם לא על!

- $\varphi: F_1 \circlearrowleft$ (לעומת $\varphi: F_1 \to F_1$) מוגדרת ע"י $\varphi(x) = x$ לכל $x \in F_1$

לאת העתקת הזהות והיא איזומורפיזם. לה יש טריוויאלי.

הגדרה: יהי F שדה. φ נקרא אוטומורפיזם אם φ איזומורפיזם $F \circlearrowleft$

דוגמה: $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ באופן הבא: $\varphi(z) = -z$

זה חח"ע ועל באופן ברור. אם ברור שהיא שומרת על חיבור. אבל מה עם כפל?

$\varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) = -1 \neq \varphi(1)\varphi(1) = 1$

$\Leftarrow$ φ לא איזומורפיזם.

אבל אם הינו מגדירים את אותה ה-φ על $\mathbb{Z}_2$ אז היא דווקא כן הייתה איזומורפיזם, שהרי ב- $\mathbb{Z}_2$ $-x = x$ $\Leftarrow$ קיבלנו את העתקת הזהות.

דוגמה: $\varphi: \mathbb{C} \circlearrowleft$ ע"י $\varphi(z) = \bar{z}$. נראה ש φ אוטומורפיזם והיא שונה מהזהות. לא קשה לבדוק את זה

(10) 1/12/05
ת. לינארית

הרצאה "עולים": נפתור כמעט את כל תרגיל 4

(1) נתון: $0 \neq a \in F$, $0 \neq n \in \mathbb{N}$, $n \times a = 0$

בגלל: $\operatorname{char} F \neq 0$ - p וקיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $n = kp$.

הוכחה:

מתי אבר שונה מאפס? כאשר מחברים אותו 1 לעצמו מספר פעמים ומקבלים אפס. אם אף פעם לא מקבלים אפס האבר הוא אפס.

$a \neq 0 \Leftarrow$ יש לו הופכי $\Leftarrow$

$$0_F = 0_F \cdot a^{-1} = (n \times a) a^{-1} = n \times (a \cdot a^{-1}) = n \times 1_F$$

$\Leftarrow$ $\operatorname{char} F = p \neq 0$.

נראה שקיים k כך ש $n = kp$. נבדוק חילוק עם שארית של n ב-p. $n = kp + r$ כאשר $0 \leq r < p$. נראה כי $r = 0$ ואז נסיים.

$$0_F = n \times 1_F = (kp + r) \times 1_F = (kp) \times 1_F + r \times 1_F$$
$$= k \times (p \times 1_F) + r \times 1_F =$$
$$= k \times 0_F + r \times 1_F = 0_F + r \times 1_F$$

$$\Rightarrow \quad 0_F = r \times 1_F$$

אם $r \neq 0$ אז נקבל סתירה למינימליות של p. שהרי $p > r \neq 0$ אם p הוא המינימלי שמקיים את התכונה הבאה $\Leftarrow$ $r = 0$

משלם (11)

(3) טענה: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ו $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ לא איזומורפיים

הוכחה: נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם $\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ נתבונן ב- $\varphi(\sqrt{3})$.

$$\varphi(\sqrt{3})^2 = \varphi(\sqrt{3}\sqrt{3}) = \varphi(3) = \varphi(1+1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) + \varphi(1) =$$
$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

טענה שחלק נכון

(סמן $x=\varphi(\sqrt{3})$ ומתקיים $x^2=3$

$\Leftarrow$ $x=\pm\sqrt{3}$ אבל $\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. וזאת סתירה

משל ☺

אז מה אותנו רואים פה?

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ & $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ are same same but different

לראיה ב מה שעשינו פה הוא לשנות את השם של

הגורם אבל בעצם זה בכלל לא אותו הדבר

טענה: יהיו f_1, f_2 שדות ו-φ איזומורפיזם

ביניהם אז $\varphi(1)=1$

הוכחה: $\varphi(1)=\varphi(1\cdot 1)=\varphi(1)\varphi(1)$

(סמן $x=\varphi(1)$ $\Leftarrow$ $x=x^2$

$\Leftarrow$ $x=0$ או $x=1$.

אם $x=0$ נקבל כי לכל y:

$0=\varphi(1)\varphi(y)=\varphi(1\cdot y)=\varphi(y)$

$\Leftarrow$ כאשר הגדרת האפס והיא לא איזומורפיזם.

$\Leftarrow$ $\varphi(1)=1$ משל ☺

(4) בל $\varphi:\mathbb{Q}(\sqrt{2})\to\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ איזומורפיזם.

תשובה: נגדיר $\varphi(a+b\sqrt{2})=a-b\sqrt{2}$

ראשית נבדוק כי φ אומדרת היטב. כלומר

נבדוק כי אם $a+\sqrt{2}b=c+\sqrt{2}d$ אזי גם

$\varphi(a+\sqrt{2}b)=\varphi(c+\sqrt{2}d)$. כלומר נרצה להוכיח ש-

$a-\sqrt{2}b=c-\sqrt{2}d$. מהיות $a+\sqrt{2}b=c+\sqrt{2}d$ אזי

$a-c=\sqrt{2}(b-d)$. אם $b=d$ אז $a=c$.

אם $b\neq d$ אז $\frac{a-c}{b-d}=\sqrt{2}$ וזאת סתירה

$\Leftarrow$ $a-\sqrt{2}b=c-\sqrt{2}d$ $\Leftarrow$ φ מוגדרת היטב

למה זה תשובה? לדוגמא $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ $f(\frac{m}{n})=mn$

אז $f(\frac{2}{4})=8\neq f(\frac{1}{2})=2$ $\Leftarrow$ f לא מוגדרת היטב

נראה בוודאות איך אוטומורפיזם כזה תבונית:

בכל שלב $x+\sqrt{2}y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ קיים $a+\sqrt{2}b$ כך

ש $\varphi(a+\sqrt{2}b)=x+\sqrt{2}y$. ניקח $a=x$ ו- $b=-y$ ואז

$\varphi(a+b\sqrt{2}) = \varphi(x-y\sqrt{2}) = x-(-y)\sqrt{2} = x+y\sqrt{2}$

<u>טענה:</u> יהי $\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ אוטומורפיזם כלשהו אזי גם

φ הוא הצמודה או φ הוא הזהות.

<u>הוכחה</u> φ אוטומורפיזם $\Leftarrow$

$$\varphi(a+\sqrt{2}b) = \varphi(a)+\varphi(\sqrt{2})\varphi(b)$$

<u>לראה</u> לכל רציונלי $q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ $\varphi(q)=q$

<u>הוכחה:</u> $\varphi(q)=\varphi(\frac{n}{m})=\varphi(n)\cdot\varphi(\frac{1}{m})$

$\varphi(n)=\varphi(n\times 1)=n\times\varphi(1)=n\times 1=n$

$\varphi(m)\cdot\varphi(\frac{1}{m})=\varphi(m\cdot\frac{1}{m})=\varphi(1)=1$

$\Rightarrow \varphi(m)^{-1}=\varphi(\frac{1}{m})=\frac{1}{m}$

$\Rightarrow \varphi(q)=\varphi(n)\varphi(\frac{1}{m})=\frac{n}{m}=q$

לגבי n שלילי $\varphi(-n)=-\varphi(n)$ ולכן הבדיקה קלה. ☺

לפי הלמה $\varphi(a+\sqrt{2}b)=a+\varphi(\sqrt{2})b$

נותר לבדוק מהו $\varphi(\sqrt{2})$.

$\varphi(\sqrt{2})^2=\varphi(2)=2 \Rightarrow \varphi(\sqrt{2})=\pm\sqrt{2}$

אם $\varphi(\sqrt{2})=\sqrt{2}$ קיבלנו את העתקת הזהות

אחרת קיבלנו את העתקת הצמודה

משלים ☺

זה נכון לכל $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ אבל לא רוכבים לא משלים זה

לא נכון כי אנחנו לא יודעים להגיד שאם מספר

עובר למספר מרוכב. למשל אי אפשר לבדוק למה

π עובר באותה דרך מאחר שעשינו ל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

אבל ל $\mathbb{C}$ יש כל מיני אוטומורפיזמים יש שם

מלא שלם.

מרחבים וקטוריים

לה הנושא של קיבוץ מס' 5 והוא מתמקד בהגדרת המרחב הווקטורי ותכונות אלגבריות שלו.

<u>הגדרה:</u> הקבוצה V תיקרא מרחב וקטורי מעל השדה F אם:

- מגדרת פעולת חבור בין וקטורים שמתקיימות האקסיומות הבאות:

(א) סגירות $v_1+v_2 \in V$

(ב) קומוטטיביות $v_1+v_2 = v_2+v_1$

(ג) אסוציאטיביות $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$

(ד) קיום איבר ניטרלי $v+0_V = v$

(ה) קיום איבר נגדי $v+(-v) = 0_V$

- מגדרת פעולה של כפל בסקלר שמתקיימות האקסיומות הבאות: $v_1,v_2 \in V$ $a_1,a_2 \in F$

(א) סגירות $a_1v_1 \in V$

(ב) $1_F \cdot v = v$

(ג) אסוציאטיביות $(a_1a_2)v_1 = a_1(a_2v_1)$

(ד) דיסטריבוטיביות $(a_1+a_2)v_1 = a_1v_1+a_2v_1$

$a_1(v_1+v_2) = a_1v_1+a_1v_2$

<u>דוגמאות:</u>

1) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $F=\mathbb{R}$ ונגדיר חיבור; כפל

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$t(x,y) = (tx,ty)$

הוכחנו בשיעור שלה מרחב וקטורי.

לדוגמא $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$

$-(1,1) = (-1,-1)$

2) באותו אופן אפשר להסתכל על $\mathbb{R}^3$ עם פעולות

שמאפיינת באופן הטוב ביותר לפי קואורדינטות.

$\mathbb{R}^3$ היא מ"ו מעל $\mathbb{R}$

(3) באופן כללי, אפשר להסתכל על $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$

וגם והיבור לפי קואורדינטות.

$\mathbb{R}^n$ היא מרחב וקטורי עם מעל $\mathbb{R}$

הערה: בדוגמה ש $\mathbb{R}^n$ היא מ"ו מעל $\mathbb{R}$ לא משתמשים

בתכונות של $\mathbb{R}$ בהיותו $\mathbb{R}$ אלא רק בתכונות שלו בתור

שדה. $\Leftarrow$ לכל F: F^n מרחב וקטורי מעל F.

המרחבים הוקטוריים הללו נקראים מרחב n-יות. כל וקטור

הוא n-יה סדורה

(4) יהיו F_1 ו- F_2 שדות כאשר F_2 הוא שדה של F_1.

$\Leftarrow$ F_2 מרחב וקטורי מעל F_2. לכל $a \in F_2$ ו- $v \in F_1$

נגדיר av - הכפל בשדה F_1.

למה זה מרחב וקטורי? כל האקסיומות של הרחבה

מתקיימות כי לה שדה. כל האקסיומות האקסיומות של הכפל

מתקיימות כי הן מתקיימות עבור כפל בתוכן F_1 בתור שדה.

$\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ $\mathbb{C}$ וקטורי.

$\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ וכן הלאה...

הערות לתרגיל 5

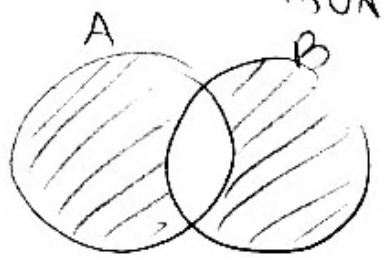
בשביל להוכיח שמשהו הוא שדה צריך להבדוק את כל

האקסיומות. אבל לא צריך להיות אובלים. כשנדבר

בתת מרחב צריך להוכיח שאירות וקיום איפס, לא

צריך להבדוק נגד. אבל אין לו כוח להוכיח את זה.

הפרש סימטרי



$A \Delta B$ מסומן ב

$A \Delta \emptyset = A$ נשים לב שלכל A

$A \Delta A = \emptyset$

זה דומה לאחדה וקטורי:

אוסף כל הפולינומים $V = \{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in F\}$

מרחב וקטורי מעל השדה F עם הפעולות הבאות:

חיבור של פולינומים נעשה בהתאם לחילוק של x

רפל בסקלר - כופלים כל מקדם בסקלר.

$$(1+x^2)+(x^3-7) = -6+x^2+x^3$$

$$t(1+17x-x^2) = t+17tx-tx^2$$

לכל פולינום נגדיר $\deg(p) = n$ ראשר

n הוא המקסימלי עבורו $a_n \neq 0$

$$\Rightarrow \deg(x^{17}-5x^5+3) = 17$$

$$\deg(5) = 0$$

$A = \{p \in V : \deg p = 2n\}$ לא מרחב וקטורי כי $0 \notin V$

$B = \{p \in V : \deg p = 2n\}$ לא מרחב וקטורי כי אין סגירות

$$(x^2+x+1)+(-x^2+x-2) = 2x-1 \notin B$$

$C = \{p \in V : \deg p = 17\}$ לא מרחב וקטורי מאותה סיבה

$D = \{p \in V : \deg p = 0\} = F$ וזה אכן מרחב וקטורי.

$E = \{p \in V : \deg p \leq 17\}$ זה סבבה וקל לבדוק את זה.

(13) 8.11.05
תרגול

בעוד שמונים ש ביחן בתרגול - צריך
לא מה בין הסוף כאן.
חומר: כל מה שנלמד בשיעור ובתרגול עד מיד ופטיש
(לא רלוו).

הערות לתרגיל 5

(5) $A=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$. צריך לבדוק אם זה מרחב.
אז צריך לבדוק קיום של כל האקסיומות. זה לא תת
קבוצה של איזה מרחב שאנחנו יודעים שהוא מ"ו.
זה בגלל ל- $f\in A$ $f(0)=1$ $B\subseteq A$ ו- A
הוא מ"ו $\Leftarrow$ מספיק לבדוק סגירות תנאים סגירות לחיבור
ולחילוף.
האמת זה ש הכרחי. ומספיק לבדוק שלכל $v,w\in V$
ו- $s,t\in F$ $sv+tw\in V$ סגירות לצירופים
לינאריים. (u מ"ו אזי f ו- $u\subseteq v$.
חוץ מזה צריך לבדוק ש- $V\neq\emptyset$ או ש $0_u\in V$.

(1) קל להוכיח ש- L תת.
אבל אם הינו מתחבטים על $L'=\{(a,b,c) \mid 2a+2b-5c=1\}$
אז L' לא תת כי $(0,0,0)\notin L'$. חוץ מזה אם
אין סגירות לחיבור.
בעצם L הוא מישור שעובר בראשית. באופן
כללי כל מישור שעובר בראשית הוא תת של $\mathbb{R}^3$.

(2) בגלל ש V מעל $\mathbb{Z}_2$ מתקיים $v \in V$ $v+v=0_V$

$v+v = 1_2 v + 1_2 v = (1_2+1_2)v = 0_2 v = 0_V$

דיסטריבוטיבי אקסיומה

לא ברור?

מאותה סיבה ש $0_F \cdot a = 0_F$ בכל שדה!

$0_2 v = (0_2+0_2)v = 0_2 v + 0_2 v$

מחסר את הנגדי $\Leftarrow$ $0_2 v = 0_V$

(4) לא יכול להיות $\mathbb{Z}_4$ מעל $\mathbb{Z}_2$ כי
לפי (2) לכל $v \in \mathbb{Z}_4$ $v+v=0$ אבל
זה לא נכון. סתירה.

אבל הינו יכולים להגדיר $\{0,1,2,3\}$ מעל
$\mathbb{Z}_2$ אם הינו מגדירים את החיבור לפי איך
שהגדרנו שדה בן 4 איברים. ושדה הוא תמיד
מעל תת שדה שלו

(3) $P(X)$ - אוסף תת הקבוצות של X

מגדירים חיבור $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

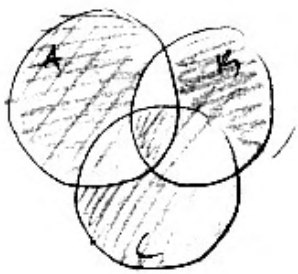
נגדיר כפל $\begin{cases} 0A = 0_V = \emptyset \\ 1A = A \end{cases}$

רק לא ברור לגמרי לגמרי $A \Delta A = \emptyset$

הדיון למשל קומוטטיבי:

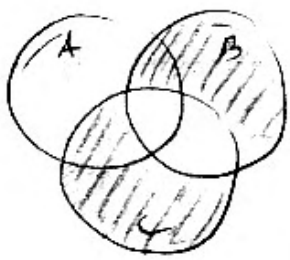
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B \Delta A$

אסוציאטיבי:



$A \Delta B$

$(A \Delta B) \Delta C$



$A \Delta (B \Delta C)$

$B \Delta C$

לרשום 3 איר אוכ.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל שדה F. וקטורים $v_1,\dots,v_k \in V$ יקראו בלתי תלויים אם לכל סקלרים $a_1,\dots,a_k \in F$ $\sum a_i v_i = 0_V \Rightarrow a_1 = 0$

הגדרה נאמר כי $v_1,\dots,v_k$ תלויים אם קיים סקלרים $a_1,\dots,a_k \in F$ שאינם כולם 0 כך ש $\sum a_i v_i = 0_V$

דוגמה:

$F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^3$.

$v_1=(1,1,0)$ $v_2=(0,1,0)$ $v_3=(0,1,1)$

האם הם בת"ל? האם קיימים a,b,c כך ש

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 =$$
$$= (a,a,0)+(0,b,0)+(0,c,c) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+0+0=0 \\ a+b+c=0 \\ 0+0+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0$$

$\Leftarrow$ הם בת"ל.

לדוגמה ראה אם נוסף $v_4=(1,2,3)$ אז אי אפשר היה לדרוש תלויים כי $\dim\mathbb{R}^3=3$ ו- 3 כאן המימד ח כל ו-4 וקטורים הם תלויים.

נסתכל על $v_1=(1,2,0)$, $v_2=(1,0,1)$ $v_3=(2,2,1)$

נשים לב ש $v_1+v_2=(1+1,2+0,0+1)=v_3$.

$\Leftarrow$ הם תלויים לינארית.

אבל מה אם לא היינו שמים לב? אז היינו מחפשים סקלרים $a,b,c \in \mathbb{R}$ כך ש- $av_1+bv_2+cv_3=0$ אבל לפחות אחד מ- a,b,c שונה מאפס.

$\Leftarrow$ נקבל מס' משוואות

$$a(1,2,0)+b(1,0,1)+c(2,2,1)=(0,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} a+b+2c&=0\\ 2a+2c&=0\\ b+c&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -c-c+2c&=0\\ a&=-c\\ b&=-c\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ניקח $a=1$, $b=1$, $c=-1$ ולכן תלויים.

ואכן

$$1(1,2,0)+1(1,0,1)-1(2,2,1)=$$
$$=(1,2,0)+(1,0,1)+(-2,-2,-1)=$$
$$=(1+1-2,\ 2+0-2,\ 0+1-1)=(0,0,0)$$

בסעיף ב' אוסף הפתרונות של מס' המשוואות הוא

$$\{(a,b,c) : a=b=-c\}=$$
$$=\{(t,t,-t) : t\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{t(1,1,-1) : t\in\mathbb{R}\}=sp((1,1,-1))$$

$\Leftarrow$ כלומר מימד 1, כי הוא נפרש ע"י וקטור אחד

הערות לתרגיל 6

(1) יהי $v_1,\dots,v_n\in V$ בת"ל. עבור $1\le i\ne j\le n$ $i\ne j$ כל $v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_n$ $\lambda\in\mathbb{R}$ בת"ל

שאלה דומה:

נניח v_1,v_2,v_3 בת"ל אז v_1,v_2-v_3,v_3 בת"ל

הוכחה: נניח כי $av_1+b(v_2-v_3)+cv_3=0$

ונראה כי $a=b=c=0$:

$$av_1+bv_2-bv_3+cv_3=$$
$$av_1+bv_2+(c-b)v_3=0$$

אם v_1,v_2,v_3 בת"ל $\Leftarrow$ $a=b=c-b=0$

$\Rightarrow c=0$

(15) (3)

$x \oplus y = xy$ תהיה ואמרנו $P = \mathbb{R}^+$

$t \cdot x = x^t$ הכפל

ב) בכל שדה $P = \{\lambda \cdot a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\quad 1 = 0_P \neq a \in P$

מה a הוא שדה ל $\oplus$? $1 \in P$?

$\{\lambda \cdot a : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{a^\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$

בנוסף $P \supseteq \{a^\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$

הוכחנו שאינפ' ש שם הכיוון ההפוך כלומר $P \subseteq \{a^\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Leftarrow$ $P = \{\lambda \cdot a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\Leftarrow$ $\dim P = 1$ כי אם

לכל p שנתון יש לו תיקוב כדל של וקטור אחד!

(16)

15.12.03
תת לינאריות

החומר של הבוחן השתנה: לא יהיה שדות! כמובן, צריך לדעת
מה זה שדה אבל לא תהיה שאלה בטאנון - הורחב ל $\mathbb{Z}_n$ שדה

החומר: מרחבים וקטוריים

תת מרחבים

צירופים לינאריים

תלות לינארית, אי תלות

בסיסים

מימד - הגדרה

יהיה עם הורחבת משפטים אם תרגילים!

הבוחן יהיה בשעה הראשונה. כל הקבוצות.

משקל הבוחן 5% כמאמן טומר, לא חייבים לעשות אותו.

תרגיל 7 להגשה בעוד שבועיים יחד עם תרגיל 8 (שיהיה קל יותר)

☺ ☺ ☺ ☺ ☺

<u>הערות לתחביל 6:</u>

(1) נתון כי $v_1,\dots,v_n$ בת"ל. $v_1,\dots,v_1+\lambda v_j,\dots,v_j,\dots,v_n$.

הוכחה: נוכל להניח בהכ"ל כי $i=1$ ו- $j=2$ (אחרת נשנה שמות).

נהנות מבחינת הרחיבה אבל למעשה הטר משמעות עמוקה).

נניח כי קיימים סקלרים $a_1,\dots,a_n\in F$ כך ש $a_1(v_1+\lambda v_2)+a_2v_2+\dots+a_nv_n=0$

ונראה כי $a_1=\dots=a_n=0$. נשנה את סדר הסכימה ונקבל

$a_1v_1+(a_1\lambda+a_2)v_2+\dots+a_nv_n=0$. מהיות $v_1,\dots,v_n$ בת"ל, כל המקדמים הם

0, כלומר $a_1,a_3,\dots,a_n=0$ וגם $a_1\lambda+a_2=0$. $a_2=\lambda\cdot 0+a_2$

יש לדיות לבדוק את הטענה הנכונה לא כל שינוי שנעשה ישאיר אותנו עם

קבוצה בת"ל. לדוגמא אם במקום v_1 הינו שים $v_1+\lambda v_2$ ואת

מבור $\lambda=0$ הינו מקבלים $v_1,v_2,v_3,\dots,v_n$ ובאות קבוצה תלויה.

(2) (א) איזן מרחבים שוקטוריים הם בת"ל? צריך להראות שהאפשרות

היחידה שקומבינציה לינארית שלהם תיתן אפס היא הקומבינציה

הטריוויאלית.

(1) $a(-4,1,4)+b(1,0,2)+c(3,1,0)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a+b+c=0 \\ a+c=0 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -4a-2a-3a=0 \\ -9a=0 \Rightarrow a=0 \\ \Rightarrow b=c=0 \end{array}$$

$\Leftarrow$ הווקטורים בת"ל. המימד של $\mathbb{R}^3$ הוא 3 $\Leftarrow$ הווקטורים בסיס.

מהו בסיס? יש 6 מיני הגדרות

- קבוצה פורשת בת"ל
- קבוצה בת"ל מקסימלית (אי אפשר להוסיף עוד וקטור ולקבל קבוצה בת"ל)
- קבוצה פורשת מינימלית (אי אפשר להשמיט וקטור ולקבל קבוצה פורשת)

משפט: קבוצה היא פורשת אם לכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ קיימים $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש $av_1+bv_2+cv_3=(x,y,z)$

זאת לא דרך סימפטית כל כך כי צריך לעשות הרבה חישובים.

אבל נשתמש בכמה דברים שאנחנו יודעים:

$\dim\mathbb{R}^3=3$ ואנחנו יודעים משפט: אם V מ"ו ממימד n, כל $n+1$ וקטורים הם ת"ל. לכן הקבוצה $\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq\mathbb{R}^3$ בסיס אומר היא בת"ל.

(2) $a(3,2,-6)+b(1,0,2)+c(3,1,0)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b+3c=0 \\ 2a+c=0 \\ -6a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3a+3a-6a=0 \\ c=-2a \\ b=3a \end{array}$$

$\Leftarrow$ ניתן לבחור את a כרצוננו. נבחר $a=1$ ואז מהמשוואות נובע $b=3$, $c=-2$. בעיקרון זה מספיק אבל אנחנו אומרים ממש להראות תלות ולכן אם עוד לנו לבדוק את ודאי ולא עלבן את הבדיקה:

$(3,2,-6)+3(1,0,2)-2(3,1,0)=(3+3-6,\ 2-2,\ -6+6)=(0,0,0)$

הקבוצה הנ"ל היא לא בסיס. היא לא בת"ל והיא לא פורשת.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F. $v_1,\dots,v_k\in V$ וקטורים. $Sp(v_1,\dots,v_k)=\{\sum_{i=1}^{k}a_iv_i : a_i\in F\}$

אם $V=Sp(v_1,\dots,v_k)$ אומרים שהקבוצה פורשת.

משפט: $Sp(v_1,\dots,v_k)$ תת מרחב של V.

הוכחה: מראים ש Sp לא ריקה וסגורה לחיבור ולכפל בסקלר ולחיבור

אם $Sp(v_1,v_2,v_3)=\mathbb{R}^3$ אז v_1,v_2,v_3 פורשת. ואם

מהיות הקבוצה לא בת"ל היא לא פורשת מינימלית. כי $av_1+bv_2+cv_3=0$

כאן ש $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. בהכ $c\neq 0$ (אחרת נשנה את השמות) ואז

$v_3=\frac{1}{c}(-av_1-bv_2)=-\frac{a}{c}v_1-\frac{b}{c}v_2$ לכן $v_3\in Sp(v_1,v_2,v_3)$.

$\Leftarrow$ $Sp\{v_1,v_2\}\subseteq Sp\{v_1,v_2,v_3\}$ מדה שני $v_1,v_2,v_3\in Sp(v_1,v_2)$ $\Leftarrow$

$Sp\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq Sp(v_1,v_2)$ $\Leftarrow$ $\mathbb{R}^3=Sp(v_1,v_2,v_3)=Sp(v_1,v_2)$ $\Leftarrow$.

$\dim\mathbb{R}^3\leq 2$ אבל ידוע שזה כי $\dim\mathbb{R}^3=3$.

(ב) $A=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$

$f_1(t)=1$ $\quad f_2(t)=t$ $\quad f_3(t)=t^2$

נתבונן $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש $a1+bt+ct^2=0$ לכל t

(לכל $t=0$ $\Leftarrow$ $a=0$

$$\begin{cases} b+c=0 & \Leftarrow\ t=1 \\ -b+c=0 & \Leftarrow\ t=-1 \end{cases} \Leftarrow b=c=0.$$

ערשיון נסתכל על $a(1-t)+b(t-t^2)+c(1-t^2)=0$

$=a+c+(b-a)t-(b+c)t^2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=0 & \Rightarrow\ b=a=-c \\ b-a=0 & b=a=1 \quad \text{(לקח)} \\ -b-c=0 & c=-1 \end{cases}$$

(3) (ב) $P=\mathbb{R}^+$ נראה ש $P=\{\lambda\cdot a:\lambda\in\mathbb{R}\}$. בטיעונים הנורמליים

שאנחנו מכירים $\{a^\lambda:\lambda\in\mathbb{R}\}=\{\lambda\cdot a\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ כלומר לכל

שלכל $x\in P$ קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש $x=a^\lambda$. x כלשהו הוא $\lambda=\log_a x$

כאשר שאלה באינפ' יתר.

<u>הערות לתרגיל 7</u>

פיבונאצ'י: $V=\{(a_1,a_2,\dots)\ :\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\}$

זו תת קבוצה של $\mathbb{R}^\infty$ - קבוצת כל הסדרות האינסופיות.

נגדיר חיבור וכפל בסקלר פר קואורדינטה. $\mathbb{R}^\infty$ מעל $\mathbb{R}$

תקבים של $\mathbb{R}^\infty$ נקראות קבוצה הילברט.

צריך להסביר בשאלה מדוע זה תת מ"ו של $\mathbb{R}^\infty$.

22.12.05
ת.לינארית

נתון תת המרחב $W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : 2a+b-c=0\}$

הראו שאותה $\dim W=2$ למה?

או ששמנו לב שכאשר משוואה של מישור ומישור הוא מישור דו-מימדי

או ששמנו לב ש-c נקבע תלוי בערכים של a ו-b ואז

נעבור לה פרמטרית $\begin{cases} a=t \\ b=s \end{cases} \Rightarrow c=2t+s$

ואז $W=\{(t,s,2t+s) : s,t\in\mathbb{R}\}$

וכאן הדר מושקל לראות שזה מישור הוא ב.

לעשות זבור $t=0, s=1$ $(0,1,1)$

$t=1, s=0$ $(1,0,2)$

ניכר שהם בת"ל: לה ברור משתי הקואורדינטות הראשונות.

יש אי תלות בשתי הקואורדינטות הראשונות ולכן $a=b=0$.

לה שיש עוד משוואה לגבי הקואורדינטה השלישית לה לא מוסיף

עוד מידע. כמובן לא פוגע כי $(0,0)$ הוא תמיד בתחום.

לכן $\dim W\geq 2$

מלבד שני. $(1,1,1)\notin W \Rightarrow \dim W<3$

$\Leftarrow$ $\dim W=2$ מאחר ב וקטורים בת"ל לכן

הם בסיס.

אבל אפשר גם להראות שהם פורשים. לה ברור כי

$t(1,0,2)+s(0,1,1)=(t,s,2t+s)$

וכל וקטור ב-W ניתן לרשום כ-$(t,s,2t+s)$

באופן כללי, אם $u,v\in W$ איך מראים כי הם פורשים?

צריך להראות שלכל $w\in W$ קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-

$w=au+bv$. אז צריך לפתור מע' משוואות ב-a ו-b

$$\begin{cases} au_1+bv_1=w_1 \\ au_2+bv_2=w_2 \\ au_3+bv_3=w_3 \end{cases}$$

אם לכל w_1, w_2, w_3 קיים פתרון למערכת המשוואות
אז v_1, v_2 פורשים את W.

נעשה דוגמה מפורשת:

$$a(1,0,2)+b(0,2,2) = (t,s,2t+s)$$

נקבל 3 משוואות:

$$\begin{cases} a=t \\ 2b=s \\ 2a+2b=2t+s \end{cases}$$

$\Rightarrow a=t,\ b=\frac{s}{2}$ מהמשוואות הראשונות

ומהבדיקה שזה לא מתנגש עם המשוואה השלישית:

$$2t+2\cdot\left(\frac{s}{2}\right)=2t+s \quad \checkmark$$

דוגמה

$$V_5=\{p(x) : \deg p \le 5\}$$

$$\dim V_5 = 6$$

לעומת $\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5\}$ בסיס ל- V_5.

ב- V_5 אפשר לרשום כל פולינום כשהוא
$(a_0,\dots,a_5)$ כאשר a_i הוא המקדם
של x^i בפולינום.

אם $1, 1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^5$ בסיס.

הרי $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \dots, (x-\alpha)^5$ בסיס? כן! אותנו
יכולים לראות שכל וקטור הוא בלתי תלוי בקודמו (כי
מדרגתו מבוהה יותר) יודעים שהמימד הוא 6 ולכן
זה בסיס.

<u>מסקנה</u>: לכל פולינום $p\neq 0$ ממעלה n יש לכל היותר n שורשים.
כלומר יש לכל היותר n סקלרים α ב- F כך ש $p(\alpha)=0$

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על $\deg p$.

אם $\deg p = 0$ $\quad p(x) = a_0$

$a_0 \neq 0$ לכן יש 0 שורשים ל-p וטיעוני

ניח שהטענה נכונה ל-n. יהי p פולינום מדרגה n+1.

אם ל-p אין שורשים סיימנו. אחרת יש לו שורש α.

נבנה בבסיס $1, x-\alpha, \dots, (x-\alpha)^{n+1}$ ל V_{n+1}.

נכתוב את p כצירוף לינארי של הבסיס הזה:

$$p = a_0 + a_1(x-\alpha) + \dots + a_{n+1}(x-\alpha)^{n+1}$$

(נציב במקום x את α ונקבל)

$$0 = p(\alpha) = a_0 \implies a_0 = 0$$

לכן ניתן לרשום $p(x) = (x-\alpha)(a_1 + \dots + a_{n+1}(x-\alpha)^n)$

$$= (x-\alpha)\, q(x)$$

אבל $\deg q = n$ ולפי הנחת האינדוקציה יש לו

לכל היותר n שורשים.

אם β שורש של p אז <u>או</u> $\beta = \alpha$

<u>או</u> $q(\beta) = 0$

אבל ל-q יש לכל היותר n שורשים לכן ל-p יש לכל

היותר n+1 שורשים.

מש"ל ☺

(20) 29.12.05
תיכון ריאלית

הערות לתרגיל 7

(4) (ב) $\mathbb{C}_3[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 : a_i\in\mathbb{C}\}$ זה תת של $\mathbb{C}[x]$.

$W=\{p\in\mathbb{C}_3[x] : p(0)=p(1)=0\}$ זה תת של $\mathbb{C}_3[x]$

צריך לחשב בסיס ל-W.

יהי $p\in W$. $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$0=p(0)=a_1$

$0=p(1)=a_1+a_2+a_3$

$W=\{p(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3 : \sum a_i=0\}$ כלומר

נעבור להציגה פרמטרית. נסמן $a_1=t$

ו-$a_2=s$

אם $p\in W$ אז $a_3=-t-s$

$W=\{tx+sx^2+(-t-s)x^3 : t,s\in\mathbb{C}\}$

נציב: $t=1$, $s=0$ ונקבל $v_1=x-x^3$

$t=0$ $s=1$ $v_2=x^2-x^3$

נבדוק כי v_1, v_2 בסיס, כלומר בת"ל ופורשים.

בת"ל: נניח כי $av_1+bv_2=0$ ונראה כי $a=b=0$

$a(x-x^3)+b(x^2-x^3)=ax+bx^2+(-a-b)x^3=0$

$\Rightarrow a=b=-a-b=0$

פורשים: $tv_1+sv_2=tx+sx^2-(t+s)x^3$

לכן הם פורשים. ☺

עדיין נסתכל על שקול אחר.

$V=\{1,x,x^2,x^3\}$ בסיס של $\mathbb{C}_3[x]$ לכן $\dim\mathbb{C}_3[x]=4$

$W_1=\{p(x) : p(0)=0\}$ תת של V המכיל את W. $\Leftarrow \dim W_1\le 3$

W תת של W_1 אפשר הוכיח לכל W_1 $\Leftarrow \dim W\le 2$

אבל אם נמצא שני וקטורים בת"ל אלו הם בסיס. לכן

נקבל $\dim W=2$

נשים לב שכל מה שעשינו בכלל לא תלוי בכך
שהמרחב הוא מעל $\mathbb{C}$. ובכלל יש עוד שאלות
שבהן לשדה אין תשובות. איך יכולה כן בא לידי
ביטוי? כשדרך לפתור מס' משוואות מעל שדה
אנחנו ואז המדיון של השדה משפיע. מה יוצא
מזה? וקטורים בתל מעל שדה אחד הם לא בהכרח
בתל כשנסתכלים על המרחב מעל שדה אחר!

(5) (ב) $V=\mathbb{R}^2$ $\theta\in\mathbb{R}$

$$v_1=(\cos\theta,\sin\theta)$$
$$v_2=(\sin\theta,-\cos\theta)$$

נראה כי v_1,v_2 פורשים את $\mathbb{R}^2$ ולכן הם בסיס,
שכן $\dim\mathbb{R}^2=2$):

יהי $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ונמצא $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש
$$(x,y)=av_1+bv_2=$$
$$=a(\cos\theta,\sin\theta)+b(\sin\theta,-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow x=a\cos\theta+b\sin\theta$$
$$y=a\sin\theta-b\cos\theta$$

ניתן לראות כי $\sin\theta\neq0$ אם $\cos\theta\neq0$.
נכפיל את המשוואה הראשונה ב- $\cos\theta$, את
השניה ב- $\sin\theta$ ונחבר

$$x\cos\theta+y\sin\theta=a\cos^2\theta+a\sin^2\theta=a$$
$$\Rightarrow b=\frac{x-a\cos\theta}{\sin\theta}=x\sin\theta-y\cos\theta$$

אחרי פתרון

נשאר לטפל במקרים שאחד מהם מתאפס.

$\theta=0\Rightarrow v_1=(1,0),\ v_2=(0,-1)\Rightarrow a=x\quad b=-y$

$\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow v_1=(0,1)\ v_2=(-1,0)\Rightarrow a=-x,\ b=y$

$\theta=\pi\Rightarrow v_1=(-1,0)\ v_2=(0,-1)\Rightarrow a=-x\quad b=-y$

$\theta=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow v_1=(0,-1)\ v_2=(1,0)\Rightarrow a=-y\quad b=x$

(21)

אפשר לפתור את השאלה הזאת בדרך אלגנטית ויפה.

נסמן $z = x+iy$ ונסמן $w = a+bi$

נשים לב ש.

$$(x,y) = a(\cos\theta, \sin\theta) + b(\sin\theta, -\cos\theta)$$

אומר $x = a\cos\theta + b\sin\theta$

$y = a\sin\theta - b\cos\theta$ אז נרשום:

$$\Rightarrow x+yi = \overline{(a+bi)(\cos\theta - \sin\theta\, i)} =$$

$$= (a-bi)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow a-bi = \frac{x+yi}{\cos\theta + i\sin\theta} = (x+yi)(\cos\theta - i\sin\theta)$$

השוויון הזה בין חלקים מדומים בנפרד ובין ממשיים בנפרד.

ורק קיבלנו את a ו-b.

לכן חסך לנו את כל הבעיות של המקרי קצה.

<u>הערות לתרגול 8</u>

1) (א) $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ בת"ל. $\alpha \notin A$

האם $\alpha_1+\alpha, \dots, \alpha_n+\alpha$ בת"ל? לא!

למשל $V = \mathbb{R}^2$ $\alpha_1 = (1,0)$, $\alpha_2 = (0,1)$

ניקח $\alpha = -\alpha_1$ ואז $(0,0), (-1,1)$ תלויים.

(ב) $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ $\alpha \notin \operatorname{Span} A$

האם $\alpha_1+\alpha, \dots, \alpha_n+\alpha$ בת"ל? כן!

הוכחה: נניח כי $\sum_1^n a_i(\alpha_i+\alpha) = 0$ ונראה כי $a_i = 0$.

$$\sum_1^n a_i\alpha_i + \left(\sum_1^n a_i\right)\alpha = 0$$

אם $\sum a_i \neq 0$ אזי $\alpha = -\frac{\sum a_i\alpha_i}{\sum a_i}$ שזה בלתי בסתירה.

$\Leftarrow \sum a_i = 0 \Leftarrow \sum a_i\alpha_i = 0 \Leftarrow \{\alpha_i\}$ בת"ל $\Leftarrow a_i = 0$

(ג) אשל

$V=\{(a_1,a_2,\dots): a_{i+k}=c_1a_i+c_2a_{i+1}+\dots+c_ka_{i+k-1}\}$ (4)

בכל: V תת מ"ו של $\mathbb{R}^\infty$ - כדי לקבל אז לאינטואיציה את כל סתם בשביל האינטואיציה נשים לב שסדרת פיבונאצ'י היא איבר פרטי של V ראשית $k=2$ ו- $c_1=c_2=1$. בפיבונאצ'י שני האברים הראשונים קובעים את כל הסדרה.

אז באיבר הכללי האינטואיציה תגיד ש- k הקואורדינטות הראשונות (ואז נוכל לקבוע) קובעות את כל איברי הסדרה.

אז באופן טבעי הבסיס שנבחר יהיה:

$(1,0,\dots 0,c_1,\dots)$ — c_1 מקום i+k; $\dots$ איברים לפי הכלל של הסדרה

$(0,1,0,\dots 0,$ איברים לפי הכלל$)$

$(0,0,\dots 0,1,$ איברים לפי הכלל$)$ — 1 מקום k

נשאר לבדוק שהם פורשים ושהם בת"ל.

מדאנו k וקטורים שהם בסיס $\Leftarrow \dim V=k$

<u>טיפים לתרגיל 9</u>

- $T:V\to W$ לינארית אם: $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$
$T(tv)=tT(v)$

$\Leftarrow$ גרעין של V ו- W יהיו מעל אותו שדה.

למשל ב- $T:\mathbb{R}^2$ $T(x,y)=(x+y,x-y)$ לינארית

אבל $T(x,y)=(1+x+y,x-y)$ <u>לא</u>.

- אם $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בסיס של V ו- $T:V\to W$ לינארית ותונים $T(\alpha_i)$ לכל i, ואז לכל $\alpha\in V$ $\alpha=\sum a_i\alpha_i$ נקבל $T(\alpha)=\sum a_iT(\alpha_i)$

(22) 5.1.06
ת. לינארית

איך בודקים שהעתקה היא לינארית?

בודקים שהיא שומרת חיבור ושומרת כפל בסקלר

אם היא לא מקיימת אחד מהם היא לא לינארית ולהפך.

למשל $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ שמוגדרת כך:

$$T(x,y,z) = (2x-5y+3z,\ -x+7y+z)$$

<u>טענה</u> T לינארית

<u>הוכחה:</u>

(א) $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$T[(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)] = T[(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)] =$$
$$= (2(x_1+x_2)-5(y_1+y_2)+3(z_1+z_2),\ -(x_1+x_2)+7(y_1+y_2)+(z_1+z_2)) =$$
$$= (2x_1-5y_1+3z_1,\ -x_1+7y_1+z_1)+(2x_2-5y_2+3z_2,\ -x_2+7y_2+z_2) =$$
$$= T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2)$$

(ב) לכל $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ו $t\in\mathbb{R}$

(ב) $T(t(x,y,z)) = t\,T(x,y,z)$

<u>טענה:</u> T לינארית אמ"מ T שומרת גם צירופים לינאריים.

כלומר $T(tv_1+sv_2) = t\,T(v_1)+s\,T(v_2)$

<u>דוגמא</u> $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך: $T(x,y) = (3x-5y,\ 0,\ x+y+1)$

לכל העתקה לינארית $T:V\to W$ $T(0_V)=0_W$

$$T(0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$$

$\Leftarrow$ T לא לינארית.

באופן כללי, ושמדברים על העתקות $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$

אם כל המשתנים מופיעים באופן לינארי, אין מכפלות ואין סתם קבועים אז היא לינארית.

דוגמא $T(f,a) = f(a)$

לינ' $f(x) = x^2$

$T(f,1) = 1^2 = 1$

$T(2(f,1)) = T(2f,2) = 2\cdot 2^2 = 8 \neq 2\,T(f,1)$

$\Leftarrow$ T לא לינארית

דוגמא $T(a_1,a_2,\dots) = (a_1, a_1+a_2, \dots, \sum_i^n a_i, \dots)$

אקס מ

יש כאן לינארי (דה ס')

$T((a_1+b_1, a_2+b_2,\dots)) = (a_1+b_1, a_1+b_1+a_2+b_2, \dots, \sum_i^n (a_i+b_i), \dots) =$

$= (a_1,\dots,\sum_i^n a_i,\dots) + (b_1,\dots,\sum_i^n b_i,\dots) = T(a_1,\dots) + T(b_1,\dots)$

ביאופן דומה יש אבור כפל בסקלר

כי כה נכון לכל דו אורדינטה

העתקות לינאריות לה דבר יפה. רק דרך שיגדו לנו איך הן פועלות על הבסיס ואז אנחנו יודעים מה הן עושות על כל וקטור. למשל

(2) (1)

$T(1,0,1) = (-1,3,4)$

$T(1,2,-1) = (3,1,4)$ $\quad T(1,0,0) = ?$

$T(1,-1,1) = (0,1,0)$

נמצא צירוף לינארי כזה:

$(1,0,0) = a(1,0,1) + b(1,2,-1) + c(1,-1,1)$

(i) $a+b+c=1$ $\quad$ (i)+(ii) $\Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

(ii) $2b-c=0$ $\quad$ (ii) $\Rightarrow c=1$

(iii) $a-b-c=0$ $\quad$ (iii) $\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow T(1,0,0) = T(a(1,0,1) + b(1,2,-1) + c(1,-1,1)) =$

$= a\,T(1,0,1) + b\,T(1,2,-1) + c\,T(1,-1,1) =$

$= (2,0,0)$

באופן כללי, נניח $T: V \to W$

1- $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V. נניח שאנחנו יודעים את $T(v_1), \dots, T(v_n)$ לכל $v \in V$ יש כלל יחיד

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

$$\Rightarrow T(v) = T\left(\sum_i a_i v_i\right) \underset{\text{כי } T \text{ לינארית}}{=} \sum_i a_i T(v_i)$$

מה היסוד להבנה שמטריצה זה עתקה זה אותו דבר במטריצה ושום לינ איך הה עתקה פועלת על הבסיס - כאת דרך לקודה אינפורמציה

2 ב)

$T(1,1,0) = (1,2,-1)$

$T(1,0,-1) = (0,1,1)$

$T(0,-1,1) = (3,1,4)$

איזה v מקיים $T(v) = (1,0,0)$?

באופן דומה לסעיף הקודם

$(1,0,0) = a(1,2,-1) + b(0,1,1) + c(3,1,4)$

נניח שמצאנו את a, b, c אלה ואז

$$T(v) = a(1,2,-1) + b(0,1,1) + c(3,1,4) =$$
$$= aT(1,1,0) + bT(1,0,-1) + cT(0,-1,1) =$$
$$= T(a,a,0) + T(b,0,-b) + T(0,-c,c) =$$
$$= T(a+b, a-c, -b+c)$$

3 $f: V \to W$ $\quad gr f = \{(v, f(v)) : v \in V\} \subseteq V \times W$

<u>צ"ל</u>: $gr f$ תת מרחב אמא f לינארית.

הוכחה: צריך להראות את שני הכיוונים.

($\Leftarrow$) נניח כי f לינארית ונראה כי $gr f$ תת מ

($\Rightarrow$) נניח כי $gr f$ תת מ ונראה כי f לינארית

נראה לדוגמה את הכיוון הראשון:

$(0_V, 0_W) = (0_V, f(0_V)) \in \text{gr} f \Leftarrow T(0_V) = 0_W \quad (\Leftarrow)$

נראה סגירות לחיבור וכפל בסקלר

$t, s \in \mathbb{R}, \quad (v_1, f(v_1)), (v_2, f(v_2)) \in \text{gr} f$

$t(v_1, f(v_1)) + s(v_2, f(v_2)) = (tv_1, tf(v_1)) +$

$+ (sv_2, sf(v_2)) \underset{\text{כי } T \text{ לינארית}}{=} (tv_1, f(tv_1)) + (sv_2, f(sv_2)) =$

$= (tv_1 + sv_2, f(tv_1) + f(sv_2)) =$

$\underset{T \text{ לינארית}}{=} (tv_1 + sv_2, f(tv_1 + sv_2)) \in \text{gr} f$

$\Leftarrow$ gr f תת.

(4) $T: \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}[x]$ לינ' שמקיימת

$T(-1,4,2,1) = x+1 \quad T(-1,1,1,1) = x \quad , T(1,2,0,-1) = 2$.

ניתן בשאלה שקיימת כזאת. אזי

$(-1,4,2,1) = (1,2,0,-1) + 2(-1,1,1,1)$

$\Rightarrow \quad T(-1,4,2,1) = T(1,2,0,-1) + 2T(-1,1,1,1)$

$\Rightarrow \quad x+1 = 2x + 2$

וזאת סתירה!

(6) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ יהי:

$T(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$

שומרת כפל בסקלר:

$T(\alpha x, \alpha y) = \sqrt[3]{\alpha^3} \cdot T(x,y) = \alpha T(x,y)$

אבל לא שומרת חיבור:

$T(1,0) + T(0,1) = 0 + 0$

$T(1,1) = 1 \neq 0$

גרף דוגמה: $T: \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ יהי $T(x,y) = xy$

(24)

(5) V, W מ"ו מעל $\mathbb{Z}_{17}, \mathbb{Z}_{19}$ בהתאמה

$T: V \to W$ מקיימת $T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2)$

<u>ג</u>: לכל $v \in V$ $T(v)=0$.

<u>הוכחה</u>: (מתוך $v \in V$ כלשהו

$17 \times v = 0 \Leftarrow \operatorname{char} \mathbb{Z}_{17} = 17$

$T(17\times v) = T(0) = T(0+0) = T(0)+T(0)$

$\Rightarrow T(0) = T(17\times v) = 0_W$

$T(19\times v) = 19\times T(v) = 0_W$

$\Rightarrow 0 = T(19\times v) = T(17\times v + 2\times v) = T(17\times v)+T(2\times v) =$

$= T(17\times v)$

$\Rightarrow T(2\times v) = 0$

$0 = T(17\times v) = T(8\times(2\times v)+v) =$

$= T(8\times(2\times v)) + T(v) = 8\times T(2\times v) + T(v) =$

$= 8\times 0 + T(v) = T(v)$ ☺

$T: V \to W$ לינארית

$\operatorname{Ker} T = \{v \in V : T(v) = 0\} \subseteq V$

$\operatorname{Im} T = \{w \in W : \exists v \in V\ T(v) = w\} \subseteq W$

<u>משפט 1</u>: T לינארית. אז $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$ תת"מ.

<u>משפט 2</u>: (משפט המימדים) $T: V \to W$ לינארית

$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

זה משפט שימושי ביותר!

<u>דוגמה</u>: $T: \mathbb{R}^3 \to$ כך $T(x,y,z) = (x,y,0)$

$\operatorname{Ker} T = \{(x,y,z) : T(x,y,z) = 0\} =$

$= \{(x,y,z) : (x,y,0) = (0,0,0)\} =$

$= \{(x,y,z) : x=y=0\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = sp(0,0,1)$

לכן $\dim \ker T = 1$

$\Leftarrow$ מהמשפט הממדים $\dim \operatorname{Im} T = 2$.

$\operatorname{Im} T = \{T(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} =$

$= \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \underbrace{sp\{(1,0,0),(0,1,0)\}}_{\text{בסיס של } \operatorname{Im} T}$

<u>דוגמא</u> $T: V \to W$

$T(v) = 0_W$ העתקה הפיכה.

ואם $\ker T = V$, $\operatorname{Im} T = \{0_W\}$

$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V + 0$

<u>שאלה</u> (מבחן לפני שנה)

האם קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש-

$\operatorname{Im} T = \ker T$?

<u>לא</u> ניתן לשלול ש-T מקיימת את הדרוש לפי

משפט הממדים

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T =$

$= 2 \dim \ker T$

$\Rightarrow \dim \ker T = 1.5$

סתירה! $\dim \ker T$ חייב להיות מספר טבעי!

האם קיימת $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ כך ש $\ker T = \operatorname{Im} T$.

כן! למשל $T(x,y) = (y,0)$

הגדרות ומטריצות

נעשה דוגמה!

$T(x,y,z) = (x, x+z, y) \quad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$E = \{ \overset{v_1}{(1,0,0)}, \overset{v_2}{(1,1,0)}, \overset{v_3}{(0,1,1)} \}$

$F = \{ \overset{e_1}{(1,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1)} \}$

ההצגה של T בחלק לבסיסים E ו F
E בסיס המקור
F בסיס הטווח

$[T]^E_F = ? \qquad [T]^F_E = ?$

נבדוק את T פועלת על איברי הבסיס:

$T(1,0,0) = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$T(1,1,0) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$T(0,1,1) = (0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$\Downarrow$

שמים את המקדמים בשורות באותו המטריצה כאן לא דוגמה טובה כך לראות את זה כי המטריצה יצאה סימטרית

$$[T]^E_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

יש בסיס אחרים

$T(1,0,0) = (1,1,0) = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$

$T(0,1,0) = (0,0,1) = 1v_1 - 1v_2 + 1v_3$

$T(0,0,1) = (0,1,0) = -1v_1 + 1v_2 + 0v_3$

$$\Rightarrow [T]^F_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תשובה! כאן הסדר של האיברים בבסיס חשוב!!!

מטריצת מעבר: $T: V \to V$ הלהנ $Id(v)=T(v)=v$

אבל אנחנו רוצים להבדיל בבסיסים שונים.

בסיס הוא בעצם מס קואורדינטות ו-

$$[id]_F^E$$

מטריצה שמאפשרת לנו להבדיל את המיקום שלנו בקואורדינטות שונות.

(26) 12.1.06
ת. לינארית

הודעות:

ב-moodle יש רשימה של הציונים. לבדיק שלה תואם את המציאות.
בעוד שבועיים יש בוחן מאחה מתכונת כמו הבוחן הקודם

☺ ☺ ☺ ☺

הערות לתרגיל 10

(1) $T: V \to V$ לינארית, $V = F$.

צ"ל: קיים $a \in F$ כך ש $T(x) = ax$

הוכחה: $T(x) = T(1 \cdot x) = T(x \cdot 1) = x\, T(1) = T(1)\, x$

(2) V_n - פולינומים מעל $\mathbb{R}$ מדרגה $\geq n$.

ל- $p \in V_n$ נתון $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$D(p) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i x^{i-1} \in V_{n-1}$$

(א) צ"ל: D לינארית

הוכחה: נתון $p(x) = \sum_0^n a_i x^i$, $Q(x) = \sum_0^n b_i x^i \in V_n$

יהי $t, s \in \mathbb{R}$

$$D(tp + sQ) = D\left(\sum_0^n (ta_i + sb_i) x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i(ta_i + sb_i) x^{i-1} =$$

$$= t \sum_0^n i a_i x^{i-1} + s \sum_0^n i b_i x^{i-1} = t D(p) + s D(Q)$$

(ב) $\ker D = ?$

$$i \cdot a_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i \cdot x^{i-1} \iff D(p) = 0$$

לכל $1 \leq i \leq n$ $\iff$ $a_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \ker D = \{P(x) = a_0\} = sp\{1\}$

$\Leftarrow$ $\dim \ker D = 1$

(ג) $\dim \operatorname{Im} D = \dim V_n - \dim \ker D = n$

$\Leftarrow$ $\dim \operatorname{Im} D = n+1-1 = n$

לכל $p \in V_n$ $D(p) \in V_{n-1}$ $\Leftarrow$ $\operatorname{Im} D \subseteq V_{n-1}$

אבל $\dim V_{n-1} = n$ $\Leftarrow$ $\operatorname{Im} D = V_{n-1}$.

(3)

$A = \{1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+\dots+x^n\}$

$B = \{1, 1+x, \dots, 1+\dots+x^{n-1}\}$

$[D]^A_B = ?$

$D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0(1+x) + \dots + 0(1+\dots+x^{n-1})$

$D(1+x) = 1 = 1\cdot 1 + 0(1+x) + \dots + 0(1+\dots+x^{n-1})$

$D(1+x+x^2) = 1+2x = -1\cdot 1 + 2(1+x) + 0(1+x+x^2) + \dots + 0(1+\dots+x^{n-1})$

$\vdots$

$D(\sum_0^k x^i) = \sum_1^k i x^{i-1} = k(1+\dots+x^k) - 1(1+\dots+x^{k-1}) - \dots - 1\cdot 1$

$\vdots$

$$\Rightarrow [D]^A_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ & 0 & 2 & & -1 \\ & \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{pmatrix}}_{n+1} \Big\} n$$

ניקח בסיסים אחרים:

$E_1 = \{1, x, \dots, x^n\}$

$E_2 = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$

$D(1) = 0 = 0(\ ) + \dots + 0(\ )$

$D(x) = 1 = 1 + 0(\ ) + \dots + 0(\ )$

$D(x^k) = kx^{k-1} = 0(\ ) + \dots + 0(\ ) + k\cdot x^{k-1} + 0(\ ) + \dots + 0(\ )$

$$\Rightarrow [D]^{E_1}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & & 0 \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & n \end{pmatrix} \in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

באותו אופן:

$$[D]^A_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 2 & & 2 \\ \vdots & & 0 & & 3 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{pmatrix}$$

כמו לא מסובך בכלל.

(27)

(ד) $T: V \to V$ לינארית, $\ker T = \ker T^2$. $T^2(v) = T(T(v))$

(ו) $T = T^2$? לא נכון!

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $T(x) = -x$ לינארית - בהחלט!

$T^2(x) = T(-x) = x \neq T(x)$

$\ker T = \{0\} = \ker T^2$

(ה) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$? נתון להניח $\dim V = n$

הוכחה: $\operatorname{Im} T^2 = \{v : \exists w \in V : T(T(w)) = v\}$

$= \{T(u) : u = T(w)\} =$

$= \{T(u) : u \in \operatorname{Im} T\} \subseteq$

$\subseteq \{T(u) : u \in V\} = \operatorname{Im} T$

מהשפט הממדים

$\dim \operatorname{Im} T = n - \dim \ker T =$

$= n - \dim \ker T^2 =$

$= \dim \operatorname{Im} T^2$

$\Leftarrow$ מרחב ש $\operatorname{Im} T^2, \operatorname{Im} T$ יש אותם ממדים

(סוף) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$. ☺

אם המרחב אינסופי: נקח $V = \mathbb{R}^\infty$ ו-

$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ כלומר T מזיז את הווקטור.

$T^2(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, x_1, x_2, \dots)$

אז $\operatorname{Im} T \neq \operatorname{Im} T^2$

$\ker T = (0, 0, \dots) = \ker T^2$

דוגמא לדוגמא ש T לינארית

(ו) $\{0\} = \ker T \cap \operatorname{Im} T$?

הוכחה: יהי $v \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$ ונראה ש $v = 0$.

$v \in \ker T \cap \operatorname{Im} T \Rightarrow v \in \ker T \wedge v \in \operatorname{Im} T$

$\Leftarrow$ $\Rightarrow$ $v = T(u)$

$T(T(u)) = T(v) = 0 \Leftarrow T(v) = 0$

☺ $\Rightarrow u \in \ker T^2 = \ker T \Rightarrow T(u) = 0 \Rightarrow v = 0$

מטריצות

מטריצות זה מרחב וקטורי - אפשר לחבר, אפשר לכפול בסקלר ולמשל אפשר לעשות עד כל אין סופים איתן, לעשות לכפול

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot 1 \\ 3\cdot 4+4\cdot 2 & 3\cdot 3+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$$

יש דרך 3 מעולות לכפול.

יותר קל לצייר את זה ככה:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \\ & \bullet \end{pmatrix} \end{array}$$

איך רושמים
אם מראה זה
אם מראה את הגודל
לוקחים שורה
ומה שנייה עמודה

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ERROR
לא מתקמפל!

לאיזה שתי מטריצות אפשר לכפול:

כדי ש- AB תהיה מוגדרת, מספר העמודות
ב- A צריך להיות שווה למספר השורות ב- B.

$$A \in M_{n\times m}(F),\ B \in M_{m\times l}(F)$$

אם AB ו- BA מוגדרות אז
$$A \in M_{n\times m}(F),\ B \in M_{m\times n}(F)$$

האם $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ שדה? לא!

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

אפילו $A \neq 0$ $\Leftarrow$ לא יכול להיות שדה
כי בשדה אין מחלקי אפס!
חוץ מזה אין קומוטטיביות

בדר כ $AB \neq BA$. אם $AB = BA$, A ו- B
נקראות מתחלפות

אם עבור A, לכל B $AB = BA$, A נקראת מרכזית.
לדוגמא $0 \cdot B = B \cdot 0$ $\Leftarrow$ 0 מרכזית
$IB = BI = B$ $\Leftarrow$ I מרכזית
אם $A^n = 0$ ו- $A \neq 0$ A נקראת נילפוטנטית.

מה הקשר בין העתקות לטריצות?
יש התאמה חח"ע ועל בין $T: V \to W$ ל- $[T]_B^A$
אם

$$V_A \xrightarrow{T} W_B \xrightarrow{S} U_C$$

$$[S \circ T]_C^A = [S]_C^B \cdot [T]_C^A$$

המשפט הזה יוצר קשר בין הרכבה של טרנספורמציות
לכפל של מטריצות.

מסקנות

(1) V מ"ו A,B בסיסים סדורים

$$I = [id \circ id]_A^A = [id]_B^A [id]_A^B$$

לכן $P = [id]_B^A$ הפיכה ו- $P^{-1} = [id]_A^B$

(2) $T: V \to V$ לינארית A,B בסיסים של V

$$[T]_A^A = \underbrace{[id]_A^B}_{P^{-1}} [T]_B^B \underbrace{[id]_B^A}_{P}$$

$$\Rightarrow [T]_A^A = P^{-1} [T]_B^B P$$

לכאורה בשביל לקבל את המטריצה ביחס לבסיס חדש צריך רק מטריצת מעבר בסיס של המרחב.

למה זה טוב? למשל

$$([T]_A^A)^2 = (P^{-1}[T]_B^B P)^2 = P^{-1}[T]_B^B P \cdot P^{-1}[T]_B^B P = P^{-1}([T]_B^B)^2 P$$

באותו אופן $([T]_A^A)^{17} = P^{-1}([T]_B^B)^{17} P$

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{17} = ?$

נסתכל על A כעל טרנס' לינארית

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

הבסיס הסטנדרטי $A = [T]_E^E$

נמצא בסיס חדש ל- $\mathbb{R}^2$ כך ש- $[T]_B^B = D$ אלכסונית

(כיקל לחשב את הכוחות שלה)

$$\begin{pmatrix} a_1^{17} & 0 \\ 0 & a_2^{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}^{17}$$ ואז $A^{17} = P^{-1} D^{17} P$

אם מוצאים את B? מה הנושא של לינארית 2?!

(30)

מסקנה מהמשפט:

$$[id]_B^A \cdot [id]_A^B = [id \circ id]_B^B = [id]_B^B = I$$

אם A מטריצה ריבועית 2×2 והיא הפיכה

אז אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

אז $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ כאשר $\det A = ad - bc$

(3) (א) $T: V \to V$ סקלרית $T(v) = cv$

B בסיס סדור של V.

<u>צ"ל</u>: $[T]_B^B = cI$

<u>הוכחה</u>: $T(v_i) = cv_i = v_i \in B$

$= 0 \cdot v_1 + \dots + c \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n =$

$\Leftarrow$ העמודה ה-i ב $[T]_B^B$ היא $i \to \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = ce_i$

$$\Rightarrow [T]_B^B = (ce_1 \ \dots \ ce_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} c & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c \end{pmatrix} = cI$$

(ב) השאלה הבאה היתה במבחן שנה שעברה.

<u>צ"ל</u>: $A \in M_n(F)$ מרכזית אמ"מ A סקלרית

<u>הוכחה</u>:

($\Rightarrow$) נניח $A = cI$ יודעים A מרכזית

$$AB = cIB = cB = c(BI) = B(cI) = BA$$

אמרנו בכיתה לכל $A, B \in M_n(F)$, $t \in F$ $t(AB) = A(tB) = (tA)B$

($\Leftarrow$) נניח כי A מרכזית ונוכיח שהיא סקלרית.

נסמן $A = (a_{ij})$

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$E_{ij}A = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} \cdots & a_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow j \end{array}$$

אם $E_{ij}A = AE_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ הכל אפס פרט למקום שבו הן נחתכות.

$\Leftarrow$ היא אלכסונית $\begin{cases} a_{jk} = 0 & \forall k \neq j \\ a_{ki} = 0 & \forall k \neq i \end{cases}$

לעומת $i, j = k$ נקבל בשורה ה-i-ית

ב $E_{ij}A$ את a_{jj} ובעמודה ה-j-ית

ב AE_{ij} את a_{ii} $\Leftarrow$ $a_{ii} = a_{jj}$

$\Leftarrow$ היא סקלרית.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{11} & \\ 0 & & a_{11} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

מש"ל ☺

יש עוד שאלה מעולה של אינדקסים.

מסקנה מהדרישה: E_{ij} היא מטריצה יחידה מעניינת רק אם להם מתחם אחד.

ⓔ $T \circ S = S \circ T$ לכל $S: V \to V$ לינארית.

$\underline{\text{צ"ל}}$: $T(v) = cv$.

הוכחה: נקבע בסיס B. נתבונן בהעתקה $\varphi_B(T) = [T]_B^B$ (מתאימה העתקות למטריצות).

φ איזומורפיזם, $\varphi: Hom(V) \to M_n(F)$

ומשמרת כפל.

(ד)

מה לגבי שונות של הפעל?

$$[S\circ T]_B^B = \varphi_B(S\circ T) = \varphi_B(S)\cdot\varphi_B(T) = [S]_B^B[T]_B^B$$

נגדיר $A = \varphi_B(T) = [T]_B^B$. תהי C מטריצה.

~~לפי הנחה~~ קיימת S כך ש $C = [S]_B^B$

(כי φ על)

$$AC = [T]_B^B[S]_B^B = [T\cdot S]_B^B =$$

$$= [S\circ T]_B^B = [S]_B^B[T]_B^B = CA$$

$\Leftarrow$ A מרכזית.

לפי סעיף ב' קיים $c\in F$ כך ש $A = cI$

לכן כי $T(v) = cv$.

$[T]_B^B = cI$ מהתבוננות ב- A לכל i

$$T(v_1) = 0\cdot v_1 + \dots + cv_1 + \dots + 0\cdot v_n = cv_1$$

$\Leftarrow$ לכל $v\in V$ קיים צירוף לינארי

$v = \sum a_i v_i$ ואז

$$T(v) = T(\sum a_i v_i) =$$

$$= \sum a_i T(v_i) = \sum a_i c v_i =$$

$$= c\sum a_i v_i = cv$$

$\Leftarrow$ T סקלרית

(29) 19.1.06
ת. לינארית

שבוע הבא בוחן בשעה הראשונה
החומר: טרנספורמציות לינאריות
מרחבים, תמונה
הצגה של טר' לפי בסיס
מטריצות מעבר
מטריצות

המבחן: 3 שעות. מתנלק ל-3 חלקים: - הוכחות
- תרגילים
- אינטגרלי

(הערות לתרגיל 11)

(2) $T(x,y) = (-3x+15y, -2x+8y)$ לינארית (הוכח!)
(אם, כאת שאלה טובה מאוד לבחנים!)

$E = \{(1,0), (0,1)\}$

$T(1,0) = (-3,-2) = -3(1,0) - 2(0,1)$

$T(0,1) = (15,8) = 15(1,0) + 8(0,1)$

$\Rightarrow [T]_E^E = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

$A = \{(1,2), (2,3)\}$

$[T]_E^A = ?$

טענה: כל פעם שיש למטה E זה קל!

$T(1,2) = (-27,14)$

$T(2,3) = (39,20)$ $\Rightarrow [T]_E^A = \begin{pmatrix} -27 & 39 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$

$$B = \{(3,1), (5,2)\}$$

$$T(3,1) = (6,2) = 2(3,1) + 0(5,2)$$
$$T(5,2) = (15,6) = 0(3,1) + 3(5,2)$$

$$\Rightarrow [T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מטריצת מעבר מ-B ל-E $\quad Q = [id]_E^B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(1,0) = 2(3,1) - 1(5,2)$$
$$(0,1) = -5(3,1) + 3(5,2)$$

$$\Rightarrow P = [id]_B^E = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

נוודא ש $PQ = I$. נעשה את החישובים המאומתים

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ראה ש- $[T]_E^E = \underbrace{[id]_E^B}_{A} [T]_B^B \overbrace{[id]_B^E}^{A^{-1}}$

כך מאומת יוצא אם מתשבים.

$$(T_1)^{17} = (A T_2 A^{-1})^{17} = A T_2^{17} A^{-1} =$$
$$= A \begin{pmatrix} 2^{17} & 0 \\ 0 & 3^{12} \end{pmatrix} A^{-1}$$

אפשר להוכיח באינדוקציה ש- $(A T A^{-1})^n = A T^n A^{-1}$

כאמור היתה בדיקה לעניין יש משפט שאומר את כך:

$$V_A \xrightarrow{T} W_B \xrightarrow{S} U_C$$

$$\Rightarrow [S \circ T]_C^A = [S]_C^B [T]_B^A$$

(32) 26.1.06
תיאוריה

הערות לתרגיל 12

tr הוא העתקה לינארית. מאחר ולשם:

$$tr(A+B) = \sum(a_{ii}+b_{ii}) = trA + trB$$

$$trtA = \sum ta_{ii} = t\sum a_{ii} = t\,trA$$

שהרי הוא אם לא עדיין אז מה המימד של ker tr?

$$\dim M_n(F) = \dim Im\,tr + \dim ker\,tr$$

$$n^2 \qquad 1$$

$$\Rightarrow \dim ker\,tr = n^2-1$$

כדי לסיים הסיון, ניתן לנו לשים במקום זה מה שבא לנו, רק דרוש לבדוק שהאברים האחרון יאפס את העקבה כלומר שלנו n^2-1 דרגות חופש.

ב) אין $T,S \in Hom_F V$ כך ש- $T\circ S - S\circ T = id$ ו- $char F = 0$.

הוכחה: נניח בשלילה שיש T,S כנ"ל. נקבע בסיס α ל- V ונסמן $A=[T]_\alpha^\alpha$, $B=[S]_\alpha^\alpha$. מהגדרת $\varphi_\alpha([T]_\alpha^\alpha)$ איזומורפיזם נקבל

$$[T\circ S]_\alpha^\alpha - [S\circ T]_\alpha^\alpha = [Id]_\alpha^\alpha = I$$

$$\Rightarrow [T]_\alpha^\alpha[S]_\alpha^\alpha - [S]_\alpha^\alpha[T]_\alpha^\alpha = I$$

$$\Rightarrow AB - BA = I$$

$$0 = tr(AB-BA) = trI = n \times 1_F$$

אם $char F = 0 \Leftarrow$ זו סתירה

נמצא דוגמא לכך שאם $char F = 2$ אזי יש $T,S \in Hom_{\mathbb{Z}_2} V$ כך ש- $TS - ST = id$.

בשביל לאמוד דוגמה עובדים לאינדיות, אוכלוסיה
מטריצות $M_n(\mathbb{Z}_2) \ni A,B$ כך ש
$AB - BA = I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

איך אוכלוסיה דוגמה? ראשית, מתבשם
A שלא מתחלפת עם כל המטריצות כי
אחרת זה יתאפס. לדוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ועוד
עדיין נמצא את B נמשפ אותה!

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ועדיין יש משוואות

$$AB + BA = I$$

$\Leftarrow$ מד משוואות ל (a,b,c,d)
אם יש פיתרון סיימנו.

יפת מה קורה אם המרחב אינסופי?
נסתכל ב $V = F[x]$ מרחב הפולינומים
ו- D הדרגתיות הגזירה! $T(p) = xp$
מה זה $DT - TD$?

$$(DT - TD)(p) = DT(p) - TD(p) =$$
$$= (xp)' - xp' = xp' + p - xp' = p$$

יש עוד דרכים לבטא את זה. למשל
אפשר ממש לחשב ישירות את
הסתכלות על p כדרוג לנגזרת $p=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

ועוד דרך חשובה לראות פחות:
אפשר להראות כי $D(xp)=p+xp'$
לכל $p(x)=x^i$ ומהיות D לינארית
זה יהיה נכון לכל p.

אל דאון. אם $DT-TD=I$
למה זה לא סותר את סעיף ב?
כי דאון זה מאד אינטואיטיבי ואנחנו לא
יכולים בכלל לצבוע למטריצה.
האמת היא שיש אשמות למטריצות שלה מחקות
המרחבים בנימנים אבל אנחנו לא נתעסק
בזה.

נתבונן בדוגמת הקודמת שלנו
$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
רק ש $AB-BA=I$
אבל בקשו מאיתנו טרנספורמציות
נמצא: $T,S: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ רק ש
$[T]^\alpha_\alpha=A$, $[S]^\alpha_\alpha=B$
נקח $\alpha=((1,0),(0,1))$ אז
$T(x,y)=x\,T(1,0)+y\,T(0,1)$
הלמודה הראשונה $T(1,0)=(0,1)$
הלמודה השנייה $T(0,1)=(1,0)$
$\Rightarrow T(x,y)=(y,x)$

מאיתנו אופן מוגדרים את S $S(x,y)=(0,x)$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$$

אם A עושה
על (x,y)
מבצע
הסתכלות

$\Leftarrow$ T סובב $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$!

$$A = [T]_E^E$$

(34) 2.2.06
ת.לינארית

הידוע אלמנטרי ופעולות באתר!

איך פותרים מע' משוואות?

בונים את מטריצת המקדמים המורחבת ומפרקים אותה בעזרת פעולות אלמנטריות.

דוגמה

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

שלב א. נרשום את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

שלב ב. נבדוק שרשמנו את המטריצה נכון.
אם נעלה אותה רק בטוח אחרי שרבר
דיברנו לה יקיה מבאס לאד.

מהן הפעולות שמותר לעשות

1. $R_i \leftrightarrow R_j$
2. $R_i \to cR_i$ $\quad F \ni c \neq 0$
3. $R_i \to R_i + cR_j$ $\quad c \in F$

שלב ג. נפרק. עדיף לעשות את זה בכמה
שותר שלבים ובאופן מאוד מסודר רק שלא
יהיו טעויות כמו כן, לכבוד מאיה שדה אחנו
נמדאים.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_4]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(II)\ R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ (III)\ R_3 \to R_3 + 6R_1 \\ (IV)\ R_4 \to R_4 + 3R_1}]{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{3}R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 8R_2 \\ R_4 \to R_4 - 5R_2}]{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -8\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -5\frac{2}{3} & -2\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -8\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

הגענו לצורת מדרגות

אפשר לבדוק בריר מה הפיתרון

$$3x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_4 = 0}$$

$$-x_3 - 0 = -\frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{8}{3}}$$

$$x_2 + \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{7}{3}}$$

$$-x_1 - \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{4}{3}}$$

(יש לקרוא) את הפתרון עולים במדרגות.

מה עשינו פה בעצם?

פעולות על שורות שקולות לכפל משמאל במטריצה אלמנטרית.

$$E_1 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1)\ R_i \leftrightarrow R_j$$

$$E_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \hline i & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & c & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (2)\ R_i \to cR_i$$

$$E_3 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \hline i & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & c & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (3)\ R_i \to R_i + cR_j$$

באופן כללי, נניח שיש לנו משוואות

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

אז המטריצה שלה היא $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}F$

ואפשר לרשום את המטריצה בצורה כזאת

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

אחרי עשינו פעולות אלמנטריות על A

$$\underbrace{E_k \dots E_2E_1}_{E} A\vec{x} = \underbrace{E_k \dots E_2E_1}_{E}\vec{b}$$

רצינו לפתור את $A\vec{x}=b$ באמצעות פיתרון את $EA\vec{x}=E\vec{b}$.

משפט החילוף של יאוס: $A\vec{x}=\vec{b}$ אמ"מ $EA\vec{x}=E\vec{b}$

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי $A\vec{x}=\vec{b}$. נכפיל משמאל ב- E

ונקבל $EA\vec{x}=E\vec{b}$.

($\Rightarrow$) נניח כי $EA\vec{x}=E\vec{b}$. נכפיל משמאל ב- E^{-1}

ונקבל $A\vec{x}=E^{-1}EA\vec{x}=E^{-1}E\vec{b}=\vec{b}$

מדוע E^{-1} קיים? כל אחת מהמטריצות האלמנטריות

הינה הפיכה: $E_1\cdot E_1=I \Leftarrow E_1^{-1}=E_1$

$R_i\to cR_i$, $c\neq 0$ — $R_i\to c^{-1}R_i$ הפכות

$R_i\to R_i+cR_j$, $R_i\to R_i-cR_j$ — הפכות

$\Leftarrow$ E הינו מכפלה של הפיכות ולכן הפיכה.

אם $AB=C$ אז $C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$:

$$CC^{-1}=ABB^{-1}A^{-1}=AA^{-1}=I$$

משל ☺

מה אם הינו עושים את הפעולות של עמודות?

<u>דוגמא</u> $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$ ורוצים לפתור מע' המשוואות

נדרגה ונקבל $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$ אז $x_1+2x_2=0$

מרחב הפתרונות הוא אז

$Sp\{(-2,1)\}=\{(-2t,t):t\in\mathbb{R}\}$

אם הינו מדרגים לפי עמודות נקבל $\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}$

ואז הפיתרון הוא $x_1=0$, $x_2=t$ כלומר $Sp\{(1,0)\}$

אז הפעולות של עמודות עושות בעיות!

הבעיה שלא נמון ש-

$A\vec{x}=\vec{b} \iff AF\vec{x}=F\vec{b}$

אבל מה כן אפשר לעשות?

$(A\vec{x})^t=\vec{x}^t\cdot A^t$ כלומר

אם יש לי מע' משוואות

$x_1+2x_2=1$

$x_1-x_2=2$

אפשר להסתכל על זה בשתי דרכים:

<u>או</u> $\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=(1\ 2)$

ושניהם שקולים!

תהי $A\in M_{n\times m}(F)$, $A=(a_{ij})$ נגדיר

$A^t=(a_{ji})\in M_{m\times n}(F)$

לדוגמא

$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&2\\-1&1&3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$

נסתכל על ההעתקה

$$\varphi : M_{n\times m}(F) \longrightarrow M_{m\times n}(F)$$

$$\varphi(A) = A^t \quad \text{ע"י}$$

<u>תכונות</u>

נניח כעת ש $A \in M_n(F)$ בשונה כה יהיה יותר נוח להסביר, אבל מה שנאמר כאן יכול לאמת לדרגות לא ריבועיות.

א) $(A^t)^t = A$

ב) $(A+B)^t = A^t + B^t$

ג) $(cA)^t = cA^t \quad c \in F$

ד) $(AB)^t = B^t A^t$

אם $A^t = A$ A נקראת סימטרית.

$A^t = -A$ A נקראת אנטי סימטרית

<u>דוגמה</u>

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ סימטרית $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ אנטי סימטרית

נשים לב שאם $\operatorname{char} F = 0$ אז המטריצה אנטי סימטרית היא אלכסון תמיד להיות אפס. אבל ב- $\mathbb{Z}_2$ למשל $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ אנטי סימטרית!

<u>תכונות</u>

א) לכל A, $A+A^t$ מטריצה סימטרית

$$(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

ב) $(A-A^t)^t = A^t - A \Rightarrow A - A^t$ אנטי סימטרית.

ג) $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$

ד) כל מטריצה ניתן לכתוב כסכום של סימטרית ואנטי סימטרית

$$A = \left(\frac{A+A^t}{2}\right) + \left(\frac{A-A^t}{2}\right)$$

$\varphi(A) = A^t$ φ לינארית והפיכה

$\varphi(\varphi(A)) = (A^t)^t = A$, $\varphi^2 = id$

אם אפשר לעשות עם מטריצות משוואות?

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}^t A^t = (A\vec{x})^t = \vec{b}^t$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x}^t A^t F = \vec{b}^t F$$

טוב, זה מאומטם לעשות פעולות על העמודות של A^t זה בדיוק לעשות פעולות על שורות A.

אז בקיצור לא אמרנו שום דבר חדש.

מסתבר בשביל לפתור משוואות נעבוד על השורות! אחרת, מוטות וזהו!

איך הופכים מטריצה?

ניתן שרודים למצוא E כך ש $EB = I$

E מאפס היא רצף של פעולות אלמנטריות.

$E = E_k \dots E_1$. אז

$$B^{-1} = E = E_k \dots E_1 \underline{\underline{I}} = E_k \dots E_1 I$$

אז בשביל לקבל את B^{-1} צריך לעשות על השורות של I את הפעולות שעשינו על B כדי לדרוס אותה.

דוגמה ניתן $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ אז

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

בשביל להפוך מטריצה 2x2 אפשרים
להשתמש בנוסחה

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ \det A = ad-bc \end{cases}$$

יש גם נוסחה למטריצה 3x3 : אבל אותנו לא
נעניין אותה . במקרה זה נעשה בעזרת הפעולות

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to 2R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2\to R_2+4R_3 \\ R_1\to R_1-2R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -11 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to\frac{1}{5}R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1+R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4\frac{4}{5} & 2\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to\frac{1}{2}R_1]{} \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

בשביל להפוך מטריצה אפשר את להשתמש בפעולות
של שורות . אם $AF = I$ אז
$\therefore A^{-1} = F = IF$

אפשר עכשיו לשלב: אם $EAF = I$

אז:

$$A = E^{-1}EAFF^{-1} = E^{-1}IF^{-1} = E^{-1}F^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = FE$$

אם $E = E_k \dots E_1$ ו $F = F_1 \dots F_l$

ואז $A^{-1} = F_1 \dots F_l E_k \dots E_1$

אבל זה לא נותן כלום. אצ"ל תשומת הלב לבניין אחד.

אם יודעים את המטריצה ההפוכה אנחנו מידית יודעים את הפתרון של המס':

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$