

משך הבחינה: 3 שעות

**שמות המורים: פרופ' א. מן
פרופ' א. ריפס**

חלק א'

ענו על שתיים מהשאלות הבאות (כל שאלה מעניקה עד 20 נקודות)

1. הוכיחו כי למרחב וקטורי נפרש סופית יש בסיס.
2. במרחב וקטורי סוף-מימדי V נתונים שני תת-מרחבים U ו- W . הוכיחו:

$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$$
3. נתונה מערכת משוואות ליניאריות $AX = B$ ב- n נעלמים. ידוע כי למערכת יש פתרון. הראו כי מימד ישריית הפתרונות הוא $n - \text{rank} A$ (מספר הנעלמים פחות דרגת A).

חלק ב'

ענו על שלוש מהשאלות הבאות (כל שאלה מעניקה עד 15 נקודות)

1. נתונה מטריצה ריבועית A המתחלפת בכפל עם כל המטריצות מאותו סדר. הראו כי $A = cI$, כאשר c הוא איבר בשדה הבסיס ו- I היא מטריצת היחידה.
2. במרחב הרביעיות הממשיות $\mathbb{R}^4$ נתונים שני תת-מרחבים

$$U = \{(a, 2a, b, 2a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(c, d, 2c, 2d) \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$
 הראו כי $U+W = \mathbb{R}^4$.

3. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

הוכיחו, כי $\text{rank} A = 2$, אלא אם כן מציינ שדה הבסיס הוא 2. מהי הדרגה במקרה זה?

4. במרחב הרביעיות הממשיות $\mathbb{R}^4$ נתונה ההעתקה הליניארית

$$T(a, b, c, d) = (a, 2b, 3c, 4d)$$

מצא את מטריצת T ביחס לבסיסים

$$u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0, 0), u_3 = (1, 1, 1, 0), u_4 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\text{ו- } w_1 = (1, 1, 1, 1), w_2 = (0, 1, 1, 1), w_3 = (0, 0, 1, 1), w_4 = (0, 0, 0, 1)$$

5. במרחב הפולינומים הממשיים ממעלה n לכל היותר, נסמן $Tf(x) = f(x+1) - f(x)$.

הראו, כי T היא העתקה ליניארית, ומצאו את גרעינה ותמונתה.

חלק ג'

האם הטענות הבאות נכונות? ענו על שלוש מהן ונמקו בקצרה (כל תשובה מעניקה עד 5 נקודות).

✓ 1. אם במערכת משוואות ליניאריות יש יותר נעלמים ממשוואות, למערכת יש פתרון.

✓ 2. אם בשדה F קיים איבר $a \neq 0$, כך ש- $a+a+a=0$, אז כל איבר $b \in F$ מקיים $b+b+b=0$.

✓ 3. יש שתי מטריצות A ו- B מסדר 2×2 כך ש- $AB=0$ ו- $BA \neq 0$.

4. $Q(\sqrt{2}) \cap Q(i) = Q$ (הוא שדה הרציונליים).

5. אם המטריצות הריבועיות A ו- B מאותו סדר הפיכות, גם המכפלה AB הפיכה וקיים

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

בהצלחה!

מבחן באמצעות עוצאות I



פתוק

(1) אם במערכת משוואות עוצאות יש יותר (עוצמים) משוואות, למעט יש פתוק.

ללא כוק לפומה: נסתם המע' משוואות ה-3 (עוצמים):

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(2) \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$$

ברור שכו מע' משוואות עוצאות (מעט $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$)

וכן יש בה 3 (עוצמים) ואילו רק 2 משוואות.

אבל ברור גם שאין לה פתוק שכן לכל $x \in \mathbb{R}$

$$0 \cdot x = 0 \quad 0 + 0 + 0 = 0 \neq 1 \quad \text{אבל}$$

ולכן לא ניתן למצוא $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ אשר יק"או את המשוואה השנייה.

(3) יש שתי מטריצות A ו- B מסדר 2×2 רק

$$AB = \tilde{0} \quad \text{ו-} \quad BA \neq \tilde{0}$$

כוק הנה שתיים כאלה:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \tilde{0}$$

אבל:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{0}$$

5) אם הנטריות הרצויות A ו-B נאותו, אז הן כות, $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

אם הנכנס הפיכה וקיים

לפיכך נכון

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

!

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ע ראה

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \\ -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 & -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \\ -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 & -\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot B^{-1}$$

~~אם הנכנס הפיכה וקיים~~

$$A^{-1} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 5 & 27 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-\frac{1}{3}) & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) & -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} =$$

ע ראה

2) אם F היא שדה, $a \neq 0$, אז $3 \times a = 0$, אז $3 \times b = 0$

אם $b \in F$ אז $3 \times b = 0$

הוכחה: $a \neq 0$, אז $a \cdot x = b$ נכון

$x = a^{-1} \cdot b$, אז $a \cdot x = b$ נכון

אם $3 \times a = 0$ אז $(3 \times a) \cdot x = 0 \cdot x = 0$

זה (הכנסת x ב- $3 \times a$)

$$(a+a+a) \cdot x = ax + ax + ax = b+b+b$$

פירוק



$$b+b+b = 0 \Leftarrow$$

✓

פתוק א

(1) צד: למרחב וקטורי נקבע סביר של בסיס.

הנחה: יהי $V = \text{קס}(v_1, \dots, v_m)$ (סתכל על

~~הקבוצה $\{v_1, \dots, v_m\}$ כקבוצת בסיס של V~~

~~בסיס~~ שנוצרת מאופן זה: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

ראשי v_i הוא הראשון ב $v_1, \dots, v_m$ שאינו

וקטור האפס והוקטורים הבאים אחריו הם אלה שאינם

צירוף ליניארי של הקודמים להם.

נסמן שקבוצה זו היא בסיס של V . עשירי

לבראות שהיא בתל ושלא פורעת.

למה 1: הטענה הבאה שקוללת:

(1) $v_1, \dots, v_k$ ~~בתל~~

(2) $v_i \in \text{קס}(v_1, \dots, v_{i-1})$ לכל $2 \leq i \leq k$

הנחה:

(1) $v_1, \dots, v_k$ ~~בתל~~ אם $v_k = 0$

אם אפשר לרשם $0 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k$

שהצירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_k$ זהו

בתל. $v_1 \neq 0$ רצו נניח שקיים i כך ש

$v_i \in \text{קס}(v_1, \dots, v_{i-1})$. כלומר $v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1}$

רצו $0 = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} - 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_k$

זה צירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_k$ שווה לאפס. v_i הוא

הסתירה לרש הטענה בתל.

(2) $(1) \Rightarrow (2)$ ונניח ש $v_1, \dots, v_k$ תלויים. אז קיים

$0 = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$ צירוף ליניארי שמתאפס.

יהי j האינדקס הקטן ביותר שבו $c_j \neq 0$. למה $c_1, \dots, c_{j-1} = 0$.

כלומר $0 = c_j v_j + \dots + c_k v_k$. $c_j \neq 0$ קיים c_j^{-1} (עבר

אופיינו ונקבע $c_j^{-1} v_j + \dots + c_k v_k = 0$ הסתירה לנחה 2. אשל (2)

אם α יהיה α הזאת הווקטורים שבתורו
 פהיו β . הם בת"ס כי הראשון שונה
 מאפס והאחרים הם לא זיכור פ"נאוי של
 קוקטורים.

שמה 2: אם $\alpha \in Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ $\alpha \in K$
 $Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha)$
 הוכחה: ברור ש $Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \subseteq Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha)$
~~הוכחה~~ יהי $\beta \in Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha)$ $\beta \in K$
 $\beta = \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i + b \alpha$

אם $\alpha = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i$ $\alpha \in K$
 $\beta = \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i + b \cdot \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i =$

$= \sum_{i=1}^k (a_i + b c_i) \alpha_i \in Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$
 $Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \subseteq Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \Leftarrow$

הוכחנו הכלה בשני הכיוונים ולכן היתה נכונה (י)

זה נ"ח שווקטורים ~~שבתורו~~ שווקטורים
 שהשטחון ~~שבתורו~~ מהקבוצה ה"לזה
 של V הם $v_1, \dots, v_p$. כל אחד מהם
 זיכורים פ"נאויים של קוקטורים. זרשון נרשום
 את הווקטורים $v_1, \dots, v_p$ בסדר אחר, רק ש $v_1, \dots, v_p$
 יופאו בסוף. לפי שמה 2, אם נשתמש בה

$V = Sp(B) = Sp(B')$
 פה B' הוא B עם $v_1, \dots, v_p$ בתורו

כלומר B זה פורשת את V ואם היה
 בת"ס פ"נאוי הוא בסיס.

משל 😊

דפ' המשפט: אם u ת"א של V
 שהוא וצב סופי - $u_1, \dots, u_k$ בסיס
 של u אז ניתן להשלים את $u_1, \dots, u_k$
 לבסיס של V ע"י וקטורים מתקבלים
 (הוורט את V).

מרחב כתר u
 $u \subseteq u + w$
 $sp(u_1, \dots, u_k) \subseteq u + w$
 הסתבר כי $u + w$ הוא
 מרחב כתר.

(2) בהינתן U, W תת-חלל של V (תת-חלל) U, W

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) : \underline{\text{צ"ל}}$$

הוכחה: ראשון (צ"ן) כי הוורם היתה כי $U+W$
 !- שחט הם תת של V . כמובן הוורם שחט
 אחרת של אחרת נוצר סופית קיים הסיס. לכן
 הפיסוי שיש להוורם אחרת.

כמובן, נשים לב ש- $U+W$ הוא גם תת של U
 גם תת של W .

כלת, כאמור, שחט נוצר סופית, ולכן נבחר לו
 הסיס $V_1, \dots, V_n$.

את הסיס הוורם אפשר להשלים להסס δ - U :

$$V_1, \dots, V_n, U_1, \dots, U_k$$

ואפשר גם להשלים אותו להסס δ - W :

$$V_1, \dots, V_n, W_1, \dots, W_l$$

(סגן של $\{V_1, \dots, V_n, U_1, \dots, U_k, W_1, \dots, W_l\}$ הסיס δ - $U+W$
 נראה שהם בורשים :

יהי $v \in U+W$. נותן להציג אותו בצורה
 $v = u + w$ כאשר $u \in U, w \in W$. (אם) אם

$u \in U$ ו- $w \in W$ נותן להשלים

$$\left. \begin{array}{l} \text{קואסיציות} \\ \text{ליניאריות של} \\ \text{אשרי הסיסים} \end{array} \right\} \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i \\ w &= \sum_{i=1}^l c_i w_i + \sum_{i=1}^n d_i v_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = u + w = \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n b_i v_i + \sum_{i=1}^l c_i w_i + \sum_{i=1}^n d_i v_i = \sum_{i=1}^k a_i u_i + \sum_{i=1}^n (b_i + d_i) v_i + \sum_{i=1}^l c_i w_i \in$$

$$\in \text{Sp}(\{v_i\}_{i=1}^n, \{u_i\}_{i=1}^k, \{w_i\}_{i=1}^l})$$

וכן $v \in U+W$ נותן להציג כצד של $V_1, \dots, V_n, U_1, \dots, U_k, W_1, \dots, W_l$

כך $V_1, \dots, V_n, u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l$ הם

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i + \sum_{i=1}^k b_i u_i + \sum_{i=1}^l c_i w_i = 0$$

(זהו אפס ווקטור)

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i + \sum_{i=1}^k b_i u_i = - \sum_{i=1}^l c_i w_i$$

זכור כי u_i ו- v_i הם בסיס של U ו- W הם בסיס של W .
 זכור כי u_i ו- v_i הם בסיס של U ו- W הם בסיס של W .
 זכור כי u_i ו- v_i הם בסיס של U ו- W הם בסיס של W .

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i + \sum_{i=1}^k b_i u_i$$

זכור כי u_i ו- v_i הם בסיס של U ו- W הם בסיס של W .
 זכור כי u_i ו- v_i הם בסיס של U ו- W הם בסיס של W .

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i + \sum_{i=1}^k b_i u_i = \sum_{i=1}^n d_i V_i$$

אם $d_i = 0$ אז V_i אינו בסיס של U .

$$\sum_{i=1}^n d_i V_i = \sum_{i=1}^n d_i V_i + \sum_{i=1}^k 0 u_i = \sum_{i=1}^n a_i V_i + \sum_{i=1}^k b_i u_i$$

אם $b_i = 0$ אז u_i אינו בסיס של U .

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i + \sum_{i=1}^k c_i w_i = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^k b_i u_i = 0 \right) \text{ כי } b_i = c_i$$

אם V_i ו- W_i הם בסיס של U ו- W אז

אם V_i ו- W_i הם בסיס של U ו- W אז

$$a_i, b_j, c_m = 0 \text{ אם } a_i, b_j, c_m \neq 0$$

אם $a_i, b_j, c_m = 0$ אז V_i, u_j, w_m הם בסיס של $U+W$.

$$m+k+l = \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$= n+k+n+l-n$$



$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$$

פשוט
אלה המטריצות
שמקבלים אותן הייח.

1) A מתחלפת עם G מציבה נאמן וזו

$$A = cI \quad \text{עולה}$$

הוכחה: A נניח $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ והיא

$n \times n$ 730 N B 3.76 N 6 מתחברת עם

בפרט ה'א' מתחלף עם מ' צור מ' צור

הנהגת בסיס נתון

1. $\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

מחיר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \bigcirc & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Dr. J. C. ...

$$\Rightarrow a_{12} = \dots = a_{1n} = a_{21} = \dots = a_{n1} = 0$$

בצורה צורה אף וצורה

$$E_{ij} A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ji} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{ni} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

→ קצת, מן הנקודות → וכן נחלק

וכה נכון אם $j \neq i$ ואכן אם $j \neq i$
 $a_{ij} = 0$.

אז קיבלנו שהמטריצה אלוויונית.

אז קיבלנו $\neq$ האם היא האלוויונית? שווה לה

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 \dots c_n \\ c_1 c_2 \dots c_n \\ \vdots \\ c_1 c_2 \dots c_n \end{pmatrix}$$

A

מטריצה חזקה
שכזו אחת

$$\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_1 \dots c_1 \\ c_2 c_2 \dots c_2 \\ \vdots \\ c_n c_n \dots c_n \end{pmatrix}$$

אז זה שווה Δ כי A מתחלפת עם המטריצה.

$c_i = c_j$ אם j, i כי הם האיברים
 הם המקומות דומים שהיו שווים

$$\Rightarrow A = c_1 I$$

נכון

אם נחליק לעצמנו את חבר
מינוס רב-השוואה השלישית שלורה השנייה

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 \end{pmatrix}$$

אם נחליק את שורה 1 אבשר כי
המצינו היא לא 2 ולא 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וראנו כי ממילא
ההצדקה היא 2.

המטריצה זו ברורה שהצדקה

היא 1 משום שיה
השוואה (1, 1, 1) נכתי עלויה.

אם $\text{char } F = 5$ אז המטריצה הטובצ'ים

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ואם במקרה זה ברור שהצדקה היא 1.
חבר מינוס שורה 1 לשורות 2 ו-3 וקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ההצדקה היא 1.

הקושיים של ההכרזה כאן היא

$$A = \begin{pmatrix} 1 \times 1_F & 3 \times 1_F & 5 \times 1_F \\ 6 \times 1_F & 8 \times 1_F & 10 \times 1_F \\ 11 \times 1_F & 13 \times 1_F & 15 \times 1_F \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

(3) (15)

צורה של מטריצה היא מס' השורות והעמודות.
תלויות בהם. נכון, צורה של מטריצה (שמה)
כאשר מפרטים אותה. אם נפרט את A
בהנחה $\text{char } F \neq 2, 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 11R_1 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -20 & -40 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{כאשר } \text{char } F \neq 5 \\ \text{השוויות האלה לא} \\ \text{מתאם סוג!} \end{array} \right.$$

קם לראות שראן שורה ~~2~~ ושורה ~~4~~ תלויות
אחת בשנייה ואילו שורה 1 בעלת תלויה בשורה
2.

גומר יש ~~2~~ שורות בעלות תלויות ולכן
הצורה של המטריצה היא 2.

אם $\text{char } F = 2$ אם המטריצה היא בעצם

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{מקום} \\ \text{חבר שורה} \\ \text{וקדם} \end{matrix}$$

שהי' אם מס' שוג' אפשר לרשום $m = 2 \times n$

ולכן m הוא בעצם 0 בשורה

ולאספר איכותי m $m = 2 \times n + 1$

ולכן m הוא בעצם 1 בשורה