

תרגיל 1 – אלגברה ליניארית (1)

1. הוכח שהקבוצה $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, עם אותן פעולות כמו בממשיים $\mathbb{R}$, מהווה שדה.

2. בנה שדה עם 4 איברים.

3. האם הקבוצה $\mathbb{R}^2 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, עם פעולות החיבור והכפל רכיב-רכיב (כלומר $(a, b)(c, d) := (ac, bd)$), וכן "ל גם עבור החיבור), מהווה שדה?

4. הוכח את נוסחת דה-מואבר:
 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$

5. תאר גאומטרית ב- $\mathbb{C}$ את הקבוצות הבאות: (א) $|z - 2| \leq 1$.
(ב) $|z + 1| = |z - 1|$.

6. פתור את המשוואות הבאות מעל המרוכבים: (א) $z^4 - 1 = 0$.
(ב) $z^2 + z + 1 = 0$.

פתרון תרגיל 1 – אלגברה ליניארית (1)

1. בדיקת רב אקסיומות השדה היא כמעט מיידית. אקסיומות כמו קומוטטיביות, ואסוציאטיביות נובעות מכך ש- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$ ובתוך הממשיים אנו יודעים שתכונות אלה מתקיימות.

התכונות שעלינו לבדוק אם כן הן:

עבור החיבור: סגירות, איבר נייטרלי ונגדי.

עבור הכפל: סגירות, איבר נייטרלי והופכי.

חוק הפילוג שוב נובע מהיות הממשיים שדה.

סגירות לחיבור נובעת מכך ש- $(a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$.

ושהרציונלים סגורים לחיבור.

סגירות לכפל נובעת מכך ש- $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2}$.

ושהרציונלים סגורים לחיבור וכפל.

האיבר הניטרלי לחיבור הוא $0 = 0 + 0\sqrt{2}$. (ברור ש-0 נייטרלי לחיבור רק צריך לכתוב אותו כך שיהיה ברור שהוא שייך לקבוצה).

האיבר הניטרלי לכפל הוא $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.

עבור איבר $a+b\sqrt{2}$ הנגדי לו יהיה $(-a) + (-b)\sqrt{2}$. קל לראות מהגדרת החיבור

למעלה שזה באמת הנגדי.

נותר לנו אם כן לבדוק את קיום ההופכי: אם $a+b\sqrt{2} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ או $b \neq 0$, ואז

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} \frac{a-b\sqrt{2}}{a-b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

מכאן קל לראות שההופכי שייך לקבוצה שלנו.

נותר רק להסביר למה לא יתכן $a^2 - 2b^2 = 0$. אחרת היינו מקבלים ש- $\sqrt{2}$ הוא רציונלי.

2. כל שדה חייב להכיל לפחות שני אברים 0,1, לכן נבחר קבוצה $\{0,1,a,b\}$ בת

ארבעה איברים וננסה להפוך אותה לשדה. את זה נעשה ע"י בניית לוחות כפל

וחיבור מתאימות.

נשים לב שבשדה לא יתכן $x+y = x+z$ עבור $y \neq z$ בגלל יחידות הפתרון למשוואה

בשדה. לכן בלוח החיבור בכל שורה יכול להופיע כל איבר לכל היותר פעם אחת. כנ"ל גם בכפל.

נתחיל מבניית לוח הכפל:

ידוע מתכונות השדה שאפס כפול כל דבר זה אפס ובנוסף שאחד הוא הניטרלי לכפל.

נותר לנו אם כן לחשב aa, ab, bb .

האפשרות היחידה ל- $ab=1$ כי אם $ab=a$ אזי $b=1$ וזאת סתירה (ובאותו אופן אפשר לסתור את כל האפשרויות האחרות).

אם $ab=1$ אזי קל לראות שבהכרח $aa=b, bb=a$ וגמרנו אם טבלת הכפל.

$$\begin{array}{c|cccc} \bullet & 0 & 1 & a & b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a & b \\ a & 0 & a & b & 1 \\ b & 0 & b & 1 & a \end{array}$$

כעת נותר לנו רק לחשב את החיבור.

מכיוון שלא יתכן $a+1=a$ או $a+1=1$ יש רק שתי אפשרויות להגדרת חיבור זה. אם $a+1=0$ אז בהכרח $b+1=a$ (כי למשל אם $b+1=0$ נקבל $b=a$ מיחידות הנגדי ל-1, וכן הלאה אפשר גם לסתור את האפשרויות האחרות). אבל אז נקבל כי $1+1=b$ (כי בשורת החיבור של אחד כבר יש את כל שאר האיברים) ואז, $0=a+1=(b+1)+1=b+(1+1)=b+b=2b$ אז בהכרח $0=2$ וזאת סתירה. $\Leftarrow (1+1)=0$.

לכן בהכרח $a+1=b$ ובאותו אופן בגלל סימטריה בתפקידים של a ו- b נקבל $b+1=a$ $\Leftarrow 1+1=0$ ומכאן כבר נקבעת לנו הטבלה.

$$\begin{array}{c|cccc} \pm & 0 & 1 & a & b \\ \hline 0 & 0 & 1 & a & b \\ 1 & 1 & 0 & b & a \\ a & a & b & 0 & 1 \\ b & b & a & 1 & 0 \end{array}$$

בשביל להוכיח שהמבנה שנתנו הוא שדה עלינו עוד להראות תכונות שאינן ברורות מהטבלאות. כמו למשל אסוציאטיביות וחוק הפילוג (האם זה הכל?).

3. מהגדרת החיבור ברור כי $(0,0)$ אמור להיות הניטרלי לחיבור. אבל אז ניקח שני איברים שונים ממנו $(0,1), (1,0)$ וכאשר נכפול אותם לפי הגדרת הכפל נקבל את איבר האפס. בסתירה לכך שלא יתכן שני איברים שונים באפס בשדה שיתנו אפס.

4. באינדוקציה על n .

עבור $n=1$: בשני אגפי השיויון כתוב אותו הדבר.

נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n (\cos \alpha + i \sin \alpha) = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

מהנחת האינדוקציה. כעת נפתח סוגרים ונקבל

$$(\cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha) + i(\cos n\alpha \sin \alpha + \sin n\alpha \cos \alpha)$$

$$\cos(n\alpha + \alpha) + i \sin(n\alpha + \alpha) = \cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha$$

נזה מה שרצינו.

5. (א) נסמן $z = x + iy$, $z - 2 = (x - 2) + iy$, $|z - 2|^2 = (x - 2)^2 + y^2 \Leftrightarrow z - 2 = (x - 2) + iy$ ואז מנוסחת המעגל נקבל שהצורה הגאומטרית הזאת היא מעגל ברדיוס 1 שמרכזו $(2, 0)$
 (ב) נסמן $z = x + iy$ ואז $|z + 1|^2 = |z - 1|^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x = 0$ כלומר השוויון נכון רק כאשר $x = 0$. גאומטרית זהו בדיוק הציר האנכי במערכת הצירים.

6. (א) $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$ מכפלה של שלושה כופלים נותנת אפס אם אחד מהם הוא אפס. כלומר הפתרונות של המשוואה הם:
 $z = 1, z = -1, z^2 = -1$. נותר אם כן לחשב את הפתרונות של המשוואה $z^2 = -1$ והפתרונות למשוואה הזאת הם $\pm i$.
 (ב) ע"י שימוש בנוסחא הידועה לפתרונות של משוואה ריבועית נקבל שהפתרונות למשוואה הם.

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

תרגיל 2 באלגברה לינארית (1)

2 בנובמבר 2003

1. יהי F שדה הוכח את הטענות הבאות:

(א) לכל $x \in F$ $0 \cdot x = 0$.

(ב) לכל $x, y \in F$ $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(ג) לכל $x, y \in F$ $-(x + y) = -x - y$.

(ד) הוכח כי לכל $x, y \in F$ מתקיים: $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

(ה) לכל $x, y \in F$ אם $x \cdot y = 0$ אז $x = 0$ או $y = 0$.

2. יהי F שדה ו $x \in F$ $x \neq 0$ נגדיר את החזקה הכיפולית באינדוקציה על n :

$$x^0 = 1$$

$$x^{n+1} = x \cdot x^n$$

. כמו כן נגדיר את החזקה החיבורית לכל $x \in F$:

$$0 * x = 0$$

ו

$$(n+1) * x = x + n * x$$

. את החזקה השלילית הכיפולית עבור $x \neq 0$ נגדיר באופן הבא: $x^{-1} = \frac{1}{x}$
(ההופכי של x) ועבור n טבעי

$$x^{-n} = (x^{-1})^n$$

(א) הגדר באופן דומה את החזקה החיבורית השלילית.

(ב) הוכח כי לכל $x \in F$ $x \neq 0$ ולכל n טבעי מתקיים: $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$.

(ג) הוכח כי לכל $x \in F$ $x \neq 0$ ולכל n, m שלמים מתקיים: $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$.

(ד) הוכח כי לכל $x \in F$ $x \neq 0$ ולכל n, m שלמים מתקיים: $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

(ה) הוכח כי לכל $x, y \in F$ $x \neq 0$ ולכל n שלם מתקיים: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

(ו) הוכח כי לכל $x \in F$ ולכל n שלם מתקיים: $(-1)^{2n} = 1$ ו $(-1)^{2n+1} = (-1)$.

(ז) נסח (ללא הוכחה) טענות המקבילות לטענות (ב)-(ה) עבור החזקה החיבורית.

3. יהי F שדה נגדיר את המציין של F להיות המספר הטבעי המינימלי $p > 0$ עבורו מתקיים $x * 1 = 0$ אם לא קיים p כנ"ל (כמו בשדה הרציונלים למשל) נאמר שהמציין של השדה הוא 0. נסמן את המציין של שדה F ב: $\text{char}(F)$.

(א) הוכח שמציין של שדה הוא 0 או מספר ראשוני.

(ב) יהי F שדה כך ש $\text{char}(F) = p > 0$.

i. יהי $p > 0$ מספר ראשוני ו $1 \leq k \leq p-1$ הוכח כי המספר $\binom{p}{k}$

מתחלק ב p .

ii. הוכח כי לכל $x, y \in F$ מתקיים $(x + y)^p = x^p + y^p$.

(ג) יהי F שדה כך ש $\text{char}(F) = p > 0$. חשב למה שוים האברים הבאים בשדה:

i. $p! * 1$ (כאשר $p!$ מספר טבעי 1 הוא האבר הנטרלי לכפל בשדה ו $*$ היא הפעולה של החזקה החיבורית).

ii. $(p-1)! * 1$.

iii. $\sum_{n=0}^p n * 1$.

4. יהי F שדה ותהי K תת קבוצה של F , נאמר ש K תת שדה של F אם $0, 1 \in K$ ו K תחת פעולת החיבור והכפל של F מהווה שדה. הוכח שלשדה הרציונלים אין תתי שדות פרט לרציונלים עצמם.

פתרון תרגיל 2 באלגברה לינארית (1)

24 בנובמבר 2003

1. יהי F שדה נראה את הטענות הבאות:

(א) לכל $x \in F$: $0 \cdot x = 0$ הוא נטרלי לחיבור ולכן:

$$0 + 0 = 0$$

נכפיל שני האגפים ב x :

$$(0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x$$

נוסיף לשני האגפים את הנגדי של $0x$:

$$(0 + 0) \cdot x + (-0 \cdot x) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x)$$

מאסוציאטיביות ופילוג נקבל:

$$0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = 0 \cdot x + (-0 \cdot x)$$

מהגדרת הנגדי:

$$0 \cdot x = 0$$

(ב) נראה כי לכל $x, y \in F$: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ ראשית נראה כי לכל $x \in F$: $(-1)x = -x$ בשביל לקבל זאת נראה כי $(-1)x + x = 0$: מפילוג ומ (א) נקבל כי

$$(-1)x + x = (-1)x + 1x = ((-1) + 1)x = 0x = 0$$

מהגדרת הנגדי נקבל:

$$-(-1) + (-1) = 0$$

ולכן מיחידות הנגדי:

$$-(-1) = 1$$

ונסיק ממה שהוכחנו כי:

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1$$

ובעזרת הקומוטטיביות ואסוציאטיביות:

$$(-x)(-y) = ((-1)x)((-1)y) = x((-1)(-1))y = xy$$

(ג) נראה כי לכל $x, y \in F$ $-(x+y) = -x-y$ בשביל לקבל זאת נשתמש בקומוטטיביות ואסוציאטיביות הכפל ונראה כי:

$$(-x-y) + (x+y) = -x + ((-y) + y) + x = -x + (0+x) = -x+x = 0$$

כלומר:

$$(-x-y) + (x+y)$$

ולכן:

$$-x-y = -(x+y)$$

(ד) נראה כי לכל $0 \neq x, y \in F$ מתקיים: $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$ בשביל לקבל זאת נשתמש בקומוטטיביות ואסוציאטיביות הכפל ונראה כי:

$$(x^{-1}y^{-1})(xy) = x^{-1}(y^{-1}(yx)) = x^{-1}((y^{-1}y)x) = x^{-1}(1x) = x^{-1}x = 1$$

או בקיצור

$$(x^{-1}y^{-1})(xy) = 1$$

כלומר:

$$x^{-1} \cdot y^{-1} = (x \cdot y)^{-1}$$

(ה) נראה כי לכל $x, y \in F$ אם $x \cdot y = 0$ אז $x = 0$ או $y = 0$: נניח כי $x \neq 0$ לכן קיים הופכי ל x נשתמש בו לקבל:

$$x^{-1}0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1y = y$$

אבל

$$x^{-1}0 = 0$$

2. יהי F שדה

(א) נגדיר את החזקה השללית החיבורית באופן הבא לכל $x \in F$:

$$-1 * x = -x$$

ולכל n טבעי נגדיר

$$-n * x = n * (-x)$$

(ב) נראה כי לכל $x \in F$ ולכל n טבעי מתקיים: $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$. נוכיח זאת באינדוקציה על n :

i. $n = 1$: נקבל מהגדרת החזקה.

ii. נניח כ לכל n מתקיים $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$.

iii. נוכיח עבור $n + 1$:

$$(x^{-1})^{n+1} x^{n+1} = (x^{-1})(x^{-1})^n x x^n = (x^{-1})(x^{-1})^n x^n x = (x^{-1})x = 1$$

כלומר

$$(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$$

(ג) נראה כי לכל $x \in F$ ולכל n, m שלמים מתקיים: $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$.

i. ראשית נניח כי $n, m \geq 0$ ונכיח זאת האינדוקציה על $k = n + m$.

A. $k = 0$: אז בהכרח $n = 0$ ולכן:

$$x^{n+m} = x^{0+0} = x^0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 \cdot x^0 = x^n \cdot x^m$$

B. נניח עבור k כי אם $n + m = k$ אז:

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$$

C. נוכיח עבור $n + m = k + 1$ אפשר להניח כי $m > 0$ ולכן $m - 1 \geq 0$ ולכן

$$n + (m - 1) = k \quad n, (m - 1) \geq 0$$

ואפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה ובהגדרת החזקה כדי לקבל:

$$x^{n+m} = x^{(n+(m-1))+1} = x \cdot x^{n+(m-1)} = x(x^n \cdot x^{m-1}) = x^n(x \cdot x^{m-1}) = x^n \cdot x^m$$

ii. נראה כי עבור $n, m \geq 0$ מתקיים:

$$x^{n-m} = x^n \cdot x^{-m}$$

A. $n \geq m$ אז $n - m \geq 0$ ולכן

$$x^{n-m} x^m = x^{n-m+m} = x^n$$

נכפיל את שני האגפים ב $(x^m)^{-1}$ ונקבל

$$x^{n-m} = x^n \cdot x^{-m}$$

B. אם $m - n \geq 0$ אז נסתכל על $x^{n-m} = x^{-(m-n)} = (x^{-1})^{m-n}$ ונשתמש ב A.

iii. עבור $n, m < 0$ נשתמש בכך ש $x^{n+m} = (x^{-1})^{-n+(-m)}$ ונשתמש ב (i).

(ד) נראה כי לכל $x \in F$ וכל n, m שלמים מתקיים: $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

i. ראשית נניח כי $n, m \geq 0$ ונכתוב זאת באינדוקציה על $k = n + m$.
A. $k = 0$: אז בהכרח $m, n = 0$ ול

$$(x^n)^m = 1 = x^{nm}$$

B. נניח עבור k כי אם $n + m = k$ אז:

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

C. נוכיח עבור $n + m = k + 1$ אפשר להניח כי $m > 0$ אם $m = 0$ או $m = 1$ ההוכחה טריווילית ולכן $m - 1 \geq 0$ ולכן

$$n + (m - 1) = k \quad n, (m - 1) \geq 0$$

ואפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה ובהגדרת החזקה כדי לקבל:

$$(x^n)^m = (x^n)^{m-1+1} = (x^n)^{m-1} x^n = x^{n \cdot (m-1)} x^n = x^{n \cdot (m-1) + n} = x^{nm}$$

ii. נראה כי עבור $n, m \geq 0$ מתקיים:

$$(x^n)^{-m} = x^{-nm}$$

$$(x^n)^{-m} = ((x^n)^{-1})^m = ((x^{-1})^n)^m = (x^{-1})^{nm} = x^{-nm}$$

iii. נראה כי עבור $n, m \geq 0$ מתקיים:

$$(x^{-n})^m = x^{-nm}$$

$$(x^{-n})^m = ((x^{-1})^n)^m = (x^{-1})^{nm} = x^{-nm}$$

iv. עבור $n, m < 0$ נשתמש בכך ש $(x^n)^m = ((x^{-1})^{-n})^m$ ונשתמש ב (iii).

(ה) נראה כי לכל $x, y \in F$ וכל n שלם מתקיים: $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

i. עבור $n \geq 0$ נוכיח באינדוקציה:

A. $n = 0$ נקבל

$$(x \cdot y)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 \cdot y^0$$

B. נניח נכונות עבור n

C. נוכיח עבור $n + 1$

$$(x \cdot y)^{n+1} = (x \cdot y)^n (x \cdot y) = x^n \cdot y^n \cdot x \cdot y = x^n \cdot x \cdot y^n \cdot y = x^{n+1} y^{n+1}$$

ii. עבור $n < 0$ נראה ש $(xy)^n = ((xy)^{-1})^{-n} = (x^{-1}y^{-1})^{-n}$ ונשתמש ב (i).

(i) נראה כי לכל $x \in F$ ולכל n שלם מתקיים: $(-1)^{2n+1} = -1$ $(-1)^{2n} = 1$.
i.

$$(-1)^{2n} = ((-1)(-1))^n = (1)^n = 1$$

ii.

$$(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1) = 1(-1) = (-1)$$

(i) ננסח את הטענות המקבילות לטענות (ב)-(i) עבור החזקה החיבורית:

i. לכל $x \in F$ ולכל n טבעי מתקיים

$$n * (-x) = (-n) * x$$

ii. לכל $x \in F$ ולכל n, m שלמים מתקיים

$$(n + m) * x = n * x + m * x$$

iii. לכל $x \in F$ ולכל n, m שלמים מתקיים

$$(nm) * x = n * (m * x)$$

iv. לכל $x, y \in F$ ולכל n שלם מתקיים

$$n * (x + y) = n * x + n * y$$

3. יהי F שדה

(א) נראה שהמציין של F הוא 0 או מספר ראשוני: נניח שהמציין אינו 0 ונניח בשלילה שהמספר הטבעי המנימלי n המקיים $n * 1 = 0$ אינו ראשוני אזי קיימים $1 < k, l < n$ טבעיים כך ש $n = kl$ מכאן נקבל

$$0 = n * 1 = (kl) * 1 = (k * 1)(l * 1)$$

ולכן $k * 1$ או $l * 1$ הם 0 וזה בסתירה למינימליות של n .

(ב) יהי F שדה כך ש $\text{char}(F) = p > 0$

i. יהי $p > 0$ מספר ראשוני ו $1 \leq k \leq p-1$ נראה כי המספר $\binom{p}{k}$ מתחלק ב p : נשתמש בשוויון

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!}$$

מפני ש $1 \leq k \leq p-1$ נקבל ש $k, p-k < p$ לכן p אינו מחלק את $(p-k)!k!$ אבל p מחלק את $p!$ כלומר p מחלק את המונה ולא את המכנה ולכן נקבל שהמספר $\binom{p}{k}$ שהוא מספר טבעי מתחלק ב p .

ii. נראה כי לכל $x, y \in F$ מתקיים $(x+y)^p = x^p + y^p$: נפתח את הביטוי $(x+y)^p$ ונקבל שהמקדמים של המכפלות של x, y פרט ל x^p, y^p הם מהצורה $\binom{p}{k}$ עבור $1 \leq k \leq p-1$ ולכן מ (i) הם 0 ב F ומה שנשאר הוא בדיוק אגף ימין.

(ג) יהי F שדה כך ש $\text{char}(F) = p > 0$. נחשב למה שוים האברים הבאים בשדה:

i.

$$p! * 1 = ((p-1)!p) * 1 = (p-1)! * (p * 1) = (p-1)! * 0 = 0$$

ii. $(p-1)! * 1$ בוטל

iii. עבור $p > 2$ מפני ש p הוא ראשוני $p-1$ הוא זוגי ולכן $\frac{p-1}{2}$ הוא מספר טבעי

A. עבור $p = 2$ נקבל:

$$\sum_{n=0}^p n * 1 = \left(\sum_{n=0}^p n \right) * 1 = \left(\frac{p-1}{2} p \right) * 1 = \frac{p-1}{2} * (p * 1) = \frac{p-1}{2} * 0 = 0$$

$$0 * 1_F + 1 * 1_F = 1_F$$

4. נראה שלשדה הרציונלים אין תתי שדות פרט לרציונלים עצמם: יהי F תת שדה של הרציונלים אזי לפי ההנחה 1 נמצא ב- F מפני ש- F שדה הוא סגור לחיבור ולכן באינדוקציה נקבל שכל המספרים הטבעיים נמצאים ב- F מפני ש- F סגור לנגדי נקבל שכל השלמים נמצאים ב- F מפני ש- F סגור להופכי ועבור אברים שונים מ-0, וסגור לכפל ולכן כל מנה של שני שלמים נמצאת ב- F כלומר כל הרציונלים נמצאים ב- F .

אלגברה ליניארית - 1

תרגיל 3

1. לפניכם שתי מערכות של משוואות. לכל אחת מהן (בנפרד), מצאו את קבוצת הפתרונות מעל השדה Q , וכן את קבוצת הפתרונות מעל השדה Z_3 .

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

2. F שדה סופי ובו n איברים (שונים).

א. הוכחו, של- F מציין סופי p ראשוני, וכן שמתקיים $p \leq n$.

ב. נסמן את איברי השדה ע"י: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

ונגדיר: $X := x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$

$Y := (x_1+1) + (x_2+1) + (x_3+1) + \dots + (x_n+1)$

כאשר ה-1 הוא איבר היחידה בשדה F .

הוכחו כי: $X=Y$, והסיקו ש $n \cdot 1 = 0$ (או בכתיבה אחרת $n=0$).

ג. השתמשו בחלוקה עם שארית בכדי להוכיח שהמציין p מחלק את גודל השדה n .

3. יהיו G, F שדות.

העתקה $\varphi: F \rightarrow G$ תקרא הומומורפיזם אם היא מקיימת:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

$$\forall a, b \in F$$

הוכחו שאם $\varphi \neq 0$, כלומר יש $a \in F$ כך ש: $\varphi(a) \neq 0$, אז מתקיים:

$$\varphi(0_F) = 0_G \quad \text{א.}$$

$$\varphi(1_F) = 1_G \quad \text{ב.}$$

$$\varphi(a) = 0_G \Leftrightarrow a = 0_F \quad \text{ג.}$$

ד. נסמן ב- p_F את המציין של F וב- p_G את המציין של G .

הוכחו: $p_F = p_G$ (הפרדו למקרים $p_F = 0$, $p_F \neq 0$)

ה. האם קיים הומומורפיזם $\varphi: Z_p \rightarrow Z_q$, $\varphi \neq 0$. כאשר p, q ראשוניים ו- $p \neq q$?

4. הוכיחו כי היחידות של איבר האפס בשדה נובעת משאר תכונות השדה.

5. הוכיחו כי היחידות של איבר היחידה בשדה נובעת משאר תכונות השדה.

6. שאלת בונוס: יהי p ראשוני

א. חשבו $(p-1)!$ ב- Z_p .

ב. הוכיחו $a^p = a$ לכל $a \in Z_p$.

אלגברה ליניארית - 1

פתרון - תרגיל 3

1. פתרון מעל השדה Q , רגיל לפי חוקי פתרון משוואות:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \cdot (-2) \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -2 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3y = 0 : 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

פתרון מעל השדה Z_3 , ניתן לפתור בדרכים רבות, אפשר "להתאים" את הפתרון ב- Q לפתרון בשדה Z_3 .

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0) \\ y = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 1) \\ y = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 2) \end{cases}$$

פתרון מעל השדה Q :

$$\begin{cases} x - y = 0 \cdot 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 1 : 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

פתרון מעל השדה Z_3 :

$$\begin{cases} x - y = 0 \cdot 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow 0x = 1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow \text{No - solution}$$

2. א. נתבונן באיברים בשדה: $1^*1, 2^*1, 3^*1, \dots, n^*1$

כיוון שיש בשדה רק n איברים שונים זמ"ז, אזי או שאחד האיברים הללו הוא האפס, ואז המציין סופי וקטן שווה n . או שיש לפחות שניים מבין האיברים הללו ששונים כאיברים בשדה. נניח $i > j$, $i^*1 = j^*1$ אז $(i-j)^*1 = 0$, וגם במקרה זה נקבל מציין סופי שקטן מ- n (כי גם i וגם j קטנים מ- n).

נניח בשלילה שהמציין p אינו ראשוני אזי ניתן לכתוב אותו כך: $p = k^*t$, כאשר $k < p$, $t > 1$, שלמים קטנים ממש מ- p . ואז נקבל: $0 = p^*1 = (k^*t)^*1 = (k^*1)(t^*1)$. ומכך נובע $k^*1 = 0$ או $t^*1 = 0$, וזו סתירה למינימליות של המציין p .

ב. $Y := (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \dots + (x_n + 1)$.

נתון שלכל i שונה מ- j , x_i שונה מ- x_j , ולכן גם $(x_i + 1)$ שונה מ- $(x_j + 1)$. לכן ב- Y , n מחוברים שונים זמ"ז, ולכן ב- Y נמצאים כל איברי השדה, כלומר $Y = X$.

עתה נכתוב את השוויון הבא:

$$X = Y = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_n + 1) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + 1 + 1 + \dots + 1 = X + n^*1$$

ולכן נובע $n^*1 = 0$.

ג. נכתוב את n בצורה הבאה: $n = p^*q + r$, כאשר r קטן ממש מ- p .

$$0 = n^*1 = (p^*q + r)^*1 = (p^*1)(q^*1) + r^*1 = 0(q^*1) + r^*1 = r^*1$$

ממינימליות המציין, ומכך ש- r קטן מ- p נובע $r = 0$. ואז נקבל $n = p^*q$ או

במילים אחרות, p מחלק את גודל השדה n .

3. א. נבחר $a \in F$ ונחשב $\varphi(a) + \varphi(0_F) = \varphi(a + 0_F) = \varphi(a)$ ולכן אם

נחבר לשני האגפים את הנגדי ל- $\varphi(a)$ ב- G נקבל $\varphi(0_F) = 0_G$.

ב. נבחר $a \in F$ כך ש- $\varphi(a) \neq 0$. יש כזה מהנתון. כעת נחשב

$$\varphi(a)\varphi(1_F) = \varphi(a1_F) = \varphi(a)$$

בהפכי של $\varphi(a)$ (יש כזה כי הוא שונה מ-0) ב- G נקבל $\varphi(1_F) = (1_G)$.

ג. אם $a = 0$ אז מסעיף א' אנו מקבלים $\varphi(a) = 0$.

עלינו אם כן להוכיח את הכיוון השני. נתון $\varphi(a) = 0$ ונניח בשלילה $a \neq 0$ אז

ל- a יש הופכי ב- F ואז נקבל

$$1_G = \varphi(1_F) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = 0_G\varphi(a^{-1}) = 0_G$$

וזאת סתירה כי בשדה $1 \neq 0$. ולכן בהכרח $a = 0$.

ד. נניח תחילה $p_F = 0$ אזי מהגדרת מציין נקבל $\overbrace{1_F + \dots + 1_F}^n \neq 0_F$ לכל $n \in \mathbb{N}$. מחישוב נקבל לכל n :

$$\overbrace{1_G + \dots + 1_G}^n = \overbrace{\varphi(1_F) + \dots + \varphi(1_F)}^n = \varphi\left(\overbrace{1_F + \dots + 1_F}^n\right) \neq 0$$

שונה מאפס בגלל ג'. ולכן נקבל $p_G = 0$.

נניח כעת $p_F \neq 0$ מהגדרת מציין נקבל

$$\forall l < p : \overbrace{1_F + \dots + 1_F}^l \neq 0$$

עלינו להוכיח שאותו דבר מתקיים גם ב- G .

$$\text{כי } \overbrace{1_G + \dots + 1_G}^p = \overbrace{\varphi(1_F) + \dots + \varphi(1_F)}^p = \varphi\left(\overbrace{1_F + \dots + 1_F}^p\right) = 0$$

$$\overbrace{1_F + \dots + 1_F}^p = 0$$

$$\text{כי } \forall l < p : \overbrace{1_G + \dots + 1_G}^l = \overbrace{\varphi(1_F) + \dots + \varphi(1_F)}^l = \varphi\left(\overbrace{1_F + \dots + 1_F}^l\right) \neq 0$$

$$\overbrace{1_F + \dots + 1_F}^l \neq 0 \text{ ואנחנו משתמשים בג'.$$

$$p_G = p = p_F \text{ אזי הוכחנו}$$

ה. לא קיים הומומורפיזם מ- Z_p ל- Z_q שאינו הומומורפיזם האפס,

מכיוון ש- $p_{Zp} = p$ ואילו $p_{Zq} = q$ ולפי הנתון $p \neq q$ לכן מסעיף ד' זה לא יתכן.

4. נניח שקיימים שני איבר אפס: $0, 0$. ונקבל $0 = 0 + 0 = 0$, ולכן הם אותו איבר.

5. נניח שקיימים שני איבר יחידה: $1, 1$. ונקבל $1 = 1 * 1 = 1$, ולכן הם אותו איבר.

6. א. את $(p-1)!$ ב- Z_p חישבנו בתרגיל מספר 2, ומצאנו שהוא שווה ל- $1^{(p-1)}$.

ולסעיף ב', חשוב לנו שהוא שונה מאפס.

ב. אם $a = 0$ אזי מתקיים $a^p = a$.

נניח כעת $a \neq 0$, שייך ל- Z_p . נביט באיברים: $a^1, a^2, a^3, \dots, a^{(p-1)}$. מתכונות השדה ידוע שכל אחד מהאיברים הללו שונה מאפס, וכן שכל שניים מהם שונים (אחרת נניח $a^i = a^j$ יגרור $a^{(i-j)} = 0$ וזה יגרור $0 = i - j$).

לכן בקבוצת האיברים הנ"ל יש $p-1$ איברים שונים ושונים מאפס ב- Z_p , ולכן הקבוצה מכילה את כל איברי Z_p השונים מאפס. נכפול את אברי הקבוצה הנ"ל:

$$(a^1)(a^2) \cdots (a^{(p-1)}) = (p-1)!$$

זה ממה שטענו קודם.

$$(a^1)(a^2) \cdots (a^{(p-1)}) = a^{p-1} (p-1)!$$

מצד שני

$$(p-1)! = a^{p-1} (p-1)!$$

לכן נקבל

$$(p-1)! \neq 0 \text{ לכן ניתן לצמצם. ונקבל } a^p = a \Rightarrow a^{p-1} = 1 \text{ וסיימנו.}$$

תרגיל מספר 4 באלגברה ליניארית 1

1. יהי V מ"ו מעל שדה F . הוכיחו ש- $U \subseteq V$ הוא ת"מ אםם
 - i. U אינה קבוצה ריקה.
 - ii. לכל $u, w \in U$ ולכל $a, b \in F$ מתקיים $au + bw \in U$.
2. יהי F שדה, $K \subseteq F$ תת שדה. הוכיחו ש F מ"ו מעל K .
3. סדרת פיבונצ'י מעל שדה F היא סדרת איברים ב- F $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. נגדיר פעולות חיבור על סדרות פיבונצ'י

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$
 וכפל בסקלר $t \cdot \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{t \cdot a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ לכל $t \in F$.
 - i. האם אוסף כל סדרות פיבונצ'י מעל Q הוא מ"ו מעל Q ? מעל R ?
 - ii. האם אוסף כל סדרות פיבונצ'י מעל R הוא מ"ו מעל Q ? מעל R ?
4. נגדיר $L = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a = 2b\}$ עם פעולות חיבור וכפל בסקלר הנתונות ע"י

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \forall t \in \mathbb{R} \quad t \cdot (a, b) = (t \cdot a, t \cdot b)$$
 - i. הוכיחו כי L הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$.
 - ii. יהי $(a, b) \in L$ וקטור שאינו וקטור האפס. הוכיחו כי כל וקטור אחר $(x, y) \in L$ הוא כפולה שלו, כלומר יש $t \in \mathbb{R}$ כך ש $(x, y) = t \cdot (a, b)$.
5. האם אוסף הזוגות $L = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ עם פעולות חיבור וכפל בסקלר הנתונות ע"י

$$(a, b) + (a', b') = (a + a' + 1, b + b' + 1), \forall t \in \mathbb{R} \quad t \cdot (a, b) = (t \cdot a, t \cdot b)$$
 הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$?

סקירת פתרון תרגיל מספר 4 באלגברה ליניארית 1

1. ברור שאם $U \subseteq V$ הוא ת"מ אזי מתקיימים תנאים 1 ו-2. להיפך, נניח כי מתקיימים שני התנאים ונראה כי U ת"מ. יהי $u \in U$, ניקח a כלשהו ו- $b=0$. נקבל כי $a \cdot u = a \cdot u + b \cdot u \in U$ בפרט U סגורה תחת כפל בסקלר. כמו כן, עבור $u, w \in U$ ו- $a=b=1$ מתקיים $u+w \in U$ לכן U סגורה לחיבור. משפט שגלמד בכיתה מראה כי U מהווה תת מרחב.
2. סגירות לכפל בסקלר מתקיימת כיון ש $K \subseteq F$ תת שדה ולכן לכל $u \in F$ ו- $a \in K$ מתקיים כי $a \cdot u \in F$. שאר התכונות נובעות מכך ש F שדה.
3. i. נראה סגירות לחיבור. יהיו $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ו- $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרות פיבונצ'י מעל Q . אזי $a_n + b_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) + (b_{n-1} + b_{n-2}) = (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-2} + b_{n-2})$ לכן $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ היא סדרת פיבונצ'י. בפרט אוסף סדרות פיבונצ'י מעל Q סגור לחיבור. באופן דומה האוסף הנ"ל סגור לכפל בסקלר מ- Q . מאחר ואוסף סדרות פיבונצ'י מוכל במרחב הוקטורי של אוסף כל הסדרות, הרי שלפי שאלה 1 האוסף הנ"ל מהווה מרחב וקטורי. לעומת זאת אם נרשה סקלרים מ- R הרי שהאוסף לא יהיה סגור לכפל בסקלר – למשל עבור הסדרה המתחילה ב $a_1=a_2=1$ ו- $\pi \in R$ פעולות הכפל תיצור סדרה שאיבריה לא ב- Q .
 - ii. באופן דומה נקבל כי אוסף כל סדרות פיבונצ'י מעל R הוא מ"ו מעל Q ומעל R .
4. i. כמו קודם קל לראות כי L היא תת קבוצה של מרחב וקטורי. על פי שאלה 1 די להראות כי L סגורה לחיבור וכפל בסקלר. יהיו $(a,b), (c,d) \in L$. מההגדרה נקבל כי $a=2 \cdot b$ ו- $c=2 \cdot d$. כמו כן $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ ו- $a+c=2 \cdot b+2 \cdot d=2 \cdot (b+d)$. מההגדרה נקבל כי לכן L סגורה לחיבור. באופן דומה מראים כי L סגורה לכפל בסקלר ולכן L מרחב וקטורי.

ii. יהי $(a,b) \in L$ וקטור שאינו וקטור האפס, ויהי $(x,y) \in L$ וקטור כלשהו. יהי $t=y/b$.

וודאי $t \in R$ (מאחר ו- $(a,b) \neq (0,0)$ הרי ש- t מוגדר). מתקיים כי $t \cdot a = 2 \cdot t \cdot b = 2 \cdot y = x$

ולכן $(x,y) = t \cdot (a,b)$.

5. התשובה היא לא. למשל נביט בוקטור $(1,1) \in L$. אם L היתה מרחב וקטורי הרי

שמהגדרות החיבור והכפל ב- L ומתכונות המרחב הוקטורי היינו מקבלים כי

$(2,2) = 2 \cdot (1,1) = (1+1) \cdot (1,1) = (1,1) + (1,1) = (3,3)$ בסתירה.

תרגיל 5 – אלגברה ליניארית (1)

1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו W_1, W_2 תתי מרחבים של V .
 - (א) הוכיחו כי $W_1 \cap W_2$ תת מרחב של V .
 - (ב) הוכיחו כי $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ הוא תת מרחב של V .
 - (ג) הראו כי $W_1 \cup W_2$ אינו בהכרח תת מרחב של V .
 - (ד) הוכיחו כי אם $W_1 \cup W_2$ הוא תת מרחב אזי $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$.
2. תהא $\mathbb{Z}_4$ קבוצת המספרים השלמים עם החיבור מודולו 4. האם ניתן להגדיר את פעולות הכפל באיברי השדה $\mathbb{Z}_2$ כך ש- $\mathbb{Z}_4$ יהיה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$?
3. עבור שדה $\mathbb{F}$ נגדיר $\mathbb{F}[x]$ להיות קבוצת הפולינומים במשתנה x מעל שדה $\mathbb{F}$. כלומר $\mathbb{F}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}\}$.
 - (א) הגדירו מבנה של מרחב וקטורי על $\mathbb{F}[x]$.
 - (ב) האם קבוצת כל הפולינומים ממעלה n מהווה תת מרחב? (מעלת הפולינום היא החזקה הגבוהה ביותר m כך ש- $a_m \neq 0$).
 - (ג) האם קבוצת כל הפולינומים ממעלה זוגית מהווה תת מרחב?
 - (ד) האם קבוצת כל הפולינומים המתוקנים מהווה תת מרחב? (פולינום מתוקן הוא פולינום שבחזקה הגבוהה ביותר שלו המקדם הוא 1).
4. האם הוקטורים הבאים במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ תלויים ליניארית או בת"ל?
 - (א) $\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (1, 3, -1), \alpha_3 = (5, 3, 2)$
 - (ב) $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (4, -1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 3)$
5. מצא שדה $\mathbb{F}$ כך שהוקטורים הבאים במרחב הוקטורי $\mathbb{F}^3$ מעל $\mathbb{F}$ יהיו תלויים ליניארית, ושדה כנ"ל כך שהם יהיו בת"ל.

$$\alpha_1 = (2, 1, 3), \alpha_2 = (3, 4, 2)$$
6. יהא V מ"ו מעל $\mathbb{R}$.
 - א. הראה שאם $\{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה בת"ל ב- V אז גם $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ קבוצה בת"ל ב- V .
 - ב. הראו כי $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$.

פתרון תרגיל 5 – אלגברה ליניארית (1)

1. (א) אם v מ"ו אזי בשביל להוכיח ש- $w_1 \cap w_2$ תת מרחב, עלינו להראות שלושה דברים, שהקבוצה לא ריקה, סגירות לחיבור וסגירות לכפל בסקלר. נראה את שלושת הדברים הנ"ל.
לא ריקה: $0 \in w_1$ כי תת מרחב וכנ"ל $0 \in w_2 \Leftrightarrow 0 \in w_1 \cap w_2$.
סגירות לחיבור: יהיו $v, w \in w_1 \cap w_2$ אזי $v, w \in w_1$ וגם $v, w \in w_2$. מכיוון ש- w_1 תת מרחב אזי מתקיימת סגירות לחיבור $v + w \in w_1$ וכנ"ל $v + w \in w_2$ ולכן $v + w \in w_1 \cap w_2$.
סגירות לכפל בסקלר: יהי $a \in \mathbb{F}$, $v \in w_1 \cap w_2$. נקבל $v \in w_1$ ולכן $av \in w_1$ כי תת מרחב, וכנ"ל לגבי $av \in w_2 \Leftrightarrow av \in w_2$.
הראנו אם כן חיתוך של תתי מרחבים הוא תת-מרחב.
(ב) כמו ב-א' עלינו להוכיח שלושה דברים.
לא ריקה: $0 \in w_1$ וגם $0 \in w_2 \Leftrightarrow 0 = 0 + 0 \in w_1 + w_2$.
סגירות לחיבור: יהיו $v, w \in w_1 + w_2 \Leftrightarrow v, w \in w_1 + w_2$ קיימים $v_1, w_1 \in w_1$ ו- $v_2, w_2 \in w_2$ כך ש-
 $v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2$. נבדוק האם $v + w \in w_1 + w_2$.
 $v + w = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2)$
נקבל $v_1 + w_1 \in w_1$ ולכן $v_1 + w_1 \in w_1 + w_2$ ו- $v_2 + w_2 \in w_2 \subset w_1 + w_2$.
סגירות לכפל בסקלר: יהי $a \in \mathbb{F}$, $v \in w_1 + w_2$, עלינו להראות $av \in w_1 + w_2$.
קיימים $v_1 \in w_1, v_2 \in w_2$ כך ש- $v = v_1 + v_2$.
 $av = a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$ ומכיוון ש- w_1, w_2 תתי מרחב נקבל $av_1 \in w_1, av_2 \in w_2$ ולכן $av \in w_1 + w_2$.
(ג) יהי $w_1 = \text{span}\{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2, w_2 = \text{span}\{(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. אזי $(1,0), (0,1) \in w_1 \cup w_2$.
אבל $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ אינו שייך לאיחוד. לכן האיחוד אינו תת מרחב כי אין סגירות לחיבור.
(ד) יהי $w_1 \cup w_2$ תת מרחב ונניח $w_2 \not\subset w_1, w_1 \not\subset w_2$. אזי קיים בהכרח $v_1 \in w_1 \setminus w_2, v_2 \in w_2 \setminus w_1$ ולכן מכיוון שהאיחוד הוא תת מרחב יש סגירות לחיבור ונקבל $v_1 + v_2 \in w_1 \cup w_2$.
אם $v_1 + v_2 = w \in w_1$ אז $v_1 + v_2 \in w_1 \Leftrightarrow v_1 + v_2 \in w_1 \cup w_2$.
כי $v_2 = w - v_1 \in w_1$ וזה יהיה בסתירה לבחירת v_2 . באותו אופן נקבל סתירה גם במקרה השני. ולכן נקבל סתירה להנחה שאין הכלה.
2. $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ אם החיבור מודולו 4. נניח שניתן היה להגדיר עליו מבנה של מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. אזי מתכונות מרחב וקטורי
 $2 = 1 + 1 = (1 + 1)1 = 01 = 0$ (אם אנחנו משתמשים באקסיומות של הפילוג אזי בתוך השדה $\mathbb{Z}_2$ אנו יודעים $1 + 1 = 0$). אבל ב- $\mathbb{Z}_4$ מתקיים $2 \neq 0$ ולכן קיבלנו סתירה. כלומר לא יתכן מבנה של מרחב וקטורי.

3. (א) בשביל להגדיר על קבוצה מבנה של מרחב וקטורי עלינו להגדיר עליה חיבור וכפל עם איבר מהשדה ואח"כ לבדוק שעם ההגדרה שלנו באמת התקבל מרחב וקטורי.

נגדיר חיבור בין אברי $\mathbb{F}[x]$.

יהיו $b_mx^m + \dots + b_1x + b_0 \in \mathbb{F}[x]$ ונניח בה"כ $m \leq n$ אזי

נגדיר את החיבור ביניהם באופן הבא:

$$a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 + b_mx^m + \dots + b_1x + b_0 = a_nx^n + \dots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

נגדיר כעת את הכפל בסקלר:

$$a(a_nx^n + \dots + a_1x + a_0) = aa_nx^n + \dots + aa_1x + aa_0$$

את עבודת הבדיקה למה זה מרחב וקטורי אני משאירה לכם.

(ב) קבוצת הפולינומים ממעלה n אינה תת מרחב מכיוון שאין בה איבר האפס.

(ג) קבוצת הפולינומים ממעלה זוגית אינה תת מרחב כי אין בה סגירות לחיבור.

סכום של פולינומים ממעלה זוגית יכול להיות פולינום ממעלה אי זוגית.

(בדקו).

(ד) מאותן סיבות כמו קודם זה אינו תת מרחב.

4. (א) ניקח צירוף ליניארי של שלושת הוקטורים שנותן אפס ונבדוק אם

הוא הטריויאלי.

$$a(1, -1, 0) + b(1, 3, -1) + c(5, 3, 2) = (0, 0, 0)$$

$$a + b + 5c = 0$$

$$-a + 3b + 3c = 0$$

$$-b + 2c = 0$$

מזה נקבל $9c + 2c + 5c = 0 \Leftrightarrow a = 9c \Leftrightarrow b = 2c$

למשוואות האלה הוא $a = b = c = 0$ כלומר הפתרון הטריויאלי.

קיבלנו אם כל שהוקטורים בת"ל.

$$a + 4b = 0$$

$$2a - b = 0 \Leftrightarrow a(1, 2, 3) + b(4, -1, 0) + c(0, 0, 3) = (0, 0, 0) \quad (\text{ב})$$

$$3a + 3c = 0$$

מהמשוואות נקבל: $a = -4b$, $a = \frac{b}{2}$, ולכן $a = b = c = 0$ ולכן

הוקטורים בת"ל.

5. מעל הממשיים הוקטורים בת"ל כי אין סקלר שיתן את אחד מהם כצירוף

ליניארי של האחרים.

מעל השדה $\mathbb{Z}_5$ הוקטורים תלויים ליניארית כי אם נבצע חיבור מודולו 5 :

$$(2, 1, 3) + (3, 4, 2) = (5, 5, 5) = (0, 0, 0)$$

זו נותן לנו צירוף ליניארי לא טריויאלי לאפס.

6. נביט בוקטורים $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ קל לראות שהם צ"ל של

$\{v_1, v_2, v_3\}$. מצד שני הם גם יוצרים אותם כי

$$\frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_2 - v_3 + v_3 + v_1) = v_1$$

כלומר קל לראות כי $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ כי כל קבוצה יוצרת את היוצרים של השניה.

מכיוון ש- v_1, v_2, v_3 בת"ל מתקיים $\dim\{\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}\} = 3$ ולכן בגלל השיוויון

$\dim\{\text{span}\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}\} = 3$ ולכן בשביל להראות שהסדרה בת"ל מספיק להראות שהיא פורשת כי אז היא תהייה פורשת מינימלית ולכן בסיס ובסיס הוא סדרה בלתי תלויה.

זה שהיא פורשת כבר הראנו. ולכן הסדרה בת"ל.

הערה: יש הרבה הוכחות לדבר הזה גם כאלה שלא משתמשות במימדים.

תרגיל 6 באלגברה לינארית (1)

27 בנובמבר 2003

1. מצא בסיסים למרחבים הווקטורים הבא:

(א) Z_{11} בשדה $\{(a, b, c) \mid 3a + 2b + c = 0\}$

(ב) Z_5 בשדה $\{(a, b, c, d) \mid 3a + b + c + 3d = 0 \quad 2a + 4b - 2c - 3d = 0\}$

(ג) יהי C שדה המרוכבים $C^3[x] = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_i \in C \quad 0 \leq i \leq 3\}$ המרחב הווקטורי של כל הפולינומים במעלה קטנה או שווה ל-3 במקדמים ב C . נסתכל על תת הקבוצה $\{p(x) \in C^3[x] \mid p(1) = 0 \quad p(2) = 0\}$ כלומר כל הפולינומים שמתאפסים ב-1 ו-2 הוכח כי זהו תת מרחב ומצא לו בסיס.

2. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F נאמר ש V נוצר סופית אם קיימים מספר סופי n של ווקטורים $v_1, \dots, v_n$ כך שמתקיים:

$$sp\{v_1, \dots, v_n\} = V$$

הוכח את הטענות הבאות:

(א) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F ויהי U תת מרחב של V , הראה ש U הוא מרחב וקטורי נוצר סופית.

(ב) יהי S קבוצת כל הסדרות של מספרים ממשיים כלומר:

$$S = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in R\}$$

נגדיר את החיבור והכפל בסקלר ממשי r באופן הבא:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

$$r\{a_n\} = \{ra_n\}$$

הוכח כי S מרחב וקטורי.

(ג) יהי FS תת הקבוצה של S המוגדרת להיות:

$$\{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid \exists N \forall n > N \quad a_n = 0\}$$

הוכח כי FS הוא תת מרחב של S והראה כי כמרחב וקטורי הוא אינו נוצר סופית.

(ד) הסק כי S אינו נוצר סופית.

3. יהי X מרחב ווקטורי נוצר סופית ויהיו V, U, W תתי מרחבים של X הוכח:

(א)

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

(ב) הנח כי $\dim(V) = \dim(X) - 1$ וכי U אינו מוכל ב V הראה כי :

$$\dim(V \cap U) = \dim(U) - 1$$

(ג)

$$V \cap (U + W) \supseteq V \cap U + V \cap W$$

(ד) מצא דוגמא שההכלה בסעיף (ג) היא הכלה ממש כלומר אין שיוויון.

(ה) הראה כי

$$\dim(V + U + W) \geq \dim(V) + \dim(U) + \dim(W) -$$

$$\dim(V \cap U) - \dim(V \cap W) - \dim(U \cap W) + \dim(V \cap U \cap W)$$

4. נסמן ב FIB את מרחב הוקטורי של כל סדרות פיבונצ'י הממשיות

$$FIB = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{R} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$$

לסדרת פיבונצ'י המקימת $a_0 = a_1 = 1$ נקרא סדרת פיבונצ'י הסתנדרטית:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

(א) הוכח כי אם $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ שלוש סדרות פיבונצ'י ו r, s מספרים ממשיים המקימים:

$$r(a_0, a_1) + s(b_0, b_1) = (ra_0 + sb_0, ra_1 + sb_1) = (c_0, c_1)$$

אזי מתקיים

$$r\{a_n\} + s\{b_n\} = \{c_n\}$$

(ב) הראה כי קיימם בדיוק שני מספרים q, p כך שהסדרות $\{p^n\}_{n=0}^{\infty}$ $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ הן סדרות פינצ'י והכח שהן מהוות בסיס למרחב כל סדרות הפיבונצ'י.

(ג) מצא את סדרת פיבונצ'י הסתנדרטית כפונקציה של n (רמז: מצא את p, q ואת המקדמים בהצגה של הסדרה הסתנדרטית על ידי הבסיס הנ"ל)

פתרון תרגיל 6 באלגברה לינארית (1)

12 בינואר 2004

1. נמצא בסיסים למרחבים הווקטורים הבא:

(א) $V = \{(a, b, c) \mid 3a + 2b + c = 0\}$ בשדה Z_{11} נראה שהווקטורים

$$(1, 0, 8), (0, 1, 9)$$

מהווים בסיס לתת המרחב V :

i. פורשים יהי $(a, b, c) \in V$ אזי $c = 8a + 9b$ ולכן

$$a(1, 0, 8) + b(0, 1, 9) = (a, b, 8a + 9b) = (a, b, c)$$

ii. בלתי תלויים: נניח

$$(0, 0, 0) = a(1, 0, 8) + b(0, 1, 9) = (a, b, 8a + 9b)$$

ולכן $a = 0$ וגם $b = 0$.

(ב) $U = \{(a, b, c, d) \mid 3a + b + c + 3d = 0, 2a + 4b - 2c - 3d = 0\}$ מעל השדה

Z_5 נראה כי הווקטורים $\{(1, 0, 0, 4), (0, 1, 0, 3)\}$ מהווים בסיס ל- U :

i. פורשים: אם $(a, b, c, d) \in U$ אז על נקבל ש $c = 0, d = 4a + 3b$ ולכן

$$a(1, 0, 0, 4) + b(0, 1, 0, 3) = (a, b, 0, 4a + 3b) = (a, b, c, d)$$

ii. בלתי תלויים: נניח

$$(0, 0, 0, 0) = a(1, 0, 0, 4) + b(0, 1, 0, 3) = (a, b, 0, 4a + 3b)$$

ולכן $a = 0$ וגם $b = 0$.

(ג) נראה כי $\{2 - 3x + x^2, 6 - 7x + x^3\}$ מהווה בסיס לתת המרחב $\{p(x) \in C^3[x] \mid p(1) = 0, p(2) = 0\}$

הנמצא ב $C^3[x] = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_i \in C, 0 \leq i \leq 3\}$

i. הקבוצה פורשת: יהי $a + bx + cx^2 + dx^3$ פולינום המתאפס במספרים:

1 ו-2 כלומר מתקיים:

$$a + b + c + d = 0 \quad a + b2 + c4 + d8 = 0$$

ולכן:

$$a = 2c + 6d \quad b = -3c - 7d$$

ולכן:

$$c(2-3x+x^2)+d(6-7x+x^3) = 2c+6d+(-3c-7d)x+cx^2+dx^3 =$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3$$

ii. הקבוצה בלתי תלויה: נניח

$$0 = c(2-3x+x^2)+d(6-7x+x^3) = 2c+6d+(-3c-7d)x+cx^2+dx^3$$

ולכן $c = 0$ וגם $d = 0$.

2. יהי V מרחב ווקטורי מעל שדה F , נראה כי

(א) אם V נוצר סופית ו U תת מרחב שלו, אז U הוא נוצר סופית: נניח כי

$$V = sp\{v_1, \dots, v_n\}$$

מכאן כל קבוצה של ווקטורים בלתי תלויים לינארית ב U מכילה לכל היותר n ווקטורים, זה נכון מפני שקבוצה של ווקטורים בת"ל המוכלת במרחב הנפרש ע"י n ווקטורים מכילה לכל היותר n ווקטורים. לכן נוכל למצוא קבוצה של ווקטורים ב U שהיא בת"ל מקסימלית ולכן פורשת כאמור קבוצה זו תכיל לכל היותר n ווקטורים ומכאן U נוצר סופית.

(ב) יהי S קבוצת כל הסדרות של מספרים ממשיים כלומר:

$$S = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

יהי FS תת הקבוצה של S המוגדרת להיות:

$$\{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid \exists N \forall n > N \quad a_n = 0\}$$

נוכיח כי FS אינו נוצר סופית: נניח בשלילה כי FS נוצר סופית כלומר

$$FS = sp\{\{a_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{a_n^m\}_{n=1}^{\infty}\}$$

מהגדרה של FS לכל $1 < i < m$ קיים N_i כך שלכל $n > N_i$ מתקיים $a_n^i = 0$ נסמן $N = \max\{N_i\}$ אזי כל סדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ב FS אשר בה $a_{N+1} \neq 0$ לא תהיה ב $\{a_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \{a_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ בסתירה לכן FS לא נוצר סופית.

(ג) אם S היה נוצר סופית אז לפי (א) כל תת מרחב שלו היה נוצר סופית אבל FS הוא תת מרחב של S שאינו נוצר סופית לכן S אינו נוצר סופית.

3. יהי X מרחב ווקטורי נוצר סופית ויהיו V, U, W תתי מרחבים של X נוכיח:

(א)

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

יהי $\{w_1, \dots, w_k\}$ בסיס ל $U \cap V$ נשלים אותו לבסיס של U ולבסיס של V כלומר יהיו $\{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_n\}$ בסיס ל U ו $\{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_m\}$ בסיס ל V נראה $\{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ בסיס ל $V + U$ ראשית נראה כי קבוצה זו פורשת את תת המרחב הנ"ל: יהי z ב $V + U$ אזי קיימים ווקטורים v ב V ו u ב U כך ש $z = v + u$ לפי הנחה

$$v = \sum_{i=1}^k a_i w_i + \sum_{i=1}^m b_i v_i$$

כמו כן מתקיים

$$u = \sum_{i=1}^k c_i w_i + \sum_{i=1}^n d_i u_i$$

ולכן

$$v + u = \sum_{i=1}^k (c_i + a_i) w_i + \sum_{i=1}^m b_i v_i + \sum_{i=1}^n d_i u_i$$

כעת נראה כי קבוצה זו בלתי תלויה לנארית: נניח כי מתקיים

$$\sum_{i=1}^k a_i w_i + \sum_{i=1}^m b_i v_i + \sum_{i=1}^n c_i u_i = 0$$

לכן

$$\sum_{i=1}^k a_i w_i + \sum_{i=1}^m b_i v_i = \sum_{i=1}^n -c_i u_i$$

אגף ימין של השויון נמצא ב V ואגף שמאל של השויון נמצא ב U לכן שניהם נמצאים ה $V \cap U$ לכן אפשר לרשום את אגף שמאל $\sum_{i=1}^n -c_i u_i$ בצורה לינארית של הבסיס $\{w_1, \dots, w_k\}$ כלומר

$$\sum_{i=1}^n -c_i u_i = \sum_{i=1}^k d_i w_i$$

או

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i + \sum_{i=1}^k d_i w_i = 0$$

אבל אלו ווקטורים בלתי תלויים לנארית ולכן כל המקדמים הם 0 ונשאר אם השיוון

$$\sum_{i=1}^k a_i w_i + \sum_{i=1}^m b_i v_i = 0$$

אבל זהו בסיס ל V בפרט בת"ל לכן שוב כל המקדמים הם 0 כלומר הקבוצה $\{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ בת"ל ולכן בסיס ל $V + U$. מכל מה שקרה פה נראה כי $\dim V = k + m$, $\dim U = k + n$, $\dim U \cap V = k$, $\dim V + U = k + n + m$, ולכן

$$\dim(V + U) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

(ב) נניח כי $\dim(V) = \dim(X) - 1$ וכי U אינו מוכל ב V נראה כי:

$$\dim(V \cap U) = \dim(U) - 1$$

יהי u ווקטור ב U שאינו נמצא ב V אזי $\dim(sp\{V, u\}) > \dim V$ מפני ש $sp\{V, u\}$ מכיל ממש את V אבל אז נקבל כי

$$\dim(sp\{V, u\}) \geq \dim X$$

ולכן $\dim(sp\{V, u\}) = \dim X$ ומכן $sp\{V, u\} = sp\{V, U\} = V + U = X$ ולכן ממה שראינו בסעיף קודם

$$\dim(X) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(V \cap U) = \dim(X) - 1 + \dim(U) - \dim(V \cap U)$$

$$\dim(V \cap U) = \dim(U) - 1$$

(ג) נראה כי

$$V \cap (U + W) \supseteq V \cap U + V \cap W$$

מפני ש $U + W \supseteq U$ נקבל כי $V \cap (U + W) \supseteq V \cap U$ ובאותו האופן נקבל כי $V \cap (U + W) \supseteq V \cap W$ ומכך שתת מרחב המכיל שני תתי מרחבים מכיל את הסכום שלהם, נקבל את המבוקש.

(ד) נמצא דוגמא שההכלה בסעיף (ג) היא הכלה ממש: ניקח $X = \mathbb{R}^2$ ונקח את $V = sp\{(0, 1)\}$ את $U = sp\{(1, 0)\}$ ו $W = sp\{(1, 1)\}$ אז נקבל $V \cap (U + W) = V$ ו $V \cap U + V \cap W = 0$ ולכן קיבלנו את המבוקש.

(ה) נראה כי

$$\dim(V + U + W) \leq \dim(V) + \dim(U) + \dim(W) -$$

$$\dim(V \cap U) - \dim(V \cap W) - \dim(U \cap W) + \dim(V \cap U \cap W)$$

מסעיף א:

$$\dim(V+U+W) = \dim((V+U)+W) = \dim(V+U) + \dim(W) - \dim((V+U) \cap W)$$

מסעיף ג:

$$\leq \dim(V+U) + \dim(W) - \dim(V \cap U + V \cap W)$$

$$= \dim(V+U) + \dim(W) - (\dim(V \cap U) + \dim(V \cap W) - \dim(V \cap U \cap W))$$

וע"י פתיחת הסוגרים נקבל את המבוקש.

4. נסמן ב FIB את מרחב הוקטורי של כל סדרות פיבונצ'י הממשיות

$$FIB = \{ \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in R \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \}$$

לסדרת פיבונצ'י המקימת $a_0 = a_1 = 1$ נקרא סדרת פיבונצ'י הסטנדרטית:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

(א) נראה כי אם $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ שלוש סדרות פיבונצ'י ו r, s מספרים ממשיים המקימים:

$$r(a_0, a_1) + s(b_0, b_1) = (ra_0 + sb_0, ra_1 + sb_1) = (c_0, c_1)$$

אזי מתקיים

$$r\{a_n\} + s\{b_n\} = \{c_n\}$$

נוכיח זאת באינדוקציה שלמה על n כי $ra_n + sb_n = c_n$ נניח כי לכל $k < n$ מתקיים:

$$ra_k + sb_k = c_k$$

בפרט נקבל כי

$$ra_{n-1} + sb_{n-1} = c_{n-1}$$

וכי

$$ra_{n-2} + sb_{n-2} = c_{n-2}$$

מכך ש

$$ra_{n-1} + ra_{n-2} = ra_n$$

ו

$$sb_{n-1} + sb_{n-2} = sb_n$$

נקבל

$$ra_n + sb_n = c_{n-1} + c_{n-2} = c_n$$

(ב) נראה כי קיימם בדיוק שני מספרים q, p כך שהסדרות $\{q^n\}_{n=0}^\infty$ $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ הן סדרות פינצ' ונוכיח שהן מהוות בסיס למרחב כל סדרות הפיבונצ'י: נראה כי בשביל שלכל n יתקיים $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$ מספיק שיתקיים $q^2 = q + 1$ והמספרים היחידים שמקיימים זאת הם

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

כאשר אנו מניחים כי $0^0 = 1$ ולכן סדרת ה-0 אינה מקימת את התנאי. נראה כי הסדרות $\{q^n\}_{n=0}^\infty$ $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ מהוות בסיס למרחב: i. נראה כי הן פורשות: תהי $\{a_n\}$ סדרת פיבונצ'י כלשהי נסמן

$$s = \frac{a_1 - pa_0}{q - p}, r = \frac{a_0q - a_1}{p - q}$$

אזי נקבל כי

$$s + r = a_0$$

$$qs + pr = a_1$$

ולכן מסעיף א נקבל כי $\{q^n\} + r\{p^n\} = \{a_n\}$ ולכן סדרות אלו פורשות את המרחב.

ii. נראה כעת כי הן בת"ל. אבל קיום תלות לא טריווילית בין ווקטור-ים אלו שקול לכך שקיימים s, r לא שניהם 0 ממשים המקימים את המשוואות הבאות:

$$r + s = 0$$

$$pr + qs = 0$$

אבל מפני ש p, q שונים נקבל כי $s = r = 0$ בסתירה להנחה לכן אלו ווקטורים בת"ל וכן בסיס.

(ג) נמצא את סדרת פיבונצ'י הסטנדרטית כפונקציה של n בשביל זה נמצא את המקדמים בהצגה של הסדרה הסטנדרטית על ידי הבסיס $\{q^n\}_{n=0}^\infty$ $\{p^n\}_{n=0}^\infty$ כאשר

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

לפי סעיף ב תת-סעיף i אנו מחפשים s, r המקימים

$$s + r = 1$$

$$qs + pr = 1$$

לפי אותו תת-סעיף נקבל כי

$$s = \frac{1-p}{q-p}, r = \frac{q-1}{q-p}$$

לכן לכל n נקבל את האיבר במקום ה- n בסדרה הסתגדרטית a_n באופן הבא

$$\frac{1-p}{q-p}q^n + \frac{q-1}{p-q}p^n = a_n$$

אם נציב במקום p, q את המספרים המתאימים נקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) = a_n$$

אלגברה ליניארית - 1

תרגיל 7

1. תהא Γ קבוצה ונסמן ב- $P(\Gamma)$ את קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל- Γ . ההפרש הסימטרי בין שתי קבוצות A, B חלקיות ל- Γ מוגדר כך: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (כלומר כל האיברים שנמצאים רק באחת מהקבוצות A או B). הראו כי $P(\Gamma)$ מעל Z_2 הוא מרחב וקטורי. (הפעולות מוגדרות כך $\forall A, B \in P(\Gamma)$: $A + B = A \Delta B$, $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Phi$).

2. ב- C^4 נגדיר:

$$U = \text{span}\{(1, -2 + i, 0, -i), (-3, -i, 2, 1), (-2, i - 1, -i, 2i)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, 0, 0, 0), (3, 0, 1, i), (i, 0, -i, 0)\}$$

מצאו בסיס עבור $U \cap V$ ובידקו האם $(-2 - 6i, 0, 2 + 4i, 1 + i) \in U$.

בידקו שמתקיים $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$.

- יהיו W, V מ"ו מעל אותו שדה F . העתקה $\theta: V \rightarrow W$ תקרא העתקה ליניארית אם היא משמרת את שתי הפעולות במרחב הוקטורי, כלומר:

א. משמרת את פעולת החיבור: $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ לכל $x, y \in V$

ב. משמרת את פעולת הכפל בסקלר: $\theta(ax) = a\theta(x)$ לכל $x \in V, a \in F, y \in W$

3. לגבי ההעתקות הבאות, קבע האם הן העתקות ליניאריות או לא. הוכח או הפרך.

א. $T: R^3 \rightarrow R^2$ $T(x, y, z) = (2x - 5y + 3z, -x + 7y + z)$

ב. $S: R^2 \rightarrow R^3$ $S(x, y) = (3x - 5y, 0, x + y + 1)$

4. יהיו U, V, W שלושה מ"ו ממימד סופי מעל אותו שדה, ויהיו $T: U \rightarrow V, S: V \rightarrow W$ העתקות ליניאריות. הוכיחו כי $S \circ T: U \rightarrow W$ המוגדרת ע"י $(S \circ T)(u) = S(T(u))$ היא העתקה ליניארית.

5. מצאו שדה F , ומרחבים וקטוריים ממימד סופי V, W מעל F , והעתקה $T: V \rightarrow W$ עבורם: לכל $v \in V$ ולכל $a \in F$ מתקיים $T(av) = aT(v)$, אך T איננה העתקה ליניארית.

- העתקה $\theta: V \rightarrow W$ תקרא איזומורפיזם, אם היא העתקה ליניארית חד-חד ערכית ועל, כלומר:

א. חח"ע: $x \neq y \Rightarrow \theta(x) \neq \theta(y)$

ב. על: לכל $y \in W$ קיים $x \in V$ כך ש- $\theta(x) = y$

- שני מרחבים נקראים איזומורפיים אם קיים איזומורפיזם ביניהם, ונסמן $V \cong W$.

6. הוכח שאיזומורפיזם בין מ"ו מהווה יחס שקילות, כלומר מתקיימים:

א. רפלקסיביות $V \cong V$

ב. סימטריות $V \cong W \Rightarrow W \cong V$

ג. טרנזיטיביות $V \cong W \wedge W \cong U \Rightarrow V \cong U$

בהצלחה !

אלגברה ליניארית - 1

פתרון - תרגיל 7

1. תהא Γ קבוצה ונסמן ב- $P(\Gamma)$ את קבוצת כל הקבוצות החלקיות ל- Γ . ההפרש הסימטרי בין שתי קבוצות A, B חלקיות ל- Γ מוגדר כך: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (כלומר כל האיברים שנמצאים רק באחת מהקבוצות A או B). הראו כי $P(\Gamma)$ מעל Z_2 הוא מרחב וקטורי. (הפעולות מוגדרות כך $\forall A, B \in P(\Gamma): A + B = A \Delta B$, $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = \Phi$).

- א. סגירות: מהגדרת הפעולה, נובע שהקבוצה $A + B = A \Delta B$ תהיה קבוצה חלקית ל- Γ .
 ב. אסוציאטיביות וחילוף: נגדיר את פעולת החיבור מחדש על מספר רב של קבוצות בצורה הבאה:
 אם איבר ב- Γ שייך למספר זוגי של קבוצות אז הוא אינו שייך לסכום. אם הוא שייך למספר אי-זוגי של קבוצות אז הוא שייך לסכום. ראשית יש להראות שלא שינו את הגדרת הפעולה. עבור שתי קבוצות ברור לפי ההגדרה. נניח נכונות עבור n קבוצות, ונוכיח עבור $n+1$.
 1. אם איבר לא שייך לקבוצה ה- $n+1$ ולא שייך לסכום n הקבוצות, אז הוא לא שייך לסכום $n+1$ הקבוצות לפי הגדרת הפעולה, ואכן מספר הפעמים שהאיבר הופיע הוא זוגי.
 2. אם איבר כן שייך לקבוצה ה- $n+1$ וכן שייך לסכום n הקבוצות, אז הוא לא שייך לסכום $n+1$ הקבוצות לפי הגדרת הפעולה, ואכן מספר הפעמים שהאיבר הופיע הוא זוגי.
 3. אם איבר לא שייך לקבוצה ה- $n+1$ וכן שייך לסכום n הקבוצות, אז הוא כן שייך לסכום $n+1$ הקבוצות לפי הגדרת הפעולה, ואכן מספר הפעמים שהאיבר הופיע הוא אי-זוגי.
 4. אם איבר כן שייך לקבוצה ה- $n+1$ ולא שייך לסכום n הקבוצות, אז הוא כן שייך לסכום $n+1$ הקבוצות לפי הגדרת הפעולה, ואכן מספר הפעמים שהאיבר הופיע הוא אי-זוגי.
 הוכחנו שהגדרת הפעולה החדשה עקבית עם ההגדרה המקורית, אולם לפי ההגדרה החדשה ברור שמתקיימים חוק החילוף וחוק הקיבוץ, כי בהגדרה החדשה אין כל איזכור לסדר הקבוצות.

- ד. איבר האפס: הקבוצה הריקה, כי מתקיים $A + \Phi = A \Delta \Phi = A$ לכל A .
 ה. איבר נגדי: הקבוצה עצמה, כי מתקיים $A + A = A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \Phi$ לכל A .
 ו. סגירות: נובעת מההגדרות של הכפל: $1 \cdot A = A$ ו- $0 \cdot A = \Phi$.

- ז. דיסטריביוטיביות:
 $1(A + B) = A + B$ $0(A + B) = \Phi$
 $1 \cdot A + 1 \cdot B = A + B$ $0 \cdot A + 0 \cdot B = \Phi + \Phi = \Phi$
 $(1+1)A = 0 \cdot A = \Phi$ $(0+0)A = 0 \cdot A = \Phi$
 ח. דיסטריביוטיביות:
 $1 \cdot A + 1 \cdot A = A + A = \Phi$ $0 \cdot A + 0 \cdot A = \Phi + \Phi = \Phi$
 $(1+0)A = 1 \cdot A + 0 \cdot A$ $(0+1)A = 0 \cdot A + 1 \cdot A = A$
 $0 \cdot A + 1 \cdot A = \Phi + A = A$

נובע מחילוף בשדה ובמרחב

- ט. אסוציאטיביות:
 $0(0 \cdot A) = 0 \cdot \Phi = \Phi$
 ובצורה דומה יש להראות את המקרים האחרים.
 $(0 \cdot 0)A = 0A = \Phi$

- י. איבר היחידה: נובע שוב מהגדרה $1 \cdot A = A$.

2. ב- C^4 נגדיר:

$$U = \text{span}\{(1, -2 + i, 0, -i), (-3, -i, 2, 1), (-2, i - 1, -i, 2i)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, 0, 0, 0), (3, 0, 1, i), (i, 0, -i, 0)\}$$

מצאו בסיס עבור $U \cap V$ ובידקו האם $(-2 - 6i, 0, 2 + 4i, 1 + i) \in U$.

בידקו שמתקיים $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$.

לכל האיברים ב- V יש אפס ברכיב השני, ולכן נובע ש- V מוכל במרחב $\{(a, 0, b, c) | a, b, c \in C\}$.

מצד שני איברי V בל"ת (בדקו), ולכן מימדו הוא 3, ולכן V הוא בדיוק $\{(a, 0, b, c) | a, b, c \in C\}$.

כל איבר ב- U הוא מהצורה: $s(1, i - 2, 0, -i) + t(-3, -i, 2, 1) + v(-2, i - 1, -i, 2i)$,

ובפרט, הרכיב השני שווה ל- $s(i - 2) - ti + v(i - 1)$.

לכן ע"מ שאיבר יהיה בחיתוך המרחבים, נדרוש: $s(i - 2) - ti + v(i - 1) = 0$.

אם נבחר $s=0$ ו- $v=1$, נקבל $-ti + i - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 + i$ ואז נקבל וקטור:

$$0(1, i - 2, 0, -i) + (1 + i)(-3, -i, 2, 1) + 1(-2, i - 1, -i, 2i) = (-5 - 3i, 0, 2 + i, 1 + 3i)$$

אם נבחר $s=1$ ו- $v=0$, נקבל $i - 2 - ti = 0 \Rightarrow t = 1 + 2i$ ואז נקבל וקטור:

$$1(1, i - 2, 0, -i) + (1 + 2i)(-3, -i, 2, 1) + 0(-2, i - 1, -i, 2i) = (-2 - 6i, 0, 2 + 4i, 1 + i)$$

כיוון שהוקטורים ב- U הם בל"ת (בדקו), וכיוון שבחרנו את המקדמים s, t, v כפי שבחרנו, נובע ששני

הוקטורים שקיבלנו הם בל"ת (או ניתן לבדוק ישירות שהם בל"ת).

כמו כן הם פורשים את חיתוך המרחבים כי לכל וקטור ב- U שנוצר ע"י מקדמים s, t, v מסויימים, והוא

נמצא גם ב- V , נוכל לקבל אותו ע"י צרף לינארי של v פעמים הוקטור הראשון, ועוד s פעמים הוקטור

השני. (הפרמטר t יתקבל בגלל הדרישה שהוקטור גם יהיה במרחב V).

כמובן, בצורה זו קיבלנו שברור שהוקטור $(-2 - 6i, 0, 2 + 4i, 1 + i) \in U$, כי הוא אחד מוקטורי הבסיס

של החיתוך, ולכן שייך לחיתוך, ולכן לכל אחד מהמרחבים, ובפרט ל- U .

כמו כן מתקיים $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$, כי $U + V$ הוא כמובן כל C^4 ,

ולכן מימדו הוא 4. נקבל איפה: $4 = 3 + 3 - 2$.

3. א. $T: R^3 \rightarrow R^2$. $T(x, y, z) = (2x - 5y + 3z, -x + 7y + z)$

$$\alpha T(x, y, z) = \alpha(2x - 5y + 3z, -x + 7y + z) = (2\alpha x - 5\alpha y + 3\alpha z, -\alpha x + 7\alpha y + \alpha z) =$$

$$= T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = T(\alpha(x, y, z))$$

כן

$$T(x, y, z) + T(a, b, c) = (2x - 5y + 3z, -x + 7y + z) + (2a - 5b + 3c, -a + 7b + c) =$$

$$(2(x + a) - 5(y + b) + 3(z + c), -(x + a) + 7(y + b) + (z + c)) =$$

$$= T((x + a), (y + b), (z + c)) = T((x, y, z) + (a, b, c))$$

ב. $S: R^2 \rightarrow R^3$. $S(x, y) = (3x - 5y, 0, x + y + 1)$

$$S(1, 1) + S(1, 1) = (-2, 0, 3) + (-2, 0, 3) = (-4, 0, 6) \neq (-4, 0, 5) = S(2, 2) = S((1, 1) + (1, 1))$$

לא

4. יהיו U, V, W שלושה מ"ו ממימד סופי מעל אותו שדה, ויהיו $T: U \rightarrow V, S: V \rightarrow W$ העתקות ליניאריות. הוכיחו כי $S \circ T: U \rightarrow W$ המוגדרת ע"י $(S \circ T)(u) = S(T(u))$ היא העתקה ליניארית.

$$\begin{aligned} S \circ T(u + v) &= S(T(u + v)) = S(T(u) + T(v)) = S(T(u)) + S(T(v)) = S \circ T(u) + S \circ T(v) \\ S \circ T(\alpha v) &= S(T(\alpha v)) = S(\alpha T(v)) = \alpha S(T(v)) = \alpha(S \circ T(v)) \end{aligned}$$

5. מצאו שדה F , ומרחבים וקטוריים ממימד סופי V, W מעל F , והעתקה $T: V \rightarrow W$ עבורם: לכל $v \in V$ ולכל $a \in F$ מתקיים $T(av) = aT(v)$, אך T איננה העתקה ליניארית.

F שדה המספרים הממשיים. $R^2 = V$, מרחב ממימד 2 מעל F . $R = W$, מרחב ממימד 1 מעל F .

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & T(x, y) &= \sqrt[3]{xy^2} \\ T(\alpha(x, y)) &= T((\alpha x, \alpha y)) = \sqrt[3]{(\alpha x)(\alpha y)^2} = \sqrt[3]{\alpha x \alpha^2 y^2} = \alpha \sqrt[3]{xy^2} = \alpha T(x, y) \\ T((0, 1) + (1, 0)) &= T(1, 1) = 1 \neq 0 = 0 + 0 = T(0, 1) + T(1, 0) \end{aligned}$$

אולם

6. א. רפלקסיביות $V \cong V$

ע"י העתקת הזהות $V(x) = x$ $\theta: V \rightarrow V$ ברור שהעתקה זו היא ליניארית וכן חח"ע ועל ולכן איזומורפיזם, ולכן V איזומורפי לעצמו.

ב. סימטריות $V \cong W \Rightarrow W \cong V$

$V \cong W$ כלומר קיימת העתקה ליניארית חח"ע ועל $\theta: V \rightarrow W$. כיוון שהיא חח"ע ועל, ניתן להגדיר העתקה הפוכה $\theta^{-1}: W \rightarrow V$, ע"י $\theta^{-1}(w) = v$ אם $\theta(v) = w$. גם העתקה זו תהיה חח"ע ועל. נראה שהעתקה זו היא ליניארית: נניח $\theta(v) = w$. מלינאריות של θ נובע $\theta(\alpha v) = \alpha \theta(v) = \alpha w$, ולכן נקבל: $\theta^{-1}(\alpha w) = \alpha v = \alpha \theta^{-1}(w)$. נניח גם $\theta(u) = y$. מלינאריות של θ נובע $\theta(v + u) = \theta(v) + \theta(u) = w + y$, ולכן נקבל: $\theta^{-1}(w + y) = v + u = \theta^{-1}(w) + \theta^{-1}(y)$. הוכחנו שהעתקה זו היא איזומורפיזם, ולכן $W \cong V$.

ג. טרנזיטיביות $V \cong W \wedge W \cong U \Rightarrow V \cong U$

$V \cong W$ כלומר קיימת העתקה ליניארית חח"ע ועל $\theta: V \rightarrow W$. $W \cong U$ כלומר קיימת העתקה ליניארית חח"ע ועל $\mu: W \rightarrow U$. נגדיר העתקה חדשה $\lambda: V \rightarrow U$ ע"י $\lambda(v) = \mu \circ \theta(v) = \mu(\theta(v))$. ולכן ההעתקה היא חח"ע. $\lambda(v) = \lambda(u) \Rightarrow \mu(\theta(v)) = \mu(\theta(u)) \Rightarrow \theta(v) = \theta(u) \Rightarrow v = u$. לכל $u \in U$ קיים $w \in W$ כך שמתקיים $\mu(w) = u$. לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ כך שמתקיים $\theta(v) = w$. ולכן נקבל: $\lambda(v) = \lambda(u) = \mu(\theta(v)) = \mu(\theta(u)) = \mu(w) = u$. כלומר גם העתקת ההרכבה היא "על". בשאלה 4 הוכחנו שהרכבה של העתקות ליניאריות היא ליניארית, ולכן הוכחנו שהעתקת ההרכבה היא איזומורפיזם, כלומר $V \cong U$.

ולכן נובע שאיזומורפיזם הוא יחס שקילות.

אלגברה ליניארית 1 - תרגיל 8

1. יהי P_n מרחב הפולינומים מדרגה n , מעל שדה F , ונגדיר $T: P_n \rightarrow P_{n-1}$ ע"י

$$Tf(x) := f(x+1) - f(x)$$
 - א. הראו כי T ט"ל (ט"ל = טרנספורמציה או העתקה ליניארית)
 - ב. מהו $\text{Ker}(T)$?
 - ג. מהי $\text{Im}(T)$?
2. מהי המטריצה המתאימה ל- T ביחס לבסיסים הסטנדרטים של P_n, P_{n-1} ?
יהיו P_n, P_{n-1} כמו לעיל, ותהא $D: P_n \rightarrow P_{n-1}$ העתקת הגזירה, כלומר

$$D\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) := \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$
מהו $\text{Im}(D), \text{Ker}(D)$? מהם מימדיהם?
3. נגדיר העתקה $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. באופן הבא: $T(z) = \bar{z}$. היינו $T(x+iy) = x-iy$.
 - א. אם מסתכלים על $\mathbb{C}$ כעל מ"ו מעל $\mathbb{R}$, האם T העתקה ליניארית?
 - ב. אם מסתכלים על $\mathbb{C}$ כעל מ"ו מעל $\mathbb{C}$, האם T העתקה ליניארית?
4. יהי V מ"ו מממד n מעל שדה F . תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית המקיימת
 $T(T(v)) = 0$ לכל $v \in V$.
 - א. הוכיחו כי $\dim(\text{Im}(T)) \leq n$.
 - ב. בנו דוגמא ל- $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים
 $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Ker}(T)) = 2$ ו- $T(T(v)) = 0$.
5. יהיו V ו- W מ"ו מעל F . יהיו $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ו- $w_1, w_2, \dots, w_n \in W$ ותהי
 $T: V \rightarrow W$ העתקה ליניארית כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $T(v_i) = w_i$. הוכיחו או הפריכו:
 - א. אם $v_1, v_2, \dots, v_n$ בת"ל אז $w_1, w_2, \dots, w_n$ בת"ל.
 - ב. אם $v_1, v_2, \dots, v_n$ פורשים את V אז $w_1, w_2, \dots, w_n$ פורשים את W .
 - ג. אם $w_1, w_2, \dots, w_n$ פורשים את W אז $v_1, v_2, \dots, v_n$ פורשים את V .
6. נתונה ההעתקה הבאה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $T(x, y, z) = (2x - 5y + 3z, -x + 7y + z)$. נתונים
הבסיס הבא ל- $\mathbb{R}^3$, $\alpha = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$, והבסיס הבא ל- $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(-1, 1), (0, 1)\}$. מצאו את המטריצה $A = [T]_{\alpha}^{\beta}$, המייצגת את T תחת הבסיסים α, β .
7. מצאו את כל המטריצות ב- $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (מטריצות 2×2 מעל $\mathbb{R}$) שמתחלפות עם כל
שאר המטריצות ב- $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. כלומר, מצאו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ המקיימות
 $AB = BA$ מתקיים $B_{2 \times 2}$.

אלגברה לינארית 1

פתרון תרגיל 8

$$(1) \text{ א.י. } f(x), g(x) \in P_n, k, l \in F : \\ T((kf + lg)(x)) := (kf + lg)(x+1) - (kf + lg)(x) = \\ kf(x+1) + lg(x+1) - kf(x) - lg(x) = \\ k(f(x+1) - f(x)) + l(g(x+1) - g(x)) = kT(f) + lT(g)$$

□

ב. ההנחה הבסיסית היא ש- $\text{char}(F) \neq 1, 2, \dots, n$.

$$\text{אם } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$T(f(x)) = \sum_{k=0}^n a_k (x+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l - \sum_{k=0}^n a_k x^k = \\ \sum_{l=0}^n \left[\sum_{k \geq l} a_k \binom{k}{l} \right] x^l - \sum_{l=0}^n a_l x^l = \sum_{l=0}^n \left[\sum_{k \geq l} a_k \binom{k}{l} - a_l \right] x^l = \sum_{l=0}^n \left[\sum_{k > l} a_k \binom{k}{l} \right] x^l$$

$$\sum_{k > l} a_k \binom{k}{l} = 0, \forall k > l, l = 0, 1, \dots, n-1 \Leftrightarrow f(x) \in \ker T, \text{ אם כן,}$$

וע"י הצבה

$$a_n = 0 \Leftrightarrow a_n n = 0 \Leftrightarrow a_n \binom{n}{n-1} = 0 \Leftrightarrow k = n \Leftrightarrow l = n-1$$

$$a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_{n-1} (n-1) = 0 \Leftrightarrow a_{n-1} \binom{n-1}{n-2} = 0 \Leftrightarrow k = n-1, n \Leftrightarrow l = n-2$$

וכו'. כלומר, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, ולכן $\ker T = \{a \in F\} = P_0$.

ג. מ- $\dim \ker T = 1$, לכן $\dim P_{n-1} = n = \dim \text{Im } T$. כיוון

שברור כי $\text{Im } T \leq P_{n-1}$ (מדוע?), אז מקבלים $\text{Im } T = P_{n-1}$.

ד. הבסיסים הסטנדרטיים של P_n, P_{n-1} הם $\{1, x, \dots, x^n\}, \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$

בהתאמה, לכן:

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$T(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$T(x^2) = 1 + 2x = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^3 + \dots + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$T(x^k) = (x+1)^k - x^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j - x^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^j =$$

$$\binom{k}{0} \cdot 1 + \binom{k}{1} \cdot x + \dots + \binom{k}{k-1} \cdot x^{j-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{j}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & 0 & \binom{2}{1} & & \dots & & \binom{n}{1} \\ \vdots & \dots & 0 & \binom{j}{j-1} & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & & \binom{n}{n-1} \end{pmatrix}$$

כלומר, המטריצה היא

זו, כמובן, מטריצה מסדר $n \times (n+1)$.

(2) מההגדרה, ברור כי $f(x) = a \Leftrightarrow f(x) \in \ker T$, כלומר: בדיוק כמו בשאלה הקודמת, $\ker T = P_0$, $\operatorname{Im} T = P_{n-1}$ לכן $\dim(\operatorname{Im}(T)) = n$, $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$.

(3) א. T אינאריט:

$$T((x+iy) + (x'+iy')) = T((x+x') + i(y+y')) =$$

$$(x+x') - i(y+y') = T(x+iy) + T(x'+iy')$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad T(a(x+iy)) = T(ax + iay) = ax - iay = aT(x+iy)$$

ב. T אינה ליניארית: כלל החיבור מתקיים (הוכחה זהה להוכחה בסעיף הקודם),

אולם כלל הכפל אינו מתקיים. לדוגמה, נבדוק מה קורה אם מכפילים ב- i :

$$T(i(x+iy)) = T(-y+ix) = -y-ix \neq y+ix = i(x-iy) = iT(x+iy)$$

לכן, ההעתקה אינה ליניארית. $x=1, y=1$ נקבל אי שוויון).

(4) א. מאחר ולכל $v \in V$ מתקיים $T(T(v))=0$ נקבל כי $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$. כמו כן $\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = n$ ולכן $2\dim(\text{Im}(T)) \leq n$ כנדרש.
 ב. עבור ווקטור $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ נגדיר $T(v) = (0, 0, x, y)$. ברור כי $T(T(v))=0$ לכל $v \in \mathbb{R}^4$. קל לוודא כי $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Ker}(T)) = 2$.

(5) א. לא נכון: ניקח את T להיות העתקת ה-0. בפרט עבור $v_1, v_2, \dots, v_n$ בת"ל מתקיים כי $w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0$ והם כמובן ת"ל.
 ב. לא נכון: אותה הדוגמא מסעיף א'.
 ג. לא נכון: יהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כדלהלן: $T((x, y)) = (x)$. אז $T((1, 0)) = (1)$ פורש את $\mathbb{R}$ אך $(1, 0)$ לא פורש את $\mathbb{R}^2$.

(6) מתקיים כי:

$$\begin{aligned} T((1, 0, 1)) &= (5, 0) = -5(-1, 1) + 5(0, 1) \\ T((0, 1, 1)) &= (-2, 8) = 2(-1, 1) + 6(0, 1) \\ T((-1, 0, 1)) &= (1, 2) = -1(-1, 1) + 3(0, 1) \end{aligned}$$

לכן
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(7) מטריצה A המקיימת את התכונה תצטרך לקיים $AB = BA$ לכל B שהוא. בפרט, אם נגדיר $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז צריך להתקיים:

$$\forall 1 \leq i \leq 4: AB_i = B_i A \quad (1)$$

מתחלפת עם כל מטריצה. נוכיח זאת: ניקח מטריצה B כלשהי, ונרשום

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 b_i B_i \quad \text{אזי}$$

$$AB = A\left(\sum_{i=1}^4 b_i B_i\right) = \sum_{i=1}^4 Ab_i B_i = \sum_{i=1}^4 b_i B_i A = \left(\sum_{i=1}^4 b_i B_i\right)A = BA$$

בחילופיות של A עם המטריצות B_i (נתון) ועם סקלרים מהשדה (נכון לכל מטריצה).

אנחנו מחפשים, אם כן, את כל המטריצות המקיימות את (1). נרשום

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{נציב במשוואה } AB_1 = B_1 A \text{ ונקבל}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = a_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ a_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_4$$

ו- $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, שלא מוסיפים עוד תנאים. אם כן, המטריצות A היחידות

המקיימות את כל התנאים הן המטריצות $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a * I$.

תרגיל 9 – אלגברה לינארית (1)

1. פתרו את מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

2. פתור את מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} 3x - iy + (1+i)z = 1 \\ x - y + (2+i)z = 1+i \end{cases}$$

3. מצא שדה בו למערכת יש

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

עבור המערכת

פתרון $(0,0,0) \neq$, ומצא שדה בו למערכת אין פתרון פרט ל- $(0,0,0)$.

4. מצא את כל המספרים $c \in \mathbb{R}$ כך שלמערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + cy + 3z = 2 \\ 2x + 3y + cz = 3 \end{cases}$$

- (א) קיים פתרון יחיד.
(ב) קיימים אינסוף פתרונות.
(ג) אין פתרון.

5. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ובו וקטורים שונים v, w .
תהי $U = \{(1-t)v + tw : t \in \mathbb{F}\}$. הראו שקיים וקטור $y \in V$ כך
ש- $U + y = \{u + y : u \in U\}$ מהווה תת מרחב של V .

פתרון תרגיל 9 – אלגברה ליניארית (1)

1. על מנת לפתור את המערכת נעבור למטריצה המורחבת המתאימה:

$$\text{שימו לב כי העמודה החמישית היא עמודת הפתרונות של} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

המערכת.

נבצע כעת על המטריצה את הפעולות האלמנטריות בכדי להגיע לצורת גאוס.

$$\text{נחליף את השורה הראשונה} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (4)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ברביעית

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1(1) \rightarrow (1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2(1)+(2) \rightarrow (2) \\ -6(1)+(3) \rightarrow (3) \\ -3(1)+(4) \rightarrow (4) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

איפוס העמודה הראשונה ע"י השורה הראשונה.

נחלק את השורה השנייה בשלוש ונמשיך לאפס את העמודה השנייה.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 8 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -8(2)+(3) \rightarrow (3) \\ -5(2)+(4) \rightarrow (4) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{26}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{17}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{-1(3) \rightarrow (3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{17}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+(4) \rightarrow (4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{26}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{מהמערכת הנ"ל אנו מקבלים} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 + \frac{26}{3}x_4 = \frac{8}{3} \\ 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{נחזור חזרה למשוואות ונקבל:}$$

$$\text{פתרון אחד שהוא: } x_4 = 0, x_3 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{-7}{3}, x_1 = \frac{4}{3}$$

2. שוב פעם נעבור למטריצות ונבצע את האלגוריתם של גאוס:

$$\begin{pmatrix} 3 & -i & 1+i & 1 \\ 1 & -1 & 2+i & 1+i \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+i & 1+i \\ 3 & -i & 1+i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3(1)+(2) \rightarrow (2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+i & 1+i \\ 0 & 3-i & -5-2i & -2-3i \end{pmatrix}$$

נחלק את השורה השניה ב- $3-i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+i & 1+i \\ 0 & 1 & \frac{-13-11i}{10} & \frac{-3-11i}{10} \end{pmatrix}$$

נחזור חזרה למשוואות ונקבל שהפתרון הוא כל השלשות מהצורה: $(x, y, z) = \left(\frac{-7+i}{10}z + \frac{7-i}{10}, \frac{13+11i}{10}z - \frac{3+11i}{10}, z \right)$ כלומר דרגת חופש אחת.

3. שוב נעביר את המערכת למטריצה המתאימה. מכיוון שזו מערכת הומוגנית נביט במטריצה המצומצמת בלי עמודת המשתנים החופשיים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -2(1)+(2) \rightarrow (2) \\ -3(1)+(3) \rightarrow (3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1(2) \rightarrow (2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

עד עכשיו את

הפעולות שעשינו אפשר לעשות בכל שזה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{5(2)+(3) \rightarrow (3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

כעת נעבור חזרה למשוואות

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+5z=0 \\ 18z=0 \end{cases}$$

קל לראות שמעל לממשיים למערכת הזאת יש רק את פתרון האפס.

כלומר מעל $\mathbb{R}$ הפתרון היחיד הוא $(0,0,0)$.

כעת נניח שאנו פותרים את המערכת מעל $\mathbb{Z}_3$ אז במקרה זה המערכת נראית כך:

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

ולכן גם הפתרון $(1,1,1)$ הוא פתרון למערכת וזה פתרון ששונה מפתרון האפס.

האפס.

4. תחילה נעביר את המערכת למטריצה ונבצע פעולות אלמנטריות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & c & 3 & 2 \\ 2 & 3 & c & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -1(1)+(2) \rightarrow (2) \\ -2(1)+(3) \rightarrow (3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & c-1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \\ 0 & c-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת השלב הבא היה לאפס את האיבר השני בשורה השלישית אבל בשביל זה

היינו צריכים לכפול את השורה השניה ב- $-(c-1)$ וזה אולי אפס. בשלב הזה

נתחיל לחלק למקרים:

$$\text{א. } c=1: \text{ אז אנו מקבלים את המערכת הבאה } \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+3z=1 \\ 4z=1 \end{cases} \text{ והפתרון של}$$

המערכת הזאת הוא $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. כלומר פתרון יחיד.

ב. $c \neq 1$ במקרה כזה אפשר להמשיך לעבוד על המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \\ 0 & c-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(c-1)(2)+(3) \rightarrow (3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c+2 & 1 \\ 0 & 0 & -c^2-c+6 & -c+2 \end{pmatrix}$$

כעת למערכת לא יהיה פתרון אם בשורה השלישית מתקיים $-c^2-c+6=0, -c+2 \neq 0$

למערכת יהיה פתרון יחיד אם $-c^2-c+6 \neq 0$

ויהיו אינסוף פתרונות אם $-c^2-c+6=0, -c+2=0$.

נבדוק תחילה מתי $-c^2-c+6=0$ זה פתרון של משוואה ריבועית ונקבל $c_{1,2} = -3, 2$.

את התשובה לשאלה אפשר לסכם באופן הבא:

א. למערכת קיים פתרון יחיד עבור $c \neq -3, 2$.

ב. למערכת קיימים אינסוף פתרונות עבור $c = 2$.

ג. למערכת אין פתרון עבור $c = -3$.

5. $\{(1-t)v+tw : t \in \mathbb{F}\} = \{v+t(w-v) : t \in \mathbb{F}\}$ זה פשוט מתקבל ע"י פתיחת סוגרים.

כעת אם נבחר את y להיות פשוט $-v$ אז נקבל ש:

$$U+y = \{t(w-v) : t \in \mathbb{F}\} = \text{span}\{(w-v)\}$$

וזה מרחב וקטורי.

תרגיל 10 באלגברה לינארית (1)

3 בינואר 2004

1. יהי F שדה ממציין שונה מ-2 ותהי M תת קבוצה לא ריקה של המרחב הווקטורי V הוכח כי התנאים הבאים על M שקולים:

(א) לכל $u, v \in M$ הישר: $\{tv + (1-t)u | t \in F\}$ העובר בין v ו- u נמצא כולו ב- M .

(ב) קיים תת מרחב יחיד U_M וקיים $v \in M$ כך ש- $U + v = M$ כאשר $U + v = \{u + v | u \in U\}$.

(ג) קיים תת מרחב יחיד U_M כך שלכל $v \in M$ מתקיים $U + v = M$.

(ד) נניח ש- $V = F^n$ אז התנאים הנ"ל שקולים לכך ש- M היא קבוצת פתרונות של מערכת משוואות לינארית.

2. יהי F שדה ממציין שונה מ-2 V מרחב ווקטורי מעל F ו- M תת קבוצה של V עם M מקיימת את אחד התנאים משאלה 2 נאמר ש- M היא ישריה ונגדיר את המימד שלה להיות המימד של תת המרחב U_M המתאים לה (תנאים (ב) (ג) שאלה 2). נניח כעת כי W גם הוא מרחב ווקטורי מעל השדה F וכי $T : V \rightarrow W$ העתקה לינארית הוכח כי:

(א) לכל ישריה M ב- V $T(M) = \{T(v) | v \in M\}$ הוא ישריה ב- W .

(ב) $T(U_M) = U_{T(M)}$

(ג) אם $\dim(Im(T)) = \dim(V)$ אז לכל ישריה M ב- V מתקיים $\dim(T(M)) = \dim(M)$.

3. יהי F שדה, V מרחב ווקטורי מעל F מממד k ו- T העתקה לינארית מ- V לעצמו נגדיר $T^0 = I$ כאשר העתקת הזהות ולכל n טבעי נגדיר באינדוקציה $T^{n+1} = T(T^n)$ כלומר לכל v מתקיים $T^{n+1}(v) = T(T^n(v))$. כעת לכל פולינום $p(x) \in F[x]$ אפשר להציב את T בפולינום ומפני ש- $p(T)$ הוא סכום של חזקות של העתקות לינאריות המוכפלות בסקלר נקבל ש- $p(T)$ היא העתקה לינארית. הוכח כי

(א) לכל n, m טבעיים $T^{n+m} = T^n(T^m)$ וכי $T^{nm} = (T^n)^m$

(ב) קיים פולינום $p(x) \neq 0$ המקיים $p(T) = 0$ כלומר לכל v ב- V מתקיים $p(T)(v) = 0$ יהי d הדרגה המינימלית עבורה קיים פולינום מדרגה d המאפס את T מה אפשר להגיד על d .

(ג) נניח קיים $v \in V$ עבורו קבוצת הווקטורים $\{T^{k-1}v, \dots, Tv, v\}$ בלתי תלוייה הוכח כי T חח"ע ועל.

4. יהי F שדה, V מרחב ווקטורי מעל F ממימד n ו T העתקה לינארית מ V לעצמו ונניח כי מתקיים $T^m = 0$ עבור m טבעי להעתקה כזו נקרא העתקה נילפוטנטית. נניח כעת שאם m הוא הטבעי המינימלי המקיים $T^m = 0$ א הוכח כי:

$$m \leq n \quad (\text{א})$$

(ב) אם $\{0\} \neq W$ תת מרחב של V אז $T(W) \neq W$.

(ג) קיימים תתי מרחב שונים $\{V_0, \dots, V_m\}$ המקיימים

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$$

(ד) קיים בסיס שבמטריצה המתאימה ל T ביחס לבסיס זה כל המקדמים השונים מ 0 הם מעל לאלכסון הראשי לדוגמה

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר * יכול להיות איבר כלשהו בשדה.

5. (רשות) תהי $Ax = 0$ מערכת משוואות הומוגנית ונניח שמקדמי המטריצה הם מספרים שלמים וכי למערכת יש פתרון לא טרוויאלי (שונה מ 0) מעל הרציונלים הוכח כי יש פתרון לא טרוויאלי מעל Z_p לכל ראשוני p .

פתרון תרגיל 10 באלגברה לינארית (1)

27 בינואר 2004

1. יהי F שדה ממציין שונה מ 2 ותהי M תת קבוצה לא ריקה של המרחב הווקטורי V נוכיח כי התנאים הבאים על M שקולים:

(א) לכל $u, v \in M$ הישר: $\{tv + (1-t)u | t \in F\}$ העובר בין u ו v נמצא כולו ב M .

(ב) קיים תת מרחב יחיד U_M וקיים $v \in M$ כך ש $U + v = M$ כאשר $U + v = \{u + v | u \in U\}$.

(ג) קיים תת מרחב יחיד U_M כך שלכל $v \in M$ מתקיים $U + v = M$.

(ד) נניח ש $V = F^n$ אז התנאים הנ"ל שקולים לכך ש M היא קבוצת פתרונות של מערכת משוואות לינארית.

i. נראה כי (א) גורר את (ג): יהי y ב M נראה כי $U_y = M - y$ הוא תת מרחב

A. יהי u אבר של U_y אזי קיים m ב M המקיים $u = m - y$ כעת יהי a איבר כלשהוא בשדה F אזי לפי ההנחה $am + (1-a)y$ נמצא ב M ומפני ש

$$au = a(m - y) = (am + (1-a)y) - y$$

נקבל ש au נמצא ב U_y מכאן U_y סגור לכפל בסקלר.

B. יהי u, v אברים של U_y אזי קיימים m, n ב M המקיימים

$$u = m - y$$

ו

$$v = n - y$$

מפני שהמציין של השדה שונה מ 2 נקבל ש $\frac{1}{2}(m - n) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$ ולכן $\frac{1}{2}n \in M$

$$\frac{1}{2}(u + v) = \frac{1}{2}((m - y) + (n - y)) = \frac{1}{2}(m - n) - y \in U_y$$

אבל ראינו כי U_y סגור לכפל בסקלר אזי גם $u + v$ נמצא ב U_y כלומר U_y סגור לחיבור ומפני ש 0 נמצא בו הוא אינו ריק ולכן הוא תת מרחב.

C. ראינו כי לכל y ב M יש תת מרחב U_y המקיים $U_y + y = M$. נראה כי תת מרחב זה אינו תלוי בבחירת y . יהיו x, y ב M אזי נקבל $U_x + x = U_y + y$ משווין זה נקבל שתי שוויונות:

$$U_x = U_y + (y - x)$$

$$U_x + (x - y) = U_y$$

מהשווין העליון נקבל כי $y - x$ נמצא ב U_x ולכן מסגירות לגנדי $x - y$ נמצא ב U_M . ומסגירות U_M לחיבור נקבל

$$U_x + (x - y) = U_x$$

והשווין התחתון יתן את המבוקש, וקיבלנו את (א).

- ii. תנאי (ב) הוא מקרא פרטי של תנאי (א) ולכן ברור ש (א) גורר אותו.
- iii. נראה כי תנאי (ב) גורר את תנאי (א): נניח U תת מרחב ו $M = U + y$ יהיו n, m ב M אזי קיימים u, v ב U המקיימים

$$n = u + y \quad m = v + y$$

ויהי a אבר כלשהוא בשדה. מפני ש U תת מרחב נקבל כי $au + (1-a)v$ נמצא ב M ולכן נקבל כי

$$an + (1-a)m = a(u+y) + (1-a)(v+y) = (au + (1-a)v) + y \in M$$

לכן M מקיים את תנאי (א).

- iv. נראה כי אם $V = F^n$ אז תנאי (ד) שקול לתנאי (ב):

A. נראה ראשית כי (ב) גורר את (ד) יהי $M = U + y$ כאשר U תת מרחב ו y ווקטור כלשהוא ב F^n . נרצא למצוא מערכת מש-וואות שקבוצת הפתרונות שלה היא בדיוק M . לשם כך נבנה ראשית העתקה ליניארית שהגרעין שלה הוא בדיוק תת המרחב U . יהי $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס ל U ונשלח אותו לבסיס לכל F^n : $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ נגדיר כעת העתקה ליניארית T מ F^n אל F^{n-k} ע"י כך שנשלח את הבסיס $\{u_1, \dots, u_k\}$ ל 0 ב F^{n-k} ולכל i בין 1 ל $n-k$ נשלח את u_{k+i} לווקטור הבסיס הסטנדרטי e_i ב F^{n-k} . מהגדרה זו נקבל כי T היא על מפני שתמונתה מכילה בסיס של F^{n-k} וש U מוכל בגרעין אבל לגרעין ול U אותו מימד לכן U שווה לגרעין. כעת נסמן ב A_T את המטריצה המתאימה להעתקה T ביחס לבסיסים הסטנדרטים ב F^n וב F^{n-k} , אזי תת המרחב U הוא קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$A_T x = 0$$

כאשר x ווקטור עמודה של n משתנים ו 0 הוא ווקטור עמודה של אבר ה 0 ב F^{n-k} . אם נסמן $b = T(y)$ אזי נקבל ש M היא בדיוק קבוצת הפתרונות בשל המערכת

$$A_T x = b$$

B. (ד) גורר (ב): תהי $Ax = b$ מערכת משוואות לינאריות כך ש $x, A \in M_{m \times n}(F)$ ווקטור עמודה של n משתנים ו b ווקטור עמודה ב F^m . נניח כי M היא קבוצה (לא ריקה) של פתרונות המערכת הנ"ל, ויהי y ווקטור כלשהוא ב M . כעת אם T_A היא ההעתקה הלינארית מ F^n ל F^m המתקבלת מהמטריצה A אז נקבל כי

$$M = \text{Ker}(T_A) + y$$

2. יהי F שדה ממציין השונה מ 2 , V מרחב ווקטורי מעל F ו M ישריה של V . נראה כי

(א) לכל ישריה M ב V $T(M) = \{T(v) | v \in M\}$ הוא ישריה ב W : לפי שאלה 1 קיים תת מרחב U_M כך ש $M = U_M + y$ ולכן

$$T(M) = T(U_M + y) = T(U_M) + T(y)$$

מפני ש T לינארית נקבל כי $T(U)$ תת מרחב ולכן שוב מ 1 נקבל כי $T(M)$ ישריה.

(ב) נראה כי $T(U_M) = U_{T(M)}$ ראינו כי $T(M) = T(U_M) + T(y)$ מתנאי (א) בשאלה 1 נקבל כי $U_{T(M)} = T(M) - T(y)$ ולכן השוויון.

(ג) נראה כי אם $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$ אז לכל ישריה M ב V מתקיים

$$\dim(T(M)) = \dim(M)$$

אם $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$ אז נקבל כי $\text{Ker}(T) = 0$ ולכן T היא העתקה חח"ע לכן אם $M = U_M + y$ ישריה כאשר U_M תת מרחב נקבל

$$\dim T(U_M) = \dim(U_M)$$

מסעיף (ב) ומהגדרת מימד הישריה כמימד התת מרחב המתאים לה נקבל את המבוקש.

3. יהי F שדה, V מרחב ווקטורי מעל F ממימד k ו T העתקה לינארית מ V לעצמו.

(א) הוכחת חוקי החזקה היא בדיוק כמו הוכחת החוקים המקבילים, לחזקות של אברים בשדה, הניתנו בפתרון תרגיל 2.

(ב) נראה כי קיים פולינום $p(x) \neq 0$ המקיים $p(T) = 0$ כלומר לכל v ב V מתקיים $p(T)(v) = 0$:

i. לכל n טבעי ההעתקה T^n נמצאת במרחב הווקטורי $\text{Hom}(V, V)$ ש-
ימדו k^2 לכן $k^2 + 1$ הווקטורים $\{I, T, T^2, \dots, T^{k^2}\}$ תלויים לינארית כלומר קיים צירוף לינארי לא טריויאלי:

$$a_{k^2} T^{k^2} + \dots + a_2 T^2 + a_1 T + a_0 I = 0$$

כאשר 0 הוא אבר האפס ב $\text{Hom}(V, V)$, המתאים להעתקת האפס, השולחת כל ווקטור מ V לאפס של V . לכן הפולינום

$$p(x) = a_{k^2} x^{k^2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x^0$$

ימלא אחר המבוקש.

(ג) טעות בשאלה

4. יהי F שדה, V מרחב ווקטורי מעל F מממד n ו T העתקה לינארית מ V לעצמו ונניח כי מתקיים $T^m = 0$ עבור m טבעי. נניח כעת ש m הוא הטבעי המינימלי המקיים $T^m = 0$.

(א) נראה כי $m \leq n$: אפשר להניח כי $T(V) \neq V$ (אחרת אנו מקבלים באינדוקציה $T^m(V) = V$ כלומר $V = \{0\}$ ולכן $T = T^0 = 0$ ו $n = m = 0$). ולכן מפני ש $T(V) \subseteq V$ נקבל כי $\dim T(V) < \dim(V)$ באינדוקציה נקבל כי $\dim T^{k+1}(V) < \dim T^k(V)$ ומפני ש $T^m(V) = 0$ ו $\dim(V) = n$ נקבל את המבוקש.

(ב) אם $W \neq \{0\}$ תת מרחב של V אז $T(W) \neq W$: אם $T(W) = W$ אז באינדוקציה $T^m(W) = W$ וזה בסתירה להנחה.

(ג) קיים בסיס ל V שבמטריצה המתאימה ל T ביחס לבסיס זה כל המקדמים השונים מ-0 הם מעל לאלכסון הראשי: נסתכל על שרשרת התתי מרחבים הבאה:

$$\{0\} = T^m(V) \subseteq T^{m-1}(V) \subseteq \dots \subseteq T(V) \subseteq V$$

כעת נבנה בסיס ל V באופן הבא: נבחר בסיס ל $T^{m-1}(V)$ נשלים אותו לבסיס של $T^{m-2}(V)$ וכך נמשיך כאשר בכל פעם אנו משלימים את הבסיס של תת המרחב $T^k(V)$ לבסיס של התת מרחב $T^{k-1}(V)$ עד אשר נקבל בסיס ל V . המטריצה שנבנה ל T ביחס לבסיס זה, שהוא מסודר לפי סדר בנייתו, תקיים את התנאי המבוקש.

5. תהי $Ax = 0$ מערכת משוואות לינארית הומוגנית ונניח שמקדמי המטריצה הם מספרים שלמים וכי למערכת יש פתרון לא טריוויאלי (שונה מ 0) מעל הרציונלים, נראה כי יש פתרון לא טריוויאלי מעל Z_p לכל p ראשוני: יהי p מספר ראשוני כלשהוא ויהי $(q_1, \dots, q_n)$ פתרון רציונלי לא טריוויאלי של המערכת. ע"י מכפלה במכנה המשותף של ה $\{q_i\}$ אפשר להניח כי הפתרון הוא במספרים שלמים. אם אחד ה q_i לא מתחלק ב p אז מודולו p הפתרון יהיה פתרון לא טריוויאלי ב Z_p וסימנו. אחרת כל ה q_i מתחלקים ב p . יהי p^r החזקה המקסימלית של p המחלקת את כל ה q_i . אם נכפיל את הפתרון ב p^{-r} נקבל פתרון בשלמים שלא כל המספרים בו מתחלקים ב p וחזרנו למקרה הראשון.

אלגברה ליניארית - 1

תרגיל 11

1. תהא :

$$\begin{array}{rcll} M_1 : & a_{11}x_1 & + & \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ M_2 : & a_{21}x_1 & + & \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ & - & - & - - - - - \\ M_k : & a_{k1}x_1 & + & \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{array}$$

מערכת ליניארית הומוגנית של k משוואות לא-טריוויאליות ב- n נעלמים, $k > n$. נסמן ב- W_r את מרחב הפתרונות של r המשוואות הראשונות, כלומר, של המערכת החלקית $\{M_1, \dots, M_r\}$

- (א) מהו $\dim W_1$?
- (ב) הוכיחו שעבור $0 \leq \dim W_r - \dim W_{r+1} \leq 1$, $1 \leq r < k$
- (ג) הראו שקיים m , $m < k$, כך שכל פתרון ל- m המשוואות הראשונות הוא גם פתרון למשוואה ה- $m+1$
- (ד) יהי m מינימלי המקיים מה שבסעיף (ג). מהו $\dim W_m$?

2. תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה מגודל $n \times n$ (בעלת n שורות ו- n עמודות). המטריצה המוחלפת של A היא המטריצה מגודל $n \times n$ $B = (b_{ij})$ המוגדרת ע"י $b_{ij} = a_{ji}$. המטריצה המוחלפת של A מסומנת A^t . הוכיחו כי עבור כל שתי מטריצות מגודל $n \times n$, A_1 ו- A_2 , מתקיים $(A_1 \cdot A_2)^t = A_2^t \cdot A_1^t$.

3. נתבונן ב- $\mathcal{R}^2$ (=המישור) כמרחב וקטורי מעל הממשיים. לכל שני וקטורים α, β במישור נסמן ב- $P(\alpha, \beta)$ את המקבילית שקדקודה בראשית ואשר α ו- β הן שתי צלעותיה הנפגשות בראשית. נסמן ב- $S(\alpha, \beta)$ את שטח המקבילית (תזכורת – זהו אורך צלע כפול באורך הגובה לאותה צלע). השטח האלגברי של המקבילית $P(\alpha, \beta)$, מסומן $\Delta(\alpha, \beta)$ ומוגדר באופן הבא :
- $\Delta(\alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)$ אם המעבר מ- α ל- β , דרך הזווית הקטנה יותר שביניהם, הוא נגד כיוון השעון.
- $\Delta(\alpha, \beta) = -S(\alpha, \beta)$ אם המעבר מ- α ל- β , דרך הזווית הקטנה יותר שביניהם, הוא עם כיוון השעון.
- הוכיחו את התכונות הבאות לגבי פונקצית הנפח Δ :
- (א) $\Delta(\alpha, \beta) = -\Delta(\beta, \alpha)$ ("אלטרנטיביות").
 - (ב) $\Delta(t\alpha, \beta) = \Delta(\alpha, t\beta) = t\Delta(\alpha, \beta)$ לכל t ממשי ("הומוגניות").
 - (ג) $\Delta(\alpha + \gamma, \beta) = \Delta(\alpha, \beta) + \Delta(\gamma, \beta)$, $\Delta(\alpha, \beta + \gamma) = \Delta(\alpha, \beta) + \Delta(\alpha, \gamma)$ ("מולטיליניאריות").

4. נתבונן בקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. תמורה של הקבוצה A היא העתקה חח"ע של A על עצמה.

תמורה $\sigma : A \rightarrow A$ תסומן $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}$ כאשר מתחת לכל מספר עומדת תמונתו תחת σ .

כך למשל עבור $\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23145 \end{pmatrix}$: $\sigma(2) = 3$ ו- $\sigma(3) = 1$.

זוג מספרים (k, l) נקרא היפוך בתמורה σ , אם בכתיבה של התמורה, k, l מופיעים בשורה התחתונה בסדר הפוך מאשר בעליונה. התמורה σ נקראת זוגית או אי-זוגית בהתאם לכך אם מספר ההיפוכים בה הוא זוגי או אי-זוגי.

עבור התמורות $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, חשבו:

א. האם הן זוגיות או אי-זוגיות?

ב. מהן σ^{-1} ו- τ^{-1} (כלומר התמורות ההפוכות להן)?

ג. מהן $\sigma \circ \tau$ ו- $\tau \circ \sigma$ (כלומר התמורות המתקבלות מהרכבתן)?

5. תהא A קבוצה כלשהי, $\sigma, \tau : A \rightarrow A$ תמורות. נתון כי לכל $a \in A$, $\sigma(a) = a$ או $\tau(a) = a$. הוכיחו כי $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.

בהצלחה !

אלגברה ליניארית - 1

פתרון - תרגיל 11

1. א. נגדיר $T_0: F^{(n)} \rightarrow F$, כאשר F השדה שלנו, ע"י $T(x_1, \dots, x_n) := a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$.

קל לבדוק כי זו ט"ל, וגם $\ker T_0 = W_1$. כיוון שלפחות $a_{1k} \neq 0$ עבור $1 \leq k \leq n$ מסויים (כי נתון שהמשוואות לא טריביאליות),

אז אם e_k הוא וקטור שכולו אפסים פרט למקום ה- k שבו יש 1, נקבל

$$\text{Im } T_0 = F \text{ ולכן } \text{Im } T_0 \neq \{0\} \Leftrightarrow T_0(e_k) = a_{1k} \neq 0 \text{ (למה?)}$$

$$\text{ואז } \dim W_1 = \dim \ker T_0 = n - 1 \Leftrightarrow \dim \text{Im } T_0 = 1$$

ב. נגדיר, בדומה לעיל, $T_r: W_r \rightarrow F$ ע"י: $T_r(x_1, \dots, x_n) := a_{(r+1),1}x_1 + \dots + a_{(r+1),n}x_n$.

להבדיל מ- T_0 , אנו לא יכולים להסיק כי $\text{Im } T_r = F$ (מדוע? תחשבו על תחום ההגדרה של T_r),

אך בוודאי $0 \leq \dim \text{Im } T_r \leq 1 \Leftrightarrow \text{Im } T_r \leq F$ ומכאן:

$$\dim \ker T_r = \dim W_r - \dim \text{Im } T_r \geq \dim W_r - 1$$

מהנ"ל וכיוון ש- $\ker T_r = W_{r+1}$ (הראו את שתי ההכללות ההפוכות הכמעט-טריביאליות!), מקבלים מש"ל.

ג. נניח שהטענה לא נכונה, אזי: לכל $m < k$:

$$\dim W_{m+1} = \dim W_m - 1 = \dim W_{m-1} - 2 = \dots = \dim W_1 - m$$

$$\dim W_k = \dim W_1 - k = n - k - 1$$

אי-שלילי, אז $0 \leq n - k - 1 \Leftrightarrow k \leq n - 1$, וזו סתירה לנתון $k > n$.

ד. ע"י אותו חישוב כנ"ל, מקבלים $\dim W_m = n - m$.

2. נסמן $A_1 = (a_{ij})$, $A_2 = (b_{ij})$, $A_1^t = (a'_{ij})$ ו- $A_2^t = (b'_{ij})$ (כאשר $a'_{ij} = a_{ji}$ ו- $b'_{ij} = b_{ji}$). כמו כן נסמן

$$A_1 \cdot A_2 = (c_{ij}) \text{ ו- } A_1^t \cdot A_2^t = (d_{ij}). \text{ בסימונים אלה, צריך להוכיח כי לכל } 1 \leq i, j \leq n, d_{ij} = c_{ji}.$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \text{ (מהגדרת כפל מטריצות). נחשב את } d_{ij}:$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = c_{ji} \text{ מש"ל.}$$

3.

(א) כיוון המעבר מ- α ל- β דרך הזווית הקטנה יותר שביניהם, הפוך לכיוון המעבר מ- β ל- α דרך

הזווית הזו. השוויון נובע, אם כן, מהגדרת הפונקציה Δ .

(ב) הטענה נובעת מכך ששטח המקבילית הוא אורך צלע כפול באורך הגובה לאותה צלע, כך שהכפלת אורך הצלע ב- $t \geq 0$, מביאה גם להכפלת השטח ב- $t \geq 0$. עבור $t = -1$ נקבל כי שטח המקבילית לא ישתנה אבל הפונקציה Δ תהפוך סימן. מכאן נובעת הטענה עבור $t < 0$.

(ג) ראשית, נשים לב שבשל האלטרנטיביות, די להוכיח את הטענה הראשונה. שנית, בשל ההומוגניות, אם

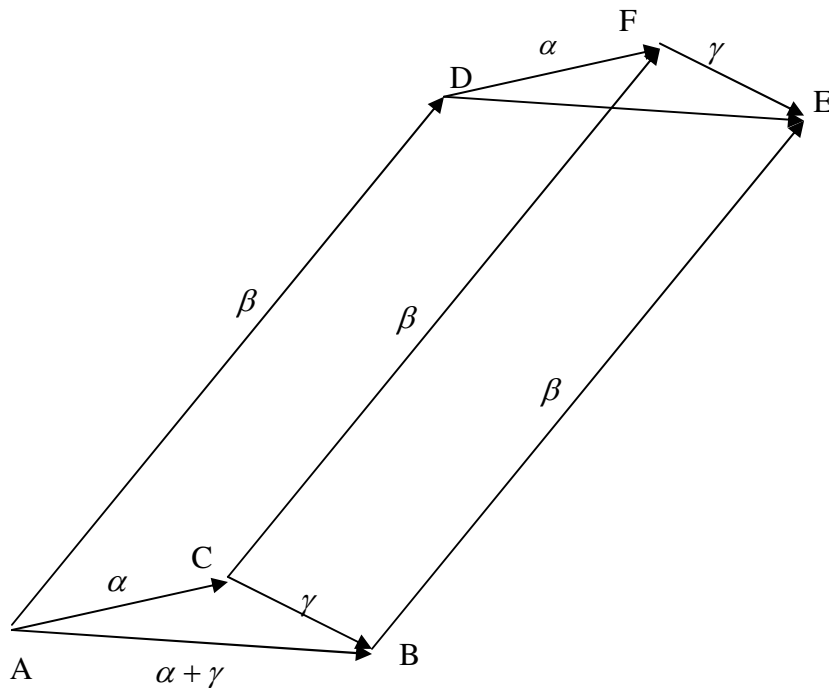
$$\Delta(\alpha + \gamma, t\beta) = \Delta(\alpha, t\beta) + \Delta(\gamma, t\beta) \text{ עבור } t \in \mathbb{R}, 0 \neq t \text{ כלשהו, הרי שהטענה}$$

$$\Delta(\alpha + \gamma, \beta) = \Delta(\alpha, \beta) + \Delta(\gamma, \beta) \text{ תנבע באופן מיידי. לכן ניתן להניח כי:}$$

(i) β ארוך כרצוננו. (ii) הזווית בין α ו- β חדה (אחרת נכפול את β ב-1).

תחת ההנחות האלה, המקרה שצריך לבדוק מובא בצירוף הנ"ל.

צריך להראות ששטח המקבילית ACFD ועוד שטח המקבילית CBED, שווה לשטח המקבילית ABED. זאת נראה ע"י חפיפת המשולשים ABC ו-DEF.



4.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2 \ 4)(2 \ 3) \text{ א) זוגית.}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(5 \ 4)(3 \ 4) \text{ אי-זוגית.}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב)}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ ג)}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. נניח בשלילה כי קיים $a \in A$ עבורו $\sigma(\tau(a)) \neq \tau(\sigma(a))$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $\sigma(a) = a$. אזי $\sigma(\tau(a)) \neq \tau(a)$. נסמן $\tau(a) = b \in A$. קיבלנו ש- $\sigma(b) \neq b$. מכאן נובע ש $\tau(b) = b$ כלומר $\tau(\tau(a)) = \tau(a) = \tau(\sigma(a))$. אבל τ חח"ע ולכן $\tau(a) = \sigma(a) = a$. סתירה. לכן, לכל $a \in A$ $\sigma(\tau(a)) = \tau(\sigma(a))$. קיבלנו: $a = \sigma(a) = \sigma(\tau(a)) \neq \tau(\sigma(a)) = \tau(a) = a$. סתירה. לכן, לכל $a \in A$ $\sigma(\tau(a)) = \tau(\sigma(a))$. כלומר $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. מש"ל.

תרגיל 12

באלגברה ליניארית 1

1. בהנתן מטריצה A בעלת n שורות ו- n עמודות נגדיר לכל $1 \leq i, j \leq n$ את המינור $A_{i,j}$ להיות המטריצה המתקבלת מ- A ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j .
הראו כי $|A| = (-1)^{i+1} \cdot a_{i,1} \cdot |A_{i,1}| + (-1)^{i+2} \cdot a_{i,2} \cdot |A_{i,2}| + \dots + (-1)^{i+n} \cdot a_{i,n} \cdot |A_{i,n}|$.

הדרכה: תחילה הוכיחו הטענה עבור $i=1$ - חלקו את התמורות על $[1, \dots, n]$ לקבוצות לפי ערכיהן על הנקודה 1 והשתמשו בנוסחת הדטרמיננטה כמו שנלמדה בכתה. כדי להוכיח הטענה ל- i כללי השתמשו בעובדה שהחלפת שתי שורות עוקבות במריצה משנה את סימן הדטרמיננטה.
הערה: אין צורך לפתור תרגיל זה במידה והטענה תוכח בשיעור.

2. (א) תהי $A = (a_{i,j})$ מטריצה משולשית עליונה, היינו $a_{i,j} = 0 \forall i < j$. הראו כי $|A|$ שווה למכפלת אברי האלכסון של A .
(ב) תהי $D = (d_{i,j})$ מטריצה אלכסונית (היינו לכל $i \neq j$ מתקיים $d_{i,j} = 0$), ותהי A מטריצה כלשהי מאותו המימד כמו D . הראו כי $|D \cdot A| = |A \cdot D| = |A| \cdot |D|$.

3. הוכיחו שהדטרמיננטה הבאה שווה למספר פיבונצ'י ה- n :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. חשבו את דטרמיננטת Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

בהצלחה!

פתרון תרגיל 12

באלגברה ליניארית 1

1. הטענה הוכחה בשיעור.

2. (א) תהי π תמורה כלשהי על הקבוצה $\{1, \dots, n\}$. נשים לב כי אם π אינה תמורת הזהות אזי קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $\pi(i) < i$ (ודאו זאת!). מאחר ו- A מטריצה משולשית עליונה הרי ש- $a_{i, \pi(i)} = 0$. לכן תרומת המחובר המתאים ל- π בחישוב הדטרמיננטה של A הוא 0. מכאן שהמחובר היחיד שנשאר מתאים לתמורת הזהות ומכאן נקבל כי $|A| = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$, כנדרש.

(ב) תחילה נשים לב כי $(D \cdot A)_{i,j} = d_{i,i} \cdot a_{i,j}$. בפרט $d_{i,i}$ מחלק את כל אברי השורה ה- i . מאחר והדטרמיננטה היא פונקציה מולטיליניארית נקבל כי $|D \cdot A| = d_{1,1} \cdot \dots \cdot d_{n,n} \cdot |A|$ ע"י כך שלכל i נחלק את אברי השורה ה- i ב- $d_{i,i}$. מאחר ו- D מטריצה אלכסונית (ולכן משולשית עליונה) מתקיים לפי סעיף א' כי $|D| = d_{1,1} \cdot \dots \cdot d_{n,n}$. שלוב שתי הטענות מראה כי $|D \cdot A| = |D| \cdot |A|$, כנדרש.

3. נוכיח שהדטרמיננטה הבאה שווה למספר פיבונצ'י ה- n באינדוקציה על n :
 $n=0, 1$ – ברור. נניח ל- $(n-1)$ ונוכיח ל- n : ע"י פיתוח לפי השורה הראשונה נקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n \times n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} =$$

$$\varphi(n-1) + \varphi(n-2) = \varphi(n)$$

כאשר האיבר הימני מגיע מפתוח לפי האיבר השני בשורה הראשונה ואז מפתוח לפי העמודה הראשונה. מאחר ומתקיימת נוסחת הרקורסיה הכללית של סדרת פיבונצ'י הרי ש- $\varphi(n)$ שווה למספר פיבונצ'י ה- n .

4. חשבו את דטרמיננטת Vandermonde:

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

נחסיר את השורה הראשונה משאר השורות ונפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה. מקבלים:

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

נפעיל את הנוסחה הבאה: $a^k - b^k = (a-b)(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b^i)$ (בדקו אותה!) ונקבל:

$$W_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \cdots & x_2^{n-2} + x_2^{n-3}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} \\ 1 & x_3 + x_1 & \cdots & x_3^{n-2} + x_3^{n-3}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \cdots & x_n^{n-2} + x_n^{n-3}x_1 + \cdots + x_1^{n-2} \end{vmatrix}$$

כעת נכפיל את העמודה הראשונה ב- x_1^i ונחסיר אותה מעמודה ה- $(i+1)$ עבור $i=0, \dots, n-2$. כך נפתר מהמחבר האחרון בכל אחת מהעמודות. נחזור על הפעולה עבור העמודה השנייה, וכן הלאה. לאחר $(n-2)$ צעדים נקבל

$$W_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = W_{n-1} \prod_{i=2}^n (x_i - x_1)$$

נמשיך בתהליך ולאחר n צעדים נקבל

$$W_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$