① 6/3/06
ת.לינארית

המתרגל: אורן דינאי orendi@math.huji.ac.il

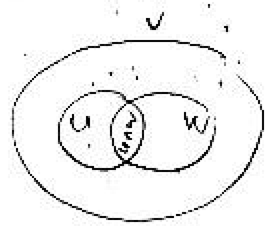
9 תרגילים חובה שווים 10% מהציון
2 בחנים שווים 10% מהציון כמגן.

* * * * *

היום נפתור את המבחן.

<u>חלק א'</u>

① צ"ל: למ"ו נוצר סופית יש בסיס. $V=sp(v_1,\dots,v_n)$.
הוכחה: באינדוקציה על n.
עבור $n=1$ זה ברור.
נניח נכון ונוכיח ל-n. אם $v_1,\dots,v_n$ בת"ל אז היא בסיס. אחרת אחד מהן צ"ל של האחרים: ניתן להוריד את v_n ואז לפי ה"א ל-$sp(v_1,\dots,v_{n-1})$ יש בסיס.

②


צ"ל: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$
הוכחה: הרעיון הוא לבחור בסיס ל-$U\cap W$ $\{v_i\}$ ומשלימים אותו פעם לבסיס ל-U ופעם לבסיס ל-W. ואז לראות ש-$B=\{u_i\}\cup\{w_i\}\cup\{v_i\}$ בסיס ל-$U+W$.
פורש: נניח $u+w\in U+W$, $u,w\in spB \Rightarrow u+w\in spB$.
בת"ל: נניח $0=\sum a_iv_i+\sum b_iu_i+\sum c_iw_i$ אז
$$\sum a_iv_i+\sum b_iu_i=-\sum c_iw_i$$
ומשם מהציור קל לראות שכל המקדמים חייבים להיות אפס.

③ נתון שלמע' $Ax=b$ קיים פתרון (n נעלמים).
צ"ל: מימד יריעת הפתרונות הוא $n-\operatorname{rank}A$
הוכחה: נתון שיש איזשהו פתרון x_0 אזי: $Ax_0=b$.
די לראות $Ax=b \Leftrightarrow x\in x_0+\operatorname{Ker}A$.

אז הדבר הלה הוא מיד

אם $x \in x_0+\ker A$ אז $x = x_0+k$ ואז

$$Ax = A(x_0+k) = Ax_0 + Ak = b + 0 = b$$

אם $Ax = b$ ניתן לרשום $x = x_0+(x-x_0)$. אבל

$A(x-x_0) = Ax - Ax_0 = b-b=0$. כלומר $\ker A \ni x-x_0$.

ופרשנו לפי משפט המימד $\dim(x_0+\ker A) = n - \operatorname{rank} A$.

<u>חלק ב</u>

(2) $U = \{(a,2a,b,2a)\}$ $W = \{(c,d,2c,2d)\}$

$= Sp\{(1,2,0,2),(0,0,1,0)\}$ $= Sp\{(1,0,2,0),(0,1,0,2)\}$

כן: $U+W=\mathbb{R}^4$ בשביל להראות את זה נראה

שכל הוקטורים הפורשים הם בת"ל. ואת זה אפשר

להראות ע"י דירוג המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) $\mathbb{R}^{\leq n}[x]$ ו- $Tp(x) = p(x+1) - p(x)$

כן שני כל ולמצוא גרעין ותמונה

בדיקה ישירה מראה שזו ה"ל.

נמצא הגרעין והתמונה - איך מוצאים בסיס לתמונה?

נסתכל איך הה"ע פועלת על $1, x, x^2, \ldots, x^n$

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix}\right\} \mapsto \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ (x+1)^n - x^n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = n$$

$$\Rightarrow \dim \ker T = 1$$

$$\ker T = \{\mathbb{R}\}$$

(2)

תמורות

תמורה היא פונק' חח"ע ועל מקבוצה לעצמה $f: X \to X$

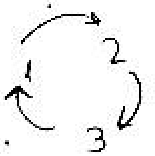
אנחנו מדברים על קבוצות סופיות אז אפשר לרשום את זה בטבלה.

x	$f(x)$
1	$f(1)$
$\vdots$	
n	$f(n)$

בקצר רושמים את זה במטריצה $n\times 2$ $\begin{pmatrix} 1 & & n \\ f(1) & & f(n) \end{pmatrix}$

מכיון ששני פונק' באופן טבעי נרצה להרכיב פונקציות.
ובגלל שהפונק' הפיכות גם ההרכבה הפיכה.

כתיבה מעגלית של תמורות: את $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. אפשר לרשום רק $(1\,2\,3)$.



למשל: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$: (3 יר' רק

ואז נרשום $(1\,2\,3)(4)$
או רק $(1\,2\,3)$. ואם 4 לא מופיע ן שום
אז לא עושים אותו כלום

ואת זה: נרשום רק $(1\,2\,3)(4\,5)$
או $(4\,5)(1\,2\,3)$

אם f, g מעגלים זרים אז $f \circ g = g \circ f$

③ 13.3.06
ת. ליניארית

התרגיל שקיבלנו היום הינו להגשה רק בעוד שבועיים.

תמורות

תזכורת, S_n אוסף התמורות על $\{1,\dots,n\} = [n]$, $1,\dots,n$ הם רק שמות. הדבר שכן חשוב הוא שמדובר על n עצמים שונים.

<u>הגדרה</u>: ל-$\sigma \in S_n$ (נסמן את הסימן של התמורה)

$$\operatorname{sign}\sigma := \prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

<u>הערה</u>:

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

כלומר, כל גורם במכפלה הנ"ל לא תלוי בסדר של i,j

לכן:

$$\prod_{i\neq j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \prod_{i>j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

הפואנטה היא שהסימן הוא מכפלה על כל הזוגות אשר לוקחים כל זוג פעם אחת בלבד.

<u>טענה</u>: תהי $\sigma \in S_n$ אז σ תמורה של אוסף הזוגות $\{\{i,j\} : i \neq j\}$ כאשר: $\sigma(\{i,j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$

<u>הוכחה</u>: מה שצריך להוכיח הוא בעצם ש

$$\{\{i,j\} : i\neq j\} = \{\{\sigma(i), \sigma(j)\} : i \neq j\}$$

ובאמת, מכיוון ש-σ תמורה של $\{1,\dots,n\} = [n]$ אגף ימין מוכל באגף שמאל, שהרי σ חח"ע.

$\boxed{\begin{array}{l} RHS = \text{א"י} = \text{אגף ימין} \\ LHS = \text{א"ש} = \text{אגף שמאל} \end{array}}$

לכן מספיק להראות שההעתקה

$$\{\{i,j\}\} \xrightarrow{\sigma} \{\{\sigma(i), \sigma(j)\}\}$$

חח"ע. נניח $\{\sigma(i),\sigma(j)\} = \{\sigma(k),\sigma(l)\}$. נפעיל על שני האגפים את σ^{-1} ונקבל $\{i,j\} = \sigma^{-1}\{\sigma(i),\sigma(j)\} = \sigma^{-1}\{\sigma(k),\sigma(l)\} = \{k,l\}$ ☺

<u>מסקנה מההוכחה</u>: אם σ פועלת על זוגות אז ההופכית שלה היא σ^{-1} אותה מהפעולה על $[n]$.

מסקנה: לכל $\sigma \in S_n$ $\quad \text{sign}\,\sigma = \pm 1$

הוכחה: $\text{sign}\,\sigma = \prod_{i>j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$

מהטענה הקודמת גם במונה וגם במכנה רשומים כל ההפרשים. אבל במונה הם יכולים להופיע בסימן הפוך

דוגמה: $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} \in S_3$.

$$\text{sign}\,\sigma = \frac{3-2}{\cancel{3-1}}\cdot\frac{3-1}{\cancel{3-2}}\cdot\frac{1-2}{2-1} = -1$$

הגדרה: זוג $\{i,j\}\subseteq[n]$ נקרא היפוך אם:

$i>j$ אבל $\sigma(j)>\sigma(i)$ או

$i<j$ אבל $\sigma(i)>\sigma(j)$

כלומר $\{i,j\}$ היפוך של σ אמ"מ $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}<0$

דוגמה: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\in S_4$

ההיפוכים הם $\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}$

מסקנה: $\text{sign}\,\sigma = (-1)^{(\text{מספר ההיפוכים של } \sigma)}$

משפט: תהי $\tau,\sigma\in S_n$ אזי

(א) הסימן הוא כפלי. כלומר $\text{sign}\,\sigma\circ\tau = \text{sign}\,\sigma\cdot\text{sign}\,\tau$

(ב) עבור תמורת הזהות $\text{sign}(id)=1$

(ג) $\text{sign}\,\sigma=\text{sign}\,\sigma^{-1}$

הוכחה:

(ב) ברור מהגדרת sign.

(ג) לפי (א) ו-(ב) $1=\text{sign}(id)=\text{sign}\,\sigma\cdot\text{sign}\,\sigma^{-1}$

$\Rightarrow$ או $1=\text{sign}\,\sigma=\text{sign}\,\sigma^{-1}$

או $-1=\text{sign}\,\sigma=\text{sign}\,\sigma^{-1}$

(א)

$$\text{sign}(\sigma\circ\tau)=\prod_{i>j}\frac{(\sigma\circ\tau)(i)-(\sigma\circ\tau)(j)}{i-j}=$$

$$=\prod_{i>j}\frac{(\sigma\circ\tau)(i)-(\sigma\circ\tau)(j)}{\tau(i)-\tau(j)}\cdot\frac{\tau(i)-\tau(j)}{(\sigma\tau)(i)-(\sigma\tau)(j)}=$$

$$= \prod_{\substack{i\neq j\\ \text{לא סדור}}} \frac{(\sigma\circ\tau)(i)-(\sigma\circ\tau)(j)}{\tau(i)-\tau(j)} \prod_{\substack{i\neq j\\ \text{לא סדור}}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} =$$

$$= \prod_{i\neq j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \prod_{i\neq j} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} = \operatorname{sign}\sigma\cdot\operatorname{sign}\tau$$

ההבדל הוא רק בסדר של המופעים $\tau(i),\tau(j)$ עבור σ של הלוואות

☺

<u>הערה</u>: מההגדרה רואים מיד ש $\operatorname{sign}\sigma$ לא תלוי בסימון הספציפי של $[n]$

<u>הגדרה</u>: מחזור (מעגל) באורך 2 נקרא חילוף

<u>טענה</u>: סימן של חילוף הוא -1

<u>הוכחה</u>: מהם ההיפוכים של (i,j)?
הוא מחליף את i ו-j, ואם לכל $i<k<j$ $(i,k),(k,j)$ היפוכים. בכל k יש 2 היפוכים ועוד (i,j) לבד
$\Leftarrow$ הקבוצה: באופן אי-זוגי ☺

<u>דוגמה</u>: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&2&7&4&5&1&6\end{pmatrix}$

נרשום את σ כמחזור: $\sigma=(1376)$
קל לראות ש- $\sigma=(13)(37)(76)$
ועכשיו יש לנו מכפלת 3 חילופים ולכן $\operatorname{sign}\sigma=(-1)^3$

<u>טענה</u>: כל מחזור ניתן להציג כמכפלה של חילופים.

<u>מסקנה</u>: למעגל באורך k, כלומר מהצורה $(i_1,\dots,i_k)$
הסימן שווה $(-1)^{k-1}$

מסקנה: אם $\sigma \in S_n$ רשומה כמכפלת מעגלים אז $\operatorname{sign}\sigma$ נקבע ע"י זוגיות מספר המעגלים באורך זוגי.

נשים לב! הכתיב לא חייב להיות של מעגלים זרים!

דוגמה: $\operatorname{sign}\left[\underbrace{(y_1\, y_2)}_{\text{זוגי}}(i_1\, i_2\, i_3)\underbrace{(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)}_{\text{זוגי}}\right] = (-1)^2$

דוגמה: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 4 & 3 & 9 & 7 & 5 & 1 & 10 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

הדרך הכי פשוטה לחשב את $\operatorname{sign}\sigma$ היא לרשום אותה כמכפלת מעגלים:

$\sigma = (1\,6\,5\,7)(2\,4\,9)(8\,10)$

יש 2 מחזורים זוגיים $\Leftarrow$ $\operatorname{sign}\sigma = (-1)^2 = 1$.

טענה: סימן תמורה σ הוא (-1) בחזקת מספר השלבים הנדרש לסדר אותה בסדר הרגיל ע"י סדרת חילופים.

ראשית נבין מה הטענה אומרת ע"י דוגמה

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

יש לנו $(2\,4\,1\,3\,5)$ ונרצה להפוך את זה ע"י חילופים ל$(1\,2\,3\,4\,5)$. מן הסתם יש הרבה דרכים לעשות את זה, אבל אנחנו נראה שזוגיות מספר השלבים תמיד זהה

$$\text{3 שלבים}\left\{\begin{array}{ccccc} \underline{2} & 4 & \underline{1} & 3 & 5 \\ 1 & \underline{4} & 2 & \underline{3} & 5 \\ 1 & \underline{3} & \underline{2} & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right.
\qquad
\text{5 שלבים}\left\{\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & \underline{1} & \underline{3} & 5 \\ \underline{2} & 4 & 5 & 3 & \underline{1} \\ 1 & \underline{4} & 5 & 3 & \underline{2} \\ 1 & 2 & \underline{5} & \underline{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \underline{5} & \underline{4} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right.$$

הערה: אפשר לתרגם את השלבים בדוגמה לכתיבה
של σ כמכפלת חילופים
ולכן הזוגיות של מס' השלבים לא תשתנה כי הסימן
של σ קבוע.

למשל מהדוגמה הקודמת את השלבים:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

(תאר רק: $(1\,2)(4\,3)(3\,2)$

הערה: אם $\sigma=(i_1,j_1)\cdots(i_k\,j_k)$ אז
$\sigma^{-1}=(i_k\,j_k)\cdots(i_1\,j_1)$

6 20.3.06
ת. עיוניות

מישהו מחליף את אורן היום.

* * * * *

שאלה: הוכיחו כי כל פרמוטציה ניתנת להצגה כמכפלה של שתי פרמוטציות מסדר 2.

קודם כל, מה זה פרמוטציה מסדר 2? זאת פרמוטציה σ שמקיימת $\sigma\circ\sigma = Id$.

לדוגמה: כל מעגל באורך 2 $(ab)(ab) = Id$

אבל זה לא האופציה היחידה. גם כל מכפלה של מחזורים זרים באורך 2:

$$(24)(35)\circ(24)(35) =$$
$$=(24)\circ(24)\circ(35)(35) = Id$$

סקירה של ההוכחה: $\sigma\in S_n$

א) פירוק למחזורים זרים

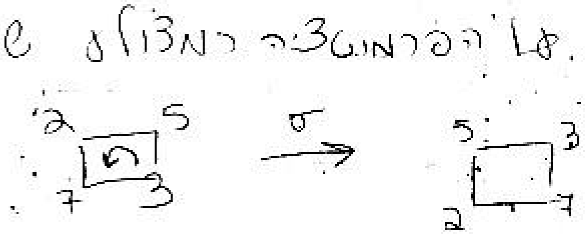
ב) נראה שכל מחזור ניתן להציג כמכפלה של שתי פרמוטציות מסדר 2:

ג) סידור מכפלת הפרמוטציות מסדר 2.

פירוט של ההוכחה:

א) טוב, את זה אנחנו כבר יודעים.

ב) דוגמה: נסתכל על הפרמוטציה כמצולע שמסובבים אותו.



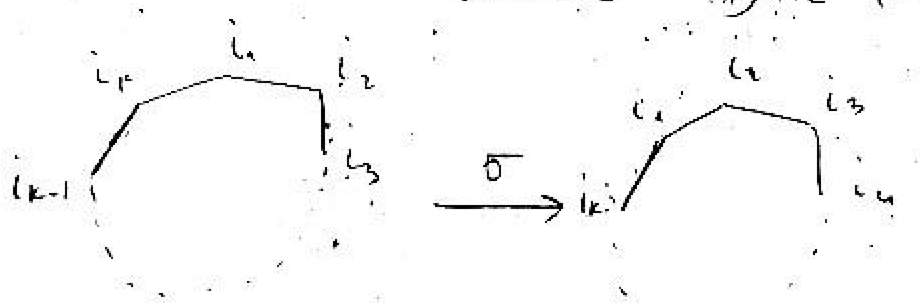
נציג את הפרמוטציה הזו כשני שיקופים:

אם נפעיל שוב את השיקוף נחזור למצב הקודם. אז
שיקוף זו ~~ה~~ הפרמוטציה מסדר 2.
את השיקוף שעשינו אפשר לציין ע"י $(2\,5)(3\,7)$
ועכשיו נעשה עוד שיקוף

שמיוצג ע"י $(2\,3)$ וזה עם מסדר 2.
אז סה"כ יש לנו

$$\sigma=(2\;5\;3\;7)=\underbrace{(2\,3)}_{\text{מסדר } 2}\underbrace{(2\,5)(3\,7)}_{\text{מסדר } 2}$$

הגישה הכללית תממש את אותו הרעיון:
נניח $\sigma=(i_1\; i_2\; \ldots\; i_k)$
נציג אותה כמצולע

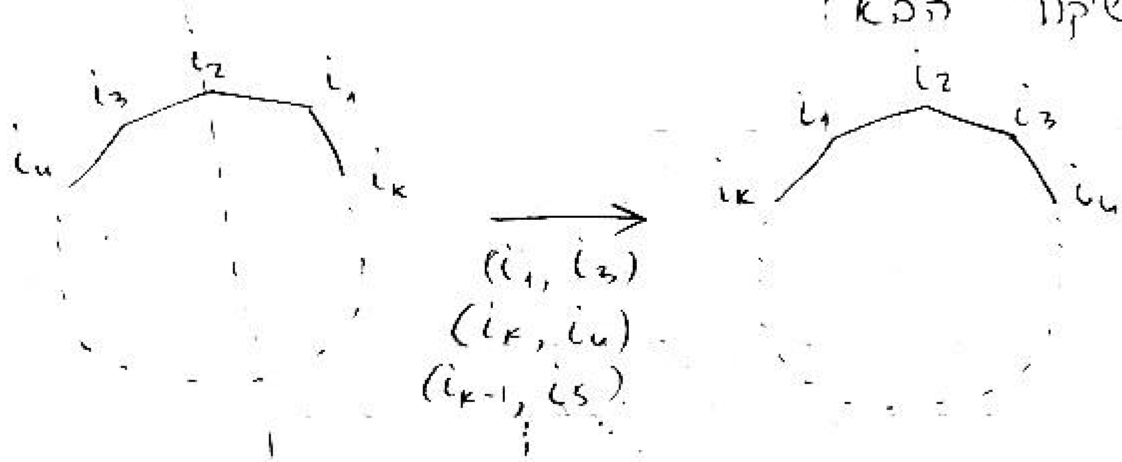


נציג את זה כמכפלה של שני שיקופים:

(i_1, i_2)
(i_k, i_3)
(i_{k-1}, i_4)

(7)

והשיקוף הבא:



קיבלנו את מה שרצינו - שיקופים הם תמורות מסדר 2 והצגנו את המחזור כמכפלה של שני שיקופים.

אז כרגע תהי $\sigma \in S_n$ פרמוטציה. נפרק את σ למכפלה של מחזורים זרים $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$. כעת כל τ_i ניתן לפרק למכפלה של שתי פרמוטציות מסדר 2. נסמן $\tau_i = \tau_{i_1} \circ \tau_{i_2}$.

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k =$$
$$= \tau_{11} \circ \tau_{12} \circ \tau_{21} \circ \tau_{22} \circ \cdots \circ \tau_{k1} \circ \tau_{k2} =$$
$$= \tau_{11} \circ \tau_{21} \circ \tau_{12} \circ \tau_{22} \circ \cdots \circ \tau_{k1} \circ \tau_{k2} =$$
$$= \underbrace{\tau_{11} \circ \tau_{21} \circ \cdots \circ \tau_{k1}}_{(*)} \circ \underbrace{\tau_{12} \circ \tau_{22} \circ \cdots \circ \tau_{k2}}_{(**)}$$

(*) מורכב ממכפלה של פרמוטציות τ_{i_1} שכן מסדר 2 וכיוון המכפלה היא של פרמוטציות זרות ולכן נקבל שהמכפלה היא מסדר 2. באותו אופן עבור (**). קיבלנו גם כן, ש-σ ניתנת לכתיבה כמכפלה של שתי פרמוטציות (לאו דווקא זרות) מסדר 2.

מש"ל ☺

חלוקת פולינום

אנו נעסוק בחוג הפולינומים $F[x]$ כאשר F שדה
דרגת פולינום כו החזקה הגדולה ביותר בפולינום עם מקדם שונה מאפס, ונסמנה ($deg(f)$ או $d(f)$)
ברור ש $d(f+g) \le max(d(f), d(g))$
$d(f \cdot g) = d(f) + d(g)$

__תזכורת__: נתבונן בחוג השלמים $\mathbb{Z}$. לכל $m, n \in \mathbb{Z}$
קיים t, r יחיד כך ש $m = tn + r$ ו- $r < n$

__טענה__: יהיו f, g פולינומים מעל שדה F. ונניח כי $f \neq 0$ אז קיימים פולינומים יחידים q ו- r מעל F כך ש $g = qf + r$ ו- $d(r) < d(f)$

__הוכחה__: אם $d(g) < d(f)$ אזי
$g = 0 \cdot f + g$
ו- $d(g) < d(f)$ וסיימנו
לכן נניח ש- $d(f) \le d(g)$. נוכיח באינדוקציה של הדרגה של g
אם $d(g) = 0$ אז $g = c_1$ קבוע ולכן $f = c_1$ קבוע וברור שקיים c_3 קבוע כך ש $c_1 = c_2 c_3$
כי $c_1, c_2 \in F$ והרי ב F יש חילוק.
נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n.
$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$ $g(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$
כאשר $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ ו- $m \le n$
נגדיר $g_1 = g - \frac{b_n}{a_m} x^{n-m} \cdot f$

ברור ש- $deg(g_1) < n$. לפי הנחת האינדוקציה קיימים q_1, r_1 כך ש $g_1 = q_1 f + r_1$ ו $deg(r_1) < d(f)$

והרי

$$g = g_1 + \frac{b_n}{a_m} x^{n-m} f =$$

$$= \frac{b_n}{a_m} x^{n-m} f + q_1 f + r_1 =$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_m} x^{n-m} + q_1\right) f + r_1$$

נסמן $q = \frac{b_n}{a_m} x^{n-m} + q_1$ ו- $r = r_1$

ואז $g = qf + r$ ו- $d(r) < d(f)$

ערשיו נורית וחידות:

נניח שיש 2 הצגות שונות:

$$g = q_1 f + r_1 = q_2 f + r_2$$

$$\Rightarrow f(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

אם $q_1 \neq q_2$ נקבל ש הדרגה בצד שמאל שווה לדרגה בצד ימין וזה לא יתכן כי $d(f) > d(r)$:

<u>הערה</u>: בסימונים לעיל q נקרא מנה ו- r נקרא שארית, והתהליך למציאת q, r נקרא החילוק.

<u>הגדרה</u>: יהיו f, g פולינומים מעל F. אני אומרים ש f מחלק את g (או f גורם של g) אם קיים פולינום h כך ש- $h \cdot f = g$ ונסמן $f | g$.

<u>הגדרה</u> פולינום d מעל F נקרא המחלק המשותף המקסימלי (ממם) של f ו- g אם $d | f$ וגם $d | g$ ולכל e כך ש $e | f$ ו- $e | g$ מתקיים $e | d$.

<u>דוגמה</u>: הממם של 100 ו- 30 הוא $d = 10$.

דוגמה לחילוק פולינומים:

חלקו את הפולינום $g = x^4 + x - 1$

בפולינום $f = x - 1$

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 + x^2 + x + 2 \longleftarrow \text{מנה} \\
\hline
x^4 + x - 1 \;\big|\; x - 1 \\
x^4 - x^3 \\
\hline
\quad x^3 + x \\
\quad x^3 - x^2 \\
\hline
\qquad x^2 + x - 1 \\
\qquad x^2 - x \\
\hline
\qquad\quad 2x - 1 \\
\qquad\quad 2x - 2 \\
\hline
\qquad\qquad \underline{\underline{1}} \longleftarrow \text{שארית}
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad x^4 + x - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 2) + 1$

ונשים לב $d(1) < d(x-1)$

$d(r) < d(f)$

במקרה הזה מאחר ויש $r \neq 0$ $f \nmid g$

<u>הגדרה:</u> שדה F נקרא <u>סגור אלגברית</u> אם לכל פולינום שאינו קבוע עם מקדמים ב-F יש שורשים ב-F. ר"ל אם

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$: $d(P(x)) \geq 1$

אז קיים $\alpha \in F$ כך ש $P(\alpha) = 0$.

- פולינום מתוקן הוא פולינום שהמקדם המוביל בו הוא 1.

לדוגמה מתוקן $x^{100} + 3x^2 + 1$

לא מתוקן $2x^2 + 5$

פולינום לינארי (או גורם לינארי) הוא פולינום מתוקן ממעלה 1 לדוגמה: $x-\alpha$.

משפט: אם שדה סגור אלגברית אז לפולינום ממעלה n עם מקדמים ב-F יש n שורשים (כולל ריבויים), כלומר הוא מתפרק לגורמים לינאריים

$$P(x) = a_0 (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

כאשר $x_1, \ldots, x_n \in F$.

דוגמה: $p(x) = (x-1)^2$: אז $x_1=1$ הוא שורש של $p(x)$ עם ריבוי 2.

הערה: לפי ההגדרה יש לפחות שורש אחד.
צריך להוכיח שיש n שורשים.

נוכיח באינדוקציה על n (מעלת הפולינום)

$n=1$: $P(x) = a_1 x + a_0$ אז $P(x) = a_1\left(x + \frac{a_0}{a_1}\right)$

נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n.
יהי $P(x)$ פולינום ממעלה $n \geq 2$ מכיוון ש-F סגור אלגברית קיים שורש אחד לפחות ב-F.
ונסמנו x_1, כך ש $P(x_1)=0$. נחלק חילוק עם שארית את $P(x)$ ב- $x-x_1$:

$$P(x) = (x-x_1)q(x) + r(x)$$

$d(r(x)) < d(x-x_1) = 1$ לכן $r(x)=c$ פולינום קבוע. ולכן

$$0 = P(x_1) = (x_1-x_1)q(x_1) + c = 0 + c = c$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-x_1)q(x)$$

$$\Rightarrow \deg(q(x)) = n-1$$

מהנחת האינדוקציה קיימים $a_0, x_2, \ldots, x_n \in F$ כך ש

$$p(x) = (x-x_1)q(x) = (x-x_1)a_0(x-x_2)\cdots(x-x_n) = a_0(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

<u>מסקנה:</u> יהי $f \in F[x]$ אזי $\alpha \in F$ הוא
שורש של f אמ"מ $x-\alpha$ מחלק את f.
<u>הוכחה:</u> טריוויאלית.

<u>המשפט היסודי של האלגברה:</u> שדה המרוכבים $\mathbb{C}$
הוא סגור אלגברית.

<u>הערה:</u> יש עוד שדות סגורים אלגברית, אפילו עם אפיון
סופי. (נלמד על זה במבנים אלגבריים)

(10) 27.3.06
ת. ענארית

היום ננסה לדבר על דטרמיננטות ועל פולינומים ונכיר אובייקט חדש שנקרא חוג.

חוגים

<u>תזכורת</u>: הגדרת שדה $(F,+,\cdot)$ של F מוגדרות שתי פעולות דו מקומיות שמקיימות

- $+$: סגירות, חילופיות, אסוציאטיביות, קיום אדיש ("0") וקיום נגדיים.
- $\cdot$: סגירות, חילופיות, אסוציאטיביות, קיום אדיש ("1") וקיום הפכיים פרט ל-0.
- דיסטריבוטיביות

מה ההבדל בין חוגים לשדות? יש הבדלים רק בכפל. הכפל בחוגים לא חייב להיות איבר יחידה ואז: כמובן אם אין זה לדבר על הפכיים. חוץ מזה לא תמיד דורשים שהכפל יהיה קומוטטיבי.

<u>דוגמה</u>: $M_n(F)$ חוג לא קומוטטיבי עם יחידה אבל בלי איבר הפכי (בהכרח).

אנחנו נתרכז בחוגים קומוטטיביים עם יחידה (חק"י). כלומר הם כמו שדה פרט לאקסיומת קיום ההפכי.
מתברר שזה מספיק בשביל לפתח תורה עשירה מאוד.

<u>דוגמאות</u>:

(1) $\mathbb{Z}$ השלמים
(2) $F[x]$ הפולינומים, כאשר הפולינום הקבוע 1 הוא היחידה
(3) $F[x_1,\dots,x_n]$ כאשר המשתנים $x_1,\dots,x_n$ מתחלפים ביניהם.
(4) חוג השאריות $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ל-n שלם כלשהו לאו דווקא ראשוני.

את הפעולות מושים ב- $\mathbb{Z}$ עם חשבון שארית בחלוקה ב-m.
בסמסטר הקודם ראינו את קיום כל התכונות של חוג. ואם
ק ראשוני אז זה שדה.

<u>הגדרה:</u> בחוג R איבר $a\in R$ נקרא $\boxed{\text{הפיך}}$ אם קיים $b\in R$ כך ש- $ab=ba=1$.

אגב, כאן משום שמדובר בחוג קומוטטיבי אז a הפיך משני הצדדים אבל אם החוג לא קומוטטיבי זה לא בהכרח נכון ויש איברים הפיכים רק מצד אחד. במטריצות ראינו שזה לא יכול להיות, אבל יש דוגמאות אחרות שנראה בהמשך.

כמו שב- $M_n(F)$ אפשר להגדיר דטרמיננטה גם לחוג R אפשר להגדיר ב- $M_n(R)$ את מושג הדטרמיננטה ולקבל שרוב התכונות שראינו אצל שדות נשארות.

<u>התכונות של דטרמיננטה</u>

(1) $A\in M_n(R)$ $\quad \det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}\sigma\prod_{i=1}^{n}A_{i,\sigma(i)}$

כי ההגדרה מסודרת כי בחוג יש חיבור וכפל

(2) $\det$ מולטי-לינארית כפונקציה של העמודות או של השורות. כלומר

$$\det(v_1,\dots,av_i+bv_i',\dots,v_n)=a\det(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+b\det(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)$$

(3) אם $v_i=0$ אז $\det(v_1,\dots,v_n)=0$

(4) אם $v_i=v_j$ לאיזה $i\neq j$ אז $\det(v_1,\dots,v_n)=0$

(5) מה קורה לדטרמיננטה בעקבות פעולות דרוג:

(א) $R_i\leftrightarrow R_j$ מכפיל את הדטרמיננטה ב- -1

(ב) $R_i\to\lambda R_i$ מכפיל את הדטרמיננטה פי λ

(ג) $R_i\to R_i+aR_j$ לא משנה את הדטרמיננטה

(6) $\det A=\det A^t$

$\det(AB)=\det A\cdot\det B$

(11)

אם $A=(a_{ij})\in M_n(R)$ ו-R חוג, מסמנים את $A_{(ij)}$ להיות המינור ה-ij, כלומר המטריצה המתקבלת מחיקת העמודה והשורה של a_{ij} (שורה i עמודה j).

(7) נוסחת פיתוח לפי שורה i:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{(ij)}|$$

(8) לפי טור j:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{(ij)}|$$

(9) מטריצת ה Adjoint היא:

$$Adj(A)_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{(ji)}|$$

ומתקיים $A\cdot AdjA=AdjA\cdot A=\det A\ I$

<u>מסקנה</u> $A\in M_n(R)$ מטריצה הפיכה (משני הצדדים) אמ"מ $|A|$ הפיך ב-R.

<u>הוכחה</u> $(\Leftarrow)$ A הפיכה $\Leftarrow AB=I \Leftarrow |A||B|=1$ $\Leftarrow$ $|A|$ הפיך.

$(\Rightarrow)$ ע"פ (9) $A^{-1}=1/\det(AdjA)$ ☺

<u>דוגמה</u> $A\in M_n(\mathbb{Z})$ הפיכה מעל השלמים אמ"מ $|A|=\pm1$. כי ±1 הם האיברים ההפיכים היחידים ב-$\mathbb{Z}$.

<u>הערה</u> יש תכונות שנכונות רק עבור שדות ולא אם הם חוגים קומוטטיביים: למשל: אם $A\in M_n(F)$, ונסתכל על A: $A:F^n\to F^n$ אז A חח"ע $\Leftrightarrow$ A על (משפט המימדים). זה לא נכון כש-$A\in M_n(R)$ ו-R חוג.

למשל, במקרה ש $n=1$ ו-$\mathbb{Z}=R$ אז $A:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ע"י $A(z)=az$ A חח"ע אבל לא על.

<u>הערה</u> ב-$M_n(F)$ A הפיכה אמ"מ $|A|\neq0$. כי ב-F אם $a\neq0$ אז הוא הפיך. אבל בחוג להיות שונה מאפס לא מהווה שקול להיות הפיך.

טענה:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

מתרגול היה דריך להוכיח שזה נכון לכל שדה F ולכל $x_1, \ldots, x_n \in F$. אבל אחנו נוכיח משהו כללי יותר: בעצם נוכיח שבכל שדה F השוויון הנ"ל מתקיים כפולינומים מעל המשתנים $x_1, \ldots, x_n$. כלומר שוויון מעל החוג $F[x_1, \ldots, x_n]$.

<u>הערה</u>: אם $p, q \in F[x]$ ולכל $a \in F$ $p(a) = q(a)$ זה לא אומר ש$p(x) = q(x)$. חשוב להבין שפולינומים זה לא רק פונקציות. פולינום הוא בעצם n-יה של סקלרים שהם המקדמים של המשתנים.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על n.

$n=2$: $\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}\right| = (x_2 - x_1)$ ✓

$2<n$:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right| \underset{\text{פעולה אלמנטרית}}{=}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & & \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & & & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}\right| \underset{a^k - b^k = (a-b)\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-j-1}}{=}$$

$$= \prod_{j>1}(x_j - x_1) \left|\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}\right| \underset{\sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} - b\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-j-1} = a^k}{=}$$

$$= \prod_{j>1}(x_j - x_1) \left|\begin{matrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^{n-2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & x_n^{n-2} \end{matrix}\right| \underset{\text{פיתוח לפי שורה ראשונה}}{=} \prod_{j>i}(x_j - x_i)$$

(12) 3.4.06
ת. לינארית

אורן מבקש שנפנה אליו אם משהו לא ברור:

orendi@math.huji.ac.il

אצלא להלחץ אם התרגיל מהיר מדי. אם משהו לא ברור
אורן יסביר הכל באופן אישי.

דטרמיננטה זה לא מסובך. גם פולינומים זה לא מאוד מסובך.
אבל זה יכול להיות קצת מבלבל כי לפעמים רוצים להסתכל
עליהם לא כפונקציה, אלא כ"דבר" פורמלי לחלוטין.

חישובי דטרמיננטות:

(1) המספרים = 20604, 53227, 25755, 20927, 78421 – הם מתחלקים ב-17

הוכח כי:

$$A = \det\begin{pmatrix} 2&0&6&0&4\\ 5&3&2&2&7\\ 2&5&7&5&5\\ 2&0&9&2&7\\ 7&8&4&2&1 \end{pmatrix} = 17k$$

הוכחה: הרעיון הוא להסתכל על הפיתוח העשרוני של המספרים האלה $a_1a_2a_3a_4a_5 = 10^4a_1+10^3a_2+10^2a_3+10a_4+a_5$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_4 & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{matrix} \end{pmatrix} = 17\cdot\left|\begin{pmatrix} \cdots & \begin{matrix} n_1 \\ \vdots \\ n_5 \end{matrix} \end{pmatrix}\right|$$

$v_5+10v_4+10^2v_3+10^3v_2+10^4v_1$ $\qquad \forall i\ x_i = 17n_i$

② הוכיחו כי לכל $n>2$:

$$\left|\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & & n+1 \\ \vdots & & & \vdots \\ n & \cdots & & 2n-1 \end{pmatrix}}_{=A}\right| = 0$$

הוכחה:

$$|A| \underset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ \vdots \\ R_n \to R_n - R_{n-1}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

③ הוכיח כי

1 באלכסון ומעליו
-1 מתחתיו
0 בשאר

$$\left|\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \\ & -1 & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_n}\right| = a_n =$$ איבר n של פיבונאצ'י

הוכחה: צריך להראות ש $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

(בסיס ל- $n=1$: $|(1)| = 1$

$n=2$: $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2$

עכשיו נפתח לפי העמודה הראשונה:

$$\det A_n = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & \ddots & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=A_{n-1}} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \\ & -1 & 1 & 1 \\ & & \ddots & 1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

פיתוח שלה שני לפי שורה ראשונה

$$= |A_{n-1}| + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & \ddots & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{=A_{n-2}} = \det A_{n-1} + \det A_{n-2}$$

4 טענה: (טובה לשב)

$$A^t B^t = (BA)^t$$

הוכחה: נשווה איברים:

$$(BA)^t_{ij} = (BA)_{ji} = \sum_K B_{jK} A_{Ki}$$

$$(A^t B^t)_{ij} = \sum_K A^t_{iK} B^t_{Kj} = \sum_K A_{Ki} B_{jK}$$

5 כלל: דטרמיננטה של מטריצות בלוקים

$$\left|\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}\right| = |A||B|$$

"הוכחה": ראינו שבחשבון לחשב דטרמיננטה ניתן לבצע פעולות דירוג בסיסיות (החלפת שורות / עמודות, $R_i \to R_i + aR_j$ / $C_i \to C_i + aC_j$) ניתן להביא כל מטריצה A לצורה אלכסונית / משולשית. ואז הדטרמיננטה היא פשוט כפל איברי האלכסון. במקרה של $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$: הפעולות מתבצעות על כל בלוק בנפרד ונקבל בסוף $\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$ כאשר $|A| = \pm|A'|$, $|B| = \pm|B'|$ ו- $\left|\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\right| = \pm\left|\begin{pmatrix} A' & \\ & B' \end{pmatrix}\right|$, אם אז A', B' משולשיות עליונות. אז $\left(\begin{array}{c|c} A & C' \\ \hline & B' \end{array}\right)$ משולשית עליונה ולכן מתכונות. הדטרמיננטה:

$$\left|\left(\;.\;\right)\right| = |A'||B'| = |A||B|$$

לאן נעלם ה-$\pm$? למעשה יכולנו בכלל לא, לרשום אותם ולעשות ככה שהמטריצה תספוג את השינויים. למשל אם החלפנו שתי שורות אז התחלף הסימן במקרה כזה נכפול איזו שורה ב- -1 ונחזור לדטרמיננטה המקורית.

טענה: $A \, Adj(A) = |A| I$

מסקנה מהטענה: A הפיכה אמ"מ $|A|$ הפיכה.

הוכחת הטענה: סימון: הדלתא של קרונקר היא הפונקציה על שמוגדרת ע"י $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

טענת עזר: $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} A(k,j) = \delta_{ik} |A|$

כאשר $A \in M_n(F)$ ו- $A(k,j)$ המינור ה-(k,j) של

הוכחה: עבור מטריצה A נגדיר מטריצה A' באופן הבא:

$$A' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ i \\ k \\ \\ \end{array}$$

כלומר במקום שורה k רשמנו את שורה i
אם $i=k$ לא משתנה
דבר ו-
$A = A'$

צד אחד $|A'| = \delta_{ik} |A|$

צד שני נפתח את $|A'|$ לפי שורה k ונקבל

$$|A'| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \underset{a'_{ij}}{a_{kj}} A(k,j) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} A(k,j)$$

נחזור להוכחת הטענה הראשית: נזכור את ההגדרה:

$$(Adj A)_{ij} = (-1)^{i+j} A(j,i)$$

$$\Rightarrow (A \, Adj A)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (Adj A)_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{j+k} A(k,j) = \delta_{ik} |A|$$

$$\Rightarrow A \, Adj A = |A| I$$

(4) 24.4.06
ת.ל. אורית

<u>הודעה</u>: תרגיל 6 להגשה עוד שבועיים.

<u>הערה</u>: בתרגיל הקודם דיברנו על שדה עם p איברים. הסבר ההגדרה $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ בעתיד (ראה משפט שלכל מספר סופי יש שדה יחיד עד כדי איזומורפיזם שזה מספר האיברים בו.

<u>הערה</u>: משפט סילווסטר - מדבר על דרגה של מטריצות

$$r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

כאשר $A,B\in M_n(F)$.

השתמשנו המשפט הנ"ל, רק להוכיח שאם $r(A)=n-1$ אז $r(\mathrm{adj}\,A) = 1$.

היום נוכיח את המקרה הפרטי של משפט סילווסטר שאומר שאם $AB=0$ (כלומר $r(AB)=0$) אז $r(A)\le n-r(B)$

<u>הוכחה</u>: $r(B)$ שאומר מה מימד תמונת B. כלומר, מתמונת B יש $r(B)$ איברים בת"ל. ניקח אותם ונרחיב אותם לבסיס למרחב. (נתבונן ב-A לפי הבסיס הזה.

$$[A]_D = \left(\underbrace{0}_{r(B)\ \text{עמודות}} \;\middle|\; * \right) \Rightarrow r(A) \le n-r(B)$$

למה זה נכון? $AB=0$ כלומר A שולחת את תמונת B לאפס והבסיס הזה יש $r(B)$ איברים מתמונת B (:

<u>נקודה למחשבה</u>: איך מעבירים את ההוכחה הזאת למקרה הכללי?

הגדרה: V מ"ו מעל שדה F. T אופרטור לינארי על V (כלומר $T:V\to V$). $\lambda\in F$ "יקרא" ערך עצמי של T אם קיים $0\neq v\in V$ כך ש $Tv=\lambda v$ הנ"ל v יקרא וקטור עצמי שמתאים ל-λ של T.

באותו אופן מגדירים וקטור עצמי וערך עצמי של מטריצה $A\in M_n(F)$ שהיא אופרטור לינארי על F^n. λ ו-v ערך עצמי ווקטור עצמי אם $Av=\lambda v$.

הגדרה: אוסף הו"ע של A שמתאימים לע"ע λ יחד עם וקטור האפס "יקרא" המרחב העצמי, ב-V_λ שמתאים ל-λ.

כלומר $V_\lambda=\{v : Tv=\lambda v\}$

נשים לב ש: V_λ באופן מיידי הוא ת"מ של V.

ע"י העברת אגפים נקבל ש- $V_\lambda=\{v:(T-\lambda I)v=0\}$

כלומר $V_\lambda=\ker(T-\lambda I)$

בכתיב של מטריצות $V_\lambda=\ker(A-\lambda I)$.

לכן λ ע"ע של A אמ"מ $V_\lambda\neq 0$ כלומר ל- $A-\lambda I$ יש גרעין לא טריוויאלי.

הערה: 0 ע"ע של A $\Longleftrightarrow$ ל $A-0I=A$ יש גרעין לא ריק $\Longleftrightarrow$ A לא הפיכה $\Longleftrightarrow$ יש שורות/עמודות תלויות.

עוד הסתכלות מאוד נוחה: λ ע"ע של A אמ"מ 0 ע"ע של $A-\lambda I$.

דוגמה

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. זו מטריצה סינגולרית ולכן 0 הוא ע"ע שלה. מהם הו"ע של 0: $Av=0v=0$

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+2y=0\\2x+4y=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=-2y$$

$V_0=\{c\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} : c\in F\}$ ורואים ש- $\dim V_0=1$.

האם 1 הוא ע"ע של A?

$$V_1 = Ker(A - 1\cdot I) = Ker\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= Ker\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}$$

דרגת $\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}$ היא 2 ולכן $V_1 = \emptyset$ כלומר
1 אינו ע"ע

באופן כללי λ ע"ע של A אמ"מ $Ker(A-\lambda I)\neq 0$
אמ"מ $A-\lambda I$ לא הפיכה אמ"מ $|A-\lambda I| = 0$.

<u>הגדרה:</u> <u>הפולינום האופייני</u> של המטריצה A הוא

$$p_A(x) = |A - xI|$$

לכן במילים אחרות, λ ע"ע של A אמ"מ λ שורש של $P_A(x)$, כלומר $P_A(\lambda) = 0$.
וזה נותן לנו עוד הוכחה לכך שיש לכל היותר n ע"ע - כי לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים

נשתמש בזה בשביל למצוא את הע"ע של A

$$P_A(x) = \begin{vmatrix}1-x & 2\\ 2 & 4-x\end{vmatrix} = (1-x)(4-x) - 2\cdot 2 =$$

$$= x^2 - 5x = x(x-5)$$

לכן $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, כלומר 5 עצמו ע"ע
ו- $\dim V_5 = \underline{1}$

<u>לסיכום:</u> השיטה למצוא ו"ע של ע"ע נתון λ היא לפתור
את מע' המשוואות ההומוגנית $(A-\lambda I)v = 0$

מהמשפט שו"ע של ע"ע שונים $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ בת"ל, נובע מיידית ש-

$$\sum_{i=1}^{m} \dim V_{\lambda_i} \le n$$

הגדרה: $A\in M_n(F)$ לכסינה (diagonizable) אם קיימת
מטריצה ריבועית הפיכה $P\in M_n(F)$ שמקיימת
$P^{-1}AP$ אלכסונית.
במילים אחרות, A לכסינה אם היא דומה לאלכסונית.

משפט: $A\in M_n(F)$ לכסינה אמ"מ יש ל-F^n בסיס B
המורכב מו"ע של A. במקרה כזה, $P=[Id]^B_E$
(אומר P המטריצה שעמודותיה הם איברי B) ו-
$D=P^{-1}AP$ אלכסונית שבאלכסונה נמצאים הע"ע
שמתאימים לו"ע הנ"ל.
במקרה של $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ $\lambda=0,5$
(קם) ש-A לכסינה.
באופן כללי אם $B=(v_1,\dots,v_n)$ ו"ע עם $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$
אז

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$ לכסינה? - בוודאי שכן. הרי היא כבר
אלכסונית.
לגבי הבסיס הסטנדרטי $\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\}$ מלכסן אותו!
המשפט אם אומר שאפשר להחליף את סדר הוקטורים
הבסיס ומטריצה עדיין אלכסונית.

$$\{e_1,e_2\}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$$

$$\{e_2,e_1\}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\{ae_2,be_1\}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$$

<u>דוגמה:</u> $A=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-4\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$$

A לכסינה אמ"מ V_1 ממימד 2

נסמן ש- $\dim V_1<2$. אם בשלילה $\dim V_1=2$ אז יש 2 ו"ע מה"ל ובפרט יש P שמקיימת $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

לכן $A=I$ וזו סתירה.

אז זו דוגמה למטריצה שהיא אינה לכסינה.

באופן כללי, לכל λ המטריצה $\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$ לא לכסינה

דימיון זה משהו הרבה יותר חזק מפעולות אלמנטריות. הרי את A לו יכולני להעביר למטריצה אלכסונית ע"י פעולות אלמנטריות אבל זה ממש לא אותו דבר. דימיון שומר דטרמיננטה, עקבה ועוד דברים נפלאים אחרים.

פעולות אלמנטריות לא משמרות את הדברים הללו.

<u>דוגמה</u> $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$

באופן כללי: אם $A=\begin{pmatrix}a_1&*\\&\ddots\\ *&a_n\end{pmatrix}$ אז

$$P_A(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$$

לכן בדוגמה $P_A(x)=(x-1)(x-3)$ אז $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$

מה הו"ע?

$\lambda=1$ $\quad (A-I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow V_1=\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$

$\lambda=3$ $\quad (A-3I)v=\begin{pmatrix}-2&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow V_3=\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$

$\dim V_1=\dim V_3=1$. זה לא היה ברור מראש כי חייב להיות $0<\dim V_1,\dim V_3$ ולא יכול להיות שאחד מהם ממימד 2.

לכן ניקח שאם $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ אז

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

אז $P'=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\quad (P')^{-1}AP'=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$

אז $P''=\begin{pmatrix}\pi&1\\\pi&0\end{pmatrix}$ $\quad (P'')^{-1}AP''=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$

לא משנה איזה וקטורים עצמיים ניקח, בסוף במטריצה המלוכסנת יופיעו הערכים העצמיים.

<u>דוגמה:</u> $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ אז, $P_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$$V_1=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לכן A לכסינה כי $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ בת"ל וידוע שהם גם בת"ל ב- $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ לפי המשפט.

אז $P^{-1}AP$ אלכסונית עבור $P=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

<u>דוגמה:</u> $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ אז $P_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

אבל בניגוד לדוגמה הקודמת:

$$V_1=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אז המטריצה הזאת <u>לא</u> לכסינה כי מצאנו רק שני וקטורים בלתי תלויים

(17) 1.5.06

ת. ליניארית חג שמח!

צורה אלכסונית של מטריצה היא יפהפיה, כי אז אפשר לעשות עליה כל מיני פעולות בקלות יחסית.

בתרגול הקודם ראינו שתי מטריצות ב-$M_3(\mathbb{R})$ עם אותו פולינום אופייני ולכן אותם ע"ע. אבל אחת מהן הייתה לכסינה והשניה לא.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad p(x)=(x-1)^2(x-2) \qquad \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=B$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2$$

$V_1=\ker(A-I)=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$; $V_1=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$V_2=\ker(A-2I)=Sp\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$; $V_2=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

למה A לכסינה ו-B לא? ראינו ש-A לכסינה אמ"מ קיים ל-V בסיס של ו"ע של A.

$\sum_{\lambda \text{ ע"ע}} \dim V_\lambda$ מסמן את המס' המירבי של ו"ע בת"ל ב-V.

מכאן ש-A לכסינה אמ"מ $\sum_{\lambda \text{ ע"ע}} \dim V_\lambda=n$

<u>הגדרות:</u> יהיו F שדה, $A\in M_n(F)$ ו-$\lambda\in F$.

(ר"א) <u>הריבוי האלגברי</u> של λ ב-A הוא החזקה של $(x-\lambda)$ ב-$p_A(x)=|xI-A|$.

(ר"ג) <u>הריבוי הגיאומטרי</u> של λ ביחס ל-A הוא $\dim V_\lambda$.

<u>הערות:</u>

(1) עבור המטריצות שדנו בהן קודם $p(x)=(x-1)^2(x-2)$
הריבוי האלגברי של 1 הוא 2 ואילו הר"א של 2 הוא 1.
נשים לב שר"א תלוי אך ורק בפולינום האופייני.

(2) A לכסינה אמ"מ $\sum$ ר"ג $=n$.

<u>טענה:</u> לכל A ולכל ע"ע λ מתקיים ר"א $\le$ ר"ג.

<u>הוכחה:</u> יהי k הר"ג של λ ביחס ל-A כלומר $\dim V_\lambda = k$

כלומר יש k וע"ע בת"ל ב-V_λ. נסמנם $v_1,\dots,v_k$ ונשלים

אותם לבסיס למרחב: $B=\{v_1,\dots,v_k,\dots,v_n\}$ איך איראה

A ביחס לבסיס הנ"ל?

$$[A]_B=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda_k & \end{array}\right)$$

$\forall\ 1\le i\le k \quad Av_i=\lambda v_i$

$\Rightarrow [Av_i]_B=[\lambda v_i]_B=\lambda e_i$

בגלל הפ"א לא משתנה תחת דמיון מטריצות לכן

$p_{[A]_B}(x)=p_A(x)=|xI-[A]_B|=$

$$=\det\left(\begin{array}{ccc|c} x-\lambda & & 0 & * \\ & \ddots & & \\ 0 & & x-\lambda_k & \boxed{} \end{array}\right)=(x-\lambda)^k\cdot p(x)$$

פיתוח לפי k העמודות הראשונות.

$\Leftarrow$ חזקת $(x-\lambda)$ ב-$p_A(x)$ היא לפחות k, כלומר

הר"א $\le k =$ ר"ג

<u>טענה:</u> A לכסינה $\Leftrightarrow$ Σר"ג $= n$ $\Leftrightarrow$ לכל ע"ע ר"א = ר"ג

Σר"א $= n$!

<u>הערה:</u> לא תמיד Σ ר"א $= n$!

דוגמה: $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ $\Leftarrow$ $p_A(x)=\begin{vmatrix}x&-1\\1&x\end{vmatrix}=x^2+1$

ול-$p_A(x)$ אין אף שורש בממשיים

אבל המרוכבים לעומת זאת, למטריצה יש שני ע"ע שונים

ולכן לכסינה.

לא כל מטריצה מעל המרוכבים היא לכסינה
למשל המטריצה $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ לא לכסינה מעל שדה!
שהרי אם היא הייתה לכסינה אז היא הייתה דומה למטריצת
היחידה אבל ברור שלא כך יכול להיות.

<u>טענה:</u> $A\in M_n(F)$; λ ע"ע של A $p(x)\in F[x]$ מקיים
$p(A)=0$. אז $p(\lambda)=0$.

<u>הוכחה</u> (בתרגול) נראה ש-v ו"ע עם ע"ע λ של A אז
v ו"ע עם ע"ע $p(\lambda)$ של $p(A)$.
במקרה הנ"ל $p(\lambda)$ ע"ע של $p(A)$ אבל $p(A)=0$ ולמטריצת
האפס יש רק ע"ע אחד והוא אפס $\Leftarrow p(\lambda)=0$. ☺

<u>מסקנות:</u>

1) אם $T^2=T$ אז T ט"ל הטלה.
אם $A^2=A$ אז הע"ע צריכים לקיים $p(x)=x^2-x$ שהרי
$A^2-A=0$ $\Leftarrow$ הע"ע של A מקיימים $\lambda^2=\lambda$ כלומר
$\lambda=0,1$.

2) אם $A\in M_n(F)$ נילפוטנטית (כלומר קיים k כך ש- $A^k=0$)
אז הע"ע של A הם 0.

(19) 8.5.06

ליניארית

הערות ותלונות לבודק: haielc@pob.huji.ac.il

טענה: A דומה למטריצה משולשית אמ"מ הפ"א של A מתפרק למכפלת גורמים ליניאריים

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ זה ברור כי אם $A \sim \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$ אז

$$p_A(t)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

$(\Rightarrow)$ $p_A(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים לכן יש ל-A ע"ע λ עם ו"ע $v \neq 0$ ונשלים את v לבסיס B למרחב V: $B=\{v_1=v, v_2, \dots, v_n\}$ ונקבל:

$$[A]_B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A' \\ 0 & \end{array}\right) = P^{-1}AP$$

נשים לב ש- $p_A(t) = (t-\lambda)\,p_{A'}(t)$

מההנחה ש-$p_A(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים נובע ש-$p_{A'}(t)$ מתפרק לגורמים ליניאריים

למעשה אנחנו עושים פה אינדוקציה. מהנחת האינדוקציה (על n כשבסיס האינדוקציה מיידי) נקבל ש-A' דומה למשולשית, כלומר יש בסיס B' של F^{n-1} כך ש- $[A']_{B'}$ משולשית כלומר $(P')^{-1}A'P'$ = משולשית

נגדיר: $Q=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array}\right)$ אז:

$$(Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (P')^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \underbrace{(P')^{-1}A'P'}_{\text{משולשית}} \end{array}\right) = \text{משולשית}$$

כפל מטריצות בלוקים:

נניח ש- $A \in M_{m,n}$ ו- $B \in M_{n,k}$:

ואנחנו רוצים לחשב את $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & B & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & j & \end{pmatrix}$$

המקום ה- ij במכפלה הוא תוצאה
של מכפלת השורה ה-i ב-A בעמודה ה-j ב-B.

מה קורה אם יש בלוקים? קודם כל דרוש שהגדלים של
הבלוקים יהיו מתאימים:

$$\underset{A}{\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ r & n-r \end{array}\right)}\underset{B}{\left(\begin{array}{cc} r & B_1 \\ \hline n-r & B_2 \end{array}\right)} = A_1B_1 + A_2B_2$$

מסתבר שככה זה

את זה אפשר להכליל ולחלק לכמה חלקים שבא לנו. רק שתהיה
התאמה בגדלים כך שהכפל יהיה מוגדר:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} r_1 & r_2 & \cdots & r_k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} r_1 \\ \hline r_2 \\ \hline \vdots \\ \hline r_k \end{array}\right) = \sum_{i=1}^{k} A_i B_i$$

בצורה דומה אפשר לחלק את A גם אופקית ואת B אנכית.

<u>דוגמה</u> במטריצות ריבועיות

$$\overset{r}{\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right)}\overset{r}{\left(\begin{array}{c|c} A_2 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)} = \left(\begin{array}{c|c} A_1A_2 & 0 \\ \hline 0 & B_1B_2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & C_1 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_2 & C_2 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1A_2 & A_1C_2 + C_1B_2 \\ \hline 0 & B_1B_2 \end{array}\right)$$

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$p_A(t) = (t-5)(t-1)^2$

$\Leftarrow$ A ניתנת לשילוש

ההוכחה זאת מביאה לנו אלגוריתם לשילוש

המטריצה המשלשת יוצאת $P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

והמשולשית היא $A \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

אבל A אינה ניתנת ללכסון!

$V_1 = \ker(A-I) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

ויש 2 שורות הת"ל (1 ו-2) $\Leftarrow$ $\text{rank} \geq 2$

מצד שני הוא לא יכול להיות 3 כי יש ע"ע

$\Leftarrow$ $\text{rank} = 2$ $\Leftarrow$ $\dim\ker = 3-2 = 1$

וקיבלנו שהריבוי הגאומטרי שונה מהריבוי האלגברי $\Leftarrow$

A לא לכסינה

הערה: λ ע"ע של A אמ"מ $\ker(A-\lambda I) \neq \{0\}$ אמ"מ $\text{rank}(A-\lambda I) \neq n$.

פירוק מ"ו לסכום ישר של מ"ו

הגדרה: ל- $U, W \subseteq V$ תמ"ו נאמר ש- $V = U \oplus W$ אם $U+W=V$ ו- $U \cap W = \{0\}$

אפיון: $U \oplus W = V$ אמ"מ לכל v יש הצגה יחידה של $v = w + u$ כאשר $u \in U$ ו- $w \in W$.

באופן כללי: אם $V=U_1\oplus\dots\oplus U_k$ אז לכל $v\in V$
יש לכל i, $u_i\in U_i$ יחידים כך ש $v=\sum_{i=1}^{k}u_i$

משפט: $\dim W=\dim U+\dim V \Leftarrow U\oplus W=V$
ובכלל, $\sum_{i=1}^{k}\dim U_i=\dim V \Leftarrow \bigoplus_{i=1}^{k}U_i=V$.

הוכחה: ממשפט המימדים ומהעובדה ש $U+W=U\oplus W$
ומכך ש $U\cap W=0$ נובע ש-
$$\dim U\oplus W=\dim U+\dim V$$
את הכללי מקבלים באינדוקציה על k. ☺

הגדרה: T אופרטור לינארי על V. $W\leq V$ יקרא T-אינווריאנטי אם מתקיים $T(W)\subseteq W$. כלומר, לכל $w\in W$ $T(w)\in W$. לכן ניתן להסתכל על T כאופרטור לינארי על W.

דוגמה: לכל T אופרטור לינארי על V. אז $\ker T$, $\operatorname{Im}T$ הם T-אינווריאנטים.

דוגמה:
אם $U\oplus W=V$ ו- U,W T-אינווריאנטים אז אם ניקח בסיס ל-U ובסיס ל-W ונייצג את T לפי הבסיס המאוחד. נקבל ש-T מטריצת בלוקים
$$B=\{\underbrace{v_1,\dots,v_k}_{U},\underbrace{v_{k+1},\dots,v_n}_{W}\}$$
$$\Rightarrow [T]_B=\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} [T]_{v_1\dots v_k} & \\ \hline & [T]_{v_{k+1}\dots v_n}\end{array}\right) \\ \underbrace{\quad}_{v_1\ v_k}\ \underbrace{\quad}_{v_{k+1}\ v_n} \end{array}$$

אז אם מוצאים פירוק של V לn חד מימדים בדיוק נקבל שהמטריצה לכסינה.
T לכסינה אמ"מ יש בסיס של ו"ע $\Leftarrow$ יש n מ"ו חד

חד ממדיים שהסכום שלהם הוא V, יתר על כן
זהו סכום ישר.

נשים לב ש-$\text{Span}\{v_1\}$ הוא T-אינווריאנטי אמ"מ
v_1 ו"ע של T.

<u>תזכורת:</u> $A\in M_n$ נילפוטנטית אם קיים k כך ש-$A^k=0$.
<u>דוגמה:</u> $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ נילפוטנטית ! $k=1$.

<u>הערה:</u> נילפוטנטיות נשמרת תחת דמיון אפילו עם אותה חזקה

<u>טענה:</u> $A\in M_n(F)$ A נילפוטנטית אמ"מ $p_A(t)=t^n$.
<u>הוכחה:</u>
($\Leftarrow$) ראינו בתרגול שאם מטריצה מקיימת איזה פולינום
אז כל הע"ע שלה מקיימים אותו. ידוע ש-$A^k=0$
$\Leftarrow$ כל הע"ע הם 0. חוץ מזה ידוע ש-$m_A(t)\,|\,t^k$
$\Leftarrow$ $m_A(t)=t^r$. ידוע ש-$p_A\,|\,m_A^n$. $\Leftarrow$ $p_A=t^m$
$\Leftarrow$ $p_A(t)=t^n$.
($\Rightarrow$) זה מיידי מקיילי המילטון. :) ..

<u>מסקנה:</u> אם A נילפוטנטית ו-k המינימלי שמקיים
$A^k=0$ אז $k\leq n$.

(22) 15.5.06

ת. לינארית

טענה: תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה ויהי $m_A(t)$ הפולינום המינימלי של A ו- $p_A(t)$ הפולינום האופייני של A אזי $p_A(t) \mid (m_A(t))^n$

מסקנה: השורשים של הפולינום המינימלי והפולינום האופייני הם בדיוק אותם שורשים, כי הרי ל- m_A ול- m_A^n אותם השורשים.

הוכחת הטענה: נסמן את הפולינום המינימלי של A:

$$m(t) = t^r + c_{r-1}t^{r-1} + \dots + c_0 =$$

$$= t(\cdots(t(t\cdot 1 + c_{r-1}) + c_{r-2}) + \dots) + c_0$$

מין בנייה רקורסיבית שכזו

נגדיר את המטריצות הבאות:

$$B_0 = I$$

$$B_1 = A + c_{r-1}I$$

$$\vdots$$

$$B_i = AB_{i-1} + c_{r-i}I \qquad i\geq 1$$

נשים לב ש- $AB_{r-1} + c_0 I = m(A)I = 0$

$$\Rightarrow AB_{r-1} = -c_0 I$$

ומעצם הבנייה של $\{B_i\}$: $AB_{i-1} = B_i - c_{r-i}I$

נגדיר את המטריצה הבאה מעל חוג הפולינומים:

$$B(t) = t^{r-1}B_0 + t^{r-2}B_1 + \dots + tB_{r-2} + B_{r-1}$$

נתבונן במטריצה הבאה: $(tI-A)B(t)$

נטען ש- $(tI-A)B(t) = m(t)I$ וזה מוכיח את הטענה. נחשב דטרמיננטה של שני האגפים לפי חוק המכפלה נקבל $m_A^n(t) = |m(t)I| = \underbrace{|tI-A|}_{p_A(t)}\,|B(t)|$

נראה שבאמת מתקיים השוויון הנ"ל:

$$(tI-A)B(t) = t^r B_0 + \sum_{i=1}^{r} t^{r-i}(B_i - AB_{i-1}) =$$

$$= t^r B_0 + \sum_{i=1}^{r} t^{r-i} c_{r-i} I =$$

$$= m(t) \cdot I$$

☺

<u>טענות</u>: בטענה הקודמת לא ניתן להחליף את n (באופן כללי) ב- $k<n$. כלומר לא ניתן להשיג חסם הדוק יותר.

<u>הוכחה</u>: לדוגמה $A = \tilde{0} \in M_n(F)$. אזי $P_A(t) = t^n$

אבל $m_A(t) = t$. ☺

אמנם זה מקרה קיצוני. בד"כ משיקולי דרגות אפשר יהיה להסתפק בדרגה קטנה יותר.

<u>טענה</u>: תהא $A \in M_n(F)$ מטריצת בלוקים אלכסונית המורכבת מ- k בלוקים. כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & O \\ & \boxed{A_2} & \\ O & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

והבלוקים ריבועיים לאו דווקא שווי גודל.

כדי להגיע למצב כזה, של מטריצת בלוקים, למשל אם אנחנו במצב של $T: V \to V$, נוכל לקבל "צורת בלוקים" אם נניח ש: קיימים תת"מ $V_i \le V$ שמקיימים

1. $\bigoplus_{i=1}^{k} V_i = V$
2. לכל i V_i ת"מ T אינווריאנטי (כלומר T פועלת על V_i כך שניתן לחשוב על $T|_{V_i}$).

ניקח בסיס B_i ל- V_i ($|B_i| = \dim V_i$) ונקח $B = \cup B_i$ בסיס ל- V. ואז $[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \\ & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$ כאשר $A_i = [T|_{V_i}]_{B_i}$

(23)

בכל אופן, נמשיך את הטענה: ל-A מטריצה רנ"ל ולפולינום כלשהו $p(t) \in F[t]$ מתקיים

$$p(A) = \begin{pmatrix} \boxed{p(A_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{p(A_k)} \end{pmatrix}$$

לא נוכיח אבל דרך סטנדרטית להוכיח את זה היא על דרגת הפולינום בסיס $p(t) \equiv c \in F$
צעד האינדוקציה - מניחים ל-t^n $p(t)$ ואז כל פולינום מציגים כ- $p(t) = t^n + g(t)$
ואשר דרגת g קטנה יותר. כמובן צריך גם להסביר למה החיבור משמר את זה.

<u>מסקנה</u>: ל-A רנ"ל $p_A(t) = p_{A_1}(t) \cdots p_{A_k}(t)$
<u>למה</u>? כי
$$p_A(t) = |xI - A| = \left|\begin{pmatrix} tI - A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & tI - A_k \end{pmatrix}\right| = \prod p_{A_i}(t)$$

<u>טענה</u>: תהא A רנ"ל ויהי m_i הפולינום המינימלי של A_i
אז $m_A(t) = lcm(m_1, \ldots, m_k)$
כפולה משותפת מינימלית

<u>הגדרות</u>: יהא R חוג קומוטטיבי עם יחידה.
1) $a|b$ (a מחלק את b) אם קיים $c \in R$ כך ש $ac = b$
2) a מחלק משותף מקסימלי של $b_1, \ldots, b_n$ ומסומן $gcd(b_1, \ldots, b_n)$ אם $a|b_i$ לכל i. ואם c גם מחלק את כולם אז $c|a$.
3) b כפולה משותפת מינימלית של $a_1, \ldots, a_n$ אם $a_i|b$ לכל i וגם אם $a_i|c$ לכל i אז $b|c$. b מסומן $b = lcm(a_1, \ldots, a_n)$

הוכחה:

נסמן $g = lcm(m_1, \dots, m_k)$

$$\Rightarrow g(A) \overset{\text{טענה קודמת}}{=} \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(A_k) \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{כי הוי' } lcm}{=} \begin{pmatrix} (g_1 \cdot m_1)(A) & & \\ & \ddots & \\ & & (g_k \cdot m_k)(A_k) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} g_1(A) m_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & g_k(A) m_k(A) \end{pmatrix} = \bar{0}$$

$\Leftarrow$ $m_A \mid g$

אבל שני: אם $f(A) = 0$ אז $f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(A_k) \end{pmatrix}$

ולכן לכל i $f(A_i) = 0$.

ולכן לכל i $m_i \mid f$ $\Leftarrow$ מהגדרת lcm

$g \mid f$ $\Leftarrow$ g הוא המינימלי

דוגמה חשובה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(F)$$

ברור ש $p_A(t) = (t-\lambda)^n$ אז $m_A(t) = (t-\lambda)^k$

עבור $k \le n$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \\ & \ddots & & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \updownarrow k$$

$\Leftarrow$ $n = k$ כי בכל הפעלה ה-1-ים עולה שורה

משפט ז'ורדן:

כל מטריצה ריבועית ב- $M_n(F)$ שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים לחלוטין ניתנת לייצוג ע"י מטריצה בלוקים שכל בלוק ז-ר שלה מהצורה

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

כל בלוק כזה יקרא בלוק ז'ורדן. ה λ_i הם הע"ע, לאו מהכרח שונים והבלוקים לאו בהכרח שווי גודל.

מסקנה: בתנאים הנ"ל של $p_A(t)$ ובשגודל הבלוק ה i הוא $n_i \times n_i$ נקבל $p_A(t) = \prod_{i=1}^{k} (t-\lambda_i)^{n_i}$

ואם נסמן את הע"ע השונים ב- $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ולכל $1 \le i \le s$ נגדיר $N_i = \max\{n_j : \lambda_j = \mu_i\}$ (גודל הבלוק המקסימלי של הע"ע) אז $g(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\mu_i)^{N_i}$ הוא m_A.

הוכחה I: צריך להראות ש- $\prod_{i=1}^{s}(t-\mu_i)^{N_i} = \mathrm{lcm}\{(t-\lambda_i)^{n_i}\}_{i=1}^{k}$

הוכחה II: לפי הגדרה של פולינום מינימלי: להראות ש $g(A)=0$ וגם אם $f(A)=0$ אז $g \mid f$

$g(t) = \mathrm{lcm}\{\ldots\}$ מצד אחד ברור ש- g הכל כפולה של כל $(t-\lambda_i)^{n_i}$ כי ככה הוא הוגדר.

מצד שני. אם f גם כפולה של כל הפולינומים. הנ"ל אז $(t-\mu_i)^{N_i}$ מחלק את $f(t)$ לכל i

$\Leftarrow$ גם $\prod_{i=1}^{s}(t-\mu_i)^{N_i} \mid f$ (משום ש μ_i שונים)

$\Leftarrow$ באמת $g = \mathrm{lcm}\{\ldots\}$ $\Leftarrow$ $g = m_A$

משפט: $A \in M_n(F)$ לכסינה אמ"מ $m_A(t)$ מתפרק לגורמים לינאריים שונים

הוכחה: ראינו היום בהרצאה

דוגמה: תהא $A\in M_n(F)$ שמקיימת $A^3=A$

צ"ל: A לכסינה.

הוכחה: $A^3-A=0 \Leftarrow$

$$m_A(t) \mid t^3-t = t(t^2-1) = t(t-1)(t+1)$$

וכו גורמים לינאריים שונים. $\Leftarrow$ $m_A(t)$ מתפרק לגורמים לינאריים שונים

דוגמה מדירה אחרונה: טוב, לא נעשה אותה

(25) 22.05.06

ת. לינארית

מרחבים אוקלידיים

V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ממימד n מכפלה סקלרית היא

פונקציה די אקוויות $(\ ,\ ) : V\times V \to \mathbb{R}$ שמקיימת

1) סימטריות

2) לינאריות בכל רכיב

3) הומוגניות בכל רכיב

4) חיוביות $0 \le (v,v)$

מכפלה סקלרית במישור $\mathbb{R}^2$:

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

לכל וקטור $v=(x,y)$ יש נורמה

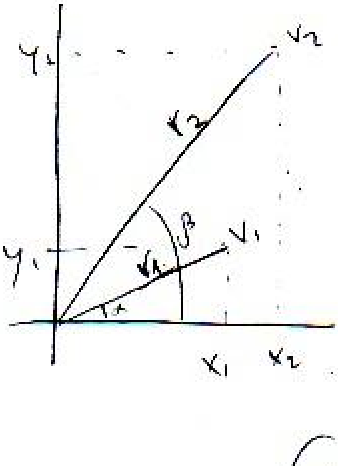
$$\|v\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x,y)(x,y)}$$

דוגמה למכפלה סקלרית אחרת:

$$(a_1,a_2)(b_1,b_2) = a_1b_1 + a\cdot a_2b_2$$

<u>הגדרה</u>: מרחב אוקלידי n מימדי הינו $\mathbb{R}^n$ <u>יחד</u> עם המכפלה הסקלרית הסטנדרטית והנורמה הסטנדרטית.

<u>טענה</u>: ב-$\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$; $\mathbb{R}^n$) $(v,w) = \|v\|\|w\|\cos(\underbrace{v,w}_{\text{הזווית הקטנה שביניהם.}})$



<u>הוכחה</u>:

$$(v_1,v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 =$$
$$= r_1\cos\alpha\, r_2\cos\beta + r_1\sin\alpha\, r_2\sin\beta =$$
$$= r_1r_2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$
$$= r_1r_2(\cos(\beta-\alpha))$$

הערה: הגדרת מכפלה פנימית $(\, , \,)$ של $V\times V$ והגדרת בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ ל-V יש מכפלה פנימית יחידה שמקיימת $(v_i,v_j)=a_{ij}$ לכל i,j

הוכחה ב': 3) $(v,w)=\|v\|\,\|w\|\cos(v,w)$

אבחנות ביניים:

1) שני האגפים הומוגניים בשני הרכיבים לסקלרים חיוביים.

$\Rightarrow$ ניתן להניח כי $\|v\|=\|w\|=1$

2) שני האגפים אינווריאנטיים תחת סיבובים של המרחב $\mathbb{R}^2$.

כלומר אם R_θ זו הה"ל של סיבוב בזווית θ אז

$$(v,w)=(R_\theta v, R_\theta w)$$

לגבי האגף הימני זה טריוויאלי.

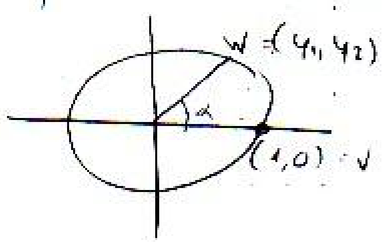
ובאמת אם $v=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

ואז $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$(R_\theta v, R_\theta w)=\left\langle\begin{pmatrix}x_1\cos\theta-x_2\sin\theta\\ \vdots\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \, , \, \end{pmatrix}\right\rangle=$$

$$=(x_1\cos\theta-x_2\sin\theta)(y_1\cos\theta-y_2\sin\theta)+$$
$$+(x_2\cos\theta+x_1\sin\theta)(y_2\cos\theta+y_1\sin\theta)=$$
$$=x_1y_1+x_2y_2=\langle v,w\rangle.$$

המסקנה משתי אבחנות הביניים היא שמספיק להוכיח את השוויון במקרה



ואז $\langle v,w\rangle = y_1$ וגם

$\|v\|\,\|w\|\cos\alpha=\cos\alpha$:

פונקציונלים לינאריים

<u>הגדרה:</u> V מ"ו n מימדי מעל שדה F.

$V^* = Hom(V, F)$ המרחב הדואלי של V.

כלומר כל הה"ל מ-V ל-F.

<u>הגדרה:</u> כל $f \in V^*$ נקרא פונקציונל לינארי.

<u>טענה:</u> לכל $0 \neq f \in V^*$ מתקיים $\dim\ker f = n-1$

וכמו כן בהינתן $v \notin \ker f$ ו-$0 \neq a \in F$ יש

פונקציונל לינארי יחיד g שמקיים $g(v) = a$ ו-

$\ker f = \ker g$.

<u>הוכחה:</u>

החלק הראשון נובע ממשפט המימדים כי אם $f \neq 0$

אז $\dim Im f = 1$ ולכן $\dim\ker f = n-1$

החלק השני נובע מכך שבהינתן V, W ו-$\{v_1, ..., v_n\}$

בסיס של V ו-$w_1 ... w_n$ וקטורים ב-W אז יש

$T \in Hom(V, W)$ יחידה שמקיימת לכל i $Tv_i = w_i$.

מאחר שנוכל לבחור בסיס $v_1, ..., v_{n-1}$ ל-$U := \ker f$

ונשלים אותו לבסיס ע"י $v_n = v$. כעת יש ה"ל יחידה,

כלומר פונקציונל לינארי יחיד שמקיים

$gv_1 = 0 \ ... \ gv_{n-1} = 0, \ gv_n = a$

כאשר $0, ..., 0, a$ וקטורים ב-F כמרחב וקטורי חד מימדי.

!!

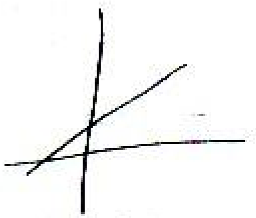
בתרגול הקודם ראינו שלכל $v \in V$ f_v פונקציונל

לינארי כאשר $f_v(\cdot) = (v, \cdot)$ ו-$(,)$ מ"פ

על V מעל $\mathbb{R}$.

נסתכל במישור על הישר

$$y = ax+b \iff -ax+y = b$$
$$\iff \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = b$$



מהגדרה $b=0$ נקבל $y=ax$ ואת הוקטור שמקביל $\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$ מגדיר את הישר ע"י כל ה- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ שניצבים אליו ומהגדרה נסמן $w_0 = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$

U יוגדר תת"מ הניצב ל- w_0 (נטויי הישר).

עבור b כלשהו איך יראה הישר? $U + \frac{b}{\|w_0\|^2} w_0$

זו ישריה ובאמת לכל $u \in U$

$$\left\langle u + \frac{b}{\|w_0\|^2} w_0, w_0 \right\rangle =$$
$$\cancel{\langle u, w_0 \rangle} + \frac{b}{\|w_0\|^2} \|w_0\|^2 = b$$

לסיכום, כל ישר במישור הוא מהצורה $\{v : \langle v, w_0 \rangle = b\}$ כש- w_0 ניצב לישר ו- b קובע כמה ולאיזה כיוון להזיז את התת"מ שמקביל לישר (ישריה)

<u>דוגמה:</u> בהינתן פונקציונל לינארי f על $\mathbb{R}^3$ נראה איך אפשר להגדיר אותו ע"י וקטור ב- $\mathbb{R}^3$ והמכפלה הפנימית כפי שראינו קודם

נגדיר . $X = (x_1, x_2, x_3)$

ראשית $x_i = f(e_i)$

<u>טענה:</u> $f = f_x$ כאשר לכל $v \in \mathbb{R}^3$ $f(v) = \langle v, x \rangle$

<u>הוכחה:</u> f, f_x שניהם פו' ולכן מספיק להראות שהם מתלכדים על איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ וזה ע"פ ההגדרה

$$f(e_i) = x_i = \langle e_i, x \rangle = f_x(e_i)$$

(27) 29.5.06

תרגול

הערות מהתרגול הקודם:

כשאנחנו מדברים על מרחבי מכפלה פנימית המרחב V תמיד

מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$ כשהוא מעל $\mathbb{R}$ המכפלה הפנימית

נקראת מכפלה סקלרית והמרחב נקרא מרחב אוקלידי.

בהינתן בסיס $A=(v_1,\dots,v_n)$ ל-V אפשר להגדיר מ"פ

כך ש-A בסיס אורתונורמלי:

$$(v,u) = [v]_A \cdot [u]_A = \sum a_i \bar{b}_i$$

ברור שכאן $(v_i,v_j)=\delta_{ij}$ כי לכל $1 \le i \le n$ $[v_i]_A = e_i$.

משפט גרם שמידט: זה בדיוק הכיוון ההפוך. כלומר אם V מעל F מרחב מכפלה פנימית, אז יש ל-V בסיס אורתונורמלי.

נקודה מעניינת: בממשיים $(u,v)=\|u\|\|v\|\cos(u,v)$

ומה אם השדה הוא $\mathbb{C}$? אז אפשר להגדיר: $\cos(u,v) \triangleq \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$

וזה יכול לצאת גם מספר מרוכב

בממשיים ידוע ש- $-1 \le \cos(u,v) \le 1$. מה עם המרוכבים?

אין לאמירה הזאת משמעות כי במרוכבים אין סדר. אבל

לפי משפט קושי שוורץ $|(u,v)| \le \|u\|\|v\|$ כלומר

$\frac{|(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \le 1$ כלומר $|\cos(u,v)| \le 1$ גם במרוכבים.

אגב, אם מפעילים את קושי שוורץ על $\mathbb{C}^n$ והמכפלה הפנימית

הרגילה מקבלים שלכל $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \sqrt{\sum |a_i|^2}\sqrt{\sum |b_i|^2}$

נניח ש-V מרחב מכפלה פנימית עם בסיס אורתונורמלי $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$

אז $(v,u) = (\sum a_i \varepsilon_i, \sum b_i \varepsilon_i) = \sum a_i \bar{b}_i$

שזה כמו המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ראינו שלכל $f \in V^*$ יש $v \in V$ יחיד כך ש $f = f_v$.

כלומר אם $v = \sum b_i \varepsilon_i$ אז

$$f(\sum x_i \varepsilon_i) = \langle \sum x_i \varepsilon_i, \sum b_i \varepsilon_i \rangle = \sum x_i \bar{b}_i \underset{c_i \triangleq \bar{b}_i}{=} \sum c_i x_i$$

כאמור כל פונקציונל לינארי נראה כמו איזו מכפלה סקלרית.
לפי הסימונים הללו $\ker f$ (תת"מ ממימד $n-1$) הוא
בדיוק הפתרונות של המע' הלינארית ההומוגנית עם משוואה אחת:

$$\sum c_i x_i = 0$$

בפרט: כל תמ"ש ב-V ובהינתן בסיס נתון הוא מהצורה

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{mj} x_j = 0 \end{cases}$$

כל תמ"ש הוא חיתוך של m תת"מ ממימד $n-1$.
לכל תמ"ש U יש פ"ל $f_1, \dots, f_m$ כך ש $u \in U$ אמ"מ
$f_1(u) = \dots = f_m(u) = 0$.

מרחק בין נקודה לתמ"ש ושימוש בגרם שמידט:
V מרחב מכפלה פנימית. $U \le V$ תת"מ ממימד סופי. $v \notin U$
יהי $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ בסיס אורתונורמלי ל-U. נגדיר
$u_0 = \sum_{i=1}^{k} (v, \varepsilon_i) \varepsilon_i$ אז:

א) $v - u_0 \perp U$

ב) $\|v-u_0\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |(v, \varepsilon_i)|^2$

ג) אם $U \ni u_1 \neq u_0$ אז $\|v-u_1\| > \|v-u_0\|$

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R}^3$ מרחב מכפלה סקלרית הרגיל.

$U = sp\{\overset{\alpha_1}{(1,2,1)}, \overset{\alpha_2}{(0,1,1)}\}$

$v = (1,0,0)$.

מה המרחק מין v ל-U?

נחפש $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ בסיס אורתונורמלי ל-U. $\varepsilon_1 = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}$

$\varepsilon_2' = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = (0,1,1) - ((0,1,1)\cdot(1,2,1)) \cdot \frac{(1,2,1)}{6} = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2'}{\|\varepsilon_2'\|} = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$u_0 = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 \qquad a_1 = \langle v, \varepsilon_1 \rangle = 1/\sqrt{6} \quad a_2 = \langle v, \varepsilon_2 \rangle = -\sqrt{2}/2$

$\Rightarrow u_0 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \Rightarrow \|v - u_0\| = \|(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

בשיעור ראינו שאם $W \le V$ תמ במרחב מכפלה פנימית סוף מימדי אז $V = W \oplus W^{\perp}$. בשביל להראות את זה צריך להראות ש- $V = W + W^{\perp}$. זה שקול לכך שבהינתן בסיס $w_1, \dots, w_k$ ל-W אז לכל $v \in V$ נוכל לפרק את v ע"י $v = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i + h$ ואשר $h \in W^{\perp}$.

כלומר לכל i $(h, w_i) = 0$

וגם לכל j $\langle v - \sum_{i=1}^{k} a_i w_i, w_j \rangle = 0$ או לכל j

$$\sum_{i=1}^{k} \langle w_i, w_j \rangle a_i = \langle v, w_j \rangle$$

זאת מע' משוואות לינארית לא הומוגנית. למה יש לה פתרון?

כי $(\langle w_i, w_j \rangle)$ ריבועית שהיא אינה מנוונת :)

כך נותן לנו דרך אחרת למצוא את המרחק:

צריך לפתור

$$\begin{cases} a(1,2,1) + b(0,1,1) + h = (1,0,0) \\ h \perp (1,2,1), (0,1,1) \end{cases}$$

המערכת נראית ש-

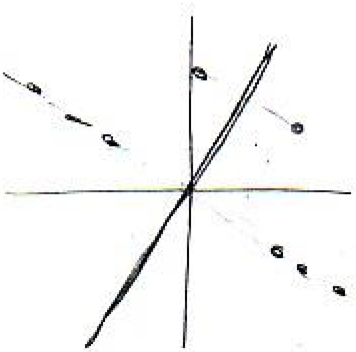
$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וזה ממש קל לפתור: $a = 2/3$ $b = -1$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{2}{3}(1,2,1) - 1(0,1,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

<u>הגדרה:</u> יהי $U \le V$ תמ. השיקוף של V ביחס ל-U מוגדר כט"ל T ששומרת את U במקום ול- $w \in U^{\perp}$: $Tw = -w$

אבחנה גאומטרית: זה שיקוף מראה:



תכונות: (א) $T^2 = Id$

(ב) T שומרת על המכפלה הפנימית

(ג) אם $\dim U = n-1$ אז

$$T(v) = v - 2\langle v, w_0 \rangle w_0$$

כאשר $w_0 \in U^\perp$! $\|w_0\| = 1$

(29) 5.6.06
ת. ליניארית

תזכורת: $V^* = Hom(V,F)$ המרחב הדואלי.
$$\dim_F V = \dim_F V^*$$

משפט + הגדרה: יהא V מ"ו n-ממדי מעל F ויהא $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס (סדור) ל-V. אז קיים בסיס (סדור) יחיד $B^*=(f_1,\dots,f_n)$ ל-V^* כך שמתקיים $f_i(v_j)=\delta_{ij}$

B^* נקרא הבסיס הדואלי ל-B.

טענה: יהא V מרחב מ"פ וראינו שאפשר להגדיר לכל $w\in V$ $f_w: V\to F$ פ"ל שמוגדר $f_w(v)=\langle v,w\rangle$

קיבלנו העתקה $V \xrightarrow{w\mapsto f_w} V^*$. אז:

(א) לכל $w_1,w_2\in V$ ולכל $\alpha_1,\alpha_2\in F$
$$f_{\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2} = \alpha_1 f_{w_1}+\alpha_2 f_{w_2}$$
(ב) לכל $f\in V^*$ יש $w\in V$ יחיד כך ש- $f=f_w$

הוכחה:

(א) ראינו כבר

(ב) ל-V כמרחב מכפלה פנימית יש בסיס אורתונורמלי. $(e_1,\dots,e_n)$ ויהא $f\in V^*$. ניקח
$$w \triangleq \bar{\alpha}_1 e_1+\dots+\bar{\alpha}_n e_n$$
כאשר $\alpha_i \triangleq f(e_i)$ אז $f=f_w$ כי
$$f_w(e_i)=\langle e_i,w\rangle=\langle e_i,\bar{\alpha}_i e_i\rangle=\alpha_i=f(e_i)$$
יחידות: אם $f_{w_1}=f_{w_2}$ אז לכל $v\in V$
$$\langle v,w_1\rangle=\langle v,w_2\rangle \Rightarrow \langle v,w_1-w_2\rangle=0$$
$$\Rightarrow w_1=w_2.$$

נשים ♡ שבטענה השתמשנו בסופיות המימד.
הנה דוגמה נגדית במקרה שהמרחב לא נוצר סופית:

$$V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) : a_i \in \mathbb{R}\}$$

אבל עם תומך סופי - כלומר פרט למספר סופי של a_i כל איברי הסדרה הם אפס. קל לראות ש-

$$\langle (a_i), (b_i) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

אכן מגדיר מכפלה פנימית על V.
נגדיר פונ' על V להיות $\varphi((a_i)) = \sum_{i}^{\infty} a_i$
נטען שאין $\alpha \in V$ שמקיים $f_\alpha = \varphi$. אם בשלילה יש α כזה אז נסתכל על $\alpha = (* \ldots * \, 0 \ldots 0, \ )$

$$v = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$$

ואז $\varphi(v) = 1$ אבל $f_\alpha(v) = 0$

<u>משפט + הגדרה:</u> יהא V מרחב מ"פ ויהא $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס. אז קיים בסיס $B^* = \{w_1, \ldots, w_n\}$ יחיד ל-V כך שמתקיים $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$ (B^* נקרא בסיס דואלי).

<u>הוכחה:</u> משני המשפטים הקודמים נקבל בסיס דואלי $f_1, \ldots, f_n$ ל $v_1, \ldots, v_n$ ב-V^*. ומ"מ יש $v_1, \ldots, v_n$ כך ש- $f_i = f_{w_i}$ ולכן

$$\langle v_j, w_i \rangle = f_{w_i}(v_j) = f_i(v_j) = \delta_{ij}$$

<u>הערה:</u> B בסיס אורתונורמלי אמ"מ $B^* = B$

<u>דוגמה:</u> $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית

$$B = (\overset{v_1}{(1,2)}, \overset{v_2}{(3,4)})$$

$$B^* = (\overset{(a,b)}{w_1}, \overset{(c,d)}{w_2})$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \langle v_1, w_1 \rangle = a + 2b \\ 0 &= \langle v_2, w_1 \rangle = 3a + 4b \\ 0 &= \langle v_1, w_2 \rangle = c + 2d \\ 1 &= \langle v_2, w_2 \rangle = 3c + 4d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(30)

<u>הערה</u>: B בסיס ל- $\mathbb{R}^n$ ואיבריו הם עמודות של המטריצה $P \in M_n(\mathbb{R})$. אז איברי B^* הם עמודות המטריצה $(P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$

העתקה צמודה

<u>משפט + הגדרה</u>: יהיו V, W מרחבי מכפלה פנימית מעל F ותהי $T: V \to W$ ט"ל. אז קיימת טרנספורמציה לינארית יחידה $T^*: W \to V$ שמקיימת $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ לכל v, w.
T^* נקראת הטרנס' הצמודה ל-T.

<u>דוגמה</u>:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3+i \\ 4 & 5i & 6-2i \end{pmatrix}$$

$$T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$$

$$[T^*] = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5i \\ 3-i & 6+2i \end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>: V, W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה.
$E = (e_1, \dots, e_n)$ בסיס אורתונורמלי ל-V.
$F = (f_1, \dots, f_m)$ בסיס אורתונורמלי ל-W.
אם $T: V \to W$ אז $[T^*]^F_E = ([T]^E_F)^*$

<u>הוכחה</u>:

$$[T]^E_F = A = (a_{ij})$$

$$[T^*]^F_E = B = (b_{ij})$$

$$Te_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \qquad [Te_j]_F = \text{עמודה } j \text{ של } A$$

$$\langle Te_j, f_i\rangle = a_{ij}$$

$$\langle T^* f_j, e_i\rangle = b_{ij}$$

$$a_{ji} = \langle Te_i, f_j\rangle = \langle e_i, T^* f_j\rangle = \overline{\langle T^* f_j, e_i\rangle} = \overline{b_{ij}}$$

<u>תרגיל</u>: הכללה למקרה ש- E, F בסיסים כלשהם, לא בהכרח אורתונורמליים.

מאפסים

הגדרה: יהא V מ"ו מעל F (נ"ס) ותהא $A \subseteq V$ נגדיר
$$A^0 = \{ f \in V^* : f(a) = 0 \ \forall a \in A \}$$
באופן אנלוגי ל- $B \subseteq V^*$ נגדיר
$$B^0 = \{ v \in V : f(v) = 0 \ \forall f \in B \}$$

תכונות:

1. A^0 תמ"ו של V^*
2. $V^0 = \{0\}$
3. $\{0\}^0 = V^*$
4. $A \subseteq V = F^n$ אז A^0 מזוהה עם אוסף הפתרונות של מע' המשוואות הלינאריות ההומוגניות שמוגדרות ע"י A. A^0 זה כל ה- b-ים שמקיימים $ab = 0$ לכל $a \in A$
5. $A \subseteq B \Rightarrow B^0 \subseteq A^0$
6. $A \subseteq A^{00}$
7. $A^0 = (SpA)^0$
8. V מ"ו נוצר סופית, $U \subseteq V$ תמ"ו. אז $\dim U + \dim U^0 = \dim V$
9. אם $U \subseteq V$ תמ"ו אז $U^{00} = U$
10. $A^{00} = SpA$
11. $U, W \subseteq V$ תמ"ו אז $U = W$ אמ"מ $U^0 = W^0$.

הוכחת 8: נניח ש- U נפרש ע"י בסיס $v_1, \dots, v_r$ ונשלים אותו לבסיס $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ של V. ונסמן בסיס זה כ- B. יהא $B^* = (f_1, \dots, f_n)$ בסיס של V^*. נראה ש- $f_{r+1}, \dots, f_n$ בסיס ל- U^0 (שלם נסיים).

למה $f_{r+k} \in U^0$?

$$f_{r+k}(u) = f_{r+k}(a_1v_1 + \dots + a_rv_r) = 0$$

$u = \sum a_iv_i$

כי f_{r+k} שונה מכל אלה שבפנים.

ופרשות: יהא $f \in U^0$ ונרשום $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$. צ"ל $a_1 = \dots = a_r = 0$. אבל זה ברור:

אז באמת לכל $j \le r$:

$$0 = f(v_j) = \left(\sum a_i f_i\right)(v_j) = a_j f_j(v_j) = a_j$$

(32) 12.6.06
ת' לינארית

ט"ל / מטריצות אוניטריות / הרמיטיות וכו'

<u>הגדרות:</u>

א) T צמודה לעצמה / הרמיטית (מעל $\mathbb{C}$) אם $T = T^*$

ב) T אנטי הרמיטית אם $T^* = -T$

<u>משפט</u> V מ"פ אוניטרי $T: V \to V$ ט"ל, אז

א) T צמודה לעצמה $\iff$ $\langle T\alpha, \alpha \rangle$ ממשי לכל α.

ב) T אנטי הרמיטית $\iff$ $\langle T\alpha, \alpha \rangle$ מדומה טהור לכל α.

<u>הוכחה</u>

א) ראינו בהרצאה

ב) נפעיל את (א) על $S = iT$

<u>הגדרה</u> $T: V \to V$ אוניטרית אם היא משמרת מכפלה פנימית:
$\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ $\forall \alpha, \beta \in V$

<u>משפט:</u> $T: V \to V$ אז התנאים הבאים שקולים

א) T אוניטרית

ב) $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$ לכל α

ג) $TT^* = Id$

ד) T מעבירה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.

ה) T מעבירה בסיס אורתונורמלי מסוים לבסיס אורתונורמלי.
את ההוכחה ראינו בהרצאה

<u>הגדרה</u> $A \in M_n(F)$ אוניטרית אם $A^*A = I$

<u>הגדרה:</u> λ ע"ע של T (A) אוניטרית $\Leftarrow$ $|\lambda| = 1$

<u>טענה:</u> T ט"ל אוניטרית של V ו- $W \subseteq V$ תת"מ T-אינווריאנטי. אז $W^{\perp}$ גם כן T-אינווריאנטי ויתר על כן $T(W^{\perp}) = W^{\perp}$

<u>הוכחה:</u> $T(W) \subseteq W$.

T אוניטרית ובפרט רגולרית. $\Leftarrow$ $\dim T(W) = \dim W$ (*)

$\Leftarrow$ $T(W) = W$ $\Leftarrow$ לכל $w \in W$ יש $w' \in W$ כך ש- $Tw' = w$. נראה: $v \in W^{\perp}$ אז $Tv \in W^{\perp}$.

כלומר $(Tv, w) = 0$ לכל $w \in W$.

$$(Tv, w) = (Tv, Tw') = (v, w') = 0$$

וכעת שוב כמו ב-(*) $T(W^{\perp}) = W^{\perp}$:)

<u>שאלה:</u> לכסן ע"י בסיס אורתונורמלי את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ a & 1/2 & 1/2 \\ -a & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad a = 1/\sqrt{2}$$

זאת מטריצה אוניטרית כי העמודות שלה אורתונורמליות

<u>תשובה:</u> נמצא את הערכים העצמיים

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} x & a & -a \\ -a & x-1/2 & -1/2 \\ a & -1/2 & x-1/2 \end{vmatrix} = (x-i)(x^2+1)$$

1) $R_3 \to R_3 - R_2$
2) פיתוח לפי שורה 3

$\Leftarrow$ הע"עים i עם ריבוי אלגברי 2

$-i$ ___ " ___ 1

$$V_i = \ker(A - iI) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (-i, -a, a)(x, y, z) = 0 \right\} =$$

$$= Sp\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -ia \\ ia \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-i} = \ker(A + iI) = \ker\begin{pmatrix} -i & a & -a \\ -a & -\frac{3i}{2} & -\frac{1}{2} \\ a & -1/2 & -3i/2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -i & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & -\frac{i}{2} & -\frac{3i}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}-i & 2a & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-ia\\ia\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2ai\\1\\-1\end{pmatrix}}_{V_{-i}} \right\}$$ קיבלנו בסיס למשל

$$\Rightarrow \underbrace{P^{-1}AP}_{P=[Id]_E^B} = [A]_B = \begin{pmatrix} i & & 0\\ & i & \\ 0 & & -i\end{pmatrix}$$

<u>אבל</u>, B אינו בסיס אורתונורמלי. צריך לעשות לו גרם שמידט.
<u>הערה</u>: T נ"ל אז ו"ע של ע"ע שונים ניצבים. אם T אוניטרית
אז ו"ע של ע"ע שונים הם ניצבים. אז צריך למצוא
בסיס אורתונורמלי רק ל- V_i. (נקס)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-ai\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow U^{-1}AU = \begin{pmatrix} i & & 0\\ & i & \\ 0 & & -i\end{pmatrix}$$

הבוחן: עד אחרי מכפלה פנימית לא כולל

<u>הגדרה</u>: $A\in M_n(\mathbb{C})$ "מוגדרת אי שלילית" או "$A\geq 0$"
אם קיימת $B\in M_n(\mathbb{C})$ כך ש- $BB^* = A$. (אז A צמודה לעצמה)

<u>טענה</u>:
א) $0\leq A \iff A$ נורמלית וכל הע"ע ממשיים אי שליליים.
ב) $0\leq A \Rightarrow A=C^2$ לאיזשהי מטריצה C.

<u>הוכחה</u>:
א) ברור שהיא צמודה לעצמה כי $(B^*B)^* = B^*B^{**} = B^*B$
ולפי משפט קודם מכאן נובע שהיא נורמלית וערכיה
העצמיים ממשיים. נראה שהם אי שליליים.

ויהא v ו"ע עם ע"ע λ אז

$$\lambda\|v\|^2 = \lambda(v,v) = (Av,v) = (B^*Bv,v) = (Bv,Bv) = \|Bv\|^2 \geq 0$$

$\Leftarrow$ $0 \leq \lambda$.

מצד שני, אם A נורמלית אז היא דומה ע"י בסיס אורתונורמלי לאלכסונית עם ע"ע $\lambda_i \geq 0$ D.

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad (\sqrt{D})^2 = D$$

ניקח את המטריצה $B = P^{-1}\sqrt{D}P$ ואז מתקיים

$$BB^* = (P^{-1}\sqrt{D}P)(P^{-1}\sqrt{D}P)^* = P^{-1}DP = A$$

ב) ניקח את $C = B$.

<u>הגדרה</u>: מטריצה אורתוגונלית היא מטריצה ממשית אוניטרית כלומר:

- שורותיה בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^n$
- $AA^t = I$

(34) 19.6.06
ת. לינארית

① נתון T צמודה לעצמה. ו- $T^2=T$ אז T הטלה אורתוגונלית.

הגדרה: $T: V\to V$ הטלה אורתוגונלית אם קיים $W\subseteq V$ תת מרחב רק ש- $T|_W = Id$ ו- $T|_{W^\perp}=0$.

הוכחה: T לכסינה ע"י בסיס אורתונורמלי.

$T^2=T \Leftarrow$ לכל λ ע"ע של T $\lambda^2=\lambda \Rightarrow \lambda\in\{0,1\}$

$V=V_1\oplus V_0 \Rightarrow T$ הטלה אורתוגונלית על V_1, כי $V_0\perp V_1$ ולכן $V_1^\perp = V_0$.

② נתונה $A\in M_2(\mathbb{R})$ שמקיימת $A^2v=2Av-cv$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$. נתון גם שיש ל-A שני ו"ע בת"ל.
מה ערכי c האפשריים?

<u>פתרון</u>: לכל v מתקיים $A^2v-2Av+cv=0 \Rightarrow$
$A^2-2A+cI=0$, כלומר זה הפולינום שמאפס ע"י המטריצה.
לכן $m_A(t)\mid t^2-2t+c$. בפרט, לכל ע"ע של A
מתאפס ע"י t^2-2t+c. יש ע"ע λ ולכן
$t-\lambda \mid t^2-2t+c$. כלומר קיים שורש לפולינום והוא
λ לכן $\lambda=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot c}}{2}$

$\Rightarrow 4-4c\geq 0 \Rightarrow 1\geq c$

להפך, אם $c\leq 1$ נראה שיש A שמקיימת את התנאים הנ"ל.
ניקח מטריצה $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$. הפולינום האופייני שלה הוא
$p_A(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$ אבל לפי הנתון t^2-2t+c הוא
פולינום מתוקן ממעלה שניה שמאפס את המטריצה לכן הוא
הפולינום האופייני. כלומר $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)=t^2-2t+c$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=2\\ \lambda_1\lambda_2=c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=2\\ c\neq 0\ \ \lambda_2=\frac{c}{\lambda_1}\end{cases}$$

$$\lambda_1+\frac{c}{\lambda_1}=2$$

$\lambda_1^2-2\lambda_1+c=0 \Leftarrow c\leq 1 \Leftarrow \Delta\geq 0 \Leftarrow$ יש פתרון ומכאן יש מטריצה הנ"ל

③ נתון T ט"ל נורמלית. הוכ: $\ker T = \ker T^*$.

הוכחה: תזכורת: נורמלית זה אומר ש- $TT^* = T^*T$.

$$v \in \ker T \iff Tv = 0 \iff \|Tv\|^2 = 0$$
$$\iff 0 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^*Tv\rangle = \langle v, TT^*v\rangle =$$
$$= \langle T^*v, T^*v\rangle = \|T^*v\|^2 = 0$$
$$\iff T^*v = 0 \iff v \in \ker T^*$$

④ תהא T נורמלית ו- λ ע"ע של T אז $\bar{\lambda}$ ע"ע של T^*.

הוכחה: ברור ש- $T-\lambda I$ נורמלית.

$$\ker(T^* - \bar{\lambda} I) \overset{(3)}{=} \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

טענה: יהא $F \ni a \neq 0$. λ ע"ע של A אמ"מ $a\lambda + b$ ע"ע של $aA + bI$. יתר על כן, יש להם אותו ריבוי אלגברי ואותו ריבוי גאומטרי.

הוכחה: $(\Rightarrow)$ הוכחנו בתרגול

$(\Leftarrow)$ $A = \frac{(aA+b)-b}{a}$ ושימוש בכיוון $(\Rightarrow)$

⑤ תחשבו את $|A| = \begin{vmatrix} a+b & & a \\ & \ddots & \\ a & & a+b \end{vmatrix}$. נשים ♡ ש- $D = a\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + Ib$.

ל- $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ יש ע"ע 0 עם רג = רא = $n-1$ ו- n ע"ע עם רא = רג = 1.

$\Leftarrow$ מהטענה נקבל ש- b ע"ע עם ריבוי $n-1$ ו- $an+b$ ע"ע עם ריבוי 1. $\Leftarrow$ $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = b^{n-1}(an+b)$

טענה: $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אז A לכסינה ע"י בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ (אנחנו רק מכירים את המקרה הכללי מעל $\mathbb{C}$)

הוכחה: ל- A ע"ע ממשים. יש רק לבדוק את $\dim\ker(A-\lambda I)$. בשביל זה צריך לבדוק את $\operatorname{rank}(A-\lambda I)$. מכיוון שחישוב דרגות מטריצה מתבצע בעזרת פעולות דירוג והפעולות האלו לא ישתנו אם נגדיל את השדה שאנחנו נמצאים בו. לכן רא = רג גם מעל הממשיים.

$\Leftarrow$ A לכסינה. לכל אחד מהע"ע ניקח בסיס. אך שני מ"ע הם ניצבים אז נאחד את כולם ונקבל בסיס ל- $\mathbb{R}^n$.

<u>מסקנה</u>: T ט"ל נורמלית. אז T מכפלה של ט"ל הרמיטית וט"ל אוניטרית שמתחלפות.

⑥ יהי שדה סופי F עם q איברים. כמה מטריצות נילפוטנטיות יש ב- $M_2(F)$?

<u>פתרון</u>: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ נילפוטנטית $\Leftarrow$ $\begin{matrix} a+d=0 \\ ad-bc=0 \end{matrix}$ (*) (נשאר להראות)

כי אם $A^k=0$ אז $(\det A)^k=0$

$\Leftarrow$ $\det A=0$

(ומכאן ראינו ש- $k\le 2$)

לכן נקבל ש $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ ומתקיים $-a^2-bc=0$.

לכל a ולכל $b\neq 0$ יש c יחיד שפותר את זה. ולכן קיבלנו עד עתה $q(q-1)$ פתרונות.

אם $b=0$ אז $-a^2=0$ $\Leftarrow$ $a=0$ לכן כל c הוא פיתרון ולכן בסה"כ $q(q-1)+q=q^2$ מטריצות.

נראה את *: אם היא נילפוטנטית אז הע"ע שלה כולם אפס. כלומר כולם בשדה ולכן היא ניתנת לשילוש, כלומר דומה ל $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ והעקבות להיות $\Rightarrow$ העקבה היא אפס.

⑦ תהי $A\in M_n(F)$ הפיכה. אז A^{-1} פולינום ב- A. כלומר, יש $p(x)\in F[x]$ כך ש- $p(A)=A^{-1}$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $p(t)=p_A(t)=t^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

מקיילי המילטון $A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=0$

$\Rightarrow A(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I)=-a_0I$

אם $a_0\neq 0$ נקבל $A(-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I))=I$ וסיימנו.

אם $a_0=0$ אז נקבל שאפס הוא ע"ע בסתירה לכך ש- A הפיכה.

הערה: <u>תמ"ז</u> $a_0=\pm\det A$

$a_{n-1}=\pm \operatorname{tr} A$

8) האם למטריצת בלוקים $\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$ (הבלוקים שווי גודל)

הדטרמיננטה היא $\det A_{11} \det A_{22} - \det A_{12} \det A_{21}$?

פתרון: <u>לא</u>! לדוגמה:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(36) 26.6.06

תשנאורית

(תבניות בי-לינאריות (תב"ל))

הגדרה:

* f תב"ל של $U\times V$ (מ"ו מעל F) אם $f: U\times V \to F$ היא ט"ל בכל קואורדינטה
* f תב"ל של V זה היא תב"ל של $V\times V$
* f תב"ל של V אם $f(u,v)=f(v,u)$ לכל $u,v\in V$.

דוגמאות

1) V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle = f(\cdot,\cdot)$ תב"ל והיא גם סימטרית.

2) V מ"ו ממימד 2 ויהא Δ פונק' נפח. אז התבנית $f(u,v)=\Delta(u,v)$ היא תב"ל יתר על כן היא אנטיסימטרית: $f(u,v)=-f(v,u)$ לכל $u,v\in V$.

3) יהא $V=F^n$ ויהא $M\in M_n(F)$. אז
$$f(u,v) = u^t M v$$
מגדיר תב"ל של V.
באופן כללי ניתן להגדיר תב"ל של $F^n\times F^m$ ע"י $f(u,v)=u^t M' v$ ו $M'\in M_{n,m}(F)$

4) לכל $\varphi\in V^*$, $\psi\in W^*$ נקבל ש $f(u,v)=\varphi(u)\psi(v)$ תב"ל של $V\times W$.

תזכורת: יש איזומורפיזם בין מרחב התב"ל של $V\times W$ לבין מרחב המטריצות $M_{m,n}(F)$ ע"י שאם נבחר בסיס $A=\{v_i\}$ ל-V והבסיס $B=\{w_j\}$ ל-W אז ההתאמה היא $f \longmapsto [f]_{A,B}=\left(f(v_i,w_j)\right)_{ij}$

<u>מסקנות:</u>

1) לכל $v \in V$, $w \in W$, f תבנית של $V \times W$

$$f(u,w) = ([u]_A)^t [f]_{A,B} [w]_B$$

כאשר A בסיס ל-V ו-B בסיס ל-W.

<u>הערה:</u> באותו, במקרה פרטי. $(e_i)^t M e_j = M_{ij}$

2) שתי מטריצות (לאו דווקא ריבועיות) ייקראו שקולות אם הן מייצגות את אותה תבנית בילינארית של מ"ו $V \times W$.

<u>הערה:</u> נניח יש V עם בסיסים A, A'

W B, B'

אז $[f]_{A,B} = (\underbrace{[Id]^{A}_{A'}})^t [f]_{A',B'} [Id]^{B}_{B'}$

מ-A ל-A'.

3) אם A, B מטריצות עם אותם מימדים אז A, B שקולות אמ"מ A, B שוות דרגה

אמ"מ שתיהן שקולות למטריצה $D_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

4) תבנית של V $f(u,v) = ([u]_A)^t \underbrace{[f]_{A,A}}_{[f]_A} [v]_A$

5) f תבנית של V ו- A, B בסיסים ל-V.

אז $[f]_A = ([Id]^A_B)^t [f]_B [Id]^A_B$

6) <u>הגדרה:</u> $A, B \in M_n(F)$ חופפות אם הן מייצגות את אותה תבנית של מ"ו V

7) יהיו $\{\varphi_i\}$ בסיס ל-V^*

$\{\psi_j\}$ בסיס ל-W^*

$\{\varphi_i \cdot \psi_j\}$ תבנית של $V \times W$.

יתר על כן, זה בסיס למרחב התבניות של $V \times W$.

$[\varphi_i \cdot \psi_j]_{A,B} \in M_{m,n}$

אם ניקח את A להיות הבסיס הדואלי ל-$\{\varphi_i\}$

ו-B הדואלי ל-$\{\psi_j\}$

(37)

אזי $[\varphi_i \cdot \psi_j]_{A,B} = (\varphi_i(v_k)\cdot\psi_j(w_l))_{k,l} = E_{ij}$

ולכן הקבוצה $\{\varphi_i \cdot \psi_j\}$ עוברת תחת האיזומורפיזם $[\ ]_{A,B}$ לבסיס E_{ij} של $M_{m,n}$ כלומר זהו בסיס למרחב התבל.

8) f תבל סימטרית אמ"מ $[f]_A$ סימטרית עבור בסיס A כלשהו.

ונשים ♡ שאם P סימטרית אז לכל Q גם Q^tPQ סימטרית

9) אם A חופפת למטריצה אלכסונית אז A סימטרית כי $A = Q^tDQ$

10) ראינו משפט שתבל נתון ע"י הכיוון ההפוך רק אם $char F \neq 2$.

לדוגמה $F = \mathbb{Z}_2$ וניקח תבל המוצגת ע"י $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xy+yx = 2xy = 0$$

יתר על כן, אם יש בסיס A כך ש $[f]_A = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ אז $f(v_1,v_1)=a=0$, $f(v_2,v_2)=b=0$ ולכן $[f]_A = \tilde{0}$. אבל זו סתירה כי f אינה תבנית האפס.

11) A ממשית וסימטרית אז ניתן להגיד יותר מהמשפט הקודם כי A לכסינה ע"י מא"ן $D = U^*AU$ וזה המקרה הפרטי אופר חפיפה כיוון ש- U אורתוגונלית אז $U^* = U^t$.

12) אם A סימטרית מרוכבת (ב $M_n(\mathbb{C})$) אז A חופפת ל D_r.

13) A סימטרית וממשית אז A חופפת ל

$$D_{p,m} = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_m & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

14) משפט ההתמדה של סילבסטר: $D_{p,m}$ נקבע באופן יחיד ע"י A.

A סימטרית וממשית $\Leftarrow$ לכסינה ע"י בסיס אורתונורמלי

$\Leftarrow$ $u^{-1}AU = u^*AU = u^tAU = D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$

<u>הגדרה:</u> הסיגנטורה של A ממשית סימטרית מוגדרת ע"י $m-p$.