06/03/06

המרצה: מר שמואל ברגר

דטרמיננטות

כשמדברים על מטריצות ריבועיות אפשר לדבר על **דטרמיננטות**. בהינתן $A \in M_n(F)$ הדטרמיננטה של A שתסומן $|A|$ או $\det A$ היא איבר מסוים של F שיוגדר עוד מעט.
לפני שנגדיר במדויק מה זה דטרמיננטה, נביא כמה דוגמאות:
אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$ אז $\det A = ad - bc$. במקרה זה קל לראות ש- $\det A = 0$ אמ"מ השורות תלויות לינארית.
אם $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(F)$ אז
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
כדי להכליל את הנושא למטריצה מסדר $n \times n$ מצטרך לעבוד קצת.

תמורות

תמורה על הקבוצה $\{1,...,n\}$ היא פונקציה חח"ע ועל מקבוצה זו לעצמה. קל להגדיר תמורה בעזרת טבלה, או מטריצה. למשל: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ פירושו $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ ומתקיים $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$
לקבוצת התמורות על n עצמים נקרא S_n. מסמסטר א' אנחנו יודעים שיש $n!$ תמורות ב- S_n.
אחת התמורות היא תמורת הזהות שנסמנה ב- ε ומתקיים שלכל $1 \le k \le n$ $\varepsilon(k) = k$.

נסתכל בתמורה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. המספרים 1 ו- 2 נשארים לאחר החילוף באותו הסדר ואילו 2 ו- 3 מתחלפים בסדר.
בהינתן תמורה σ, זוג מספרים (i, j) כאשר $1 \le i < j \le n$ נקרא **היפוך** של σ אם $\sigma(i) > \sigma(j)$.
למשל בתמורה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ יש 2 היפוכים: $(1,3),(2,3)$. בתמורה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ יש היפוך אחד ואילו בתמורה הזהות אין אף היפוך אחד כמובן!
תמורה נקראת **זוגית (איזוגית)** אם מספר ההיפוכים בה **זוגי (איזוגי)**.
למשל, תמורת הזהות היא תמורה זוגית. יש בה אפס היפוכים וכידוע אפס הוא מספר זוגי.
לכל תמורה σ נגדיר את N_σ **הסימן** של σ באופן הבא: $N_\sigma = 1$ אם σ זוגית ו- $N_\sigma = -1$ אם התמורה איזוגית. אפשר לחשב בקלות את הסימן של σ ע"י הנוסחה: $N_\sigma = \prod_{i<j} \frac{j-i}{\sigma(j)-\sigma(i)}$.

כעת נוכל להגדיר **דטרמיננטה**: תהי $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(F)$. נגדיר $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.

יהיו שתי תמורות σ,σ'. נאמר ש-σ' התקבלה מ- σ באמצעות **חילוף** אם:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & \cdots & k & \cdots & l & \cdots & n\\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(l) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

$$\sigma'=\begin{pmatrix}1 & \cdots & k & \cdots & l & \cdots & n\\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(l) & \cdots & \sigma(k) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

<u>טענה</u>: אם σ' מתקבלת מ- σ ע"י חילוף אזי $N_{\sigma'}=-N_\sigma$.

<u>טענה</u>: תמורה היא זוכית (איזוגית) אמ"מ ניתן לקבל ממנה את תמורת הזהות ע"י מספר זוגי (איזוגי) של חילופים.

<u>כפל של תמורות</u>

תמורות הן העתקות. כפל של העתקות זה בעצם הרכבה שלהם. אז אם יש $\sigma,\tau\in S_n$ נגדיר $\sigma\circ\tau$ ע"י $(\sigma\circ\tau)(k)=\sigma(\tau(k))$.

למשל, אם $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ אז $\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$. כמובן ההרכבה אינה קומוטטיבית כמו הרכבה של העתקות בכלל.

<u>הערה</u>: בכל הדוגמאות רשמנו את המספרים בשורה הראשונה של המטריצה לפי סדרם, אך כמובן זה לא חייב להיות כך. למשל, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4&1\\4&3&1&2\end{pmatrix}$.

זה חשוב משום שזה מאפשר לנו לחשב בקלות מכפלות של תמורות.

נניח $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$. אז $\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\\cancel{4}&\cancel{3}&\cancel{2}&\cancel{1}\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$.

<u>התמורה ההופכית</u>

אם σ תמורה אז σ^{-1} היא התמורה ההופכית, כלומר הפונקציה ההופכית. היא מתקבלת ע"י החלפת שתי השורות במטריצה זו בזו. למשל אם $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ אז $\sigma^{-1}=\sigma=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

<u>טענה</u>: σ זוגית אמ"מ σ^{-1} זוגית.

<u>תכונות הדטרמיננטה</u>

א. הדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת שווה לדטרמיננטה של המטריצה: $|A|=|A^t|$. נזכור שאם $A=(a_{ij})$ אז $A^t=(a_{ji})$.

ב. אם כופלים את אחת השורות במטריצה ריבועית בסקלרף אז הדטרמיננטה נכפלת באותות סקלר.
<u>הוכחה</u>: נניח שכפלתי את השורה ה- k במטריצה A בסדקלר c וקיבלתי את המטריצה B.
הדטרמיננטה של A היא $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}N_\sigma\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$. בכל מחובר מופיע כופל אחד מהשורה ה- k.

אז כשמחשבים את $\det B$ כל כופל כזה נכפל ב- c. לכן המכפלה נכפלת ב- c. כל מחובר מוכפל ב- c. לכן לפי חוק הפילוג הסכום כולו נכפל ב- c ואכן $\det B = c\det A$. ☺

ג. אם A היא מטריצה ריבועית ששורותיה לפי הסדר הן $\alpha_1,...,\alpha_k+\alpha_k',...,\alpha_n$, B מטריצה ששורותיה $\alpha_1,...,\alpha_k,...,\alpha_n$ ו- C מטריצה ששורותיה $\alpha_1,...,\alpha_k',...,\alpha_n$ אזי $\det A = \det B + \det C$.

<u>הוכחה</u>: נניח $\alpha_k = (a_{k1},...,a_{kn}), \alpha_k' = (a_{k1}',...,a_{kn}')$. $\det B = \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}\right) a_{k,\sigma(k)}$ ו-

$\det C = \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}\right) a_{k,\sigma(k)}'$. לכן

$\det A = \det B = \sum_{\sigma\in S_n} N_\sigma \left(\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}\right)\left(a_{k,\sigma(k)} + a_{k,\sigma(k)}'\right) = \det B + \det C$. ☺

ד. אם B מתקבלת מ- A ע"י החלפת שתי שורות אז $\det B = -\det A$.

<u>הוכחה</u>: כל המחוברים ב- $\det B$ שווים בערכם המוחלט למחוברים ב- $\det A$. החילוף הופך את הזוגיות של כל התמורות. לכן הדטרמיננטה נכפלת ב- -1. ☺

ה. אם ב- A יש שתי שורות שוות אז $\det A = 0$.

<u>הצעה להוכחה</u>: נחליף שתי השורות השוות ונקבל שוב את A. לפי הסעיף הקודם $\det A = -\det A$. לכן $2\det A = 0$. כלומר $\det A = 0$.

זה לא נכון!!! ההוכחה הזהו נכונה רק במקרה ש- $\operatorname{char} F \neq 2$. בשיעור הבא נראה את ההוכחה למקרה ש- $\operatorname{char} F = 2$.

08/03/06

<u>טענה</u>: אם ב- A יש שתי שורות שוות אז $\det A = 0$.
<u>להוכחה</u>: אם $\operatorname{char} F \neq 2$: נחליף שתי השורות השוות ונקבל שוב את A. לפי הסעיף הקודם $\det A = -\det A$. לכן $2\det A = 0$. כלומר $\det A = 0$.
אם $\operatorname{char} F = 2$: הדטרמיננטה היא סכום של מכפלות. הואיל ויש שתי שורות שממות כל מחובר מופיע בסכום פעמיים. $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ נשים לב שלא חסר לנו כאן הסימן משום שבשדה עם מציין 2 $1 = -1$. נניח בה"כ שהשורה הראשונה שווה לשורה השנייה. $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$. אבל בגלל ששתי השורות שוות אז יש איזו תמורה τ כך ש- $a_{1,\sigma(1)} = a_{2,\sigma(2)}$. לכן כל מחובר יופיע בפעמיים, אולי בסדר שונה, אך בכל זאת יופיע פעמיים. לכן הדטרמיננטה היא משהו $\times 2$. ומאחר שהמציין הוא 2 אז $\det A = 0$. ☺

<u>טענה</u>: אם ב- A שורה אפסים אז $\det A = 0$.
<u>הוכחה</u>: הוכחנו שאם כופלים שורה בסקלר אז הדטרמיננטה נכפלת באותו סקלר. נכפול את שורת האפסים באפס ונקבל $\det A = 0 \cdot \det A$. לכן $\det A = 0$. ☺

<u>טענה</u>: אם שורה במטריצה היא כפולה של שורה אחרת אז $\det A = 0$.
<u>הוכחה</u>: המטריצה A התקבלה ממטריצה B בעלת שתי שורות שוות ע"י כפל אחת השורות האלה בסקלר c. כזכור $\det B = 0$, משום שיש לה שתי שורות שוות. לכן $\det A = c \cdot \det B$, כלומר $\det A = 0$. ☺

<u>דוגמאות</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 13 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_3 = 2R_1}{=} 0$$

<u>טענה</u>: במטריצה אלכסוניתל הדטרמיננטה שווה למכפלת איברי האלכסון.
<u>הוכחה</u>: אחד המחוברים הוא לפי תמורת הזהות שהיא זוגית - $a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$. בכל מחובר אחר התמורה σ אינה תמורה הזהות ולכן קיים k כך ש- $\sigma(k) \neq k$. הכופל $a_{k,\sigma(k)}$ נמצא אז מחוץ לאלכסון ולכן שווה לאפס. לכן המכפלה $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ שווה לאפס. אז כל המחוברים בדטרמיננטה, פרט למחובר של תמורת הזהות, הם אפס. ☺

<u>דוגמה</u>: I_n מטריצת היחידה מסדר n. ברור ש- $\det I_n = 1$. ומה בדבר $\det(-I_n)$? הדבר תלוי ב- n. מאחר שכל שורה נכפלת ב- -1 נקבל ש- $\det(-I_n) = (-1)^n$.

<u>טענה</u>: במטריצה משולשית הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.

<u>טענה</u>: הוספת שורה במטריצה לשורת אחרת אינה משנה את הדטרמיננטה.
<u>הוכחה</u>: תהי A מטריצה ונוסיף לשורה ה- j את השורה ה- i ונקבל מטריצה B. תהי C המטריצה המתקבלת מ- A ע"י כתיבת השורה ה- i במקום השורה ה- j. ב- C יש שתי שורות שוות. לכן $\det C = 0$.

$$C==\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_i+\alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

כעת לפי משפט קודם $\det B=\det A+\det C$ כלומר $\det A=\det B$. ☺

<u>טענה</u>: אם במטריצה A מוסיפים לשורה אחת כפולה של שורה אחרת הדטרמיננטה אינה משתנה.
<u>הוכחה</u>: כמו בטענה הקודמת, A היא המטריצה המקורית, C היא המטריצה שבה במקום שורה α_j מופיעה השורה $c\alpha_i$, B היא המטריצה שבה במקום השורה α_j מופיעה הושרה $\alpha_j+c\alpha_i$. כמו קודם, $\det B=\det A+\det C$ וגם כאן $\det C=0$ כי השורה ה- j היא כפולה של השורה ה- i. ☺

<u>טענה</u>: $\det A=0$ אמ"מ שורות A תלויות.
<u>הוכחה</u>:
($\Rightarrow$) נניח שהשורות תלויות. אז המטריצה שקולת שורות למטריה עם שורת אפסים. אם A היא הדטרמיננטה המקורית נקבל ממנה ע"י פעולות אלמנטריות על שורות את המטריצה B ובה שורת אפסים. לפי כל הטענות הקודמות הפעולות האלמנטריות אינן משנות את המטריצה. אבל $\det B=0$. לכן $\det A=0$.
($\Leftarrow$) נניח שהשורות אינן תלויות. אזי A שקולת שורות ל- I_n. נבצע סדרת פעולות אלמנטריות על I_n כדי להגיע ל- A. אחרי על פעולה הדטרמיננטה אינה נכפלת באפס. שהרי היא נכפלת באפס רק אם כופלים אחת הושורת באפס, אך זו לא פעולה אלמנטריות. לכן בסוף כשמגיעים ל- A הדטרמיננטה עדיין שונה מאפס. ☺

בגלל שאנחנו ויודעים איך פעולות אלמנטריות משפיעות על הדטרמיננטה זה מאפשר לשנו לחשב דטרמיננטות בקלות יחסית.

לדוגמה, $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&6&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\1&6&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&0&-9\end{vmatrix}=1\cdot(-4)\cdot(-9)=36$

<u>המטריצה המשוחלפת</u>

את המטריצה המשוחלפת של A נסמן ע"י A^t.

<u>דוגמה</u>: עבור $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&7&9\\3&6&1\end{pmatrix}$ מתקבל $A^t=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&7&6\\3&9&1\end{pmatrix}$

<u>הגדרה</u>: אם A מטריתה (לאו דווקא ריבועית) ו- $A=(a_{i,j})$ אז המטריצה המשוחלפת A^t היא המטריצה $A^t=(a_{j,i})$ (כלומר כל שורה הופכת לעמודה)

תכונות הדטרמיננטה

(א) החלפת 2 שורות מחליפה את סימן הדטרמיננטה

(ב) אם במטריצה A יש שתי שורות שוות אז $\det A = 0$

(ג) אם כופלים במטריצה את אחת השורות בסקלר λ אז הדטרמיננטה נכפלת ב- λ

(ד) אם A מטריצה ששורותיה $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n$

B מטריצה ששורותיה $\alpha_1, \dots, \alpha_k', \dots, \alpha_n$

C מטריצה ששורותיה $\alpha_1, \dots, \alpha_k + \alpha_k', \dots, \alpha_n$

אז $\det C = \det A + \det B$

* תכונות אלה רמוזן מתיחסות למטריצות $M_n(F)$.

מראן הסקנו כמה מסקנות:

<u>מסקנה I</u> אנו יודעים כילצד משתנה (או לא משתנה) הדטרמיננטה בעקבות פעולות אלמנטריות על השורות

<u>מסקנה II</u> אם שורות המטריצה תלויות אז $\det A = 0$.

<u>מסקנה III</u> אם השורות בלתי תלויות אז $\det A \neq 0$

<u>הגדרה</u> אם $A = (a_{ij})$ אז המטריצה $\boxed{\text{ההשוחלפת}}$ A^t היא (a_{ji})

<u>טענה:</u> $|A^t| = |A|$

<u>הוכחה:</u> ראשית, לפי ההגדרה $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

או $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$ ענית

ש- $A^t = (b_{ij})$ מה הדטרמיננטה של A^t?

$$\det A^t = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma b_{1,\sigma(1)} \dots b_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} N_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

- לאחר שהתרגלנו בקבוצה הוא עדיף את עניין
- הפ' שרגלים יפה שמנים יודע בעפ

☺

מסקנות

נעשו במעל שאותנו יודעים ש- $|A^t| = |A|$ נוכל להסיק את אותן התכונות של הדטרמינטה בקשר לשורות אם לאחר הטרנספוזיציה.

א) הוספת שתי זהויות במטריצה הופכת את סימן הדטרמינטה

ב) במטריצה בעלת שתי זהויות שוות הדטרמינטה היא אפס

ג) אם כופלים זהות בסקלר א' אז הדטרמינטה נכפלת ב- א'

ד) אם A מטריצה שזהויותיה $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$

B מטריצה שזהויותיה $a_1, \dots, a_k', \dots, a_n$

C מטריצה שזהויותיה $a_1, \dots, a_k + a_k', \dots, a_n$

אז $\det C = \det A + \det B$

ה) אם מבצעים פעולה אלמנטרית על זהויות המטריצה אז השינוי בדטרמינטה הוא כלהלן:

1) אם מחליפים 2 זהויות רק הסימן מתהפך

2) אם מוסיפים לזהות כפולה של זהות אחרת אין שינוי

3) אם כופלים זהות בסקלר שונה מאפס הדטרמינטה נכפלת באותו סקלר.

1) הדטרמינטה שווה לאפס אמ"מ הזהויות תלויות לינארית.

תכונות של טענות

1) למטריצה אלכסונית הדטרמינטה היא מכפלת איברי האלכסון

2) למטריצה משולשת עליונה או תחתונה הדטרמינטה היא מכפלת איברי האלכסון.

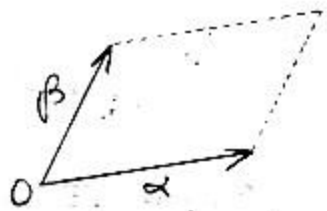
רעיון להוכחה אם המטריצה נראית $\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

אחד המחוברים הוא $a_{11} \cdots a_{nn}$ ומשאר המחוברים, מאחר שמדובר בתמורה אחד הכופלים חייב להיות משורות התחתונות וזה אפס.

הגדרת נפח במרחב n-מימדי

אנחנו רואים שהדבר הזה בעצם בעצם אומר לפעמים אינטגרלים.

<u>קומבה</u> נסתכל בשני הוקטורים α, β במישור. ניתן ששניהם יוצאים מהנקודה O.



אנו מעוניינים בשטח המקבילית המתקבלת מהווקטורים הללו.
רק שאנחנו נגדיר פעם שטח אלגברי. ויהיה לו גם סימן.
נעבור אנחנו מדברים על כלשהו סדר של וקטורים $\langle \alpha, \beta \rangle$
את השטח האלגברי נסמן $S(\alpha, \beta)$.

תכונות השטח האלגברי: (המקרה הספציפי של המקבילית)

א) $S(\alpha, \alpha) = 0$

ב) $S(t\alpha, \beta) = t S(\alpha, \beta)$

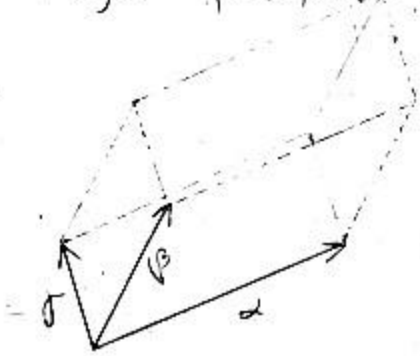
$S(\alpha, t\beta) = t S(\alpha, \beta)$

לא עוד יש תכונות נאלה? נאמר: אתמול ב. ג ...

ג) $S(\alpha + \alpha', \beta) = S(\alpha, \beta) + S(\alpha', \beta)$

$S(\alpha, \beta + \beta') = S(\alpha, \beta) + S(\alpha, \beta')$

אם נסתכל במרחב התלת מימדי. ניתן שלושה וקטורים סדורים (α, β, γ) היוצאים מנקודה אחת, אז מדברים על נפח המקבילון הנוצר



מה ראן מתקבלות התכונות הבאות:

(א) $S(\alpha,\beta,\alpha) = S(\alpha,\alpha,\beta) = S(\alpha,\beta,\beta) = 0$

(ב) $S(t\alpha,\beta,\gamma) = S(\alpha,t\beta,\gamma) = S(\alpha,\beta,t\gamma) = tS(\alpha,\beta,\gamma)$

(ג) $S(\alpha+\alpha',\beta,\gamma) = S(\alpha,\beta,\gamma) + S(\alpha',\beta,\gamma)$

$S(\alpha,\beta+\beta',\gamma) = S(\alpha,\beta,\gamma) + S(\alpha,\beta',\gamma)$

$S(\alpha,\beta,\gamma+\gamma') = S(\alpha,\beta,\gamma) + S(\alpha,\beta,\gamma')$

נמשיך אנתנו יכולים לשכוח מכל המקבילוגים וכה.

<u>הגדרה</u> יהי V מ"ו מימד n מעל השדה F. $\boxed{\text{פונקציית נפח}}$ על V היא פונקציה $\Delta: V^n \longrightarrow F$ המקיימת את התכונות הבאות:

(א) אם יש בין וקטורים שווים אל הוונקציית הנפח היא אפס. כלומר, אם $i \neq j$ ו- $\alpha_i = \alpha_j$ אז $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0$

(ב) לכל סקלר λ ולכל $1 \le k \le n$ מתקיים:

$\Delta(\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_k,\dots,\alpha_n) = \lambda\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)$.

(ג) לכל $1 \le k \le n$ מתקיים:

$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k+\alpha_k',\dots,\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k',\dots,\alpha_n)$

<u>דוגמאות</u>

- ראינו כבר ששטח של מקבילית ונפח של מקבילון מקיימים כאן.
- יותר מזה, הדטרמינטה היא מקרה פרטי של פונקציית נפח.
- (דוגמה מפי דנה) אם לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0$ אז Δ היא פונקציית נפח
- אם Δ פונק' נפח ו-λ סקלר אז גם $\lambda\Delta$ פונק' נפח.

המסקנה: של הרבה פונק' נפח (אבל לא מיחד) את הדטרמינטה

נזכיר שהדטרמיננטה מתלקחת אם מתלקחים 2 שורות בה. רשהגדרנו פונק' נפח לו לא הייתה אותה התכונה אבל.

<u>טענה:</u> אם Δ פונק' נפח אז

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n) = -\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$$

(התלפנו במקום רק את α_i ו- α_j

<u>הוכחה:</u> בהכ $i=1$ ו- $j=2$ (אחרת לה אותו דבר רק דרוש בקצר להשתבש עם האינדקסים).

$$0 \overset{(4)}{=} \Delta(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) =$$

$$\overset{(3)}{=} \Delta(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n)$$

$$\overset{(3)}{=} \Delta(\alpha_1,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) + \Delta(\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) +$$

$$+ \Delta(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) + \Delta(\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) =$$

$$\overset{(4)}{=} \Delta(\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n)$$

$\Leftarrow$ נעבור אגפים ונקבל

$$\Delta(\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n) = -\Delta(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n)$$

אז דטרמיננטה היא פונקציית נפח על השורות של המטריצה וזו נתנו רואים אם שחלוף הסימן נובע מהתכונות האחרות. ראובן, לא כל פונק' נפח על שורות המטריצה היא דטרמיננטה. התכונה הנ"ל שבה של הדטרמיננטה היא ש על שורות מטריצת היחידה היא נותנת 1.

<u>טענה</u> פונקציית נפח Δ על F^n המקיימת $\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = 1$ ($\varepsilon_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$) מתלכדת עם הדטרמיננטה.

בקר טוב, שקט בכיתה?
Wuhu! היתה אתמול, השיעור ביום רביעי
ותבקיים באולם קפלן! רבודל!

טענה: יש פונקציית נפח אחת ויחידה הנותנת את הערך 1 למטריצת היחידה, ואותה הדטרמיננטה.

הוכחה: ראשית, הדטרמיננטה היא פונקציית נפח הנותנת למטריצת היחידה את הערך 1.

תהי Δ פונקציית נפח הנותנת למטריצת היחידה את הערך 1 ונראה ש- $\Delta = \det$.

דרוש להראות שלכל $A \in M_n(F)$ מתקיים $\Delta(A) = \det(A)$ (ראשר $\Delta(A)$ היא Δ של סדרת שורות המטריצה A)

אם $A = I$ אכן לפי הנתון $\Delta(A) = \det A = 1$.

אם A הפיכה (לינארית) אז A מתקבלת מ- I ע"י סדרה סופית של פעולות אלמנטריות. בכל פעולה אלמנטרית התוצאה של Δ היא אותה תוצאה כמו של $\det$. לכן התוצאה הסופית היא כהה ומקבלים ש- $\Delta(A) = \det(A)$.

אם A אינה הפיכה (סינגולרית) אז היא מתקבלת ע"י סדרה סופית של פעולות אלמנטריות ממטריצה B בעלת שורת אפסים. $\Delta(B) = \det(B) = 0$ מדוע $\det(B) = 0$ ידוע.

מדוע $\Delta(B) = 0$? באותו אופן כמו בהוכחה של הדטרמיננטה נכפול את שורת האפסים באפס ונקבל $\Delta(B) = 0\Delta(B)$

לכן $\Delta(A) = \det(A)$ והנימוק הוא כמו במקרה של A לינארית.

אז לכל מטריצה A מתקיים $\Delta(A) = \det(A)$. לכן נקבל את הדרוש $\Delta = \det$.

טענה קטנה: יהי $c \in F$ יש פונקציה נפח אחת יחידה, הנותנת את הערך c למטריצת היחידה, ולאות הפונקציה $\Delta(A) = c \cdot \det(A)$.

הוכחה: בדיוק כמו ההוכחה הקודמת.

* סיפור: כן שמעו את אבא שלו איך פעם טלפון. האבא אומר לו לדמיין כמה אנשים שנכנו בתל אביב וראשון בירושלים. דוברים על כנבו בתל אביב ומי נובח בירושלים. הבן שואל, אם כן, איך פעם בטלפון? ובכן, אומר האב, בדיוק כמו טלפון רק בלי הכבל.

כך גם ההוכחה של הטענה הקטנה. בדיוק כמו הקודמת רק עם ה-c. c כי צריך האות הראשונה במילה כלב.

הערה: המשך לטענה הקטנה, בפרט, אם $c=0$, מקבלים שפונקציית האפס היא פונקציית הנפח היחידה הנותנת ל-I את הערך 0.

מה קורה עם מטריצות 1×1? נניח $A=(a)$. נגדיר $\det A = a$. קל לראות שלה אכן מקיים את כל התכונות של הדטרמיננטה ושל פונקציות נפח.

לאחרונה שאם כופלים שורה במטריצה מסקלר אז הדטרמיננטה נכפלת בסקלר הזה. אותו הדבר לגבי פונקציית נפח. אם Δ פונקציית נפח, לאחרונה שאם כופלים אחד הווקטורים בסקלר פונה הנפח לאותה סידרה נכפלת באותו סקלר. ועם לאחרונה שאם מפצלים אחד הווקטורים מקבלים סכום:

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_k + \alpha_k', \dots, \alpha_n) =$$
$$= \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_k', \dots, \alpha_n)$$

מרגן אותנו נקבל

מסקנה:

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\sum_{l=1}^{m} c_l\alpha_k^l,\dots,\alpha_n) = \sum_{l=1}^{m} c_l\,\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k^l,\dots,\alpha_n)$$

הוכחה: לא קשה אבל קשה לה נבנן מידית למדי.

שאלות ותשובות

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1\cdot\ldots\cdot a_n$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & \ddots & \\ a_n & & 0 \end{pmatrix} = ?$$

פה קל לחשב מסובך יותר. נראה ראשית כמה דוגמאות:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = -a_1a_2$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_3 & & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_3 \end{pmatrix} = -a_1a_2a_3$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & a_3 & & \\ a_4 & & & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} =$$

$$= -(-\det\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ 0 & & & a_4 \end{pmatrix}) = a_1a_2a_3a_4$$

נבדוק:

אם אם n נתון, שאריות 0 או 1 בתלוקה ב- 4 אז $\det A = a_1a_2\dots a_n$

ואם השאריות היו 2 או 3 אז $\det A = -a_1a_2\dots a_n$

פיתוח הדטרמינטה לפי שורה

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$ כאשר $n>1$.

תהי A_{ij} המטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ המתקבלת מ-A ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

דוגמה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{12}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

נסמן: $\det A_{ij}=m_{ij}$. m_{ij} נקרא מינור.

בדוגמה הקודמת, $m_{12}=\det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}=49-67=-6$

דוגמה נוספת: נניח $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ אז $A_{11}=(9)$ ו- $m_{11}=9$

משפט הפיתוח לפי השורה ה-i:

אם A מטריצה $n\times n$ $(n\geq 2)$ אז

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}m_{ij}$$

דוגמאות: נניח $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ונפתח לפי השורה הראשונה.

$$\det A=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{1+j}a_{1j}m_{1j}=(-1)^{1+1}a_{11}m_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}m_{12}=$$
$$=1\cdot a\cdot d-1\cdot b\cdot c=ad-bc$$

נפתח לפי השורה השנייה ונקבל:

$$\det A=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{2+j}a_{2j}m_{2j}=(-1)^{2+1}a_{21}m_{21}+(-1)^{2+2}a_{22}m_{22}=$$
$$=-1\cdot c\cdot b+1\cdot d\cdot a=ad-bc$$

נניח ש $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ונפתח לפי השורה השנייה:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} =$$

$$= (-1)^{2+1} a_{21} M_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} M_{22} + (-1)^{2+3} a_{23} M_{23} =$$

$$= -5\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (-5)(-5) + 4\cdot(-4) - 3\cdot(-1) = 12$$

נפתח את הדטרמינטה של אותה מטריצה לפי השורה הראשונה ונקבל:

$$\det A = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 12$$

הוכחת המשפט

ראשית נוכיח לפי יתוח לפי השורה הראשונה ומשם נעבור לשאר השורות כה הקלות.

עלינו להוכיח כי:

$$\det A = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}$$

אנחנו נראה שלה אמנם לא קשה, אבל קל ...

לכל $1 \le j \le n$ יהי ε_j וקטור השורה שבו במקום ה-j מופיע 1 ובשאר המקומות 0.

השורה הראשונה ב-A אינה אלא $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\varepsilon_j$.

נסמן לכל j ב-A^j את המטריצה שהתקבלה מ-A ע"י החלפת השורה הראשונה ב-ε_j. לפי אחת מהנכונות מתחלת השיעור, מאחר שהדטרמינטה היא פונקציית נפח

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \det A^j$$

שהרי

$$A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & * & & \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ & * & & \end{pmatrix} + \dots + a_{1n}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & * & & \end{pmatrix}$$

לפי רק שורה ראשונה לפי רק שורה ראשונה לפי רק שורה ראשונה

לכן כדי להראות ש- $\det A^1 = (-1)^{1+j} M_{1j}$
נדרוש לראות ל- $j=1$ ולשאר נעשה לראות ע"י התלפת עמודות.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A^1 = ?$$

התמורות שמתקיימות אותנו הן רק אלה שמקיימות $\sigma(1)=1$
כי באחרות המחובר הוא 0.

בכל תמורה $\sigma \in S_n$ אם $\sigma(1)=1$ נוכל להסתכל עליה
כעל תמורה של המספרים $2,\dots,n$ והגדרות של שתיהן
נאמרן אותה דרך. אם נקבל (S_{n-1} - התמורות של $2,\dots,n$)

$$\det A^1 = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} M_\sigma a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)} = M_{11}$$

$$\det A^2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

אחרי החלפת שתי העמודות הראשונות

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & a_{21} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = -M_{12}$$

לפי ההגדרה ל- A^1

בשביל לקבל את A^3 נצטרך לעשות 2 חילופים. בשביל
לקבל את A^4 נצטרך לעשות 3 חילופים וכן הלאה
לא מספיק לעשות חילוף אחד, כי צריך לשמור על הסדר.

המשך בום רבינו בקשלן

(14) 22.03.06
שיעורית

בוקר טוב מבורות! והלאה!

התחלנו להוריד את נוסחת פיתוח דטרמינטה לפי השורה ה-i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}$$

קודם כל ניסינו להוריד - לשורה הראשונה מה שנורה הוא

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} m_{1j}$$

השורה הראשונה אינה אלא $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \varepsilon_j$. הגדרנו A^j המטריצה שמתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה הראשונה ב- ε_j. ברור שהמינורים של A^1 ושל A^j לפי השורה הראשונה הם אותם מינורים, משום שהמטריצות שונות רק בשורה הראשונה.

ברור ש- $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \det A^j$ (מתכונות det)

נזכור שרוצים ש- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} m_{1j}$

אז יפה להוריד ש-

$$\det A^j = (-1)^{1+j} m_{1j}$$

אם לא נכון, הינו המאושרים באופן הוכחנו את לה בשיעור שעבר, אבל נלכיר:

נורית קודם ל- $j=1$ ואז עבור להוריד ש-

$$\det A^1 = m_{11}$$

איך אנחנו מורחים את לה? למעשה לה זה ברור:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

אם מחשבים את $\det A^1$ מה מקבלים?

$\det A^1 = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)}$ b_{ij} איברי A^1.

אבל אם $\sigma(1) \neq 1$ אנחנו מקבלים מחוברים שמת אפסים.

אז בעצם $\det A^1 = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} N_\sigma a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$

לכל $\sigma \in S_n$ כך ש- $\sigma(1)=1$ מתאימה תמורה אחת ויחידה σ' של הקבוצה $\{2,\dots,n\}$ (נסמן את קבוצת התמורות של $\{2,\dots,n\}$ ב- S'_{n-1}) המתלכדת עם σ לכל $1<k\le n$. ברור ש- $N_\sigma = N_{\sigma'}$ כי לאף 1 אין תלות אי התלופים ב- σ ו- σ' הם אותם תלופים.

לכן $\det A^1 = \sum_{\sigma' \in S'_{n-1}} N_{\sigma'}\, a_{2,\sigma'(2)} \cdots a_{n,\sigma'(n)} = m_{11}$

$$\Rightarrow \det A^1 = m_{11}$$

מהי $\det A^2$?

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A^2 = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = -m_{12}$$

כי, אם נאולו הוכיחנו את הטור השני מהמטריצה ואנחנו משתמשים במה שהוכחנו קודם.

מהי $\det A^3$?

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A^3 = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= -\left(-\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\right) = m_{13}$$

התלות הלה נחוץ כדי לשמור על הסדר המקורי של התמורות.

כדי נמשיך באינדוקציה ונקבל שיש סימנים מתחלפים
לכן נוסחת הפיתוח לפי השורה הראשונה נרוצה:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

נוכיח את נוסחת הפיתוח לפי השורה השנייה.
כלומר נראה ש- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{חילוף שורה}}{\det A =} - \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי השורה הראשונה}}{=}$$

$$= - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{2j} M_{2j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j}$$

בשביל לפתח לפי שורה: 3 דרך 2 חלופים ולשאר
השורות הפיתוח נעשה באופן דומה

(11)

אבל כן. דרך לא יעילה כי לחישוב השמדובר במטריצה
עם אפילו 5 שורות הרבה יותר פשוט לדרג את
המטריצה ובשיטה הזו דרוש הרבה פחות זמן חישוב.
אבל הנוסחה שנ פיתוח לפי שורות טובה כי היא
נוסחה סגורה והיא תשמש אותנו להשלמת מ' איזי
תוצאות תיאורטיות.

שימושי: אם A מטריצה משולשית תחתונה אז $\det A$ הינו מכפלת איברי האלכסון הראשי.

הוכחה: נניח ש- A הינו

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ההוכחה תתבצע באינדוקציה על n. אם $n=1$ זה ברור.

$A = (a) \Rightarrow \det A = a$.

נניח נכון עבור $n-1$ ונוכיח ל- n. נפתח את $\det A$ לפי השורה הראשונה ונקבל

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

כי כל שאר האיברים מתאפסים

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

לפי הנחת האינדוקציה זה. נכון לכל n. ☺

ומה לגבי מטריצה משולשית עליונה? המטריצה המשוחלפת שלה היא משולשית תחתונה ויש לה אותו אלכסון. והוכחנו כבר ש $A = A^t$.

תזכורת לכיכון: מה זה $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}$?

פתרון התזכורת: זה $\det A$.

עוד תזכורת: מה זה $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{kj}$ k קבוע בין 1 ל- n.

פתרון התזכורת: אם $k=i$ אז זה $\det A$.

אם $k \neq i$ זה 0. השאר. הביטוי הזה אינו תלוי בשורה ה- k-ית אם נחליף במטריצה A את השורה ה- k בשורה אחר, עדיין הביטוי לא ישתנה. למשל אם אכתוב במקום השורה ה- k את השורה ה- i אבל אז הביטוי הוא דטרמ' של מטריצה עם שתי שורות שוות ולכן זה אפס.

שימוש יפה: מדיאת נוסחה למטריצה ההפוכה

הגדרה: אם $A=(a_{ij}) \in M_n(F)$,
נגדיר את המטריצה המצורפת (adjoint).
$Adj\,A = (b_{ij}) \in M_n(F)$ רק שלכל i,j $b_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ji}$

למשל, אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז

$$Adj\,A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

הטענה היא ש- $A \cdot Adj\,A = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}$

הוכחה כאן יתברר, מדוע ב- $Adj\,A$ מופיע m_{ij} ולא m_{ji}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \dots & \pm m_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \pm m_{1n} & & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} = ?$$

במכפלה במקום ה- k: באלכסון קיבלנו דטרמינאנטה $|A|$
כי לה נוכיח את הפיתוח לפי השורה ה- k.
מה מופיע במקום ה- i,k כאשר $i \neq k$? לפי התיזה
לה יהיה 0 $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} m_{kj} = 0$ ☺

מסקנה אם A איננה הפיכה, אז $A \cdot Adj\,A = 0$
אם A הפיכה אז $\det A \neq 0$ ולכן $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\,A$

אם כאן, מהלא יתר נות לחשוב באופן לה, אבל בהוכחות
של מושגים אבה שיש נוסחה מאורה

פיתוח דטרמינטה לפי עמודה: נזכור ש- $|A| = |A^t|$ ואז

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} M_{ji}$$

שיטת קרמר (Cramer) לפתרון מע' משוואות

תהי A מטריצה $n \times n$ ונסתכל במע' המשוואות $A\underline{x} = \underline{b}$.
לנוחות ש-A הפיכה. לכל k תהי A_k המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-k ב-$\underline{b}$.
אם $|A| \neq 0$ יש פתרון יחיד $c_1, \dots, c_n$. לכל $1 \le k \le n$

$$c_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

הוכחה בשבוע הבא. ברשות, נראה דוגמאות

אם $n=1$ ש משוואה מ"ל: $ax = b$.
הפתרון הוא $\frac{b}{a}$ ולה"אכן מתאים שנוסחה כי אז $A_1 = (b)$ ו- $|A| = a$.

אם $n=2$ יש שתי משוואות
$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1 a_{22}$$
$$a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y = b_2 a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$
$$\det A \cdot x = \det A_1$$

אם $\det A \neq 0 \Rightarrow x = \frac{|A_1|}{|A|}$

באותו אופן מורידים עבור y

(17) 27.3.06
לינארית

תהי $A \in M_n(F)$ ונתתר $1 \le l, k \le n$. מה זה

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{lj} m_{kj} = ?$$

אמרנו שאם $l = k$ זה שווה ל $\det A$ משום שזה הפיתוח לפי השורה ה-l.

מה קורה אם $l \neq k$? אם הביטוי הזה שווה ל-0 אז הדבר הזה הסברנו בשיעור שעבר. אבל התיפכון הוא מן השטן והיום נסביר את זה שוב, לאט, וכוולם יבינו!

בדרכת התלק השני:

תהי $B = (b_{ij})$ המטריצה המתקבלת מ-A ע"י מחיקת השורה ה-k והתיבת השורה ה-l במקומה. לכן לכל j ולכל i השונה מ-k מתקיים $b_{ij} = a_{ij}$ ואילו $b_{kj} = a_{lj}$. כמובן, $\det B = 0$. מדוע? (התשובה מתחילה ב"כ" - כרגיל) כי יש לה שתי שורות שוות. מלבד שני, אפשר לפתח את הדטרמינטה של B לפי השורה ה-k. כל המינורים של B ששייכים לשורה ה-k הם כמו ב-A. אבל לפי הנוסחה

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} b_{kj} m_{kj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{lj} m_{kj}^{(*)} = 0$$

אנחנו רוצים להוריד ש $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{lj} m_{kj}^{(**)} = 0$ שזה לא הדיוק אותו הדבר כמו (*) אבל זה בכלל לא נורא, כי ברור שההבדל בינהם הוא רק בסימן. ואם $0 = (*)$ אז בוודאי $0 = (**)$.

משל ☺

בראיה שיש לנו את הטענה הבאה אפשר לדבר על המטריצה המודגמת ויקיבלנו ש- $A \cdot Adj A = |A| I$.

<u>שיטת קרמר</u> (זה בידיש)

נסתכל במערכת המשוואות $A\underline{x} = \underline{b}$ n משוואות ב-n נעלמים. $A \in M_n(F)$. יש פיתרון יחיד אמ"מ $\det A = 0$.

לכל $1 \le k \le n$ תהי A_k המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-k בעמודה החופשית b.

אם הפיתרון היחיד הוא $(c_1, \dots, c_k)$ אז

$$c_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

<u>הוכחה</u>: אם $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ אז כאמור לפי הגדרה $A\underline{c} = \underline{b}$. נסמן את העמודות של A לפי הסדר $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (α_i השמאלית ביותר), נאמר $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n)$ אז

$$A_k = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \underline{b}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$$

אבל $\underline{b} = A\underline{c}$ לכן $\underline{b} = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$. לכן

$$A_k = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$$

נחשב את הדטרמיננטה של A_k. נזכור שהדטרמיננטה היא פונקציית נפח של העמודות. לכן

$$\det A_k = \sum_{j=1}^{n} c_j \det(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_j, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

ברור שאם $j \neq k$ אז לכל $j \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ אז

$$\det(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_j, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = 0$$

כי $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_j, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ מטריצה שבה 2 שורות שוות.

לכן $\det A_k = c_k \det(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$

כלומר $\det A_k = c_k \det A$ או

$$c_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

ואפשר לחלק כי $\det A \neq 0$

בפב"ל לא כל כך אנשי לפתור מע' משוואות בעזרת שיטת קרמר. מבחינת כמן מחשב שיטת גאוס היא כנראה היעילה ביותר. מה שטוב בקרמר הוא שלה נותן נוסחה סגורה לפתרונות ויש לכך שימושים תיאורטיים רבים.

משפט המכפלה אם $A,B \in M_n(F)$ אז

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

הערה: נשים לב שכפל בשני האגפים יש משמעות שונה. באגף ימין הכל איברים בשדה ואילו באגף שמאל הם מטרידות.

הדגמה: למטרידות 1x1 לא קשה אם כי קל. מכיוון ש- $|(a)||(b)| = ab = |(a)(b)|$ לא אפשרי שמאל יכול להוריד בקלות.

נדגים למטרידות 2x2 שמאל בדה 2 מטרידות מלבו:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 43 & 46 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4-6 = -2 \quad |B| = 35-42 = -7 \quad |A||B| = 14 = |AB|$$

הוכחה: בעזרת מטרידות אלמנטרית. קודם כל נזכיר שאם A מטרידה חצי E מטרידה חצי שהיא אלמנטרית לפי שורות אז $\det(EA) = \det E \det A$

(מטרידה אלמנטרית לפי שורות היא מטרידה שהתקבלה מ- I ע"י פעולה אלמנטרית אחת על שורות)

לאחר שאם E מטרידה אלמנטרית אזי EA היא המטרידה שהתקבלה מ- A ע"י ביצוע אותה פעולה אלמנטרית על שורות A.

נעבור על כל הפעולות האלמנטרית:

אם הפעולה היא החלפת שורות אז $\det E = -1$ המטרידה EA מתקבלת מ- A ע"י החלפת שתי שורות

לכן $\det(EA) = -\det A = \det E \cdot \det A$

אם הפעולה היא כפל שורה בסקלר $c \neq 0$ אז

$\det E = c$ EA התקבלה ע"י כפל שורה אחת

ב-c. לכן $\det(EA) = c \cdot \det A = \det E \cdot \det A$.

אם הפעולה היא הוספת כפלה של שורה לשורה אחרת

אז $\det E = 1$ (כי הדטרמיננטה של משולשית בעקבות

הפעולה הלא-אלו). האיבר אופן $\det(EA)$ אינה

משתנה. לכן $\det(EA) = \det A = \det E \cdot \det A$

ברשימה נתיר מקרה הכללי. אם ראינו נסתכל בשני מקרים.

אם אחת מבין A, B אינה הפיכה אז $\det A = 0$

או $\det B = 0$. לכן $\det A \cdot \det B = 0$.

יש משפט שאומר ש- AB הפיכה אמ"מ A הפיכה

ומ B הפיכה. לכן $\det(AB) = 0$, וקיבלנו את

השוויון.

כעת, אם ישתי המטריצות A, B הפיכות. למה שהוכחנו

קודם, אם E_1, E_2 מטריצות אלמנטריות לפי שורות

אז $\det(E_1 E_2) = \det E_1 \det E_2$. באופן דומה, אם

E_1, E_2, E_3 אלמנטריות אז

$$\det(E_1 E_2 E_3) = \det E_1 \det E_2 \cdot \det E_3$$

לכן אם $E_1, \dots, E_n$ מטריצות אלמנטריות אז

באינדוקציה $\det(E_1 \cdots E_n) = \det E_1 \cdots \det E_n$

כל מטריצה הפיכה היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות לפי

שורה. יהיו A, B מטריצות הפיכות אז

$$A = E_1 \cdots E_n \qquad B = E_1' \cdots E_m'$$

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \det E_i \qquad \det B = \prod_{i=1}^{m} \det E_i'$$

$$AB = E_1 \cdots E_n \cdot E_1' \cdots E_m'$$

$$\Rightarrow \det AB = \prod_{i=1}^{n} E_i \cdot \prod_{i=1}^{m} E_i' = \det A \cdot \det B$$

מ"ש ☺

מסקנה: $\det(AB) = \det(BA)$

הוכחה:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \underset{\text{קומוטטיבית בשדה}}{=} \det B \cdot \det A = \det(BA)$$

☺

טענה: אם A מטריצה הפיכה אז $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

הוכחה:

$$1 = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

$$\Longrightarrow \det A^{-1} = 1/\det A$$

כי $\det A^{-1} \neq 0$ כי היא הפיכה.

☺

אם $T: V \to V$ העתקה לינארית של מ"ו V מעל F ו- B בסיס סדור של V ו- M היא המטריצה של T ביחס לבסיס B. אם עוברים לבסיס חדש ומטריצת המעבר היא המטריצה ההפיכה P אז המטריצה של T לפי הבסיס החדש היא PMP^{-1} והדטרמיננטה נשמרת.

$$\det(PMP^{-1}) = \det P \cdot \det M \cdot \det P^{-1} =$$

$$= \det P \cdot (\det P)^{-1} \cdot \det M = \det M$$

עדשיון אפשר להגדיר את הדטרמיננטה של טרנספורמציה לינארית וזה מוגדר תחת כי הדטרמיננטה לא משתנה גם מחליפים בסיס.

(20) 29.3.06
עזר אורית

בוקר טוב שבת בבקר שה

בסוף השיעור הקודם הוכחנו את משפט המכפלה:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

מכאן נובע ש $\det(AB) = \det(BA)$

ו- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

אם V מ"ו ח-מימדי מעל השדה F ו- $T: V \to V$ נגדיר את $\det T$ באופן הבא: תהי M המטריצה של T לפי בסיס מסוים, נגדיר $\det T = \det M$.

זה מוגדר היטב כי אם M, N מייצגות את T לפי בסיסים שונים, אז $\det M = \det N$. שהרי יש מטריצת מעבר בסיס P כך ש- $M = P^{-1}NP$

ואז $\det M = \det P^{-1}NP = \det P^{-1} \det N \det P =$

$= (\det P)^{-1} \det N \det P = \det N$

אז $\det T$ אכן מוגדרת היטב, כי למרות שאפשר להשתמש בבסיסים שונים בשביל ההגדרה, התוצאה נשארת זהה, כלומר אינה תלויה בהחירת הבסיס.

בעבורת לגדירת הדמויות. חוזרת השורות של מטריצה. עדיף עשינו במטרוזות ריבועיות. אבל אם A מטריצה לא דווקא ריבועית. גדירת השורות היא המספר המקסימלי של שורות בתת. וגדירת הדמויות היא המספר המקסימלי של עמודות בתת. בסמסטר הקודם הוכיחו שזו באותות ובמופתים שגדירת השורות שווה לגדירת העמודות ולכן קוראים לה פשוט גדירת המטריצה.

אפשר לדבר על מטריצה תלבית למטריצה נתונה יש מטריצה 28×28. אז אפשר להשתמש נניח עם מטריצה תלבית שלה 11×11 ולה יש דטרמיננטה שנקראת דטרמיננטה תלבית. את השורות והעמודות של המטריצה התלבית אפשר לבחור איך

שבא לנו. תחת אינוריאנטיות אלה אפשר לתשוב מחדש את ההיררכיה של דרגת שורות ודרגת עמודות.

<u>משפט</u>

תהי A מטריצה. $A \in M_{m\times n}(F)$.

(א) דרגת השורות של המטריצה שווה למספר המקסימלי של שורות במטריצה רבועית תלקית בעלת דטרמינאנטה שונה מאפס.

(ב) דרגת העמודות של המטריצה שווה למספר המקסימלי של עמודות במטריצה רבועית תלקית בעלת דטרמינאנטה שונה מאפס.

אמר, אפה נובע שאין בין דרגת השורות לדרגת העמודות, לבין דרגת המטריצה.

<u>הוכחה:</u>

נבקש להוכיח את (א) נראה:

(i) אם יש r שורות בת"ל אז יש מטריצה רבועית תלקית מ r שורות שדטרמינאנטתה שונה מאפס.

נניח שיש ב-A r שורות בת"ל ונכיה את הדרוש. תילופי שורות לא משנים את הדרגה, לכן אפשר להניח שד שורות $a_1, \dots, a_r$ (כלומר r השורות הראשונות) בת"ל.

נרשום את r השורות הראשונות ונשים אותן לבסיס של F^n ע"י הוספת והסרה מהבסיס הסטנדרטי.

נסתכל במטריצה B מסדר חאת ש-r שורותיה הראשונות הן r שורותיה הראשונות של A לפי סדרן והשורות האחרות הן יתר איברי הבסיס. תילופי עמודות לא משנים את דרגת השורות, לכן ניתן להניח ש-B היא המטריצה:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B \neq 0$ כי כל השורות בת"ל.

(21)

אפשר לחשב את $\det B$ בפיתוח לפי השורה האחרונה:

$$\det B = 1\cdot m_{nn} = 1\cdot 1\cdot m_{n-1,n-1} = 1\cdot 1\cdot 1\, m_{n-2,n-2} =$$
$$\dots = 1\cdot \dots \cdot 1\cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

בגומר $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$ לפי הגדרתנו את (i).

נשים לב כאן, רק שחילופי שורות/עמודות אשפרים את סימן הדטרמיננטה. אז יותר נכון לומר ש

$$|\det B| = \left|\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}\right|$$

אבל בכל אופן, אם כל שונה מאפס, אז סימנים שונים לא פוגעים בכלום...

(ii) אם יש מטריצה ריבועית חלקית מסדר r שהדטרמיננטה שלה שונה מ-0, אז יש r שורות בת"ל:

נניח בלי הגבלת הכלליות שהמטריצה החלקית הנ"ל היא

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

לכן שורותיה של מטריצה זו בת"ל ולכן בוודאי השורות האורכות בת"ל:

$$\begin{cases} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{r1} \dots a_{rn} \end{cases}$$

(iii) המשפט לגמרי - דרגת השורות שווה לסדר המקסימלי של מטריצה ריבועית חלקית בעלת דטרמיננטה שונה מאפס.

נניח שדרגת השורות היא r לכן יש דטרמיננטה חלקית מסדר r ששונה מ-0. לכן הסדר המקס' של דטרמיננטה כזו הוא לפחות r. נניח שהסדר המקסימלי הוא s. לפי (ii) יש לפחות s שורות בת"ל. לכן הדרגה היא לפחות s.

כלומר $r \geq s$ ו- $s \geq r \Rightarrow s = r$.

את (ב) מוכיחים בדרך דומה.

טענה: אם $A\underline{x} = \underline{b}$ היא מע' של n משוואות ב-n נעלמים
ראשר $\det A \neq 0$ אז יש פתרון יחיד $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$
ולכל $1 \le k \le n$ $c_k = \frac{|A_k|}{|A|}$ ראשר A_k המטריצה
המתקבלת מ-A ע"י החלפת העמודה ה-k בעמודה $\underline{b}$.

הוכחה (אחרת)

$(c_1, \dots, c_n)$ הוא פתרון ולכן

$$a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}c_1 + \dots + a_{nn}c_n = b_n$$

נעביר אגפים ונקבל

$$a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n + b_1(-1) = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}c_1 + \dots + a_{nn}c_n + b_n(-1) = 0$$

לכן $(c_1, \dots, c_n, -1)$ הוא פתרון של המע' ההומוגנית

$$(A \sqcup b)\underline{x} = 0$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1x_{n+1} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_nx_{n+1} = 0$$

יש פה n משוואות ב-n+1 נעלמים נוסיף עוד משוואה

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1x_{n+1} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_nx_{n+1} = 0$$
$$0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_k + \dots + 0 \cdot x_n + c_k x_{n+1} = 0$$

כי מע' של n+1 משוואות ב-n+1 נעלמים ויש לה פתרון לא טריוויאלי $(c_1, \dots, c_n, -1)$ לכן:

$$\det A' = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & c_k \end{pmatrix} = 0$$

כי יש 2 פתרונות שונים

נחשב את $\det A'$ בדרך אחרת:

נחסר מהעמודה האחרונה c_k פעמים מהעמודה ה-k

זה לא משפיע על הדטרמינטה ונקבל

$$\det A' = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 - c_k a_{1k} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} & b_n - c_k a_{nk} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \det A' = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & c_k a_{1k} - b_1 & \dots & a_{1n} & a_{1k} \\ a_{n1} & \dots & c_k a_{nk} - b_n & \dots & a_{nn} & a_{nk} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

הוכפלנו עמודה אחרונה בעמודה k וכפלנו אותה ב--1

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & c_k a_{1k} - b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & c_k a_{nk} - b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

נפתח לפי שורה אחרונה

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & c_k a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & c_k a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

תכונות של דטרמינטה

$$= c_k \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} - \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A_k} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_k |A| - |A_k| = 0 \Rightarrow c_k |A| = |A_k|$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

מושלם

(23) 3.4.06
לינארית

בוקר טוב!

מטריצות וקבוצות דומות אם הן מייצגות אותה טרנספורמציה לינארית בבסיסים שונים. כלומר M_1 דומה ל M_2 אם קיימת מטריצה רגולרית P כך ש $M_2 = P^{-1}MP$
אותנו יעניין שמטריצות כאלה יש אותה דטרמינטה. אבל אם לשתי מטריצות יש אותה דטרמינטה זה לא אומר שיש אותה טרנספורמציה בבסיסים שונים (למשל, יכולות להיות שתי מטריצות עם דטרמינטה אפס אבל הן אפסיות שהן שונה ואז בוודאי לא יכולה להיות אותה טרנספורמציה, אבל 0 זה רק נראה לי. שמואל לא אומר את זה).

עדיין נפתח מישהו אחרת לדטרמינטה של הטרנספורמציה הלינארית T.

<u>משפט</u> (בעזרת שלמידור - משפט 6): תהי Δ פונקציית נפח, שאינה פונקציית האפס. תהי $T: V \to V$ כלשהי ($\dim V = n$) אז קיים סקלר יחיד c_T כך שלכל $v_1, \dots, v_n \in V$

$$c_T \Delta(v_1, \dots, v_n) = \Delta(Tv_1, \dots, Tv_n)$$

הסקלר c_T תלוי רק ב T ואינו תלוי בפונקציית הנפח.

<u>הגדרה</u>: נגדיר פונקציית נפח חדשה שתסומן Δ_T בצורה שלהלן:

$$\Delta_T(v_1, \dots, v_n) \doteq \Delta(Tv_1, \dots, Tv_n)$$

- אם $v_j = v_k$ $j \neq k$ אז גם $Tv_j = Tv_k$ ואז

$$\Delta_T(v_1, \dots, v_n) = \Delta(Tv_1, \dots, Tv_n)$$

Δ פונקציית נפח לכן $\Delta(Tv_1, \dots, Tv_n) \doteq 0$

- $\Delta_T(v_1, \dots, \lambda v_k, \dots, v_n) = \Delta(Tv_1, \dots, T\lambda v_k, \dots, Tv_n) =$
$= \Delta(Tv_1, \dots, \lambda Tv_k, \dots, Tv_n) = \lambda \Delta(Tv_1, \dots, Tv_n) =$
$= \lambda \Delta_T(v_1, \dots, v_n)$

- התרגיל השלישי מושאר לקוראים בבית.

עכשיו נוכיח את הטענה - ראשית, Δ היא פונ' נפח שאינה פונ' האפס. Δ_T פונ' נפח, לכן היא הפלה של Δ בסקלר. כ"א קיים סקלר C_T כך ש $\Delta_T = C_T\Delta$
כלומר לכל $v_1, \dots, v_n$ $\Delta(Tv_1, \dots, Tv_n) = C_T\Delta(v_1, \dots, v_n)$.
אנ קיים C_T. יש להראות ש- C_T תלוי רק ב- T ולא בפונ' T. נראה ש- C_T אינו תלוי ב- Δ. כלומר אם Δ_1, Δ_2 פונ' נפח השונות מאפס, T כלשהי ו- C_T שייך ל- T ב- Δ_1 ו- C_T' שייך ל- T ב- Δ_2 אז $C_T = C_T'$.

אם T היא טרנס' האפס אז ברור ש C_T הוא 0.
אם T אינה טרנס' האפס, אז נבחר בסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ואז
$$\Delta_1(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = C_T\Delta_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
$$\Delta_2(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = C_T'\Delta_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
קיים סקלר $S \neq 0$ כך ש- $\Delta_2 = S\Delta_1$. נקבל:
$$\Delta_2(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = S\Delta_1(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = S\,C_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
מצד שני
$$\Delta_2(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = C_T'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
לפיכך, $S\,C_T\Delta_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = S\,C_T'\Delta_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
ונקבל $C_T = C_T'$.

<u>הגדרה:</u> הסקלר C_T נקרא הדטרמיננטה של T.

משפט ד: יהי V מ"ו n-מימדי מעל השדה F.
תהי $T: V \to V$ ל"ל ותהי M מטריצה המייצגת אותה
לפי בסיס כלשהו. אז $c_T = |M|$

הוכחה: יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס של V. A היא
המטריצה שעמודותיה הן לפי הסדר הקואורדינטות
של $T\alpha_1, \dots, T\alpha_n$ לפי בסיס זה. תהי Δ פונ' נפח $\neq 0$

$$\Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) =$$
$$= \Delta(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) \overset{?}{=} |A|\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

אם נראה זאת אז בשילוב עם המשפט הקודם $c_T = |A|$.
מראן ניתן להראות ע"י משפט המרכבה. אם
TS ל"ל מ"ו ו V אז $\det TS = \det T \det S$
$\det T = c_T$ ו $\det S = c_S$.

נתתר פונ' נפח Δ שאינה אפס ונבחר $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
בסיס של V.

$$\Delta(TS\alpha_1, \dots, TS\alpha_n) = (\det TS)\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

מצד שני $\Delta(TS\alpha_1, \dots, TS\alpha_n) = \Delta(T(S\alpha_1), \dots, T(S\alpha_n)) =$
$= |T|\Delta(S\alpha_1, \dots, S\alpha_n) = |T||S|\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$|TS| = |T||S| \Leftarrow \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$$

נחזור להוכחת הטענה: נורית לאב $V = F^n$. זה
בסדר גם אם V אינו F^n אז הוא איזומורפי ל-F^n.

$$\Delta(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = c_T \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

לפי הבסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ המטריצה היא A. $T\alpha_1, \dots, T\alpha_n$
הן העמודות של A. מצד אחר

$$\Delta(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = k \cdot \det A$$
$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = k = 1$$
$$\Delta(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = \det A \cdot \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

סיים.

נ.ב. (חצור ע) ההוכחה
בשיעור הבא

לכסון מטריצות

נניח שיש לנו $T:V\to V$ ובחרנו בסיס של V $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. המטריצה של T לפי V היא $A=(a_{ij})\in M_n(F)$ אם וקטור הקואורדינטות של הווקטור α לפי בסיס זה הוא $(c_1,\dots,c_n)^t$ וקטור הקואורדינטות של αT לפי בסיס זה הוא $A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}c_1+\dots+a_{1n}c_n\\ \vdots\\ a_{n1}c_1+\dots+a_{nn}c_n\end{pmatrix}$ אולם המטריצה היתה אלכסונית $A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}c_1\\ \vdots\\ a_{nn}c_n\end{pmatrix}$ את החישוב הזה פשוט מאוד.

אז המטרה שלנו היא למצוא בסיס שלפיו המטריצה היא אלכסונית.

נסתכל הטרנ מ-$\mathbb{R}^2$ לעצמו שהמטריצה שלה לפי הבסיס הסטנדרטי היא $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ונראה בסיס אחר שלפיו המטריצה אלכסונית? התשובה היא כן.

נסתכל בבסיס $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

$T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ המטריצה החדשה $\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$

אך לא שקיבלנו מטריצה אלכסונית? כי המטריצה כיפלה את הוקטורים הללו בסקלר.

(25) 5.4.06
שיעורית

בוקר טוב שקט בבקשה

היום אני יושבת מהדימה את הטיעון יהיה מסודר יותר

הכברני את הטענה: אם Δ פונק' נפח על מרחב V מימד n מעל F ו $T: V \to V$ כלשהי ו $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ בסיס של V ו- A היא המטריצה של T לפי בסיס זה אז $\Delta(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = |A| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

הוכחה: ראשית, שמאל מדיר שנשרת מההוכחה ההנטרישית מהשיעור הקודם, וכאשר נקבל הוכחה קלה ונעימה.

נוכיח אותה כללי יותר, יהיו V מרחב n מימדי עם בסיס $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ו- Δ פונק' נפח על V. תהי $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ n-יית וקטורים ב- V. תהי A מטריצת המעבר של $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ לפי $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ כלומר זו מטריצה שעמודתה הראשונה היא וקטור הקואורדינטות של β_1 לפי הבסיס $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. העמודה השניה היא וקטור הקואורדינטות של β_2 וכו'. אז

$$\Delta(\beta_1, \dots, \beta_n) = |A| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

הוכחה: ההוכחה היא פשוטה מאוד.

אם ה- n-יה $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ תלויה לינארית אז אמלא שמאל שווה לאפס. אבל אז גם העמודות של A תלויות ולכן $|A| = 0$ ומראן שאמלא ימין הוא אפס. כלומר יש שוויון בין האגפים. כה התלק הקל. התלק השני עוד יותר קל. אם $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ אז $A = I_n$ ולכן $|A| = 1$ וכמובן קיים שוויון. התלק השלישי והמעניין: אם $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ בלתי תלויים אפשר לקבל את $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ מ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ע"י k פעולות אלמנטריות.

אותן פעולות נעשות על עמודות מטריצת המעבר.

נניח שהפעולות לבדן כבר והמטריצות המתאימות

$$\begin{array}{ll} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & I \\ (\alpha_1', \dots, \alpha_n') & I' \\ (\alpha_1'', \dots, \alpha_n'') & I'' \\ \vdots & \vdots \\ (\beta_1, \dots, \beta_n) & A \end{array}$$

הפעולה ה- i משפיעה באותו אופן הן על $\Delta(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$ והן על $|A^{(i)}|$. לכן

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = |I| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
$$\Delta(\alpha_1', \dots, \alpha_n') = |I'| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
$$\Delta(\alpha_1'', \dots, \alpha_n'') = |I''| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$
$$\vdots$$
$$\Delta(\beta_1, \dots, \beta_n) = |A| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

מש"ל

עתה אפשר להוכיח מהמשפט הבא את הטענה הראשונה.

<u>מסקנה:</u> Δ פונ' על מרחב וקטורי n ממדי V מעל F. $T: V \to V$ כל. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ בסיס של V. A המטריצה של T לפי הבסיס הזה. אז

$$\Delta(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = |A| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

<u>הוכחה:</u> נסמן לכל $1 \le i \le n$, $\beta_i = T\alpha_i$

המטריצה של T לפי הבסיס $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ היא בדיוק מטריצת המקדמים של $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. לכן מהטענה שהוכחנו בעמ' רב מקבלים את הדרוש.

מש"ל

הגדרה: תהי $T: V \to V$ ט"ל. יהי $0 \neq \alpha$ וקטור ו- c סקלר כך ש- $T\alpha = c\alpha$. אז c יקרא **ערך עצמי** של T ו- α יקרא **וקטור עצמי** של T השייך ל-c.

(בטבלה שם עמודות קורות לזה ערך אופייני ווקטור אופייני).

למה דרשנו $\alpha \neq 0$? כי אחרת $\alpha = 0$ לא תהיה.

סיפור: ילד אחד חדר מהיום ושמר שמאבו אותם על מטפרים לנים. שאל הבא - ומה עם אפס. הילד אומר שהמורה אמר שאפס לא-זוגי ולא אי-זוגי. הלך האבא לדבר עם המורה שטען בתוקף שאפס אינו זוגי. שאז האבא - מהו מספר זוגי? זה המורה - מספר שמתחלק ב-2. ובכן, אמר האבא, אם כך - אפס מספר זוגי. אמר המורה - אבל מה החכמה? אפס מתחלק בכל דבר.

דוגמה:

תרגיל: הוכיחו שמטריצה היא הפיכה אמ"מ 0 אינו ערך עצמי שלה.

הגדרה: אם A מטריצה מעל F ו- $0 \neq \alpha$ וקטור עמודה ב- F^n ו- c סקלר כך ש- $A\alpha = c\alpha$ אז c נקרא ערך עצמי (ע"ע) של A ו- α נקרא וקטור עצמי (ו"ע) של A השייך ל-c.

טענה חשובה: אם $T: V \to V$ ט"ל (V ח מימדי) ו- $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ בסיס של V ו- A המטריצה של T לפי בסיס זה אז c ע"ע של T אמ"מ c ע"ע של A.

הוכחה: איך מוכיחים דבר כזה? - בקלות!

($\Leftarrow$) c ע"ע של T אז יהי $0 \neq \alpha$ כך ש- $T\alpha = c\alpha$.

יהי $[\alpha]$ עמודת הקואורדינטות של α לפי הבסיס.

אז המטבר לבואורדינטות הוא איזומורפיזם לכן שומר על הפולינום. לכן $A[\alpha]=C[\alpha]$ (הלא $0\neq[\alpha]$ לכן C עץ של A (האיבר הלבדי את α ל $[\alpha]$ ואות Ta ל $A[\alpha]$).

($\Rightarrow$) C עץ של A. מתקבל מכך שלפי הגדרה הפונקציה לאיזומורפיזם הלא הוא איזומורפיזם. ואז מאותו שקול מתקבל ש-C עץ של T.

☺

<u>מסקנה</u>: אם $T:V\to V$ טלה, אז A ו-A' מטריצות של T לפי בסיס של V ! הם דומות. בהתאמה אז ל-A ול-A' אותם ערכים עצמיים.

למעשה ש A ו-A' מייצגות אותה טלה אזי A, A' דומות. דהיינו, יש מטריצה הפיכה P כך ש-
$A'=P^{-1}AP$.

סיכום: לשתי מטריצות דומות יש אותם ערכים עצמיים. ההפך כמובן לא נכון.

<u>משפט (הבא)</u>: יהיו $c_1,\dots,c_k$ עץ שונים של T. ויהיו $v_1,\dots,v_k$ וקטורים עצמיים של T המתאימים ל $c_1,\dots,c_k$ בהתאמה. (כמובן $v_1,\dots,v_k$ שונים) אז $v_1,\dots,v_k$ בת"ל.

<u>הוכחה</u>: ראשית נוכיח את הכמובן (מרות שלא נובע מלה שהם בת"ל). אם $v_i=v_j$ אז $Tv_i=c_iv_i=Tv_j=c_jv_j$
$\Leftarrow$ מתוך ש $v_i=v_j$ שונים מאפס. $c_i=c_j$ בסתירה לכך שהם שונים.

הוכחת האי תלות היא באינדוקציה על k.
אם $k=1$ אז (v_1) בוודאי וקטור אחד. השונה מאפס לכן הוא בת"ל.
נניח ל-k עץ ונוכיח ל $k+1$ עץ.

אם $c_1,\dots,c_{k+1}$ עם שונים ו- $v_1,\dots,v_{k+1}$ וע"ע המשויכים להם בהתאמה. נניח ש-

$$(*)\quad a_1v_1+\dots+a_kv_k+a_{k+1}v_{k+1}=0$$

נראה ש- $a_1=a_2=\dots=a_{k+1}=0$.

נפעיל על $(*)$ את T ונקבל

$$T(a_1v_1+\dots+a_kv_k+a_{k+1}v_{k+1})=T0=0$$

$$\Rightarrow a_1Tv_1+\dots+a_kTv_k+a_{k+1}Tv_{k+1}=0$$

$$\Rightarrow a_1c_1v_1+\dots+a_kc_kv_k+a_{k+1}c_{k+1}v_{k+1}=0\quad(**)$$

נכפול את $*$ ב- c_{k+1} ונקבל

$$(***)\quad a_1c_{k+1}v_1+\dots+a_kc_{k+1}v_k+a_{k+1}c_{k+1}v_{k+1}=0$$

נפרוס את $(***)$ מ- $(**)$ ונקבל שהמחובר האחרון מאפס ולכן הימין ונקבל

$$a_1(c_1-c_{k+1})v_1+\dots+a_k(c_k-c_{k+1})v_k=0$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$a_1(c_1-c_{k+1})=\dots=a_k(c_k-c_{k+1})=0$$

אבל לכל $1\le i\le k$ $c_i-c_{k+1}\neq 0$ לכן $a_1=\dots=a_k=0$

לעומת זאת מ- $(*)$ ונקבל $a_{k+1}v_{k+1}=0 \Rightarrow a_{k+1}=0$.

מ"ש ☺

הגדרה: הכוחן נקרא בשבוע ב

אין מוגדרים ערכים עצמיים של מטריצה ריבועית.

דוגמה: $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ c הוא ע"ע אם קיימת למערכת α השונה מאפס רק ש $A\alpha=c\alpha$.

$$\Leftrightarrow A\alpha-c\alpha=0 \Leftrightarrow A\alpha-cI\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow (cI-A)\alpha=0$$

כדי מן משוואות הומוגניות α הוא הפתרון שלה והוא שונה מאפס. לכן $cI-A$ אינה הפיכה (כי הפתרון אינו יחיד).

בטיפול של דבר c עץ של A אמנם $|cI-A|=0$.
לעצה בכלל לא השתמשנו פה בתכונות הטבעיות
של A. זה נכון לכל מטריצה A כלשהי.
במקרה הזה

$$|cI-A| = \left|\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} c-1 & -2 \\ -2 & c-1 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= (c-1)^2 - 4 = c^2 - 2c - 3$$

אז הפתרונות של המשוואה הריבועית $c^2-2c-3=0$
הם הערכים העצמיים של A. ומכאן בהכרח שיש לכל היותר
2 פתרונות (או במקרה הכלל n פתרונות)
$\Rightarrow c_1=-1 \quad c_2=3$

הכלל: אם A מטריצה וc עץ של A אמנם
$|cI-A|=0$.
כלומר הערך הם הפתרונות של המשוואה $|xI-A|=0$.
אם לשאול הוא פולינום מדרגה n - $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_n \neq 0$.
לפולינום הזה קוראים הפולינום האופיני של A.

(28) 24.4.06
שיעורית

בפרק טופל שקיבל בהבנה!

בפרק האחרון שעברנו הוא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקות ומטריצות. דיברנו על הפולינום האופייני ולרטון מטריצה. נעשה חזרה קצרה.

תהי $T:V\to V$ או אינדקס n ווקטור $\alpha\neq 0$ ב-V יקרא וקטור עצמי של T אם $T\alpha=\lambda\alpha$ עבור $\lambda\in F$.

אם A מטריצה מסדר $n\times n$ מעל F וקטור $\alpha\neq 0$ ב-F^n יקרא וקטור עצמי של A אם $A\alpha=\lambda\alpha$ עבור $\lambda\in F$.

$c\in F$ נקרא ערך עצמי של T (או של A) אם יש וקטור שונה מאפס $\alpha\in V$ (או $\alpha\in F^n$) כך ש- $T\alpha=c\alpha$ (או $A\alpha=c\alpha$). (אמר, אז ש- λ הוא וקטור עצמי של T (או A) השייך לערך העצמי c.

נדגים כמה משפטים שהוכחנו לפני פסח. לא נחזור על ההוכחה אבל רק שנזכור אותם.

1. אם T ל- A מטריצה המייצגת אותה לפי בסיס מסוים, אז c ע"ע של T אמ"מ הוא ע"ע של A.

מרגע שלמדנו המטריצות שמייצגות את T (לפי בסיסים שונים) יש אותם ערכים עצמיים. כלומר לשתי מטריצות דומות יש אותם ערכים עצמיים. נדגיש שמשים שמדובר בבסיסים שונים הווקטורים העצמיים שונים, שהרי וקטורי הקואורדינטות משתנים בהתאם לבסיס.

2. אם $c_1,\dots,c_k$ הם k ע"ע שונים של T (של A) ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ הם ו"ע של T (של A) השייכים ל- $c_1,\dots,c_k$ בהתאמה אז הסדרה $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ בלתי תלויה.

מרגע שלמדנו T (ל- A) יש לכל היותר n ע"ע שונים שהרי נניח ש $c_1,\dots,c_k$ ע"ע עם וקטורים $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. וקטורים אלה בת"ל לכן $k\le n$, אמשוה שמאחה n אמרי כל $m>n$ וקטורים תלויים.

למדנו (או אולי לא) הטל T ניתנת לייצוג ע"י מטריצה אלכסונית אמ"מ יש ל-V בסיס שכולו וקטורים עצמיים של T. או לחלופין מטריצות - המטריצה A דומה למטריצה אלכסונית אמ"מ יש ל-F^n בסיס שכולו וע שלו A.

מסקנה: אם ל-T יש n ע"ע שונים אז היא ניתנת לייצוג ע"י מטריצה אלכסונית. או בניסוח לחלופין מטריצות - אם ל-A יש n ע"ע שונים אז היא דומה למטריצה אלכסונית.

נשים לב שלהיפך תנאי מספיק אך לא הכרחי. למשל נסתכל על המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. למטריצה זו יש רק ע"ע אחד שהוא 0 ו $Iv = \lambda v$ אז 1 הוא הע"ע היחיד של I. אבל I כמובן דומה למטריצה אלכסונית - היא דומה לעצמה.

למדנו ש-c הוא ע"ע של המטריצה A אמ"מ $|cI - A| = 0$ נסתכל המשתנה x. הביטוי $P(A) = |xI - A|$ הוא פולינום מדרגה n. הערכים העצמיים של A הם שורשי הפולינום הזה. $P(A)$ נקרא הפולינום האופיני של A. לפולינום האופיני יש לכל היותר n שורשים, שהרי יש לכל היותר n ע"ע. אבל הרי כל פולינום מדרגה n, יודע שלפולינום מדרגה n יש לכל היותר n שורשים.

טענה: לשתי מטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני.

הוכחה: אם B דומה ל-A אז $B = P^{-1}AP$ כאשר P הפיכה

$$P(B) = |xI - B| = |xI - P^{-1}AP| = |P^{-1}xIP - P^{-1}AP| =$$

כי xI סקלרית לכן מתחלפת עם כל מטריצה

$$= |P^{-1}(xI - A)P| = |P^{-1}||xI - A||P| = |P|^{-1}|xI - A||P| =$$

$$= |P|^{-1}|P||xI - A| = |xI - A| = P(A)$$

☺

בהרחבה הראשית יש בעיות מסוימות. אנחנו משתמשים פה במשפט המרכזי אבל הוכחנו אותו בהשתמש על כך שאנחנו עובדים מעל שדה ואילו כאן אנחנו עובדים מעל חוג הפולינומים. ההרחבה שנתנו למשפט המרכזי אינה תקפה גם בחוגים משום שאנחנו משתמשים שם בקיום הופכי ואינו בחוג הפולינומים אין הפכי. ובכל זאת הטענה הראשית נכונה יש הוכחה למשפט המרכזי גם בחוגים רק שהיא מסובכת יותר אבל נאלץ אותה כאן.

הגדרה: הפולינום האופייני של A הינו הפולינום האופייני של אחת המטריצות המייצגות אותה. הטענה הקודמת מראה שהגדרה אינה תלויה בבחירת המטריצה.

משפט (קיילי - המילטון). כל A (מטריצה) מאפסת את הפולינום האופייני שלה. כלומר אם הפולינום האופייני הינו $P(x)$ אז $P(A) = 0$.

דוגמה: הנה שתי מטריצות שונות עם אותו פולינום:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \qquad P_I(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2$$

נבדוק אם מתקיים משפט קיילי המילטון:

$$P_A(A) = (A-1)^2 = A^2 - 2A + I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* במטריצה אלכסונית הערכים העצמיים הם אברי האלכסון.

איך לא מוכיחים את משפט קיילי המילטון?

$$P(x) = |xI - A| = |AI - A| = |A - A| = |0| = 0$$

מה לא בסדר? בהגדרה של $P(x) = |xI - A|$ x הוא אינפ משתנה אבל הוא משתנה שמתחלף סקלר. במשפט קיילי המילטון אנחנו מציבים את המטריצה רק אחרי שרבר ישלנו מחש ביטוי לדטרמינטה. אין בכלל משמעות לשלשים מטריצה במקום x בביטוי $|xI - A|$. משום שרק מטריצה בסקלר לא בר התלפה עם כפל 2 מטריצות.

איך כן מוכיחים?

תהי $A \in M_n(F)$ ויהי $P(x)$ הפולינום האופיני שלה.

$P(x)$ הוא פולינום מתוקן, שהרי

$$P(x) = \begin{vmatrix} x - a_1 & & \text{לבינתים} \\ & \ddots & \\ \text{לבינתים} & & x - a_n \end{vmatrix}$$

האיבר בדטרמינטה שנותן x^n מתקבל רק ממכפלת איבר האלכסון ולכן המקדם הוא 1.

אם נניח ש- $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^n$

נצבור:

$$(xI - A) \cdot adj(xI - A) = |xI - A| I = p(x) \cdot I =$$

$$(*) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^n) I$$

נסתכל במטריצה $adj(xI - A)$ מופיעים בה כל המקדמות המינורים. (הטמנים מתחלפים) זאת דטרמינטות של מטריצות מסדר $(n-1)\times(n-1)$. לכן, איברי המטריצה $adj(xI - A)$ הם פולינומים ממעלה $n-1$, לכל היותר.

כל מטריצה שאיבריה פולינומים ניתנת לכתיבה כ-

$$B_0 + B_1 x + \dots + B_k x^k$$

כאשר $B_1, \dots, B_k$ מטריצות ו- k המעלה הגדולה ביותר מכל הפולינומים המופיעים.

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} x^2-x & x^2+1 & x^2-5 \\ x-1 & 2x+3 & 5x+5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = x^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\operatorname{adj}(xI-A) = B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-1}x^{n-1}$$

נציב אותה בשוויון (*)

$$(xI-A)(B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-1}x^{n-1}) = \alpha_0 I + \alpha_1 I x + \dots + I x^n$$

נפתח סוגריים ונקבל אחרי סידור

$$-AB_0 + (B_0 - AB_1)x + \dots + (B_{n-2} - AB_{n-1})x^{n-1} + B_{n-1}x^n = \alpha_0 I + \alpha_1 I x + \dots + I x^n$$

קיבלנו שוויון בין פולינומים. נעשה השוואת מקדמים

$$-AB_0 = \alpha_0 I$$

$$B_0 - AB_1 = \alpha_1 I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = \alpha_{n-1} I$$

$$B_{n-1} = I$$

נכפול משמאל את השוויון הראשון ב- A, את השני ב- A^2, את הבא ב- A^3 וכו'. נקבל:

$$-AB_0 = \alpha_0 I$$

$$AB_0 - A^2B_1 = \alpha_1 A$$

$$A^2B_1 - A^3B_2 = \alpha_2 A^2$$

$$A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \alpha_{n-1}A^{n-1}$$

$$A^nB_{n-1} = A^n$$

נחבר את כולם $0 = \alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n$

מוגדר $P(A) = 0$

:)

(31)

26.4.06
לינארית

פירקנו את הפולינום האופיני. ראינו שלשתי מטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני.

הגדרה: תהי $A \in M_n(F)$ אז: $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

דוגמה: אם $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ אז $trA = 1+5+9 = 15$

דוגמה: רשום שהמטריצות $\underset{A''}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$ ו- $\underset{B''}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$ דומות

$trA = 2$ ו- $trB = 2$

האם זה נכון באופן כללי?

טענה: יהיו A, B דומות. אזי $trA = trB$

הוכחה א הוכחנו בתרגיל הקודם ש- $trAB = trBA$

לכל שתי מטריצות A, B. A, B דומות לכן $B = P^{-1}AP$

לכן: $trB = trP^{-1}AP = trP^{-1}PA = trIA = trA$ (11)

הוכחה ב אפשר להראות שבפולינום האופיני של מטריצה A מסדר n המקדם של x^{n-1} הוא $-trA$. אם מטריצות דומות אז יש להן אותו פולינום אופיני לכן המקדם של x^{n-1} כלשהו בשניהם ולכן $-trA = -trB$ כלומר $trA = trB$. נותר רק להראות שהמקדם הוא אכן $-trA$. (12)

דיברנו על משפט קיילי המילטון - המטריצה A מאפסת את הפולינום האופיני שלה. כלומר $P_A(A) = 0$.

נניח שיש מטריצה $A \in M_n(F)$. אילו פולינומים $f(x)$ קיימים רק ש- $f(A) = 0$? (כמובן חוץ מהפולינום האופיני).

- פולינום הארס, הפולינום האופיני הוא כל כפולה של הפולינום האופיני. לכל פולינום.. גם אם יש בפולינום האופיני גורם שנמצא ברבוי מסוים אז הפולינום שיש בו רבוי קטן יותר מתאפס גם.

דוגמה נסתכל במטריצה $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. הפולינום האופיני שלה הוא

$$\det\begin{pmatrix}x-1&0\\0&x-1\end{pmatrix}=(x-1)^2=P(x)$$

ברור ש $P(I_2)=0$. אבל גם $(x-1)$ מתאפס ע"י I_2 ואכן $I_2-I_2=0$.

הגדרה פולינום מינימלי של המטריצה A הוא פולינום מתוקן (שיש מאפס) $f(x)$ רק ש $f(A)=0$ ומעלתו מינימלית.

טענה לכל מטריצה קיים פולינום מינימלי

הוכחה נסתכל בקבוצת המעלות של הפולינומים המתוקנים השונים מ-0 ש-A מאפסת אותן. זו קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים (כי היא מכילה את n) יהי k המספר המינימלי בקבוצה זו. יש פולינום מתוקן ממעלה k כך ש-A מאפסת אותו וזה פולינום מינימלי. ☺

טענה ל-A יש פולינום מינימלי יחיד.

הוכחה נניח בשלילה שיש אחד לפחות. יהיו m_1, m_2 פולינומים מינימליים. $m_1(A)=0$ ו- $m_2(A)=0$ ושניהם מאותה מעלה.

נסתכל בפולינום $(m_1-m_2)(x)$ אם $m_1\neq m_2$ אז m_1, m_2 פולינום שונה מאפס שמעלתו קטנה ממעלת m_1, m_2.

ברור ש $(m_1-m_2)(A)=0$. יהי c המקדם הראשון של הפולינום m_1-m_2 נסתכל בפולינום $c^{-1}(m_1-m_2)$ זה פולינום מתוקן. שונה מאפס ש-A מאפסת אותו ומעלתו קטנה מזו של m_1. זו סתירה. לכן $m_1-m_2\equiv 0$ ולכן $m_1\equiv m_2$. כלומר יש בדיוק פולינום מינימלי אחד וקראנו אותו הפולינום המינימלי. ☺

טענה אם A מטריצה מעל F, $m(x)$ הפולינום המינימלי של A, $f(x)$ פולינום ש-A מאפסת אותו אז $m(x)$ מחלק את $f(x)$ כלומר קיים פולינום $q(x)$ כך ש $f(x)=q(x)m(x)$.

הוכחה:

נחלק את $f(x)$ ב- $m(x)$ ונקבל שארית $f(x) = m(x)q(x) + r(x)$

כאשר $r(x) \equiv 0$ או $\deg r(x) < \deg m(x)$

אם נציב $r(x) \equiv 0$ ונציב את ההוכחה נציב את A

בשני האגפים ונקבל $f(A) = m(A)q(A) + r(A)$

ידוע $f(A)=0$ ו- $m(A)=0$ ולכן $r(A)=0$. אם $r \not\equiv 0$

אז r פולינום מדרגה הקטנה מזו של m ש- A מאפס אותו

וזו סתירה למינימלי. (יב)

הערה: יש לראות בעיות בהוכחה. נכון ש-

$f(x) = m(x)q(x) + r(x)$. אבל אי אפשר שאפשר להציב שם

מטריצה? הרי כפל מטריצות אינו אסוציאטיבי. למשל

בכל שדה מתקיים $x^2 - xy + yx + y^2 = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

לכן שני מקרים שנציב ב- x, y לא יהיה נכון.

אבל אם נציב מטריצות לא נכון כי לא בהכרח

$AB + BA = 0$.

לזה בהוכחה זה כן בסדר כי בשורה שלנו יש רק חזקות

של A והן מתחלפות אחת עם השניה בגלל האסוציאטיביות.

$\boxed{\text{שקול בבקשה!}}$

דוגמאות: נמצא פולינומים מינימליים של כמה מטריצות.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופיני הוא $(x-1)^3$.

הפולינום המינימלי הוא לא $x-1$ או $(x-1)^2$ או $(x-1)^3$

כי הרי הוא צריך לחלק את $(x-1)^3$ ולפי זה $x-1$

$m(x) = x-1 \Leftarrow A - I = I - I = 0$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופיני הוא $p(x) = (x-3)(x+1)$.

$\Leftarrow$ הפולינום המינימלי הוא או $x+1$ או $x-3$ או $p(x)$.

$x-3$ לא יתכן כי ברור ש $A-3I \neq 0$ באותו אופן $x+1$

לא יתכן כי ברור ש $A+I \neq 0$ $\Leftarrow$ $m(x) = p(x)$.

נובע מדטרמיננטה

באופן כללי הפולינום המינימלי הוא מעלה ראשונה אותו A סקלרית V
הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני, לכן כל שורשיו הם ערכים
עצמיים.

<u>טענה:</u> כל הע"ע של המטריצה A הם שורשים של הפולינום המינימלי.
ובפרט לפולינום האופייני ולפולינום המינימלי יש בדיוק אותם שורשים.

<u>הוכחה:</u> יהי $f(x)$ הפולינום האופייני ויהי $m(x)$ הפולינום המינימלי.
יהי α שורש של $f(x)$. כלומר α ע"ע של A. לכן $|\alpha I - A| = 0$
נחלק את $m(x)$ עם שארית בפולינום $x-\alpha$: $m(x)=(x-\alpha)q(x)+r$
כאשר $r\in F$ נורים של $r=0$. נציב את A במשוויון האחרון
$m(A)=(A-\alpha I)q(A)+rI=0$ (מותר להציב מאיתה הסיבה כמו בקודם)
נעביר אגפים ונקבל $rI=(\alpha I-A)q(A)$. נחשב דטרמיננטה
משני האגפים

$$\det(rI)=\det(\alpha I-A)\det q(A) = 0\cdot\det q(A)$$

$$\Leftarrow\ 0=\det(rI)=r^n \Leftarrow r=0.$$

קיבלנו ש- $m(x)=(x-\alpha)q(x)$ עם $m(\alpha)=0$ כלומר α שורש
של $m(x)$. מה נכון לכל ע"ע: אבל כל הע"ע של A הם שורשים
של הפולינום המינימלי. ☺

<u>מסקנה:</u> נניח ש- A מטריצה ויש לה n ע"ע שונים. אז הפולינום
המינימלי שלה הוא הפולינום האופייני שלה.

<u>שאלה</u> מהו הפולינום המינימלי של $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$? יש 4 ע"ע שונים
לכן מהמסקנה $m(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

(33)

1.5.06
לינארית
שלום!

הרצה לשעת הבלה של שמואל:

יום שני מ- 6 עד 13 בנין מתמטיקה 362
(יש לו תדר משתל עם דביב)
שמואל מאתל לרוצה בהרצאה בבמתן.

★ ★ ★ ★ ★

לאפון שמטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני. זה מאפשר לנו לדבר
$\boxed{\text{פולינום אופיני של טרנספורמציה לינארית}}$. זהו הפולינום האופיני של
אחת המטריצות המייצגות אותה.

<u>משפט קיילי המילטון</u>: אם A מטריצה ו- $p(x)$ הפולינום האופיני
שלה אז $p(A)=0$

$\boxed{\text{הפולינום המינימלי}}$ של מטריצה A הוא הפולינום המתוקן ממעלה
חיובית הקטנה ביותר ש- A מאפסת אותו. לאפון שיש פולינום יחיד
נצא לכן השימוש ב"ה הידיעה מובטח. ראינו שהפולינום המינימלי
מחלק את הפולינום האופיני. לכן כל שורש שלו הוא גם של A:
כידוע α הוא שורש של $m(x)$ אמ"מ $m(x)=(x-\alpha)q(x)$ עבור
$q(x)$ פולינום כלשהו. כלומר אמ"מ $x-\alpha$ מחלק את $m(x)$.
$m(x)$ מחלק את הפולינום האופיני לכן $x-\alpha$ מחלק את הפולינום
האופיני. לכן α הוא שורש של הפולינום האופיני, כלומר הוא גם.
הוכחנו גם שכל ערך עצמי הוא שורש של $m(x)$.

<u>משפט קיילי המילטון לטרנספורמציות</u>:

קודם כל נדבר על מה זה בכלל להגיב טרנספורמציה בפולינום.
נניח ש- $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ אז $f(T)=\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ זה
מוגדר היטב כי אנחנו יודעים מה זה הפ' טרנספורמציה בסקלר
ואנחנו יודעים מה זה. ה"ש אז מתקבלת (הכפלה) של טרנספורמציה ורמוכן
יש מה זה סכום של טרנספורמציות. נשים לב שמוגדר $T^0=Id$.
אז $f(T)$ זו טרנספורמציה לינארית כלשהי.

משפט קיילי המילטון לטרנספורמציות לינאריות אומר את הדבר הבא:
אם $T:V\to V$ טל"ל של מרחב ממימד n ו- $p(x)$ הפולינום
האופיני של T, אז $p(T)=0$

הוכחה: קודם נשים לב שאם המטריצה A מייצגת את הטרנס' הלינארית
T בבסיס מסוים ו- f הוא פולינום אז המטריצה $f(A)$
מייצגת לפי אותו בסיס את $f(T)$. כלומר, אם A מייצגת
את T ו- B מייצגת את S אז $A+B$ מייצגת את $T+S$
ואם AB מייצגת את TS. לכן A^k מייצגת את T^k. כמו
כן אם a סקלר אז aA מייצגת את aT. לכן
$p(A)$ מייצגת את $p(T)$.

OK, אז אם A מייצגת את T לפי בסיס מסוים, לכן $p(x)$
הוא הפולינום האופיני גם של A ומכיוון ש- $p(A)$ המטריצה $\Leftarrow$ T
מייצגת את הטל $p(T)$. אבל ידוע ממשפט קיילי המילטון למטריצות
ש- $p(A)=0$. מטריצת האפס יכולה לייצג רק את טרנספורמציית
האפס. לכן $p(T)=0$. ☺

הפולינום המינימלי של טרנספורמציה לינארית הוא הפולינום
המתוקן ממעלה חיובית בעל מקדם ראשי 1 ש- T מאפס אותו. $m(T)=0$.
קל לראות ששאותן התכונות מתקיימות כמו לפולינום מינימלי
של מטריצות, למשל $m(x)$ מחלק כל פולינום אשר T מאפס אותו.

טענה: אם A מייצגת את T. בבסיס מסוים, אז יש ל- A ול- T
אותו פולינום מינימלי.

הוכחה: יהי $f(x)$ פולינום. רק ש- $f(A)=0$. אז $f(T)=0$:
ההוכחה לכך היא כמו בהוכחה של משפט קיילי המילטון. לטרנספורמציות.
מצד שני, אם $f(T)=0$ אז מה $f(A)=0$ מדוע? $f(A)$ מייצגת
את $f(T)$. אם $f(T)=0$ אז $f(A)$ מייצגת את טרנס' האפס $\Leftarrow f(A)=0$.
נניח ש- m_1 הפולינום המינימלי: של A ו- m_2 הפולינום המינימלי של T.
$m_1(A)=0$, $m_2(T)=0$. לכן $m_1|m_2$. אבל $m_2(A)=0$ ולכן $m_1(T)=0$
$\Leftarrow m_2|m_1$ והרי הם מתוקנים $\Leftarrow m_2=m_1$. ☺

נראה כי אומר שהם שווים?

נניח ש f_1, f_2 פולינומים שאינם אפס.

נניח ש- $f_1 | f_2$ ומה $f_2 | f_1$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$f_1 = q_2 f_2 \qquad\qquad f_2 = q_1 f_1$$

$$\Downarrow$$

$$f_2 = q_1 q_2 f_2$$

כשכופלים שני פולינומים (השונים מאפס) את מכפלת המעלה שווה לסכום המעלות. לכן $d(q_1 q_2) = 0$ $\Leftarrow$

$0 = d(q_1) = d(q_2)$ $\Leftarrow$ $c = q_1 \in F$ ו- $q_2 = c^{-1}$.

במבנה של m_1, m_2 אלה פולינומים מתוקנים $\Leftarrow$ חייב להיות $c = c^{-1} = 1$ $\Leftarrow$ $m_1 = m_2$.

★ ★ ★ ★ ★ ★

נשבר לפירוק של מטריצות ושל טרנספורמציות לינאריות.

טרנספורמציה לינארית $\boxed{\text{ניתנת לפירוק}}$ פירושו שיש בסיס ל- V שבו המטריצה המייצגת אמה היא אלכסונית. מטריצה ניתנת לפירוק פירושו: שהיא דומה למטריצה אלכסונית.

ראינו שקל (מטריצה) ניתנת לפירוק אמ"מ יש למחה בסיס שכולו וקטורים עצמיים של T (A) במבנה לה, אזי האלכסון במטריצה האלכסונית המתאימה הם הע"ע.

<u>טענה</u> אם הקל T (המטריצה A) ניתנת לפירוק, יאז הפולינום האופייני שלה פריק לגורמים לינאריים מתחלפים ראשונה, כלומר

$$p(x) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$$

<u>הוכחה</u>: נניח שקיים ניתנת לפירוק. אז יש בסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ל V שכולו וקטורים עצמיים... לכן

בדומה לה

$$\begin{pmatrix} A\alpha_1 = a_1\alpha_1 \\ \vdots \\ A\alpha_n = a_n\alpha_n \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} T\alpha_1 = a_1\alpha_1 \\ \vdots \\ T\alpha_n = a_n\alpha_n \end{matrix}$$

יאשר $\{a_i\}$ הם הע"ע המתאימים ל $\{\alpha_i\}$

המטריצה לפי בסיס זה היא

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

הפולינום האופיני הוא $|xI - B|$, כלומר $\det\begin{pmatrix} x-a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x-a_n \end{pmatrix}$

שזה $(x-a_1)\cdots(x-a_n)$

בתנאי הלה הבטחתי לך לרשום אם אינו מספיק!

נסתכל במטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ הפולינום האופיני הוא

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

כלומר יש פירוק. הע"ע היחיד הוא 1. מהם הו"ע?

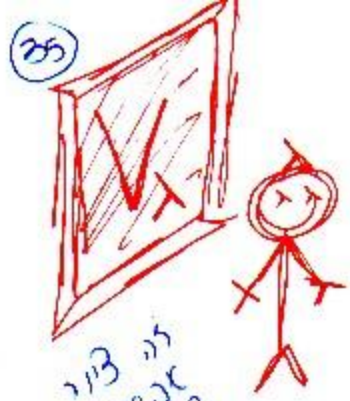
$$A\alpha = 1\cdot\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = x \\ y = y \end{matrix}$$

$\Leftarrow$ כל הווקטורים עדיין הם $sp\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ אבל המימד של כל הו"ע 1 כלומר אין בסיס של ו"ע $\Leftarrow$ המטריצה אינה לרסנה.

בהמשך השיעור ובשיעור הבא נחפש תנאי מספיק ללרסנות.

$\boxed{\text{בביתה}}$ בא מישהו לרופא ואומר "דני, יש לי דגדגים באוזניים".
אמר הרופא "אז למה אתה לא עונה?"



המרחב העצמי

זה דיבר אנטיסטנדרטי שמייצג את מהות החיים.

תהי $T: V \to V$ ט"ל ו- $\dim V = n$

יהי a ע"ע של T.

נסתכל בכל הו"ע השייכים ל-a ונגדיר להם את המקור באופן: את הקבוצה המתקבלת נסמן V_a:

$$V_a = \{v \in V \,.\, Tv = av\}$$

טענה V_a תת מרחב של V.

הוכחה $V_a \neq \emptyset$ שהרי $0 \in V_a$.

סגירות לחיבור: יהיו $v_1, v_2 \in V_a \Rightarrow Tv_1 = av_1 \,,\, Tv_2 = av_2$

$$\Rightarrow T(v_1+v_2) = Tv_1 + Tv_2 = av_1 + av_2 = a(v_1+v_2)$$

סגירות לכפל: יהיו $v \in V$ ו- $c \in F \Rightarrow Tv = av$

$$T(cv) = cTv = c \cdot av = acv = a(cv)$$

V_a נקרא **המרחב העצמי** של T השייך לע"ע a.

ברור שהממד של V_a הוא לפחות 1 ולכל היותר n.

טענה אם a, b הם ע"ע שונים אז $V_a \cap V_b = \{0\}$

יתר על כן, אם $a_1, \dots, a_k$ הם ע"ע שונים ונסתכל במרחבים העצמיים $V_{a_1}, \dots, V_{a_k}$ אז החיתוך של כל אחד מהם עם הסכום של כל האחרים מכיל רק את 0.

בוקר טוב! שמואל מגיע להרצאות

אם $T:V\to V$ כלל ו- $\dim V=n$! - A המטריצה המייצגת אותה לפי בסיס מסוים של V, אז ל-T ול-A יש אותו פולינום מינימלי.

מסקנה לשתי מטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי.
הערה מטריצות דומות מייצגות אותה הכלל ולכן יש להן אותו פולינום מינימלי.

מרחבים עצמיים

אם T כלל (A מטריצה) ! - a ע"ע של T (של A) אז קבוצת הוקטורים העצמיים השייכים ל-a בצירוף $\vec{0}$ הוא תת מרחב של V (של F^n)
תת מרחב זה מסומן V_a ונקרא המרחב העצמי של a.

טענה אם a_1,a_2 הם שני ע"ע שונים אז $V_{a_1}\cap V_{a_2}=\{0\}$
כמובן אם $a_1,\dots,a_k$ ע"ע שונים אז לכל $1\le i\ne j\le k$
$V_{a_j}\cap V_{a_i}=\{0\}$.

תזכורת אם $V_1,\dots,V_k$ הם תת מרחבים של V אז
$\sum_{i=1}^{k} V_i=\{\sum_{i=1}^{k} v_i : \forall i\ v_i\in V_i\}$
בסמסטר הקודם למדנו ש $\sum_{i=1}^{k} V_i$ תת מרחב של V.
המשך טענה יהי $V_{a_1},\dots,V_{a_k}$, החיתוך של כל אחד מהן עם הסכום של כל האחרים מכיל רק את $\vec{0}$.

דוגמה החלק השני של הטענה יתר חלש מהחלק הראשון.
למשל נסתכל במישור על תתי המרחבים הבאים: V_1 = ציר x, V_2 = ציר y, V_3 = האלכסון הראשי $x=y$.
ברור שהחיתוך של כל שניים מהם הוא מכיל רק את $\vec{0}$.
כלומר החלק הראשון של הטענה מתקיים. אבל,

$V_3 \cap (V_1 + V_2) = V_3$

שהרי $V_1 + V_2$ זה המישור $\mathbb{R}^2$ כולו. ברור ש $V_3 \neq \{\vec{0}\}$. לכן היתר אכן לא מתקיים.

הוכחת הטענה ברור שהחלק הראשון נובע מהיתר אכן.
לכן נראה אותו.
נניח בשלילה שיש וקטור שונה מאפס המשותף ל- V_{a_j} ול- $\sum_{i\neq j} V_{a_i}$. ננסה להגיע לסתירה. נסמן את הווקטור המשותף ב- α_j. $\Leftarrow$ $\alpha \in V_{a_j}$ ומ- $\alpha_j \in \sum_{i\neq j} V_{a_i}$. לכן לכל $i\neq j$ קיים $\alpha_i \in V_{a_i}$ כך ש $\alpha_j = \sum_{i\neq j} \alpha_i$.
זה אומר שסדרת הווקטורים $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ תלויה לינארית.
אבל אנו יודעים שוקטורים עצמיים של ע"ע שונים הם בלתי תלויים. רק נשים לב ש- α_j אי שהוא $\vec{0}$ אי שהוא וקטור עצמי. הם לא יכולים להיות $\vec{0}$ כי $\alpha_j \neq \vec{0}$. אבל מעשה אנחנו מסתכלים על α_j כסכום של ה- α_i-ים $(i\neq j)$ השונים מאפס. אבל כולם ע"ע ואבל ההוכחה באה על מקומה בשלום.

הגדרה אם V_1, V_2 הם תתי מרחבים אבל הסכום V_1+V_2 יקרא סכום ישר ויסומן $V_1 \oplus V_2$ אם לכל וקטור בסכום יש הצגה יחידה כווקטור ב- V_1 ועוד וקטור ב- V_2.

דוגמה נסתכל על $\mathbb{R}^3$ ונגדיר
$V_1 = \{(x,y,0)\}$
$V_2 = \{(x,0,y)\}$
ברור ש- $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. אבל האם זה סכום ישר? לא! זה סכום עקום! שהרי
$(1,0,0) + (-1,0,0) = (0,0,0) = (0,0,0) + (0,0,0)$
מדגאנו שתי הצגות שונות ולכן זה לא סכום ישר.

דוגמה נסתכל על $\mathbb{R}^3$ ו- $V_1=\{(x,y,0)\}$
$V_2=\{(0,0,z)\}$

ברור ש- $V_1+V_2=\mathbb{R}^3$ והפעם לה סכום ישר.
אבל אז,
נניח שיש α שמקיים

$$\alpha=(x_1,y_1,0)+(0,0,z_1)$$
$$\alpha=(x_2,y_2,0)+(0,0,z_2)$$

אבל אם $\alpha=(x_1,y_1,z_1)$ ומצד $\alpha=(x_2,y_2,z_2)$

$$\Leftarrow (x_1,y_1,z_1)=(x_2,y_2,z_2)$$

$$\Leftarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2.$$

כלומר ההצגה של α כסכום של וקטור מ- V_1 ווקטור מ- V_2 היא יחידה. $\Leftarrow V_1\oplus V_2=\mathbb{R}^3$.

טענה אם V_1, V_2 הם תתי מרחבים של V, כך שהסכום V_1+V_2 יהיה סכום ישר, הכרחי ומספיק ש- $V_1\cap V_2=\{0\}$

הוכחה (קלה) נניח שהסכום הוא סכום ישר. יהי α וקטור בחיתוך. אז $\alpha\in V_1$ ומצד $\alpha\in V_2$ לכן $-\alpha\in V_2$.
נקבל אז 0 כי $0=\alpha+(-\alpha)$. אבל שני $0+0=0$.
הוא ההצגה של אפס היא יחידה אין ברירה אלא ש- $\alpha=0$. $\Leftarrow$ החיתוך מכיל רק את $\vec{0}$.

בכיוון השני. נניח ש $V_1\cap V_2=\{0\}$ ונראה שהסכום ישר. נניח ש- $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ ו- $\alpha=\beta_1+\beta_2$ כאשר $\alpha_1,\beta_1\in V_1$ ו- $\alpha_2,\beta_2\in V_2$. נראה ש- $\alpha_1=\beta_1$ ו- $\alpha_2=\beta_2$.

$$\alpha_2+\alpha_1=\alpha=\beta_1+\beta_2$$

$$\Rightarrow \underset{V_1}{\alpha_1-\beta_1}=\underset{V_2}{\beta_2-\alpha_2}$$

$$\Leftarrow \alpha_1-\beta_1\in V_1\cap V_2 \Leftarrow \alpha_1-\beta_1=0 \Leftarrow \alpha_1=\beta_1$$

באותו אופן $\beta_2-\alpha_2\in V_1\cap V_2 \Leftarrow \beta_2-\alpha_2=0$
$\Leftarrow \alpha_2=\beta_2$.

הכללה של הטענה אם $V_1,\dots,V_k$ תתי מרחבים של V אז $V_1+\dots+V_k$ הוא סכום ישר אמ"מ החיתוך של כל אחד מהם עם הסכום של כל השאר מכיל רק את אפס.

הוכחה שמואל מתגרל להכיר אבל לה קל ומתבקש באינדוקציה על k. סביר אם שנראה לאת בתרגיל.

טענה $\dim(V_1\oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

הוכחה מהסאמסטר הקודם:

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1\cap V_2)$$

אבל מדובר בסכום ישר אם $V_1\cap V_2 = \{0\}$, כלומר $\dim(V_1\cap V_2)=0$.

הכללה של הטענה $\dim(V_1\oplus\dots\oplus V_k) = \sum_{i=1}^{k}\dim V_i$

הוכחה הפעם שמואל לא מתגרל. באינדוקציה על k:

אם $k=1$ או $k=2$ לה ברור.

נניח שהטענה נכונה עבור k ונראה נכונות עבור $k+1$.

$$V_1\oplus\dots\oplus V_k\oplus V_{k+1} = (V_1\oplus\dots\oplus V_k)\oplus V_{k+1}$$

$$\Rightarrow \dim(V_1\oplus\dots\oplus V_k\oplus V_{k+1}) = \underbrace{\dim(V_1\oplus\dots\oplus V_k)}_{\text{לפי הנחת הזכרון}} + \dim V_{k+1} =$$

$$\overset{\text{הנ"ל}}{=} \sum_{i=1}^{k}\dim V_i + \dim V_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\dim V_i$$

לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל k.

מסקנה סכום של מרחבים עצמיים הוא סכום ישר.

משפט תנאי לנאורות (מטריצה) היא לרסינה אמ"מ סכום המימדים של המרחבים העצמיים שלה הינו n.

דבר חשוב מאוד אם $U=V_1\oplus\dots\oplus V_k$ ולוקחים בסיס בכל אחד מהם $\{v_i\}$ אז איחוד הבסיסים הללו הוא בסיס של U.

הוכחת הדבר התשוב מאוד

נניח שה ממדים של $V_1,\dots,V_k$ הם $n_1,\dots,n_k$ בהתאמה.
אז $\dim U=\sum_{i=1}^{k} n_i$. באיחוד הבסיסים יש $\sum_{i=1}^{k} n_i$
וקטורים. ברור שאיחוד הבסיסים פורש את U. למדנו
שקבוצה פורשת שמספר איבריה שווה לממד היא בסיס.

הוכחת המשפט נניח שהסכום הוא ח. נראה שהעתקה לרסינה.
ניקח בסיס של כל אחד מבין המרחבים הוקטוריים. לפי הד.ח.מ
האיחוד של כל הבסיסים הללו הוא בסיס לסכומה הישר.
מספר איברי הבסיס הזה הוא ח. הסכום הישר הוא תת מרחב
של V שממדו ח לכן הסכום הישר הוא V ואיחוד הבסיסים
הוא בסיס של V. אז אנו ל-V בסיס שכולו וֹ. לכן העתקה
(טל) היא לכסינה.

נניח ש-T לכסינה. אז יש ל-T בסיס שכולו וֹ. כל איבר
בבסיס שייך לאיזשהו מרחב עצמי. בגלל מרחב עצמי וקטורי
הבסיס השייכים לו מהווים בסיס לאותו מרחב עצמי. ומכאן
נקבל את הטענה. שהרי מספר הוקטורים הללו הוא
הממד של אותו מרחב עצמי. לכן סכום הממדים של המרחבים
העצמיים שווה לממד של V.

טענה T לכסינה אמ"מ V הוא סכום המרחבים העצמיים.
הוכחה אם V סכום של המרחבים העצמיים אז הוא סכום
ישר שלהם. וגם הממד שלו הוא סכום הממדים.

(39) 10.5.06
לינארית

מה דיברנו בשיעור הקודם?

הגדרנו מרחב עצמי של ע:

$$V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$$

זה בעצם כל הוקטורים העצמיים בביחס ל λ. זה תת מרחב של V.

לדעתנו שאם $a_1, \dots, a_k$ הם ערכים עצמיים שונים ! - $V_{a_1}, \dots, V_{a_k}$ הם המרחבים העצמיים שלהם, אז $V_{a_1} + \dots + V_{a_k} = V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_k}$. כלומר הקיבוץ של כל אחד מבין $V_{a_1}, \dots, V_{a_k}$ עם הסכום של השאר מכיל רק את 0.

למשל, עלינו לבדוק $V_{a_1} \cap (V_{a_2} + \dots + V_{a_k})$. למה? נניח ש- $\alpha \in V_{a_1} \cap (V_{a_2} + \dots + V_{a_k})$. נקרא לו $\alpha_1 = \alpha$. α שייך לחיתוך ולכן $\alpha_1 \in V_{a_1}$ וגם $\alpha_1 \in V_{a_2} + \dots + V_{a_k}$. לכן $\alpha_1 = \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ כאשר $\alpha_2 \in V_{a_2}, \dots, \alpha_k \in V_{a_k}$. לכל $1 \le i \le k$ α_i או שהוא 0 או שהוא ו"ע שייך לע"ע a_i. לכן בכל אופן $\alpha_i = c_i \beta_i$ כאשר β_i ע"ע השייך ל- a_i. כלומר $c_1\beta_1 = c_2\beta_2 + \dots + c_k\beta_k$. אבל אחרי ש- β_i ו"ע השייכים לע"ע שונים הם בת"ל. לכן כל המקדמים $c_i = 0$, בפרט $c_1 = 0 \Leftarrow \alpha = \alpha_1 = 0$.

איך מוכיחים לשאר המבדים? כמו שאומרים בלה"ל - אותו דבר.

כמו כן הוכחנו באינדוקציה טענת עזר = המאמד של סכום ישר של תתי מרחבים שווה לסכום המאמדים.

עוד טענה שהוכחנו: אם $U = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$! - B_1 בסיס של V_1, ..., B_k בסיס של V_k אז $B_1 \cup \dots \cup B_k$ בסיס של U.

אבל נוכיח אותה שוב: ידוע ש- $\dim U = \dim V_1 + \dots + \dim V_k$ בגלל שהבסיסים $B_1, \dots, B_k$ זרים לה זה כי זה סכום ישר.

לכן מספר האברים ב- $B_1 \cup \dots \cup B_k$ הוא $\dim U$.

נוכיח שהאיחוד פורש את U. יהי $\beta \in U$ אז $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ כאשר $\alpha_i \in V_i$. α_1 הוא צירוף לינארי של B_1, ..., α_k צירוף לינארי של B_k. לכן סכומם הוא צירוף לינארי של האיחוד, כלומר $B_1 \cup \dots \cup B_k$ פורש.

מספר אברי האיחוד הוא $\dim U$. לאדני שקבוצה פורשת שמספר אבריה שווה לממד המרחב היא בסיס. לכן $B_1 \cup \dots \cup B_k$ בסיס של U. ☺

<u>משפט</u>: ט"ל (מטריצה) היא לכסינה אמ"מ סכום הממדים של המרחבים העצמיים שלה הוא n, וכן אמ"מ V הוא הסכום הישר של המרחבים העצמיים.

<u>הוכחה</u>: נניח שסכום הממדים העצמיים הוא n. לכל $1 \le i \le k$ יהי B_i בסיס של V_{a_i}. אז $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ הוא בסיס של $\bigoplus_{i=1}^{k} V_{a_i}$ לכן הממד של הסכום הישר הוא n. הסכום הישר הוא תת מרחב של V שממדו n. לכן הסכום הישר הוא V. לכן $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ הוא בסיס של V. יש ל-V בסיס של ו"ע ולכן הט"ל (מטריצה) לכסינה.

בכיוון השני נניח שהט"ל (מטריצה) לכסינה ונוכיח שסכום הממדים הוא n. יהי B בסיס של V שכולו ו"ע, עם ע"ע $a_1, \dots, a_k$. המרחבים העצמיים הם $V_{a_1}, \dots, V_{a_k}$.

נניח ש- $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. יהי רבון ש- l_1 הווקטורים הראשונים ב- B הם ו"ע של a_1, ..., l_k הווקטורים האחרונים הם ו"ע של a_k. לכן $\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1} \in V_{a_1}$. נראה שהם בסיס של V_{a_1}. ברור ש- $\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1}$ בת"ל. נראה שהם פורשים את V_{a_1}.

יהי $\beta \in V_{a_1}$. בוודאי $\beta \in V$. לכן $\beta = d_1\alpha_1 + \dots + d_{l_1}\alpha_{l_1} + d_{l_1+1}\alpha_{l_1+1} + \dots + d_n\alpha_n$

נעביר אגפים

$$\underbrace{\beta - (d_1\alpha_1 + \dots + d_{l_1}\alpha_{l_1})}_{\in V_{a_1}} = \underbrace{d_{l_1+1}\alpha_{l_1+1} + \dots + d_n\alpha_n}_{\in V_{a_2} + \dots + V_{a_n}}$$

אבל $V_{a_1} \cap (V_{a_2} + \dots + V_{a_n}) = \{0\} \Rightarrow d_{l_1+1}\alpha_{l_1+1} + \dots + d_n\alpha_n = 0$

אלה שני $\alpha_{l+1},\dots,\alpha_n$ בת"ל $\Leftarrow$ $d_{l+1}=\dots=d_n=0$.

$\Leftarrow$ $\beta = d_1\alpha_1+\dots+d_l\alpha_l$

נאמר $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ פורש את V_{a_1} ולכן בסיס.

קיבלנו ש- $B\cap V_{a_1}$ הוא בסיס של V_{a_1}. באופן דומה $B\cap V_{a_2}$ הוא בסיס של V_{a_2} וכן הלאה.

קיבלנו ש- V הוא הסכום של המרחבים העצמיים. שהרי יש לו בסיס B שהוא איחוד בסיסים של המרחבים העצמיים. מאחר שמדובר במרחבים עצמיים הסכום הוא ישר ולכן סכום הממדים הוא n.

הגדרה יהי a ע"ע של T (של A). הריבוי האלגברי של a הוא הריבוי שלו כשורש של הפולינום האופיני.

דוגמה $f(x)=x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$

כאן הריבוי של 1 הוא 2 ואילו הריבוי של 0 הוא 1.

הריבוי הגאומטרי של a הוא הממד של V_a.

טענה פשוטה: לכל ע"ע יש הריבוי האלגברי לפחות הריבוי הגאומטרי הם 1 לפחות.

זה ברור כשמש.

דוגמה נסתכל במטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$p_A(x)=\begin{vmatrix}x-1&0&0&-2\\0&x-2&0&0\\0&0&x-2&-1\\0&0&0&x-1\end{vmatrix}=(x-1)^2(x-2)^2$$

$\Leftarrow$ יש שני ע"ע הם 1 ו- 2. הריבוי האלגברי של כל אחד מהם הוא 2.

נחשב את הרבוי האלגברי של 1:

לנוח ש-

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-I)\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0$$

דרגת המטריצה המצומצמת היא 3. ולכן המרחב של
ממד הפתרונות הוא $\dim V_1 = 1$.
הרבוי האלגברי של 1 הוא 1.
תרגיל: חשבו את הרבוי האלגברי של 2.

משפט ט"ל (מטריצה) היא לכסינה אמ"מ סכום הרבויים
האלגבריים של הע"ע שלה הוא n.
לה ברור רשמש

משפט אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמי אל סכום הרבויים
האלגבריים של הע"ע הוא n.
הוכחה לה ברור. אם מעלת הפולינום האופייני היא n והע"ע הם
$a_1,\dots,a_k$ והוא מתפרק לגורמי אל $p_A(x)=(x-a_1)^{l_1}\dots(x-a_k)^{l_k}$
אל המעלה היא $n=l_1+\dots+l_k$.

משפט אם a ע"ע אל הרבוי האלגברי שלו בטוח אושה לרבוי האלגברי.
הוכחה נניח שהרבוי האלגברי של a הוא m. יהי $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ בסיס ל-V_a.
נשלים אותו לבסיס ל-V $\alpha_1,\dots,\alpha_m,\dots,\alpha_n$. לכל $1\le i\le m$ $T\alpha_i=a\alpha_i$. לכן המטריצה
של T לפי בסיס זה היא $A=\begin{pmatrix}a\,I_m & *\\ 0 & *\end{pmatrix}$. הפולינום האופייני היא
$|xI-A| = (x-a)^m\cdot q(x)$ ואשר q(x) אינה פולינום.
יכול להיות ש $(x-a)$ מופיע ב-q(x) ולכן הרבוי האלגברי יכול
להיות גדול יותר אבל בוודאי לא בטוח יותר.

15.5.06
יונארית

בוקר טוב
שבוע בבקשה
רבר אותרי סו

תזכורת: ג'ל (מטריצה) היא לכסינה אמ"מ V הוא סכום ישר של המרחבים העצמיים וכן אמ"מ סכום מימדי המרחבים העצמיים הוא dim V.

הגדרה: רבוי אלגברי של ע"ע הוא רבוי השורש של הפולינום האופיני. רבוי גאומטרי של ע"ע הוא המימד של המרחב העצמי שלו.

הסקנו: ג'ל (מטריצה) היא לכסינה אמ"מ סכום הרבויים הגאומטריים של הע"ע הוא dim V.

למדנו: לכל ע"ע הרבוי האלגברי הוא לפחות 1 וכן הרבוי הגאומטרי הוא לפחות 1.

עוד למדנו: לכל ע"ע הרבוי הגאומטרי הוא לכל היותר הרבוי האלגברי.

עוד דבר: אם הפולינום האופיני מתפרק לחלוטין לגורמים לינאריים אז סכום הרבויים האלגבריים של הע"ע הוא dim V.

משפט חשוב: כדי שטל (מטריצה) תהיה לכסינה הכרחי ומספיק שהפולינום העצמי יתפרק לחלוטין לגורמים לינאריים ולכל ע"ע הרבוי הגאומטרי שווה לרבוי האלגברי.

הוכחה:
נניח שה מטריצה לכסינה ותהי $A=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ המטריצה האלכסונית הדומה לה. מכיר ש- $p_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.
והרי למטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני. אבל הוא מתפרק לחלוטין.
נראה שלכל a_i הרבוי האלגברי $r_a(a_i)=r_g(a_i)$ הרבוי הגאומטרי.

לכל עץ a_i יהיה ש- $ra(a_i) \le rg(a_i)$. והרי $\sum_{i=1}^{n} ra(a_i) = n$
ואם $\sum_{i=1}^{n} rg(a_i) = n$ (כי הוא לכסינה). כלומר, אילו היה קיים
j כך ש- $rg(a_j) < ra(a_j)$ היינו מקבלים $\sum_{i=1}^{n} rg(a_i) < \sum_{i=1}^{n} ra(a_i)$ וזו
סתירה.

בכיוון השני, נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים ולכל עץ
הרבוי האלגברי שווה לרבוי הגאומטרי. הנאי הפולינום מתפרק
לגורמים, סכום הרבויים האלגבריים הוא $\dim V$. אבל כל
רבוי גאומטרי שווה לרבוי האלגברי ולכן סכום הרבויים
הגאומטריים הוא $\dim V$ ומכאן שהמטריצה לכסינה.

דוגמה:

האם המטריצה $A=\begin{pmatrix}5&3\\0&5\end{pmatrix}$ לכסינה?

ברור שהפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-5)^2$
כלומר הוא מתפרק לגורמים ויש עץ $\lambda_1=5$ עם רבוי אלגברי
$ra(5)=2$. נחפש וקטורים עצמיים:

$$Av=5v$$

$$(5I-A)v=0$$

$$\begin{pmatrix}0&-3\\0&0\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow rg(5)=1$$

כלומר $ra(5)\neq rg(5) \Leftarrow$ A אינה לכסינה.

דוגמה

האם המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&3&3\\2&4&2\end{pmatrix}$ לכסינה?

קל לראות ש- $p_A(x)=(x-1)(x+1)(x-8)$.
כלומר, יש 3 עץ שונים $\Leftarrow$ היא לכסינה.
מצד שני יש 3 עץ ולכל אחד רבוי אלגברי וגאומטרי
לפחות 1. הסכום לא יכול לעלות על 3 $\Leftarrow$ לכל עץ
הרבוי האלגברי שווה לרבוי הגאומטרי.

דוגמה:

האם המטריצה $A=\begin{pmatrix}-1&5&1\\1&3&1\\1&5&-1\end{pmatrix}$ לכסינה?

קל לחשב ולראות ש- $p_A(x)=(x-5)(x+2)^2$

אבל $r_a(5)=1$! $r_a(-2)=2$

והפולינום מתפרק לגורמים. מאחר ש $r_g(5),r_g(-2)\geq 1$

ברור ש- $r_g(5)=1$, שהרי $1\leq r_g(5)\leq r_a(5)=1$.

לכן נותר לחשב את הרבדים הלא טריוויאלי של -2.

$$(-2I-A)v=0$$

$$\begin{pmatrix}-1&-5&-1\\-1&-5&-1\\-1&-5&-1\end{pmatrix}v=0 \Rightarrow r_g(-2)=2$$

$\Leftarrow$ המטריצה A לכסינה.

משפט: T היא לכסינה אמ"מ הפולינום המינימלי שלה מתפרק לגורמים לינאריים שונים.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- T לכסינה ותהי A מטריצה אלכסונית המייצגת אותה. הפולינום המינימלי של T הוא הפולינום המינימלי של A. באלכסון של A מופיעים בדיוק הע"ע של T. יהיו $a_1,\dots,a_k$ כל הע"ע השונים של T ונסתכל בפולינום $g(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)$

אז $g(A)=\prod_{i=1}^{k}(A-a_iI)=0$ שהרי בכל אכפל מתאפסות השורות שבהן הופיע המקור a_i. לכן המכפלה היא מטריצת האפס. $\Leftarrow$ $m(x)$ הפולינום המינימלי של T מחלק את $g(x)$. מצד שני כל הע"ע הם שורשים של $m(x)$ ולכן $m(x)|g(x)$. אלה הם שני פולינומים מתוקנים שכל אחד מהם מחלק את רעהו. לכן $m(x)=g(x)$ ולכן $m(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים שונים.

($\Rightarrow$) נניח שהפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים שונים. אז $m(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)$ כאשר a_i לכל i הם כל

הלא השונים. נראה ש- T לכסינה. לכל $1 \le j \le k$ נסתכל
בפולינום הבא ממעלה $k-1$: פולינום האינטרפולציה שמוגדר:

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{x - a_i}{a_j - a_i}$$

לפולינום זה יש תכונה נפלאה:
$p_j(a_j) = 1$ ולכל $i \neq j$ $p_j(a_i) = 0$. בקצרה $p_j(a_i) = \delta_{ij}$
לכל פולינום h ממעלה קטנה מ- k מתקיים:

$$(1) \quad h = h(a_1)p_1 + \dots + h(a_k)p_k$$

כדי להראות זאת נראה ש- $q = h - \sum_{i=1}^{k} h(a_i)p_i \equiv 0$

$$q(a_1) = h(a_1) - h(a_1) = 0$$
$$\vdots$$
$$q(a_k) = h(a_k) - h(a_k) = 0$$

מכאן נובע ש- $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ הם שורשים של q. אולם q
לא היה פולינום האפס אלא הוא היה פולינום ממעלה קטנה מ- k
שיש לו לפחות k שורשים שונים וזה לא יתכן. $\Leftarrow q \equiv 0$.
נציב ב- (1) את הפולינום $h \equiv 1$ ונקבל

$$(*) \quad 1 = p_1 + \dots + p_k$$

כעת נציב ב- (1) את הפולינום $h = x$ ונקבל
$(*) \quad x = a_1 p_1 + \dots + a_k p_k$ (עבור $k > 1$)
בשוויון $(*)$ נציב T במקום x ונקבל

$$I = p_1(T) + \dots + p_k(T)$$
$$T = a_1 p_1(T) + \dots + a_k p_k(T)$$

נסמן $E_j = p_j(T)$ ונקבל

$$(**) \quad \begin{aligned} I &= E_1 + \dots + E_k \\ T &= a_1 E_1 + \dots + a_k E_k \end{aligned}$$

אם $i \neq j$ אז $p_i p_j$ מתחלק ב- $m(x)$ מדוע?
ב- p_i יופיעו כל הגורמים פרט ל- $x - a_i$ ואילו ב- p_j יופיע
גם $x - a_i$. סך כל במכפלה יופיעו כל הגורמים.
$\Leftarrow p_i p_j(T) = 0$ כלומר $p_i(T)p_j(T) = 0$. כלומר אם $i \neq j$
אז $E_i E_j = 0$ $(***)$

$E_i = p_i(T)$ פולינום מדרגה $k-1$ לכן $E_i \neq 0$
ולכל $E_j \neq 0$.

<u>טענה:</u> $E_i = E_i^2$ (****)

<u>הוכחה:</u> $I = E_1 + \ldots + E_k$
(כפול משמאל ב- E_i ונקבל)

$$E_i = \underbrace{E_i E_1}_{0} + \ldots + E_i^2 + \ldots + \underbrace{E_i E_k}_{0}$$

$$\Longrightarrow \quad E_i = E_i^2$$

(!!) טענה.

מ- (*) - (****) הדרך סלולה להוכחת המשפט.
נמשיך בשיעור הבא.

(44) 14.5.06
מאדות

משפט: טרנספורמציה לינארית היא לכסינה אמ"מ הפולינום המינימלי שלה מתפרק לגורמים לינאריים שונים מאפס ראשוניה.

הוכחה: בשלב הקודם הוכחנו את הכיוון ($\Leftarrow$) ולכן הוא קל.

בכיוון השני ידוע שהתנאי מתקיים. יהיו $a_1, \dots, a_k$ כל הע"ע השונים של T. ראינו שהפולינום המינימלי הוא $m(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)$ ולכן מתפלג k.

הגדרנו k פולינומים $p_1, \dots, p_k$ מדרגה $k-1$ ע"י $p_j(x) = \prod_{i=j} \frac{x-a_i}{a_j-a_i}$ והם מקיימים $p_j(a_i) = \delta_{ij}$ ולכן $p_i p_j$ $i \neq j$ מתחלק בפולינום המינימלי.

הגדרנו לכל $1 \le j \le k$ $E_j = p_j(T)$ וראינו שמתקיים:

$$I = E_1 + \dots + E_k$$

$$(**) \quad T = a_1 E_1 + \dots + a_k E_k$$

$$(***) \quad i \neq j \Rightarrow E_i E_j = 0$$

$$(****) \quad E_j^2 = E_j$$

לכל j נסתכל ב- $Im(E_j)$ כת"מ של V. יהי $\alpha \in V$, כת"מ Va_j. כדי להוכיח זאת צריך להוכיח שלכל $\alpha \in Im(E_j)$ מתקיים $T\alpha = a_j \alpha$. אם $\alpha \in Im(E_j)$ אז $\alpha = E_j \beta$ ואז

$$T\alpha = TE_j\beta \overset{(**)}{=} a_1 E_1 E_j \beta + \dots + a_k E_k E_j \beta = a_j E_j^2 \beta \overset{(****)}{=} a_j E_j \beta = a_j \alpha$$

נטען ש- $\sum_{j=1}^{k} Im(E_j) = V$. כדי להוכיח זאת נראה שלכל $\alpha \in V$ $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ כאשר $\alpha_1 \in Im\, E_1$.

לפי $(**)$ $I = E_1 + \dots + E_k$. יהי $\alpha \in V$

$$V = \sum_{j=1}^{k} Im(E_j) \Leftarrow \alpha = I\alpha = \underbrace{E_1\alpha}_{Im(E_1)} + \dots + \underbrace{E_k\alpha}_{Im(E_k)} \in \sum_{j=1}^{k} Im(E_j) \Leftarrow$$

ראינו ש- $Im\, E_j \subseteq Va_j$ לכן $\sum_{i=1}^{k} Va_i = V$ אותנו יודעים שסכום מרחבים לינאריים הוא סכום ישר ומאחר שזה מטריצה לכסינה, שהרי $V = Va_1 \oplus \dots \oplus Va_k$.

אבל, כלומר נכון רק ל $k<1$ אם $k=1$ אז ישר רק עדיין
אחד ו- $m(x)=x-a$. אבל $T-aI=0$ $\Leftarrow$
$T=aI$ וזה כמובן אלכסוני לפי כל בסיס: $[T]=\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}$

מסקנה: מטריצה A היא לכסינה אמ"מ פולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים שונים. שורשי הפולינום המינימלי של הטרנספורמציה של המטריצה הוא אותו פולינום.

מרחב מכפלה פנימית

בנושא זה השדה תמיד יהיה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

אם עובדים ב-$\mathbb{R}^2$ או ב-$\mathbb{R}^3$, לכל α,β מאפשר לגדיר את המכפלה הסקלרית (α,β) באופן הבא:
בעזרת המכפלה הסקלרית ניתן לשנות מ-V ל-$\mathbb{R}$.
ב-$\mathbb{R}^2$ - אם $\alpha=(a_1,a_2)$, $\beta=(b_1,b_2)$ $(\alpha,\beta)=a_1a_2+b_1b_2$
קל להראות ש $(\alpha,\beta)=\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta$ כאשר θ הזווית בינהם

ב-$\mathbb{R}^3$ מגדירים בצורה דומה: אם $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ ו-
$\beta=(b_1,b_2,b_3)$ אז: $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
מה רוצה $(\alpha,\beta)=\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta$

הגדרה: ב-$\mathbb{R}^n$ אם $\alpha=(a_1,\dots,a_n)$ ו- $\beta=(b_1,\dots,b_n)$
אז $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

קל לראות שהמכפלה הסקלרית מקיימת את התכונות הבאות:
א) סימטריה $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ במקרה הרגיל בשדה
ב) לינאריות $(\alpha+\alpha',\beta)=(\alpha,\beta)+(\alpha',\beta)$ במקרה פשוט בשדה
ג) הומוגניות $(a\alpha,\beta)=a(\alpha,\beta)$ במקרה האסוציאטיבי בשדה

3) חיוביות. לכל $\alpha \neq 0$ $(\alpha, \alpha) > 0$

הגדרה כללית של מכפלה סקלרית: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מכפלה סקלרית ב-V היא כל פונק' מ- $V \times V$ ל- $\mathbb{R}$ שתסומן (α, β) המקיימת את התכונות:

1) סימטריה
2) הומogניות
3) לינאריות
4) חיוביות

המכפלה הסקלרית הרגילה ב-$\mathbb{R}^2$ היא מכפלה סקלרית. אם אין רשום אחרת בקבוץ תניחי כי זה עדין מכפלה סקלרית

הערה: במקום הלינאריות וההומogניות אפשר לדרוש תכונה אחת והיא $(a\alpha + a'\alpha', \beta) = a(\alpha, \beta) + a'(\alpha', \beta)$ קל לראות שזה באמת שקול.

נושא תרגילים נוספים של מכפלה סקלרית הנלמדים מהגדרה.

1) $(\alpha, \beta + \beta') \overset{\text{סימטריה}}{=} (\beta + \beta', \alpha) \overset{\text{לינאריות}}{=} (\beta, \alpha) + (\beta', \alpha) =$

$= (\alpha, \beta) + (\alpha, \beta')$

2) $(\alpha, b\beta) \overset{\text{סימטריה}}{=} (b\beta, \alpha) \overset{\text{הומogניות}}{=} b(\beta, \alpha) = b(\alpha, \beta)$

3) $(\alpha, 0) = (\alpha, 0 \cdot 0) = 0 \cdot (\alpha, 0) = 0 = (0, \alpha)$

הגדרה: מרחב מכפלה סקלרית הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ יחד עם מכפלה סקלרית המוגדרת עליו.

הגדרה: נגדיר נורמה במרחב מכפלה סקלרית:
הנורמה של α היא $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$

תכונות. 1) $\|\alpha\| \geq 0$

2) $\|\alpha\| = 0$ אמ"מ $\alpha = 0$

3) $\|a\alpha\| = |a|\,\|\alpha\|$

4) אי שוויון קושי שוורץ: $|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

הוכחה: (נשופנה) אם $\beta = 0$ להבהיר אחרת

$$\|\alpha + x\beta\|^2 = (\alpha + x\beta, \alpha + x\beta) =$$

$$= (\alpha,\alpha) + x(\alpha,\beta) + x(\beta,\alpha) + x^2(\beta,\beta) =$$

$$= (\beta,\beta)x^2 + 2(\alpha,\beta)x + (\alpha,\alpha)$$

אם יודעים ש $\|\alpha + x\beta\|^2 \geq 0$. נסמן יש לנו הימר שורשים אחד

$\Leftarrow$ מנוטה להתרגן ושטה רגולה

$$[2(\alpha,\beta)]^2 - 4(\beta,\beta)(\alpha,\alpha) < 0$$

$$\Rightarrow |(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$$

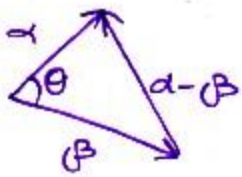
(46) 22.5.06
ליניארית

בשיעור שעבר התחלנו לדבר על מרחבים אוקלידיים ומכפלות סקלריות.

הגדרנו את המכפלה הסקלרית ב- $\mathbb{R}^n$: אם $\alpha=(a_1,\dots,a_n)$ ו- $\beta=(b_1,\dots,b_n)$ אז $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

ב- $\mathbb{R}^2$ וב- $\mathbb{R}^3$ $(\alpha,\beta)=\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta$ כאשר θ היא הזווית בין α ל- β.

נשים ♡:

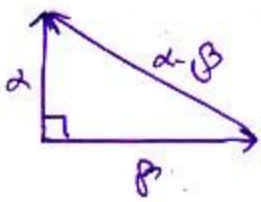


מה האורך של $\|\alpha-\beta\|$?

$$\|\alpha-\beta\|^2=(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)=$$
$$=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta$$

וואו! קיבלנו את משפט הקוסינוסים!

אם $\theta=90^\circ$ אז



$$\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$$

וואו! קיבלנו את משפט פיתאגורס!

אמרנו שאם V מרחב מעל $\mathbb{R}$, פונקציה מ- $V\times V$ ל- $\mathbb{R}$ שמקיימת סימטריה, הומוגניות, ליניאריות וחיובית נקראת מכפלה סקלרית.

דוגמה למכפלה סקלרית היא המכפלה הסקלרית שראינו כבר לעיל.

עוד דוגמה: אם $\dim V=n$ ו- $\mathcal{B}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ הינו בסיס. לכל $\alpha,\beta\in V$

$[\alpha]_{\mathcal{B}}=(a_1,\dots,a_n)$

$[\beta]_{\mathcal{B}}=(b_1,\dots,b_n)$

נגדיר $(\alpha,\beta)=a_1b_1+\dots+a_nb_n$

קל לראות שזה מקיים את כל התכונות.

כולם לומדים חשבון אינפינטסימלי, נכון?

יהי V מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[0,1]$. זה מרחב שאינו נורם סופית. לכל $f,g \in V$ נגדיר

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

קל לראות שזה כן מכפלה סקלרית.

מרחב מעל $\mathbb{R}$ יש מכפלה סקלרית נקרא מרחב אוקלידי:

למדנו את משפט קושי-שוורץ במרחב אוקלידי: $|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$

קיים שוויון אמ"מ α,β תלויים לינארית. למה?

אם α,β תלויים לינארית אז $\alpha = a\beta$ (או $\beta = a\alpha$)

נניח $\beta = a\alpha$. ואז נקבל

$$|(\alpha,\beta)| = |(\alpha,a\alpha)| = |a|(\alpha,\alpha) = |a|\|\alpha\|\|\alpha\| = \|a\alpha\|\|\alpha\| = \|\alpha\|\|\beta\|$$

איך הוכחנו את אי שוויון קושי שוורץ? הסתכלנו על

$$0 \le \|\alpha + x\beta\|^2 = \|\beta\|^2x^2 + 2(\alpha,\beta)x + \|\alpha\|^2$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta)^2 \le \|\beta\|^2\|\alpha\|^2$$

$$\Rightarrow |(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$$

אם α,β לא תלויים אז $\alpha + x\beta \ne 0$.

$$\Rightarrow 0 \lneq \|\alpha + x\beta\|^2$$

$$\Rightarrow 0 \lneq \|\beta\|^2x^2 + 2(\alpha,\beta)x + \|\alpha\|^2$$

$\Rightarrow$ אין פתרון למשוואה

$\Rightarrow$ דיסקרימינטה < 0

$$\Rightarrow 4(\alpha,\beta)^2 - 4\|\beta\|^2\|\alpha\|^2 < 0$$

$$\Rightarrow |(\alpha,\beta)| < \|\alpha\|\|\beta\|$$

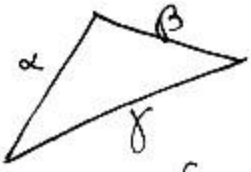
☺

תכונות הנורמה:

ג) $\|a\alpha\| = |a|\,\|\alpha\|$. למה?

$$\|a\alpha\| = \sqrt{(a\alpha, a\alpha)} = \sqrt{a^2(\alpha,\alpha)} = |a|\sqrt{(\alpha,\alpha)} = |a|\,\|\alpha\|$$

ד) אי שוויון המשולש: $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$.



בכל אחת בעיה אכרסה שתיים האחרות.

ושוויון קיים רק אם אחד מבין α,β הוא כפולה של האחר בסקלר אי שלילי.

למה?

$$\|\alpha+\beta\|^2 = (\alpha+\beta,\alpha+\beta) =$$
$$= (\alpha,\alpha) + (\alpha,\beta) + (\beta,\alpha) + (\beta,\beta) =$$
$$= \|\alpha\|^2 + 2(\alpha,\beta) + \|\beta\|^2 \le$$
$$\le \|\alpha\|^2 + 2(\|\alpha\|\,\|\beta\|) + \|\beta\|^2 = \quad \leftarrow \text{קושי שוורץ}$$
$$= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$$
$$\Rightarrow \|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$$

ההלק השני- תרגיל. והפה רמז דק כפול. אם אין תלות לינארית אז בא"ש שוויון קושי שוורץ יש א"ש שוויון ממש...

שאלה בונוס: הוכיחו שאם $f,g \in C[a,b]$ אז

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2\,dx \int_a^b g(x)^2\,dx$$

ויש שוויון אם ורק אם הפונקציות הן כפולה של האחרת במספר אי שלילי.

הגדרה: יהי F השדה $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, ויהי V מרחב וקטורי מעל F. מכפלה פנימית (ע"ל) V הינה פונקציה מ- $V\times V$ ל- F המקיימת:

א) הרמיטיות $(\alpha,\beta) = \overline{(\beta,\alpha)}$

ב) לינאריות $(\alpha+\alpha',\beta) = (\alpha,\beta) + (\alpha',\beta)$

ג) הומוגניות $(a\alpha,\beta) = a(\alpha,\beta)$

ד) חיוביות $(\alpha,\alpha) > 0$ אם $\alpha \ne 0$

אם $F=\mathbb{R}$ נדבר על מכפלה סקלרית.

דוגמה למכפלה פנימית ב- $\mathbb{C}^n$:

אם $\alpha=(a_1,\dots,a_n)$ ו- $\beta=(b_1,\dots,b_n)$ נגדיר

$$(\alpha,\beta)=a_1\overline{b_1}+\dots+a_n\overline{b_n}$$

קל לראות שכל התכונות מתקיימות.

למה הכוונה $(\alpha,\alpha)\geq 0$? הרי אין סדר במרוכבים (כמו בישראל). הכוונה היא שיצא מספר ממשי וחיובי.

טענה:

1) $(\alpha,\beta+\beta')=(\alpha,\beta)+(\alpha,\beta')$

2) $(\alpha,b\beta)=\overline{b}(\alpha,\beta)$

הוכחה:

1) $(\alpha,\beta+\beta')=\overline{(\beta+\beta',\alpha)}=\overline{(\beta,\alpha)+(\beta',\alpha)}=$
$=\overline{(\beta,\alpha)}+\overline{(\beta',\alpha)}=\overline{(\alpha,\beta)}+\overline{(\alpha,\beta')}=(\alpha,\beta)+(\alpha,\beta')$

לעשות בעמיים בעמוד
זה כמו לעבור בעמיים את הכיש

2) $(\alpha,b\beta)=\overline{(b\beta,\alpha)}=\overline{b(\beta,\alpha)}=\overline{b}\,\overline{(\beta,\alpha)}=$
$=\overline{b}\,\overline{\overline{(\alpha,\beta)}}=\overline{b}(\alpha,\beta)$

הנורמה של α תוגדר $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$. כמובן $\|\alpha\|\geq 0$ ויש שוויון אמ"מ $\alpha=0$.

אי שוויון קושי שוורץ: $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\|\beta\|$

הוכחה בדילוגים: כמו שעשינו פעם: $0\leq\|\alpha+x\beta\|$ לכל $x\in\mathbb{R}$ אמ"מ

$$0\leq\|\alpha+x\beta\|=x^2\|\beta\|^2+\left((\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)\right)x+\|\alpha\|^2=$$
$$=x^2\|\beta\|^2+\left((\alpha,\beta)+\overline{(\alpha,\beta)}\right)x+\|\alpha\|^2=$$
$$=x^2\|\beta\|^2+2\mathrm{Re}(\alpha,\beta)x+\|\alpha\|^2\leq x^2\|\beta\|^2+2|(\alpha,\beta)|+\|\alpha\|^2=$$

שם בינתיים אי שוויון ריבועי עם מקדמים ממשיים.
רשעבריים לדיסקרימינטה מקבלים את הדרוש.

חוץ מזה, יש שוויון אמ"מ אחד מבין β,α הוא כפולה של האחר במספר ממשי.

תכונות הנורמה:

1. $0 \le \|\alpha\|$ ויש שוויון אמ"מ $\alpha = 0$
2. $\|a\alpha\| = |a|\,\|\alpha\|$ $\quad a \in F$
3. $\|\beta + \alpha\| \le \|\beta\| + \|\alpha\|$

נתבונן לרגע בסקלר הראשון ב- $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$:

$$(\alpha, \beta) = \|\alpha\|\,\|\beta\| \cos\theta$$

כאשר θ הזווית שבין α, β.

באופן אינטואיטיבי (מרחב אוקלידי) נגדיר:
הווקטורים α ו- β "בראו" נצבים (אורתוגונליים) אם $(\alpha, \beta) = 0$.

לדוגמא, אפס נצב לכל וקטור, כולל לעצמו.

תיבה ארמנית:
אבל לא ברור מהו על מנת ומדוע?
תשובה: כמו בן אדם אלוהי
אדון ירוק: - כי
דבריו אותו
אדון תלוי - כי
תשו אותו
אדון מתפרק - רק
שיהיה לך יותר
לפתור את הבעיה

ההוכחה האלגברית של קושי שוורץ נמצאת ב שטס

$$|\langle \alpha,\beta\rangle|^2 \le \|\alpha\|\,\|\beta\|$$

ויש שוויון אמ"מ α,β תלויים.

מסקנה: אי שוויון המשולש: $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\|+\|\beta\|$

ושוויון אמ"מ אחד הוקטורים הוא כפלה של הקודם באסקלר אי שלילי.

תרגיל יפה: הוכיחו ש- $\|\alpha-\beta\| \ge \|\alpha\|-\|\beta\|$

פשוט מאוד: $\alpha = (\alpha-\beta)+\beta$

$$\Rightarrow \|\alpha\| \le \|\alpha-\beta\|+\|\beta\|$$

מרחבי אורתוגונליות

הגדרה: אומרים ש- α ניצב ל- β אם $\langle \alpha,\beta\rangle = 0$.

באופן דומה גם β ניצב ל- α ומסמנים $\alpha \perp \beta$

הגדרה: V מרחב וקטורי מעל F ($F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C}$)

לכל קבוצה לא ריקה $A \subseteq V$ נגדיר

$$A^\perp = \{\beta \in V : \forall \alpha \in A \ \langle \alpha,\beta\rangle = 0\}$$

דוגמה: $V=\mathbb{R}^3$! $A=\{(1,0,0),(0,3,0)\}$

$$\Rightarrow A^\perp = \{(0,0,a) : a \in \mathbb{R}\}$$

טענה: לכל A, $A^\perp$ הוא תת מרחב של V וקוראים לו תת המרחב הניצב ל- A.

הוכחה:

א) ברור כי $0 \in A^\perp$ שהרי $\alpha \perp 0$ לכל $\alpha \in V$.

ב) אם $\beta,\gamma \in A^\perp$ אז לכל $\alpha \in A$ $\langle \alpha,\beta\rangle = \langle \alpha,\gamma\rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle \alpha, \beta+\gamma\rangle = 0 \Rightarrow \beta+\gamma \in A^\perp$$

ג) אם $\beta \in A^\perp$, $c \in F$ אז לכל $\alpha \in A$

$$\langle c\beta,\alpha\rangle = c\langle \beta,\alpha\rangle = c\cdot 0 = 0 \Rightarrow c\beta \in A^\perp$$

☺

טענה: $A^{\perp} = (\mathrm{Sp}A)^{\perp}$

הוכחה: אם $\beta \in A^{\perp}$ אז לכל $\alpha \in A$ $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. יהי
$\gamma \in \mathrm{Sp}A$ אז $\gamma = \sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i$ כאשר $\alpha_i \in A$.

$$\Rightarrow \langle \gamma, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle \alpha_i, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{k} 0 = 0$$

$\Leftarrow$ $\beta \in (\mathrm{Sp}A)^{\perp}$. $\Leftarrow$ $A^{\perp} \subseteq (\mathrm{Sp}A)^{\perp}$.

אם $\beta \in (\mathrm{Sp}A)^{\perp}$ אז לכל $\alpha \in \mathrm{Sp}A$ $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$
אבל כל וקטור ב- A נמצא ב- $\mathrm{Sp}A$. לכן לכל וקטור
$\alpha \in A$ $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. לכן $\beta \in A^{\perp}$. $\Leftarrow$ $(\mathrm{Sp}A)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$
$\Leftarrow$ $A^{\perp} = (\mathrm{Sp}A)^{\perp}$ ☺

דבר חשוב: אם $A \subseteq B$ אז $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

הוכחה: יהי $\gamma \in B^{\perp}$. אזי לכל $\beta \in B$ $\langle \gamma, \beta \rangle = 0$.
אבל כל $\alpha \in A$ הוא גם $\alpha \in B$. $\Leftarrow$ $\langle \gamma, \alpha \rangle = 0$
$\Leftarrow$ $\gamma \in A^{\perp}$. $\Rightarrow$ $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$ ☺

הגדרה: סדרת וקטורים $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ ב- V נקראת
מערכת אורתונורמלית אם $\delta_{ij} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$
שפה אומר שהנורמה של כולם היא 1 וכל שניים מאונכים.
מערכת אורתונורמלית שהיא בסיס אורתונורמלי.

נסתכל ב- $\mathbb{R}^n$ (או ב- $\mathbb{C}^n$) עם המכפלה הפנימית הרגילה.
הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס אורתונורמלי.

תהי $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ מערכת אורתונורמלית ויהי α וקטור שהוא
צירוף לינארי שלה. $\alpha = \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i$. אז לכל i $a_i = \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle$
כלומר $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

הוכחה: $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_k \varepsilon_k$

$$\Rightarrow \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = a_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = a_i$$

מסקנה: $\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$

הכללה של פיתגורס: $\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i$$

$$\underline{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i , \sum_{i=1}^{k} a_i \varepsilon_i \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \langle a_i \varepsilon_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \overline{a_i} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = \underline{\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$$

<u>משפט:</u> כל מערכת אורתונורמלית היא בלתי תלויה.

<u>הוכחה:</u> תהי $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ מערכת אורתונורמלית. נניח ש-

$$a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_k \varepsilon_k = 0$$

נוכיח ש- $a_1 = \dots = a_k = 0$

$$0 = a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_k \varepsilon_k$$

לפי מה שלמדנו $a_1 = \langle 0, \varepsilon_1 \rangle = 0$

$\vdots$

$a_k = \langle 0, \varepsilon_k \rangle = 0$

מבוא לשרטבני
המן אינם יכולים
להיות בסיס למרחב
וקטורי
- משום שהם אינם
בלתי תלויים

11

<u>למה:</u> תהי $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k)$ מערכת אורתונורמלית ב-V.
יהי $\alpha \in V$ ויהי $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$. אזי

א) γ ניצב ל- $Sp\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$

ב) $\|\gamma\|^2 = \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$

<u>הוכחה:</u>

א) לפי טענה קודמת די להראות ש- ε_j ניצב לכל j.

$$\langle \gamma, \varepsilon_j \rangle = \left\langle \alpha - \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i , \varepsilon_j \right\rangle =$$

$$= \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i , \varepsilon_j \right\rangle =$$

$$= \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i , \varepsilon_j \rangle = \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle =$$

$$= \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \delta_{ij} = \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle = 0$$

ב) $\|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \left\langle \alpha - \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 , \alpha - \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 \right\rangle =$

$$= \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$$

11

אורי פתשת
סוגריים

תזכורת:

תהי $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ מערכת אורתונורמלית ב-V.

(א) לכל $\alpha \in V$ $\sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 \le \|\alpha\|^2$ אי שוויון בסל

(ב) $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ הוא בסיס אמ"מ לכל $\alpha \in V$ הא' שוויון הוא שוויון.

הוכחה:

(א) יהי $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$. לפי הלמה $\|\gamma\|^2 = \|\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 \ge 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 \le \|\alpha\|^2$

(ב) השוויון מתקיים אמ"מ $\gamma = 0$ (לכל $\alpha \in V$) וזה אמ"מ לכל α $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ שזה אומר ש-$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ פורשים את V. ויחד שהם בת"ל המשלים האורתונורמלית. מכאן שזה קורה אמ"מ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ בסיס.

☺

משפט תשוב

יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס של V. אז יש ל-V בסיס אורתונורמלי (ε_i) כך שלכל $1 \le k \le n$ $Sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = Sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

הוכחה: תהליך שנקרא גרם שמידט. באינדוקציה על k:

נתחיל ב-$k=1$. נגדיר $\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$. ברור שמתקיים הדרוש.

נניח שמצאנו את $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ מע' אורתונורמלית כך ש-$Sp(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k) = Sp(\alpha_1 \dots \alpha_k)$. נגדיר $\varepsilon'_{k+1} = \alpha_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \alpha_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

לפי הלמה ε'_{k+1} ניצב ל-$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$.

$\varepsilon'_{k+1} \ne 0$ כי אחרת $\alpha_{k+1} \in Sp\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = Sp(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ וזה לא יתכן כי $\{\alpha_1 \dots \alpha_k, \alpha_{k+1}\}$ בת"ל.

נגדיר $\varepsilon_{k+1} = \frac{\varepsilon'_{k+1}}{\|\varepsilon'_{k+1}\|}$.

נמשיך באינדוקציה עד n ואז נקבל בסיס אורתונורמלי. בגלל התכונות הדרושות.

☺

בוקר טוב!

לכל מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי יש בסיס אורתונורמלי.

נתון במרחב מכפלה פנימית V ויהי $B=\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. יהיו $\alpha,\beta\in V$. אז מה $\langle\alpha,\beta\rangle$?

מאחר ש- B בסיס נוכל לכתוב את α ו- β:

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i \qquad \beta=\sum_{j=1}^{n}b_j\varepsilon_j$$

$$\Rightarrow \langle\alpha,\beta\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^{n}b_j\varepsilon_j\right\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i\left\langle\varepsilon_i,\sum_{j=1}^{n}b_j\varepsilon_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}\overline{b_j}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\overline{b_j}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle\underset{\substack{\text{כל המחברים}\\ \text{עם } i\neq j \text{ מתאפסים}}}{=}\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}\langle\varepsilon_i,\varepsilon_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}$$

הו! זה הנוסחה הפנימית הרגילה שאותנו מכירים מ- $\mathbb{C}^n$. אלא אם אותנו מסתכלים על בסיס אורתונורמלי ומלגיים את הווקטורים בעזרת הקואורדינטות אל המכפלות הפנימיות מלידות.

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד n מעל F. ויהי U תת-מרחב של V, סמן ע"י $U^\perp$ את תת המרחב הניצב ל- U. קוראים לזה המשלים הניצב.

דוגמאות:

- $V^\perp=\{0\}$, $\{0\}^\perp=V$
- ב- $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה:

$$\mathrm{Span}\{(1,0,0)\}^\perp=\mathrm{Span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$$

<u>טענה:</u> יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד n ויהי $U\leq V$.

(א) $U\leq(U^\perp)^\perp$

(ב) $U\cap U^\perp=\{0\}$

(ג) $V=U+U^\perp$

<u>הוכחה:</u>

(א) אם $\alpha\in U$ אז לכל $\beta\in U^\perp$ $\langle\alpha,\beta\rangle=0$. לכן לכל $\beta\in U^\perp$

אתקיים $0=\langle\beta,\alpha\rangle \Leftarrow \alpha\in U^{\perp\perp}$ ומכאן הטענה.

ב) אם $\alpha\in U\cap U^{\perp}$ אז $0=\langle\alpha,\alpha\rangle \Leftarrow \alpha=0$.

ג) יהי $\alpha\in V$. נבחר בסיס אורתונורמלי $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r\}$ ל- U.
נסמן $\beta=\sum_{i=1}^{r}\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$. ברור ש- $\beta\in U$. יהי $\gamma=\alpha-\beta$.
בגלל הבנייה, ראינו בעבר ש- γ ניצב ל- U. לכן $\gamma\in U^{\perp}$. $\alpha=\beta+\gamma$
לכן $\alpha\in U+U^{\perp}$. $\Leftarrow V\subseteq U+U^{\perp}$. ההכלה ההפוכה ברורה.

מסקנה: אם V מרחב מכפלה פנימית ממימד n ו- U תת מרחב שלו אז
$$V=U\oplus U^{\perp}$$

משפט: $U=U^{\perp\perp}$

הוכחה: ראינו ש- $U\subseteq U^{\perp\perp}$. כמו כן אנו יודעים ש- $V=U\oplus U^{\perp}$
ואם $V=U^{\perp}\oplus U^{\perp\perp}$. $\Leftarrow$ $\dim U=n-\dim U^{\perp}$
$\dim U^{\perp\perp}=n-\dim U^{\perp}$
$\Leftarrow \dim U=\dim U^{\perp\perp} \Leftarrow U=U^{\perp\perp}$.

מרחבים דואליים

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F. פונקציונל לינארי הוא פונקציה $\varphi:V\to F$ שמקיימת לכל $\alpha,\beta\in V$ ולכל $a\in F$:
$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$$
$$\varphi(a\alpha)=a\varphi(\alpha)$$
למעשה פונקציונל לינארי הוא טרנספורמציה לינארית מ- V ל- F, כלומר מ- V למרחב בעל מימד 1. פונקציונל לינארי הוא למעשה מקיים את כל התכונות של טרנספורמציה לינארית.

דוגמאות:

א) פונקציונל האפס - לכל $\alpha\in V$ $\varphi(\alpha)=0$.

ב) יהי V מרחב הפולינומים מעל השדה F ויהי $a\in F$. אז $\varphi(p(x))=p(a)$ הוא פונקציונל לינארי.

ה) יהי V מרחב וקטורי מעל F מימד n ויהי $\mathcal{B}$ בסיס שלו. יהיו $a_1,\dots,a_n$ איברים של F. $\varphi(\alpha)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$ כאשר $(x_1,\dots,x_n)=[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

<u>משפט:</u> יהי $\mathcal{B}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ בסיס של V ויהיו $a_1,\dots,a_n\in F$. קיים פונקציונל לינארי אחד ויחיד φ כך שלכל $1\le i\le n$ $\varphi(\alpha_i)=a_i$.

<u>הוכחה:</u> יהי $\alpha\in V$. יש לו הצגה יחידה $\alpha=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i$. נגדיר

$$\varphi(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}b_ia_i$$

ההמשך הוא בדיוק כמו בהוכחה הקודמת בטרנספורמציות לינאריות. ☺

קבוצת הפונקציונלים הלינאריים על V מרחב וקטורי מעל F הוא מרחב פרטי של מרחב הה"ל. מרחב זה נקרא המרחב הדואלי ל-V ונסמן V^*. אם $\dim V=n$ מהו $\dim V^*$?

ידוע ש- $\dim \mathrm{Hom}(V,W)=\dim V\cdot\dim W$. $\Leftarrow$ $\dim V^*=n$

שהרי $V^*=\mathrm{Hom}(V,F)$ ו- $\dim_F F=1$.

יהי $\mathcal{B}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ בסיס של V. נבנה בסיס של V^* שיקרא הבסיס הדואלי ל- $\mathcal{B}$ ויסומן $\mathcal{B}^*$.

לכל $1\le i\le n$ יהי β_i הפונקציונל הלינארי היחיד שמעביר את α_i ל- 1 ואת יתר ה- α_jים ל- 0.

$$\mathcal{B}^*=\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$$

הוא בסיס של V^* ונקרא הבסיס הדואלי ל- $\mathcal{B}$. נבדוק הראות שזה בסיס צריך להראות שהוא בת"ל. נניח ש-

$$a_1\beta_1+\dots+a_n\beta_n=0$$

נציב α_1 ונקבל $0=a_1\beta_1(\alpha_1)+\dots+a_n\beta_n(\alpha_1)=a_1\beta_1(\alpha_1)=a_1$

באותו אופן נקבל שלכל $a_i=0$.

$\Leftarrow$ $\beta_1,\dots,\beta_n$ בת"ל $\Leftarrow$ $\mathcal{B}^*$ בסיס ל- V^*.

עוד דוגמה: יהי V מרחב מרכזה פנימית ויהי β וקטור קבוע ב-V.
לכל α ב-V נגדיר $\psi(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$. ψ פונקציונל לינארי
בגלל הלינאריות והדואליות של המכפלה הפנימית.

בדומה נשים אשואה לינארית $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ (*)
ההיטוי (*) הוא פונקציונל לינארי של F^n.
אם מסתכלים במרחב מרכזה פנימית אמיתי n אז $\psi(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$
גם הדוגמה הכללית ביותר לפונקציונל.

דיברנו על פונקציונלים לינאריים. ראינו שאם V מרחב בעל מימד סופי, אז הפונקציונלים הלינאריים עליו הם מרחב מעל F שיסומן V^* ומתקיים $\dim V = \dim V^*$. V^* יקרא המרחב הדואלי.

בהינתן בסיס B של V אז אנו ל-V^* בסיס B^* (להלן הבסיס הדואלי ל-B): אם $B=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ אז $B^*=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ כך ש $\varphi_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$. (ראינו שיש פונקציונל יחיד שמקיים זאת).

ראינו גם שאם $\beta\in V$ אז $\varphi(\alpha)=\langle\alpha,\beta\rangle$ הוא פונקציונל לינארי.

<u>תרגיל</u>: הוכח שאם $0\neq\alpha\in V$ אז קיים פונקציונל לינארי φ כך ש- $\varphi(\alpha)\neq 0$. נסתכל בפונקציונל $\varphi(\gamma)=\langle\gamma,\alpha\rangle$ ואז $\varphi(\alpha)=\langle\alpha,\alpha\rangle>0$.

<u>טענה</u>: כל פונקציונל לינארי הוא מהצורה $\varphi(\alpha)=\langle\alpha,\beta\rangle$ ראשר β וקטור קבוע.

<u>הוכחה</u>: יהי $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ בסיס אורתונורמלי. נסתכל בפונקציונלים הלינאריים $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ כך שלכל i $\varphi_i(\alpha)=\langle\alpha,\varepsilon_i\rangle$.

$(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ זה הבסיס הדואלי. כל פונקציונל הוא מהצורה $\varphi=a_1\varphi_1+\dots+a_n\varphi_n$ ולכן

$$\varphi(\alpha)=a_1\langle\alpha,\varepsilon_1\rangle+\dots+a_n\langle\alpha,\varepsilon_n\rangle=$$
$$=\langle\alpha,\bar{a}_1\varepsilon_1\rangle+\dots+\langle\alpha,\bar{a}_n\varepsilon_n\rangle=$$
$$=\langle\alpha,\bar{a}_1\varepsilon_1+\dots+\bar{a}_n\varepsilon_n\rangle$$

לצורך הלינארי $\bar{a}_1\varepsilon_1+\dots+\bar{a}_n\varepsilon_n$ נקרא β. וכלומר $\varphi(\alpha)=\langle\alpha,\beta\rangle$.

היתה תקופה שהגירים היו נושים נוראים. אבל זה היה ושהיתי יותר נמוך

☺

טרנספורמציה לינארית במרחבי מכפלה פנימית

יהי V מרחב מכפלה פנימית בעל מימד סופי. לכל $\alpha,\beta\in V$ נסתכל במכפלה הפנימית $\langle T\alpha,\beta\rangle$ כאשר $T:V\to V$ ט"ל.
$\langle T\alpha,\beta\rangle$ זה סקלר ותכונות כגון נקראות התכונות הבילינארית המגדירות ע"י T.

למה 1:

א) $\langle T(\alpha_1+\alpha_2),\beta\rangle=\langle T\alpha_1,\beta\rangle+\langle T\alpha_2,\beta\rangle$

ב) $\langle T\alpha,\beta_1+\beta_2\rangle=\langle T\alpha,\beta_1\rangle+\langle T\alpha,\beta_2\rangle$

ג) $\langle T(a\alpha),\beta\rangle=a\langle T\alpha,\beta\rangle$

ד) $\langle T\alpha,b\beta\rangle=\bar{b}\langle T\alpha,\beta\rangle$

הוכחה: טריוויאלי.

למה 2א': אם $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle$ לכל α אז $\beta=\gamma$

ואם אפילו זה אם לכל α $\langle\gamma,\alpha\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$ אז $\gamma=\beta$

הוכחה: אם התנאי מתקיים אז $\langle\alpha,\beta\rangle-\langle\alpha,\gamma\rangle=0$
לכן $\langle\alpha,\beta-\gamma\rangle=0$ וזה נכון לכל α. לכן $\langle\beta-\gamma,\beta-\gamma\rangle=0$
לכן $\beta-\gamma=0$, כלומר $\beta=\gamma$. ☺

למה 2ב': אם T,S ט"ל ו- $\langle T\alpha,\beta\rangle=\langle S\alpha,\beta\rangle$ לכל α,β אז $T=S$.

הוכחה: לפי למה 2א' לכל α $T\alpha=S\alpha$ ולכן $T=S$. ☺

למה 2ג': אם $\langle T\alpha,\beta\rangle=0$ לכל α,β אז $T=0$.

הוכחה: זה מקרה פרטי של למה 2ב', כאשר $S\equiv 0$. ☺

הטרנספורמציה הצמודה:

משפט: לכל ט"ל T יש ט"ל יחידה T^* שמקיימת שלכל α,β
$$\langle T\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,T^*\beta\rangle$$

T^* נקראת הט"ל הצמודה ל- T.

הוכחה:

* יחידות: נניח ש- S_1, S_2 מ"ל כך שלכל α, β
$\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, S_1\beta\rangle$ ו- $\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, S_2\beta\rangle$
אז $\langle \alpha, S_1\beta\rangle = \langle \alpha, S_2\beta\rangle$. לכן לפי למה 2 ב' $S_1\beta = S_2\beta$
ולכן $S_1 = S_2$. $\Leftarrow$ ישלל היותר טרנספורמציה המוגדרת אותה.

* קיום: נגדיר את $T^*\beta$ לכל $\beta \in V$ בצורה הבאה:
לכל $\beta \in V$ נגדיר פונקציונל לינארי $\psi_\beta(\alpha) = \langle T\alpha, \beta\rangle$. קל
לראות שזה פונקציונל לינארי. לפי טענה קודמת קיים β'
כך שלכל α $\psi_\beta(\alpha) = \langle \alpha, \beta'\rangle$. β' נקבע באופן יחיד
ע"י β בגלל למה ב' ב': אם $\langle \alpha, \beta'\rangle = \langle \alpha, \beta''\rangle$ לכל α, אז
$\beta' = \beta''$. נגדיר $T^*\beta = \beta'$. נראה ש- T^* מ"ל:
לכל α, β_1, β_2:

$$\langle \alpha, T^*(\beta_1+\beta_2)\rangle = \langle T\alpha, \beta_1+\beta_2\rangle =$$
$$= \langle T\alpha, \beta_1\rangle + \langle T\alpha, \beta_2\rangle = \langle \alpha, T^*\beta_1\rangle + \langle \alpha, T^*\beta_2\rangle =$$
$$= \langle \alpha, T^*\beta_1 + T^*\beta_2\rangle$$

מאחר שזה נכון לכל α, לפי למה ב' ב' $T^*(\beta_1+\beta_2) = T^*\beta_1 + T^*\beta_2$
$\Leftarrow$ T^* שומרת על סכום.
לכל α, β, a

$$\langle \alpha, T^*a\beta\rangle = \langle T\alpha, a\beta\rangle = \bar{a}\langle T\alpha, \beta\rangle =$$
$$= \bar{a}\langle \alpha, T^*\beta\rangle = \langle \alpha, \bar{\bar{a}}T^*\beta\rangle = \langle \alpha, aT^*\beta\rangle$$

מאחר שזה נכון לכל α, לפי למה ב' ב' $T^*a\beta = aT^*\beta$
$\Leftarrow$ T^* שומרת על כפל בסקלר.
$\Leftarrow$ T^* לינארית.

☺

משפט:
א. $(T+S)^* = T^* + S^*$
ב. $(aT)^* = \bar{a}T^*$
ג. $(TS)^* = S^*T^*$
ד. $(T^*)^* = T$

הוכחה:

(א) $\langle \alpha, (T+S)^*\beta \rangle = \langle (T+S)\alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha + S\alpha, \beta \rangle =$

$= \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle S\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle + \langle \alpha, S^*\beta \rangle =$

$= \langle \alpha, T^*\beta + S^*\beta \rangle = \langle \alpha, (T^*+S^*)\beta \rangle$

לכל נתון α, β $\Leftarrow$ לפי למה 2 ב' $(T+S)^*\beta = (T^*+S^*)\beta$

$\Leftarrow$ $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(ב) $\langle \alpha, \bar{a}T^*\beta \rangle = \bar{\bar{a}} \langle \alpha, T^*\beta \rangle = a \langle T\alpha, \beta \rangle =$

$= \langle aT\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, (aT)^*\beta \rangle$

ולכן כמו בסעיף הקודם מלמה 2 ב' $\bar{a}T^*\beta = (aT)^*\beta$

$\Leftarrow$ $(aT)^* = \bar{a}T^*$

(ג) $\langle \alpha, (TS)^*\beta \rangle = \langle TS\alpha, \beta \rangle = \langle T(S\alpha), \beta \rangle =$

$= \langle S\alpha, T^*\beta \rangle = \langle \alpha, S^*T^*\beta \rangle$

וכמו בפעמים הקודמות (נתון ש- $(TS)^* = S^*T^*$)

(ד) $\langle \alpha, (T^*)^*\beta \rangle = \langle T^*\alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, T^*\alpha \rangle} =$

$= \langle T\beta, \alpha \rangle = \overline{\langle \alpha, T\beta \rangle} = \langle \alpha, T\beta \rangle$

$\Leftarrow$ כמו בפעמים הקודמות $T^{**} = T$

(:)

מהמשפט הקודם:

(א) $(T+S)^* = T^* + S^*$

(ב) $(aT)^* = \bar{a}T^*$

(ג) $(TS)^* = S^*T^*$

(ד) $T^{**} = T$

(ה) תוספת: ההעתקה $T \mapsto T^*$ היא העתקה חח"ע מ- $Hom(V,V)$ לעצמו. מדוע? לפי: כל טל"ל T הוא הצמודה של T^* (לפי ד'). חח"ע: אם $T^* = S^*$ אז $T = T^{**} = S^{**} = S$.

משפט: תהי $T: V \to V$ טל"ל. T^* הטרנס הצמוד. יהי $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ בסיס אורתונורמלי של V ותהיינה $A = (a_{ij})$! $A^* = (a_{ij}^*)$ המטריצות של T ושל T^* מהתאמה לפי בסיס זה. אז $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$.

הוכחה: a_{ij} היא הקואורדינטה ה-i בפיתוח של הוקטור $T\varepsilon_j$ בבסיס $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. לכן $a_{ij} = \langle T\varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle$. באותו אופן $a_{ij}^* = \overline{\langle T^*\varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle}$. אבל:

$$\langle T^*\varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle = \langle \varepsilon_j, T\varepsilon_i \rangle = \overline{\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

$\Leftarrow$ $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$. (א)

הגדרה: אם $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ אז המטריצה הצמודה ל-A שנסמנה ב- A^* היא $A^* = (a_{ij}^*)$ (כלומר $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$).

כלומר $A^* = \overline{A^t}$ ואם $F = \mathbb{R}$ אז $A^* = A^t$.

רפי שראינו, לטרנספורמציה הצמודה לפי בסיס אורתונורמלי מתאימה המטריצה הצמודה. כלומר אם A מייצגת את T לפי בסיס אורתונורמלי אז A^* מייצגת את T^* לפי אותו בסיס.

אנסמבל רמיות עצמיות עצמן

הגדרה: T תיקרא עצמה לעצמה אם $T^* = T$.

T עצמה לעצמה אמ"מ לכל α, β $\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T\beta\rangle$.

למה? $\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T^*\beta\rangle$

אם $\langle \alpha, T^*\beta\rangle = \langle \alpha, T\beta\rangle$ לכל α, β אז $T = T^*$. הכיוון השני ברור.

במרחב אוקלידי טרנספורמציה עצמה לעצמה נקראת סימטרית. (כי אז המטריצה שמייצגת אותה היא סימטרית).
במרחב מעל $\mathbb{C}$ היא נקראת הרמיטית (ע"ש הרמיט).

הגדרה: מטריצה מעל $\mathbb{R}$ נקראת סימטרית אם $A^T = A$.
מטריצה מעל $\mathbb{C}$ נקראת הרמיטית אם $\overline{A^T} = A$.

דבר הלמד מזניחו הוא שאם A מייצגת את T בבסיס אורתונורמלי מסוים, אז T טרנס סימטרית (הרמיטית) אם A סימטרית (הרמיטית).

יש הקבלה מסוימת בין הטרנספורמציות למרוכבים.
$T \mapsto T^*$ ל- $z \to \bar{z}$. לאשר $T^{**} = T$ וגם $\bar{\bar{z}} = z$.
בהקבלה זו הטרנס הצמודות לעצמן מתאימות למספרים הממשיים.

הנה עוד הקבלה יפה: אם $z = x + iy$ אז $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ל- $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. מה קורה בטל?
נסתכל בטל T ובשני הטל $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$
שתי אלה צמודות לעצמן. וברור ש- $T = T_1 + iT_2$.

טענה:
קבוצת הטרנס הצמודות לעצמן סגורה לחיבור ולכפל בסקלר ממשי.

הוכחה: יהיו $T=T^*$, $S=S^*$, $c\in\mathbb{R}$ אז

$$(T+S)^* = T^*+S^* = T+S$$
$$(cT)^* = \bar{c}\,T^* = cT$$

☺

לעומת זאת אם $c\notin\mathbb{R}$. למשל I צמודה לעצמה, אבל $(iI)^* = \bar{i}\,I^* = -iI$

למה: (תשלבה) אם T צמודה לעצמה ולכל α $\langle T\alpha,\alpha\rangle=0$ אז $T=0$.

הוכחה: אם T צמודה לעצמה ומקיימת את התנאי אז לכל $\alpha,\beta\in V$ מתקיים

$$0=\langle T(\alpha+\beta),\ \alpha+\beta\rangle = \langle T\alpha,\alpha\rangle+\langle T\beta,\beta\rangle + \langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle$$
$$\Rightarrow\quad 0=\langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle$$

עשה ההוכחה מתפצלת לשניים:

(א) $F=\mathbb{R}$ אז

$$0=\langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle=\langle\alpha,T^*\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle = \langle\alpha,T\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle = 2\langle\alpha,T\beta\rangle$$
$$\Leftarrow\quad \langle\alpha,T\beta\rangle=0 \quad\Leftarrow\quad T=0.$$

(ב) $F=\mathbb{C}$. הקודם מקבלים ש- $(1)\ \langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle=0$

כמו כן לכל α,β מתקיים $0=\langle T(i\alpha+\beta),\ i\alpha+\beta\rangle$

נפתח אגף ונקבל

$$0=\langle Ti\alpha,i\alpha\rangle+\langle T\beta,\beta\rangle+\langle Ti\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,i\alpha\rangle$$

לכן $\langle Ti\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,i\alpha\rangle=0$ כלומר $i\langle T\alpha,\beta\rangle+\bar{i}\langle T\beta,\alpha\rangle=0$

כלומר $i(\langle T\alpha,\beta\rangle-\langle T\beta,\alpha\rangle)=0 \Leftarrow \langle T\alpha,\beta\rangle-\langle T\beta,\alpha\rangle=0$

ובאופן ש- $\langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle=0 \Leftarrow \langle T\alpha,\beta\rangle=0$ לכל $\alpha\beta$ $\Leftarrow T=0$ (ב)

נשים לב שבמקרה ש- $F=\mathbb{C}$ לא הסתמכנו על כך ש- T צמודה לעצמה. לכן מקבלים

<u>תוצאה:</u> אם $T:V\to V$ המקיימת לכל $\alpha\in V$ $\langle T\alpha,\alpha\rangle=0$ ו- V מעל $\mathbb{C}$ אז $T=0$.

<u>משפט:</u> יהי V מרחב אוניטרי (מרחב מ"פ על $\mathbb{C}$). $T:V\to V$ צמודה לעצמה אזי $\langle T\alpha,\alpha\rangle$ ממשי לכל $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה:</u> אם T צמודה לעצמה ו- $\alpha\in V$ אז

$$\langle T\alpha,\alpha\rangle = \langle \alpha, T\alpha\rangle = \langle T\alpha,\alpha\rangle$$

$\Leftarrow$ $\langle T\alpha,\alpha\rangle\in\mathbb{R}$.

אם לכל α, $\langle T\alpha,\alpha\rangle$ ממשי אז $\langle T\alpha,\alpha\rangle=\overline{\langle T\alpha,\alpha\rangle}$.

$$\langle (T-T^*)\alpha,\alpha\rangle = \langle T\alpha,\alpha\rangle - \langle T^*\alpha,\alpha\rangle =$$
$$= \langle T\alpha,\alpha\rangle - \langle \alpha, T\alpha\rangle = \langle T\alpha,\alpha\rangle - \overline{\langle T\alpha,\alpha\rangle} = 0$$

$\Leftarrow$ לכל α $\langle (T-T^*)\alpha,\alpha\rangle=0$.

לפי התוצאה $T-T^*=0 \Leftarrow T=T^*$. ☺

<u>תוצאה:</u> אם במרחב אוניטרי T צמודה לעצמה, אז כל ערכיה העצמיים ממשיים.

<u>הוכחה:</u> אם λ ע"ע. יהי $\alpha\neq 0$ כך ש- $T\alpha=\lambda\alpha$.

לכן $\mathbb{R}\ni\langle T\alpha,\alpha\rangle=\langle\lambda\alpha,\alpha\rangle=\lambda\|\alpha\|^2 \Leftarrow \lambda\in\mathbb{R}$. ☺

מראה נקבל: לכל מטריצה הרמיטית כל הערכים העצמיים הם ממשיים.

עוד תוצאה: לכל מטריצה סימטרית מעל $\mathbb{R}$ כל השורשים של הפולינום האופייני הם ממשיים.

התלכ הראשון ברור, והתלכ השני מתקבל מכך שכל מט' סימטרית מעל $\mathbb{R}$ היא הרמיטית ומראה שאם T כ"ל סימטרית אז כל השורשים ממשיים.

<u>הגדרה:</u> כ"ל T נקראת אוניטרית אם היא שומרת על המכפלה הפנימית, כלומר $\langle T\alpha,T\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$

משפט: כל התנאים הבאים שקולים לגבי כלל T:

א) T אוניטרית

ב) לכל $\alpha \in V$ $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$

ג) $T^*T = I$ אם $TT^* = I$.

ד) T מעביר כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי

ה) T מעביר בסיס אורתונורמלי אחד לבסיס אורתונורמלי

הוכחה:

(א ⇐ ב) לכל $\alpha, \beta \in V$ מתקיים $\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$.

⇐ $\|T\alpha\|^2 = \langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle \alpha, \alpha\rangle = \|\alpha\|^2$. בגלל שהנורמה היא מספר חיובי נובע ש- $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$.

(ב ⇐ ג) לכל $\alpha \in V$ מתקיים $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$ ⇐ $\langle T\alpha, T\alpha\rangle = \langle \alpha, \alpha\rangle$

⇐ $\langle \alpha, T^*T\alpha\rangle - \langle \alpha, \alpha\rangle = 0$

⇐ $\langle \alpha, T^*T\alpha - \alpha\rangle = 0$

⇐ $\langle \alpha, (T^*T - I)\alpha\rangle = 0$

נשים ❤ ש- $T^*T - I$ צמודה לעצמה. לאדנו שום S צמודה לעצמה ולכל α $\langle \alpha, S\alpha\rangle = 0$ אז $S = 0$.

לכן $T^*T - I = 0$ כלומר $T^*T = I$. בגלל שאנחנו במרחב סופי לה אז גורר ש- $TT^* = I$.

(ג ⇐ ד) יהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי. נראה שגם $T\varepsilon_1, \dots, T\varepsilon_n$ הוא בסיס אורתונורמלי.

$\langle T\varepsilon_i, T\varepsilon_j\rangle = \langle \varepsilon_i, T^*T\varepsilon_j\rangle = \langle \varepsilon_i, I\varepsilon_j\rangle =$

$= \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \delta_{ij}$

⇐ $T\varepsilon_1, \dots, T\varepsilon_n$ אורתונורמלי.

(ד ⇐ ה) טריוויאלי. יש לנו שני בסיס אורתונורמלי (משום שהמרחב נורמי סופית). ולכן בסיס זה עובר לבסיס אורתונורמלי.

(ה ⇐ א) יהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי העובר ע"י T לבסיס אורתונורמלי. יהיו α, β נראה ש- $\langle T\alpha, T\beta\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$.

נניח ש- $\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i$! - $\beta=\sum_{i=1}^{n} b_i \varepsilon_i$. אז הואיל ויהי בסיס אורתונורמלי אז $\langle \alpha,\beta\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$.

מצד שני $T\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i T\varepsilon_i$! - $T\beta=\sum_{i=1}^{n} b_i T\varepsilon_i$. אבל אם $T\varepsilon_1,\dots,T\varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי. אז

$$\langle T\alpha, T\beta\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} = \langle \alpha,\beta\rangle$$

<u>הגדרה</u>: מטריצה ריבועית A מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ נקראת אוניטרית אם $A^*A=I$. אם השדה הוא $\mathbb{R}$ אז היא נקראת אורתוגונלית.

<u>דוגמה</u>: המטריצה $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ היא אורתוגונלית. זו מטריצת סיבוב בזווית θ סביב הראשית והיא רמיזן משמרת נורמה. $\Leftarrow$ לפי המשפט $A^*A=I$ $\Leftarrow$ היא אורתוגונלית. אבל אפשר גם להראות זאת ישירות ע"י הוצאת מכפלת מטריצות:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כמובן, כל היא אוניטרית (אורתוגונלית) אמ"מ המטריצה שלה לפי בסיס אורתונורמלי מסוים (וכן לפי כל בסיס אורתונורמלי) היא אוניטרית (אורתוגונלית)

<u>תובנה</u>: המטריצה A היא אוניטרית אמ"מ היא מטריצת מעבר בין בסיסים אורתונורמליים, לפי המכפלה הפנימית הרגילה.

<u>טענה</u>: מטריצה A היא אוניטרית אמ"מ עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי של F^n, לפי המכפלה הפנימית הרגילה.

<u>הוכחה</u>: לפי התובנה הקודמת, כי זו מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס הנ"ל.

תרגיל: מטריצה היא אוניטרית אמ"מ שורותיה הן בסיס אורתונורמלי של F^n לפי המכפלה הסטנדרטית הרגילה.

טרנספורמציות שפירות (=נורמליות)

הגדרה: נ"ל T נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.
המטריצה A נקראת נורמלית אם $AA^* = A^*A$.

דוגמה: המטריצה $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ אינה נורמלית:

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix}5&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}10&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix} = A^*A$$

אם שניים הבינים ואחד חלה להגיד לשני שהוא לא נורמלי הוא יכול להגיד - אתה דומה למטריצה $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

הערות:

* כל מטריצה דמוקה עצמית היא נורמלית $TT^* = TT = T^*T$
* כל מטריצה אוניטרית היא נורמלית $TT^* = I = T^*T$

משפט: $T: V \to V$ ויהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי. אם המטריצה של T לפי $e_1, \dots, e_n$ אלכסונית, אז T נורמלית.

הוכחה: נניח ש-T מיוצגת בבסיס $e_1, \dots, e_n$ ע"י המטריצה האלכסונית $A = \begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$. אז T^* מיוצגת ע"י המטריצה האלכסונית $A^* = \begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1&&0\\&\ddots&\\0&&\bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$. לכן $AA^* = A^*A$.
לכן T מיוצגת בבסיס כלשהו ע"י מטריצה נורמלית. לפי טענה שתכף נוכיח, T נורמלית. ☺

טענה: אם T מיוצגת בבסיס האורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ ע"י המטריצה A אז T נורמלית אמ"מ A נורמלית.

הוכחה:

T^* איזומורפיזם לפי יחס A^*. $\Leftarrow$ TT^* איזומורפיזם גם AA^* ו- T^*T איזומורפיזם גם A^*A. אבל אם T נורמלי אז $T^*T=TT^*$ כלומר $A^*A=AA^*$ מהנחה. אשרן הטענה.

מערכים ועד סוף השיעור נניח ש- V מ"ו מעל $\mathbb{C}$

למה: אם T כ"ל נורמלי ו- a ע"ע שהו השיק לוקטור עצמי α. אז $\bar{a}$ הוא ע"ע של T^* השיק ל- a.

הוכחה: $T\alpha = a\alpha$. נראה ש- $T^*\alpha = \bar{a}\alpha$.

טענת עזר: אם N כ"ל נורמלי אז לכל וקטור β מתקיים $\|\beta N^*\| = \|\beta N\|$.

הוכחת טענת העזר:

$$\|N\beta\|^2 = \langle N\beta, N\beta\rangle = \langle \beta, N^*N\beta\rangle =$$
$$= \langle \beta, NN^*\beta\rangle = \langle N^*\beta, N^*\beta\rangle = \|N^*\beta\|^2$$
$$\Leftarrow \|N\beta\| = \|\beta N^*\|.$$

רעת נתבונן בהוכחת הלמה: נסמן ש- $N = T - aI$ היא כ"ל נורמלי. $N^* = T^* - \bar{a}I$. אז

$$(T-aI)(T^*-\bar{a}I) = TT^* - aT^* - \bar{a}T + a\bar{a}I$$
$$(T^*-\bar{a}I)(T-aI) = T^*T - \bar{a}T - aT^* + \bar{a}aI$$

אבל T נורמלי $\Leftarrow TT^*=T^*T \Leftarrow NN^*=N^*N$ כלומר N נורמלי.

לפי הטענה עזר

$$0 = \|(T-aI)\alpha\| = \|(T^*-\bar{a}I)\alpha\|$$

כי זה ע"ע

$\Leftarrow$ $\bar{a}$ ע"ע של T^* השיק ל- α שהרי

אם $\|(T^*-\bar{a}I)\alpha\|=0$ אז $(T^*-\bar{a}I)\alpha=0$

$\Leftarrow T^*\alpha - \bar{a}\alpha = 0 \Leftarrow T^*\alpha = \bar{a}\alpha$.

$T\alpha = a\alpha$

$\Downarrow$

$T\alpha - a\alpha = 0$

$(T-aI)\alpha = 0$

$\Downarrow$

$\|(T-aI)\alpha\| = 0$

טענה: אם T נורמלית אז כל שני וקטורים עצמיים השייכים לע"ע שונים הם ניצבים זה לזה.

הוכחה: מה שקיבלנו להוכיח הוא שלכל a, b ע"ע שונים ו- α, β ו"ע השייכים להם בהתאמה, אז $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

$$a\langle \alpha, \beta \rangle = \langle a\alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle =$$
$$= \langle \alpha, T^*\beta \rangle = \langle \alpha, \bar{b}\beta \rangle = b\langle \alpha, \beta \rangle$$

אבל $\alpha \neq \beta$. $\Leftarrow$ $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. ☺

טענה: אם V אינו מרחב האפס אז לכל ט"ל T יש ו"ע אחד לפחות.

הוכחה: $\dim V \geq 1$, לכן המשוואה של הפולינום האופיני היא 1 לפחות, לכן לפי המשפט היסודי של האלגברה יש לו שורש ולכל שורש הוא ע"ע. אז יש ל-T ע"ע ולכן יש לה ו"ע. ☺

משפט: יהי V מרחב אוניטרי, $T: V \to V$ ט"ל נורמלית. אז יש ל-V בסיס אג"נ שלפיו המטריצה היא אלכסונית.

<u>תזכורת</u>

- V מ"ו מעל F. V^* המרחב הדואלי הוא $V^*=Hom(V,\mathbb{R})$.
אם $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בסיס של V יש בסיס דואלי של V^* והוא $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ כך שמתקיים $\varphi_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$

- אם V מ"ו מעל F ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בסיס של V אז הבסיס הדואלי ל- $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ב- V הוא $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ כך שמתקיים $\langle\gamma_i,\alpha_j\rangle=\delta_{ij}$

התחלנו ללמוד על <u>טרנספורמציות לא אריות נורמליות</u>. אלה טל שמקיימות $TT^*=T^*T$.

* אם T ניתנת לאלכסון אי בסיס אורתונורמלי, אז T נורמלית. ההוכחה היתה פשוטה מאוד. שהרי, לפי הבסיס הזה המטריצה היא אלכסונית. וכמובן מטריצה אלכסונית היא נורמלית $\Leftarrow$ T נורמלית.

<u>משפט</u>: אם T נורמלית אז יש בסיס אורתונורמלי ל- V שכולו וקטורים עצמיים. כלומר, לפי בסיס זה המטריצה המייצגת את T היא אלכסונית.

<u>הוכחה</u>: יהיו $a_1,\dots,a_k$ הע"ע של T ! $n\le k$. לכל $1\le i\le k$ יהי V_i המרחב העצמי של a_i.
לכל V_i נמצא בסיס אורתונורמלי (אי אלגם שמידט).
יהי $B=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ איחוד הבסיסים הללו. נסמן $U=Sp\,B$.
U הוא תת מרחב של V וקל לראות ש- B בסיס אורתונורמלי שלו, משום שבט"ל נורמלית וע"ע השייכים לע"ע שונים ניצבים זה לזה.
אבל בסיס אורתונורמלי של U שם אי בריו וע"ע של T. אבל יצאנו ש- $U=V$ הבעיה הייתה ופתרת. אבל נראה ש- $U=V$ אי שנראה $U^\perp=\{0\}$

נראה קודם ש- $T(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$, כלומר ש- $U^{\perp}$ תת מרחב אינוריאנטי ל-T. יהי $\beta \in U^{\perp}$. אז לכל $\alpha \in U$ $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.
בפרט לכל α_j $\langle \alpha_j, \beta \rangle = 0$. נסתכל ב- $T\beta$:
$\langle \alpha_j, T\beta \rangle = \langle T^*\alpha_j, \beta \rangle$. α_j ו"ע של T^* (כי T נורמלי)
לכן קיים סקלר c כך ש- $T^*\alpha_j = c\alpha_j$. מקבלים
$\langle \alpha_j, T\beta \rangle = \langle T^*\alpha_j, \beta \rangle = \langle c\alpha_j, \beta \rangle =$
$= c\langle \alpha_j, \beta \rangle = 0$

לכן לכל $\alpha_j \in B$ $\langle \alpha_j, T\beta \rangle = 0$. אבל B בסיס של U, לכן לכל $\alpha \in U$ $\langle \alpha, T\beta \rangle = 0$. לכן $T\beta \in U^{\perp}$.
קיבלנו לכל $\beta \in U^{\perp}$ שאם $T\beta \in U^{\perp}$ $\Leftarrow$ $U^{\perp}$ T-אינוריאנטי.

נוכיח ש- $U^{\perp} = \{0\}$. אם לא, היינו מקבלים $\dim U^{\perp} > 0$
תהי T' הצמצום של T ל-$U^{\perp}$. אז T' כ"ל מ- $U^{\perp}$ ל-$U^{\perp}$ (בגלל ה- T אינוריאנטיות). ל-T יש ו"ע אחד לפחות (כי אנחנו מעל $\mathbb{C}$). לכן יש לו ו"ע β ב- $U^{\perp}$.
β ו"ע של T.
מצד אחד $\beta \in U^{\perp}$. מצד שני β ו"ע של T. לכן $\beta \in U$
ולכן $\beta \in U \cap U^{\perp}$ $\Leftarrow$ $\beta \in \{0\}$ $\Leftarrow$ $\beta = 0$ בסתירה
לכך ש- β ו"ע, לכן $U^{\perp} = \{0\}$ $\Leftarrow$ $V = U$.

<u>תוצאה</u>: בתנאי המשפט יש ל-V בסיס אורתונורמלי שלפיו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

משפט: יהי V מרחב אוקלידי (כלומר מעל $\mathbb{R}$) מימד סופי $n > 0$. ותהי $T: V$ כ"ל סימטרית (צמודה לעצמה).
אז יש ל-V בסיס אורתונורמלי שכולו ו"ע של T.
כלומר המטריצה המייצגת את T בבסיס זה היא אלכסונית.

הוכחה: T סימטרית, לכן צמודה לעצמה לכן נורמלית.
כמו כן, הוכחנו שכל כ"ל צמודה לעצמה כל שורשי הפולינום האופייני אמשיים. לכן אפשר להשתמש במשפט הבודם (כי המקרה היחיד שבו השתמשנו בכך שהמרחב הוא מעל $\mathbb{C}$ הוא בדיוק שיש ע"ע ואין לה נשמן גם כן). (!!)

משפט: תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נורמלית. אז קיימת מטריצה אוניטרית $U \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש- $U^{-1}AU$ אלכסונית.
כלומר U^*AU אלכסונית.

הוכחה: A מטריצה נורמלית לכן היא מייצגת כ"ל נורמלית T לפי הבסיס אז כלשהו. לפי משפט קודם קיים בסיס אורתונורמלי שלפיו המטריצה של T היא אלכסונית. תהי U מטריצת המעבר מהבסיס הראשון לבסיס השני. אז U אוניטרית.
המטריצה של T לפי הבסיס החדש היא $U^{-1}AU$.
מצד שני אנו יודעים שהמטריצה לפי הבסיס החדש היא אלכסונית. לכן $U^{-1}AU$ אלכסונית. (!!)

משפט יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי n ותהי $T: V \to V$ כ"ל נורמלית.
(א) T צמודה לעצמה אמ"מ כל שורשי הפולינום האופייני אמשיים.
(ב) T אוניטרית אמ"מ כל שורשי הפולינום האופייני הם בעלי ערך מוחלט 1.

הוכחה נבחר בסיס אורתונורמלי שלפיו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ובדומה ש $a_1, \dots, a_n$ הע"ע.

(א) T צמודה עצמית $\Longleftrightarrow$ A צמודה עצמית

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \forall 1 \le i \le n \quad a_i = \bar{a}_i$

$\Longleftrightarrow \forall 1 \le i \le n \quad a_i \in \mathbb{R}$.

(ב) T אוניטרית $\Longleftrightarrow$ A אוניטרית $\Longleftrightarrow A^{-1} = A^*$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{a}_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \forall 1 \le i \le n \quad a_i^{-1} = \bar{a}_i$

$\Longleftrightarrow \forall 1 \le i \le n \quad 1 = \bar{a}_i \cdot a_i \Longleftrightarrow \forall 1 \le i \le n \quad |a_i|^2 = 1$

$\Longleftrightarrow \forall 1 \le i \le n \quad |a_i| = 1$

☺

(62) 14.6.06
יום שני

הוכחה טובה

טענה: אם הט"ל U (אוניטרית), H (הרמיטית) מקיימות $HU = UH$ אז המכפלה HU נורמלית.

הוכחה:

* הרמיטית - $T = T^*$
* אוניטרית - $T^*T = I$
* נורמלית $T^*T = TT^*$

} הגדרות

* לכל טענה עם $\mathbb{R}$ מתאים

מהנתונים מקבלים ש- $UU^* = U^*U$ ועם $HU^* = U^*H$.
הראשון, כי כל ט"ל אוניטרית היא גם נורמלית והשני כי

$$(HU)^* = U^*H^* = U^*H$$
$$(UH)^* = H^*U^* = HU^*$$

עתה נראה ש- HU נורמלית:

$$(HU)(HU)^* = HUU^*H^* = HUU^*H = HU^*UH = HU^*H^*U = (HU)^*HU$$

טענה: לכל ט"ל נורמלית T קיימות ט"ל הרמיטית H וט"ל אוניטרית U כך ש- $HU = UH$ ו- $T = UH$.

הוכחה: יהי נתון בסיס אורתונורמלי ש המרחב שלפיו T מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית $D = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}$.
כל מספר מרוכב z ניתן להצגה באופן הבא:
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ כאשר θ הארגומנט

* לכל כיוון מתאים

לכן לכל $1 \le k \le n$ $z_k = |z_k| \cdot a_k$ כאשר $|a_k| = 1$.
נגדיר $A = \begin{pmatrix} |z_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |z_n| \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k \end{pmatrix}$. ברור ש- $D = AB$.
A נורמלית בכל מטריצה אלכסונית. כל הערכים הם ממשיים
לכן A הרמיטית. B נורמלית וכל הערכים העצמיים לכן מתלטים 1
לכן היא אוניטרית. וכן $AB = BA$. הט"ל T
מיוצגת בבסיס הנתון ע"י $D = AB$.

תהי U ה.ט.ל המוגדרת ע"י B ותהי H ה.ט.ל המוגדרת ע"י A. אז $T=UH=HU$.
H הרמיטית כי A הרמיטית ! U אוניטרית כי B אוניטרית

הערה: לכל ט.ל T קיימת ט.ל הרמיטית H וט.ל אוניטרית U כך ש- $T=HU$. אם כך, הייחוד שם הט.ל הנורמלית הוא ש- $HU=UH$. ההוכחה קשה ולכן נדלג אותה.

בדרך סימנו עם טרנספורמציות נורמליות.
נשב רשדות כלליים.

תבניות בי-לינאריות

הגדרה: יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל F. פונקציה $f: V\times W \to F$ תיקרא תבנית בי-לינארית אם לכל $\alpha,\alpha'\in V$, $\beta,\beta'\in W$, $a,b\in F$ מתקיים:

1) $f(\alpha+\alpha',\beta) = f(\alpha,\beta)+f(\alpha',\beta)$
2) $f(\alpha,\beta+\beta') = f(\alpha,\beta)+f(\alpha,\beta')$
3) $f(a\alpha,\beta) = a f(\alpha,\beta)$
4) $f(\alpha,b\beta) = b f(\alpha,\beta)$

אם $V=W$ נאמר ש- f תבנית בילינארית של V.

דוגמאות:

א) פונקציה האפס היא תבנית בי-לינארית - ברור!
ב) המכפלה הסקלרית במרחב אוקלידי היא תבנית בי-לינארית של המרחב.
ג) יהי V מרחב ויהי V^* המרחב הדואלי. לכל $\alpha\in V$! $\varphi\in V^*$ נגדיר $f(\alpha,\varphi)=\varphi(\alpha)$

ג) אם V, W מרחבים ! - $\varphi \in V^*$, $\psi \in W^*$.
לכל $\alpha \in V$, $\beta \in W$ נגדיר $f(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha)\psi(\beta)$

נקבל תבנית בי-לינארית חשובה במיוחד: תהי $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(F)$.
נגדיר $f: F^m \times F^n \longrightarrow F$ כך: אם α וקטור שורה
ב- F^m ו- β וקטור שורה ב- F^n אז
$$f(\alpha,\beta) = \alpha A \beta^t$$
כו תבנית בי לינארית והתכונות הנלוות מתכונות חבור וכפל
של מטריצות.

למה כו תבנית בי לינארית חשובה במיוחד (בניגוד לשאר
הדברים שלמדים בקורס)? - במרחבים סופי מימדיים כל
התבניות הבי-לינאריות הן בסופו של דבר מהצורה הזאת!

<u>הגדרה</u>: יהיו V, W מרחבים בשני מימדים m, n בהתאמה.
תהי $f: V \times W \to F$ תבנית בי-לינארית. נבחר בסיסים
$(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ל- V ! $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ל- W.
המטריצה של f ביחס לבסיסים $\mathcal{A}$ ו- $\mathcal{B}$ היא המטריצה
$$M_{m,n}(F) \ni A = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$$
* במשפט הבא נראה שהתאמה כו בין תבניות למטריצות היא
איזומורפיזם.

<u>טענה</u>: יהי $\alpha \in V$, $\beta \in W$. נסמן את הקואורדינטות
שלהם לפי הבסיסים ב- $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$ בהתאמה. אז
$f(\alpha,\beta) = \underline{x} A \underline{y}^t$ כאשר A המטריצה של f לפי
הבסיסים הנתונים.

<u>הוכחה</u>: $\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i \qquad \beta = \sum_{j=1}^{n} d_j \beta_j$

$\underline{x} = (c_1, \dots, c_m) \qquad \underline{y} = (d_1, \dots, d_n)$

$$f(\alpha,\beta) = f\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} d_j \beta_j\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i f\left(\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} d_j \beta_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} d_j f(\alpha_i, \beta_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} c_i [A \underline{y}^t]_i = \underline{x} A \underline{y}^t$$

☺

טענה: אם אותם סימנים כמו קודם, אם לכל α_i ו- β_j

$f_2(\alpha_i,\beta_j) = f_1(\alpha_i,\beta_j)$ (לפי הנתונים)

(f_1, f_2 תבניות בי-לינאריות) אז $f_1 = f_2$.

הוכחה: יהיו $\alpha \in V$, $\beta \in W$

$$f_1(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} d_i\, f_1(\alpha_i,\beta_j)$$

$$f_2(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} d_i\, f_2(\alpha_i,\beta_j)$$

אבל נתון ש- $f_1(\alpha_i,\beta_j) = f_2(\alpha_i,\beta_j) \Leftarrow f_1(\alpha,\beta) = f_2(\alpha,\beta)$

כלומר $f_1 = f_2$

טענה: יהיו $A,B \in M_{m,n}(F)$. אם לכל $\underline{x} \in F^m$, $\underline{y} \in F^n$

$$\underline{x} A \underline{y}^t = \underline{x} B \underline{y}^t$$

אז $A = B$.

הוכחה: נניח ש- $A = (a_{ij})$ ו- $B = (b_{ij})$.

נקח $\varepsilon_i = (0,\dots,\underset{i}{1},\dots,0)$ ו- $\delta_j = (0,\dots,\underset{j}{1},\dots,0)$ אז

$$\varepsilon_i A \delta_j^t = a_{ij}$$

$$\varepsilon_i B \delta_j^t = b_{ij}$$

אבל $\varepsilon_i A \delta_j^t = \varepsilon_i B \delta_j^t \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A = B$

בוקר טוב

(64) 19.6.06
ליניארית

נזכר שזו תבנית בי-לינארית. תבנית בילינארית זו העתקה $f: V\times W \to F$.
אם $\dim V = m$ ו $\dim W = n$ ונתונים בסיסים $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in V$ ו $\beta_1,\dots,\beta_n \in W$
מגדירים את המטריצה של f לפי הבסיסים הללו ע"י $M_{mn}(F) \ni A = (a_{ij})$
כאשר לכל i,j מתקיים $a_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$.
לכל $\alpha \in V$, $\beta \in W$ יהי $\underline{x}$ וקטור הקואורדינטות של α לפי $\alpha_1,\dots,\alpha_m$
ויהי $\underline{y}$ וקטור הקואורדינטות של β לפי $\beta_1,\dots,\beta_n$ (שניהם וקטורי
שורה). אז $f(\alpha,\beta) = \underline{x} A \underline{y}^t$.
בהינתן שני הבסיסים, התאמת המטריצה של f ל-f היא התאמה
חד-חד-ערכית מקבוצת התבניות הבי-לינאריות על קבוצת המטריצות
מגודל $m\times n$ מעל F.
יהיו f, g שתי תבניות בילינאריות (מ $V\times W$ ל-F)
נגדיר את $f+g$ באופן הטבעי, הכוונה: $(f+g)(\alpha,\beta) = f(\alpha,\beta)+g(\alpha,\beta)$
לכל $c\in F$ נגדיר $c\cdot f$ באופן הטבעי, הכוונה: $(c\cdot f)(\alpha,\beta) = c\cdot f(\alpha,\beta)$
קל לראות שגם $f+g$ וגם $c\cdot f$ הן תבניות בילינאריות
קל לראות שקבוצת התבניות הבילינאריות היא מרחב וקטורי לעומת חבור
ונפל בהקלר הפי שהגדרנו כרגע.
תרגיל מלמד לבית: בהינתן בסיס ל-V ובסיס ל-W התאמת המטריצה
לפי בסיס זה לתבניות היא איזומורפיזם מרחבי התבניות ל-$M_{mn}(F)$.

משפט: יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל F בעל מימדים m,n בהתאמה.
תהי $f: V\times W \to F$ תבנית בילינארית. יהי B בסיס של V ויהי C בסיס של W.
תהי A המטריצה של f לפי הבסיסים הללו.
יהי B' בסיס חדש של V ויהי C' בסיס חדש של W. ותהי A' המטריצה
של f לפי הבסיסים הללו. תהי P מטריצת המעבר מ-B' ל-B ותהי
Q מטריצת המעבר מ-C' ל-C. אז $A' = P^T A Q$.

הוכחה: נסתכל בשני וקטורים $\alpha\in V$, $\beta\in W$. נסמן את וקטור
הקואורדינטות של α לפי B ב-$\underline{x}$ ואת וקטור הקואורדינטות של β
לפי C ב-$\underline{y}$. נסמן את וקטור הקואורדינטות של α לפי B' ב-$\underline{x'}$

ואת מטריצת ההעתקה שם β לפי C ב- y.

אנו יודעים ש- $f(\alpha,\beta)=\underline{x}A\underline{y}^t$ ומ- $f(\alpha,\beta)=\underline{z}A'\underline{y}^t$. לכן

$\underline{y}A'\underline{z}^t=\underline{x}A\underline{y}^t$. כמו כן $\underline{x}^t=P\underline{z}^t$ (*) ומ- $\underline{y}^t=Q\underline{y}^t$ (**).

מ-(*) נובע שחלוף אינו בשימוש ונקבל $\underline{x}=P^t\underline{z}$. לכן

$\underline{z}A\underline{y}^t=\underline{z}P^tAQ\underline{y}^t$. זה נכון לכל $\underline{z}$ ו- $\underline{y}$. לכן $A'=P^tAQ$

<u>מסקנה:</u> אם $V=W$ ו- $B=C$ ו- $B'=C'$ ומטרידת המעבר מהבסיס החדש לישן הוא P אז $A'=P^tAP$.

<u>הגדרה:</u> שתי מטרידות ריבועיות A,A' נקראות <u>חופפות</u> אם קיימת מטרידה רגולרית B כך ש- $A'=P^tAP$.

<u>טענה:</u> יחס זה הוא יחס שקילות, כולל רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

<u>הוכחה:</u>

* רפלקסיביות: ברור ש- $A=I^tAI$
* סימטריה: אם P רגולרית ו- $A'=P^tAP$ אז נכפול את שני האגפים משמאל ב- $(P^{-1})^t=(P^t)^{-1}$ ומימין ב- P^{-1} ונקבל $(P^{-1})^TA'P^{-1}=A$
* טרנזיטיביות: אם $A'=P^tAP$ ו- $A''=Q^tA'Q$ אז $A''=Q^tP^tAPQ$ כלומר $A''=(PQ)^tA(PQ)$ וכמובן PQ רגולרית.

<u>תובנה:</u> שתי מטרידות ריבועיות הן חופפות, אם"מ הן מייצגות אותה תבנית בו-לינארית על V בבסיסים שונים (אבל אם בסיס ישן ואותו בסיס חדש).

<u>הגדרה:</u> יהיו $A,A'\in M_{m\times n}(F)$. A,A' נקראות <u>שקולות</u> אם קיימות שתי מטרידות $P\in M_m(F)$ ו- $Q\in M_n(F)$ רגולריות כך ש- $A'=PAQ$

טענה: יחס זה הוא יחס שקילות.

הוכחה:

* רפלקסיביות: $A = I_n A I_m$
* סימטריות: אם $A' = PAQ$ אז $A = P^{-1}A'Q^{-1}$.
* טרנזיטיביות: אם $A' = P_1AQ_1$, $A'' = P_2A'Q_2$ אז $A'' = (P_2P_1)A(Q_1Q_2)$ וכמובן P_2P_1 ו-Q_1Q_2 רגולריות.

טענה: אם A, A' שקולות אז יש להן אותה דרגה.

הוכחה: לפי מה שראינו בסעיף הקודם, הפעלת מטריצה הפיכה רגולרית, בין אם זה מימין או משמאל, אינו משנה את הדרגה.

טענה: יהיו $A, A' \in M_{m\times n}(F)$. A, A' שקולות אמ"מ הן מייצגות אותה תבנית בלינארית (בבסיסים שונים).

הוכחה: אם $A' = PAQ$ כאשר P, Q רגולריות יהי B בסיס של V ויהי C בסיס של W ותהי f התבנית הבילינארית ש-A מייצגת לפי הבסיסים הללו. יהי B' הבסיס ב-V אשר המטריצה $(P^{-1})^t$ מעבירה את B אליו. יהי C' הבסיס ב-W אשר Q מעבירה את C אליו. מטריצת המעבר מ-B' ל-B היא P^t ומ-C' ל-C היא Q. לכן המטריצה של f לפי הבסיסים החדשים היא $(P^t)^tAQ = PAQ = A'$.

בכיוון השני, ראינו שאם A, A' מייצגות אותה תבנית בלינארית אז $A' = P^tAQ$ כך P, Q הן מטריצות מעבר לכן הן רגולריות לכן יש P^t רגולרית.

משפט: תהי $f: V\times W \to F$ תבנית בילינארית. בייחס לבסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ של V ו-$(\beta_1,\dots,\beta_n)$ של W ומספר $r \le \min(m,n)$ כך ש-

א) $f(\alpha_i,\beta_j) = \begin{cases} 0 & i\ne j \\ 0 & i=j>r \\ 1 & i=j\le r \end{cases}$

ב) המטריצה של f לפי בסיסים אלה:

$$M_{m\times n}(F) \ni A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

המטריצה לעיל בעצם מייצגת ת"ל ושורה ורשקמים בעבור הפרים מטריצה לעצמה, אז אפשר אותנו משתמשים את זמנו ם יה נעמה

④ הפונקציה f נתונה על ידי הפונקציה הבאה:

$f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ אם $\alpha=\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$ ו- $\beta=\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j$

הוכחה: בעזרת ג'

66 21.6.06
לינארית

אם A,B מטריצות $m\times n$ הן הפיכות שקולות אם קיימות מטריצות $P\in M_m(F)$! $Q\in M_n(F)$ הפיכות כך ש $B=PAQ$.

הראנו שאם A,B שקולות אז הן שוות דרגה.

<u>משפט:</u> תהי f תבנית בילינארית על $V\times W$. קיימים בסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ ל-V ! $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ ל-W ומספר $r\le \min(m,n)$ כך ש-

(א) $$f(\alpha_i,\beta_j)=\begin{cases}0 & i\ne j\\ 0 & i=j>r\\ 1 & i=j\le r\end{cases}$$

(ב) ביחס לבסיסים אלו המטריצה של f היא מהצורה

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)}\\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{array}\right)$$

(ג) התבנית f נתונה ע"י $f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{r}x_iy_i$ כאשר $\alpha=\sum_{i=1}^{m}x_i\alpha_i$! $\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\beta_i$.

<u>הוכחה:</u>

אם $f=0$ הטענה ברורה, ואז $r=0$.

לכן נניח $f\ne 0$ ואז בוודאי יתקיים $r>0$.

יהיו $\alpha_1\in V$! $\beta_1'\in W$ כך ש- $f(\alpha_1,\beta_1')\ne 0$. יהי $\beta_1=\frac{\beta_1'}{f(\alpha_1,\beta_1')}$. אז כמובן $\beta_1\in W$! $f(\alpha_1,\beta_1)=1$:

$$f(\alpha_1,\beta_1)=f\left(\alpha_1,\frac{\beta_1'}{f(\alpha_1,\beta_1')}\right)=\frac{1}{f(\alpha_1,\beta_1')}\cdot f(\alpha_1,\beta_1')=1$$

ברור ש- $\alpha_1\ne 0$! $\beta_1\ne 0$. יהי $V_1=Sp\{\alpha_1\}$. כמובן $\dim V_1=1$.

יהי W_2 האפס של V_1; כלומר $W_2=\{\beta\in W: f(\alpha_1,\beta)=0\}$.

V_1 הוא תת מרחב של V ! W_2 הוא תת מרחב של W.

נסמן $W_1=Sp\{\beta_1\}$ תת מרחב של W ויהי V_2 האפס של W_1. כלומר $V_2=\{\alpha\in V: f(\alpha,\beta_1)=0\}$ והוא תת מרחב של V.

נורית ש- $W=W_1\oplus W_2$. נורית שהחיתוך מכיל רק את 0. יהי
$\beta\in W_1\cap W_2$. אז $\beta=b\beta_1$ ומה $f(\alpha_1,\beta)=0$
$0=f(\alpha_1,\beta)=f(\alpha_1,b\beta_1)=b\,f(\alpha_1,\beta_1)=b\cdot 1=b$
כלומר $b=0 \Rightarrow \beta=0$.
נורית ש- $W=W_1+W_2$. כל שכל β ב- W הוא מהצורה
$\beta=b\beta_1+\gamma$ כאשר $\gamma\in W_2$. אנו מתבוננים בקלר
b כך ש- $\beta-b\beta_1=\gamma\in W_2$, כלומר שעבורו $f(\alpha_1,\beta-b\beta_1)=0$,
כלומר שעבור $f(\alpha_1,\beta)-bf(\alpha_1,\beta_1)=f(\alpha_1,\beta)-b=0$
$\Leftarrow f(\alpha_1,\beta)=b$.
נמצאנו $b=f(\alpha_1,\beta)$ ונקבל את הדרוש. לכן $W=W_1\oplus W_2$.
באותו אופן מורים ש- $V=V_1\oplus V_2$.
ואז $\dim W_1=1$ $\dim V_1=1$
$\dim W_2=n-1$ $\dim V_2=m-1$
נניח ש- $m\le n$.
ולרשום נורית את המשפט באינדוקציה על m.
אם $m=1$ הבסיס המתאים ל- V יהיה (α_1)
ויהי $(\beta_2,\dots,\beta_n)$ בסיס של W_2. אז בבור ש-
$(\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ הוא בסיס של W והבסיסים הללו
מקיימים את הטענה $(r=1)$. הורחנו את חלק א' ל- $m=1$.
נניח נכונות ל- $m-1$ ונורית ל- m.
אם $m\le n$ אז גם $1\le n$ ואז $\dim V_2=m-1\ge 1$
ו- $\dim W_2=n-1\ge 1$. נסתכל בצמצום של f ל- $V_2\times W_2$.
לפי הנחת האינדוקציה קיימים בסיסים $(\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ ל- V_2
ו- $(\beta_2,\dots,\beta_n)$ ל- W_2 המקיימים את חלק א'.
כ"ז קיים r אשר מקיים שלכל $2\le i\le m$, $2\le j\le n$

$$f(\alpha_i,\beta_j)=\begin{cases}0 & i\ne j\\ 0 & i=j>r\\ 1 & i=j\le r\end{cases}$$

מראן ש- $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ הוא בסיס של V ו- $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ בסיס
של W והם מקיימים את א', שהרי W_2 ו- V_2 הם מאופסים,
ובאינו הבר ש- $f(\alpha_1,\beta_1)=1$.

ערכיו לפי הגדרת המטריצה של f מתקבלת המטריצה הרבועה

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

ומראן לפי מבנה התלק האחרון של המשפט.

<u>סימון:</u>

$$D_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

מבנה ש הדרגה של D_r היא r.

<u>תובנה:</u> אם $A \in M_{m\times n}(F)$ מטריצה בעל דרגה r. אז A שקולה ל- D_r.

<u>הוכחה:</u> תהי f תבנית בי-לינארית מ $W \times V$ המוגדרת ע"י A ביחס לבסיסים מתאימים.
לפי המשפט יש בסיסים אחרים שלפיהם f מוגדרת ע"י D_r.
אז A ו- D_r שקולות. אבל למטריצות שקולות יש אותה דרגה. $\Leftarrow$ $r=r$. $\Leftarrow$ A שקולה ל- D_r.

<u>תובנה:</u> שתי מטריצות הן שקולות אמ"מ יש להן אותה דרגה.

<u>הוכחה:</u>

($\Rightarrow$) לא נכנס בדיון המבחן

($\Leftarrow$) אם יש להן אותה דרגה r מ אחת מהן שקולה ל- D_r אז הן שקולות זו לזו.

<u>הערה:</u> יש לנו 3 מושגים: מט. דומות, שקולות וחופפות.
דומות ושקולות זה רק למטריצות ריבועיות. וחופפות זה לגם המטריצות. אם לשתי מטריצות ריבועיות יש אותה דרגה, זה לא בהכרח אומר שהן דומות או שקולות. לדוגמא

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ לא דומות ולא שקולות.

תבניות סימטריות (עמוד 3)

אותה נקבה כל תבניות בילינאריות על $V\times V$. בפרט, תבניות בי-לינאריות על V. הרשומה של מטריצה מייצגת תלויה לפי איזו בסיס אימין ומשמאל. f כמובן מיוצגת ע"י תבנית ריבועית.

<u>הגדרה:</u> תבנית בילינארית נקראת סימטרית אם לכל $\alpha,\beta\in V$
$$f(\beta,\alpha)=f(\alpha,\beta).$$

<u>למה 9:</u> תבנית בי לינארית f היא סימטרית אמ"מ קיים בסיס שלפיו המטריצה היא סימטרית ובן אם ורק אם בכל בסיס המטריצה המייצגת היא סימטרית.

<u>הוכחה:</u> נניח ש-f סימטרית. יהי $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ בסיס. המטריצה $A=(a_{ij})$ המייצגת את f לפי בסיס זה
$$a_{ij}=f(\alpha_i,\alpha_j)=f(\alpha_j,\alpha_i)=a_{ji}$$
כלומר A סימטרית, לא משנה איזה בסיס נבחר.
אם בכל בסיס המטריצה היא סימטרית.
כלומר, אם בכל בסיס המטריצה היא סימטרית בדור שקיים בסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ שלפיו המטריצה סימטרית. אז לכל i,j $a_{ij}=f(\alpha_i,\alpha_j)=f(\alpha_j,\alpha_i)=a_{ji}$. נראה שלכל $\alpha,\beta\in V$ $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$. נניח ש- $\alpha=\sum x_i\alpha_i$ ו- $\beta=\sum y_i\alpha_i$.
$$f(\alpha,\beta)=\sum_{i,j}x_iy_i\,f(\alpha_i,\alpha_j)=$$
$$=\sum_{i,j}y_ix_i\,f(\alpha_j,\alpha_i)=f(\beta,\alpha)$$
$\Leftarrow$ f סימטרית.

☺

נתונה תבנית בילינארית f. תגדיר לילדים אותה ע"י מטריצה אלכסונית. אם אפשר אז התבנית f היא סימטרית. כי מטריצה אלכסונית היא סימטרית, לכן כל תבנית בילינארית המיוצגת על ידה היא סימטרית. מתברר שאם ההיפוך נכון ברוב המקרים.

<u>משפט 10:</u> תהי f תבנית בילינארית סימטרית על מרחב V מעל מימד n מעל שדה F אשר המציין שלו שונה מ-2. אז קיים בסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ שלפיו f מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית.

לשון אחר: שלכל $i\neq j$ $f(\alpha_i,\alpha_j)=0$! - f נתונה ע"י $f(\alpha,\beta)=\sum c_i x_i y_i$ ראשר $\alpha=\sum x_i\alpha_i$ $\beta=\sum y_i\alpha_i$ ו- $c_i=f(\alpha_i,\alpha_i)$.

<u>הוכחה:</u> הטענה ברורה אם $f=0$ ובן היא ברורה אם $n=1$. נניח את הטענה באינדוקציה על n.

אם $n=1$ ראינו. נניח ש- $n>1$! $f\neq 0$ והטענה נכונה ל- $n-1$.

$f\neq 0 \Leftarrow$ יש וקטור α כך ש $f(\alpha,\alpha)\neq 0$. למה?

אם לכל α $f(\alpha,\alpha)=0$ אז לכל $\alpha,\beta\in V$

$$0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=\cancel{f(\alpha,\alpha)}+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+\cancel{f(\beta,\beta)}=2f(\alpha,\beta)$$

והמציין שונה מ-2 $\Leftarrow$ $f(\alpha,\beta)=0$ לכל α,β מסתירה לכך ש- $f\neq 0$.

אז נסמן α_1 כך ש $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$. נסמן $V_1=\mathrm{Span}\{\alpha_1\}$. יהי $V_2=V_1^{\circ}=\{\beta\in V: f(\alpha_1,\beta)=0\}$. כמו שראינו במשפט הגדול (התרגיל) הבולט $V=V_1\oplus V_2$. ולכן $\dim V_2=n-1$. נסתכל בצמצום של f ל- V_2. לפי הנחת האינדוקציה יש בסיס $(\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ של V_2 כך שלכל $2\le i,j\le n$ אם $i\neq j$ אז $f(\alpha_i,\alpha_j)=0$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ בסיס של V והם מקיים:

לכל $i \neq j$ $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ כי $V_2 = V_1^{\perp}$:

אם $1 < j, i$ האיבר קודם (לפי האינדוקציה).

אם $i = 1$, אזי אז $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ כי α_j נמצא שהיא המאפס של V_1.

ואם $1 < i$, $j = 1$ אותו הדבר בגלל הסימטריה של f.

<u>הערה:</u> כל מטריצה סימטרית מעל שדה בעל מאפיין שונה מ-2 חופפות למטריצה אלכסונית!

(69) 26.6.06
לינארית

למדנו שאם A מטריצה ריבועית סימטרית מעל F אז היא תופפת למטריצה אלכסונית. דהיינו, יש P רגולרית כך ש- P^tAP אלכסונית.

אם השדה הוא $\mathbb{R}$ אז A לא רק תופפת אלא יש דומה למטריצה אלכסונית עם אותה מטריצת מעבר. כלומר קיימת מטריצת מעבר אורתוגונלית P כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית, אבל $P^t=P^{-1}$ ולכן $P^{-1}AP=P^tAP$.

היום נעסוק במשפט ההתאמה של סילבסטר. בסעיף זה השדה יהיה $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. מדובר בתבנית בי-לינארית על המרחב ו-n-מימדי V.

<u>הגדרה</u>: הפריכה של תבנית בילינארית היא הדירוג של המיוצגת אותה לפי בסיס כלשהו. כלומר אותן בבסיס כי כל המטריצות הללו חופפות ולכן בעלות אותה דירוג.

<u>משפט</u>: תהי f תבנית בילינארית על מרחב n-מימדי V מעל $\mathbb{C}$. אזי

א) קיים בסיס ל- V שעליו המטריצה היא אלכסונית מהצורה

$$D_r=\begin{pmatrix} \overbrace{1\ \ddots\ 1}^{r} & 0 \\ 0 & 0\ \ddots\ 0 \end{pmatrix}$$

ב) מספר ה-1-ים בהצגה כזו שווה לדרגת f ולכן נקבע באופן יחיד ע"י f.

<u>הוכחה</u>: לפי משפט שמעל קיים בסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ כך ש- $f(\alpha_i,\alpha_j)=0$ אם $i\neq j$. (סא) $c_i=f(\alpha_i,\alpha_j)$.

אם $f=0$ אז בכל בסיס $A=0=D_0$.

אם $f\neq 0$: נעבור מהבסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ לבסיס $(\alpha_1',\dots,\alpha_n')$ כאשר

$$\alpha_i'=\begin{cases} \frac{\alpha_i}{\sqrt{c_i}} & c_i\neq 0 \\ \alpha_i & c_i=0 \end{cases}$$

אם $i \neq j$ אז $f(\alpha_i', \alpha_j') = 0$ ואולם

$$f(\alpha_i', \alpha_i') = \begin{cases} 1 & c_i \neq 0 \\ 0 & c_i = 0 \end{cases}$$

איך תיראה המטריצה לפי בסיס זה?

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

אם נשנה בצורה נרונה את סדר ה α_i בבסיס נקבל בסיס שלפיו המטריצה היא D_r.

ובדרך של- r היא הדרגה של f. ☺

<u>משפט:</u> תהי f תבנית בילינארית של V (n ממדי) מעל $\mathbb{R}$.

א) קיים בסיס ל-V שלפיו המטריצה של f היא מהצורה

$$D_{p,m} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

p m

הדרגה שלו היא $p+m$

ב) משפט ההתמדה של סילבסטר: p ו- m נקבועים ע"י f.

<u>הוכחה:</u>

א) בסימונים של המשפט הקודם. נסמן

$$\alpha_i' = \begin{cases} \alpha_i / \sqrt{c_i} & c_i > 0 \\ \alpha_i / \sqrt{-c_i} & c_i < 0 \\ \alpha_i & c_i = 0 \end{cases}$$

נקבל מטריצה אלכסונית שבה באלכסון ישרק 1, 1-, 0.

ע"י שינוי בסדר של איברי הבסיס נקבל מטריצה מהצורה $D_{p,m}$.

ב) נניח שיש 2 מטריצות - האחת עם m,p והשנייה עם m',p'. בגלל של $p+m = p'+m'$ = דרגת f. דו"ל הראות

ש- $p=p'$. נניח בשלילה ש $p<p'$. נניח $D_{p,m}$ להיות לפי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

ו- $D_{p',m'}$ לפי $\alpha_1', \dots, \alpha_n'$. נסתכל במערכת $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p'+1}', \dots, \alpha_n')$

יש פה יותר מ- n ווקטורים כי $p<p'$. לכן לו מע' תלויה. לכן יש $a_1, \dots, a_p$

ו- $a_{p'+1}', \dots, a_n'$ לא כולם אפס כך ש- $a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p + a_{p'+1}'\alpha_{p'+1}' + \dots + a_n'\alpha_n' = 0$

בהכרח שאבין $a_1, \dots, a_p$ יש לפחות 1 ששונה מאפס

נאמר שקיים תבנית בילינארית סימטרית f על V (מרחב n מימדי מעל $\mathbb{C}$) קיים בסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ של V וקיים $0\le r\le n$ כך ש-

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 0 & i=j>r\\ 1 & i=j\le r\end{cases}$$

לא אומר שהמטריצה של f לפי בסיס זה היא

$$D_r=\begin{pmatrix}\underbrace{1\ \ddots\ 1}_{r} & & 0\\ & 0\ \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$$

r נקבע באופן יחיד על ידי f והוא אינו אלא הדרגה של f.

אם תבנית בילינארית סימטרית f על V (מרחב n מימדי מעל $\mathbb{R}$) קיים בסיס $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ של V וקיימים $0\le p,m\le n$ כך ש-

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 0 & i=j>p+m\\ 1 & i=j\le p\\ -1 & p<i=j\le p+m\end{cases}$$

לא אומר שהמטריצה לפי בסיס זה היא

$$D_{p,m}=\begin{pmatrix}\underbrace{1\ \ddots\ 1}_{p} & & & 0\\ & \underbrace{-1\ \ddots\ -1}_{m} & & \\ & & 0\ \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

$m+p$ זו דרגת התבנית f לכן לא נקבע ע"י f.

<u>משפט ההתמדה של סילבסטר</u>: אם f תבנית בילינארית סימטרית על מרחב V n מימדי מעל $\mathbb{R}$ והמטריצות אם $D_{p,m}$! $D_{p',m'}$ מייצגות אותה לפי בסיסים $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$! $(\alpha'_1,\dots,\alpha'_n)$ בהתאמה, אזי $D_{p,m}=D_{p',m'}$.

הוכחה:

נניח בשלילה ש- $p \neq p'$ (נניח כי $p < p'$). $(p+m = p'+m')$

נלקח בהכ' ש- $p < p'$ ונסתכל במע' הווקטורים

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha'_{p'+1}, \dots, \alpha'_n)$$

מספר הווקטורים כאן הוא $p + (n-p') = n + (p-p') < n$

לכן לו מע' תלויה לינארית. לכן יש סקלרים

$a_1, \dots, a_p, a'_{p'+1}, \dots, a'_n$ לא כולם 0

מתקיים: $(*)$ $\sum_{i=1}^{p} a_i \alpha_i + \sum_{i=p'+1}^{n} a'_i \alpha'_i =$

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p + a'_{p'+1}\alpha'_{p'+1} + \dots + a'_n\alpha'_n = 0$$

אבל ה- a_i חייב להיות אחד לפחות ששונה מאפס.

אם כולם $a_i = 0$ אז $\sum_{i=p'+1}^{n} a'_i \alpha'_i = 0$

אבל $\{\alpha_i\}_{i=p'+1}^{n}$ בת"ל $\Leftarrow$ $a'_i = 0$ לכל $p'+1 \le i \le n$

בסתירה. $\Leftarrow$ קיים $a_i \neq 0$.

מ- $(*)$ מקבלים ש- $\sum_{i=1}^{p} a_i \alpha_i = -\sum_{i=p'+1}^{n} a'_i \alpha'_i$

לכן

$$(1) = f\left(\sum_{i=1}^{p} a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^{p} a_i \alpha_i\right) = f\left(\sum_{i=p'+1}^{n} a'_i \alpha'_i, \sum_{i=p'+1}^{n} a'_i \alpha'_i\right) = (2)$$

$$(1) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 f(\alpha_i, \alpha_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i^2 > 0$$

כי יש $a_i > 0$

$$(2) = \sum_{i=p'+1}^{n} a_i'^2 f(\alpha'_i, \alpha'_i) \le 0$$

כי $f(\alpha'_i, \alpha'_i) \le 0$

בוודאי $(1) \neq (2)$ וזו סתירה ל- $(*)$.

$\Leftarrow$ $p = p'$ ומכאן נובע $m = m'$.

(11)

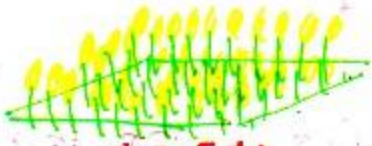
הגדרה: לכל תבנית בילינארית סימטרית f על V שמימד n מעל $\mathbb{R}$ נגדיר את הסיגנטורה של f שתסומן $\sigma(f)$.

f ניתנת לייצוג ע"י המטריצה $D_{p,m}$ ואז $\sigma(f)=p-m$

מסקנות:

א. כל מטריצה סימטרית מעל $\mathbb{C}$ חופפת למטריצה יחידה מהצורה D_r כאשר r דרגת המטריצה.

ב. כל מטריצה סימטרית מעל $\mathbb{R}$ חופפת למטריצה יחידה מהצורה $D_{p,m}$ כאשר $p+m$ זו דרגת המטריצה. $p-m$ נקראת הסיגנטורה של המטריצה.

נעבור לשדות כלליים.  ← שלה תרגל

$\mathrm{char}\,F \neq 2$

הגדרה: יהי V מרחב n-מימדי מעל השדה F ותהי f תבנית בילינארית מעל V. התבנית הריבועית המקבילה ע"י f היא

$$q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$$

טענה: שתי תבניות בילינאריות שונות קובעות תבניות ריבועיות שונות, כלומר התבנית הריבועית קובעת את התבנית הבילינארית.

הוכחה: $f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\left(q(\alpha+\beta)-q(\alpha)-q(\beta)\right)$

זה יוצא פשוט מפתיחת סוגריים. ☺

דוגמאות לתבניות ריבועיות:

- כל מרחק סקלרית מעל $\mathbb{R}$ (או מעל V^n מימד n מעל $\mathbb{R}$) היא תבנית בילינארית סימטרית. התבנית הריבועית המתאימה היא $\langle\alpha,\alpha\rangle=\|\alpha\|^2$
- $P\in M_n(F)$, $x\in F^n=(\,,\dots,\,)$ אז xPx^t זו תבנית ריבועית מעל F^n.

הגדרה - אם f תבנית בילינארית מעל V ! $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ בסיס של V ! P מייצגת את f מעל V ! P מייצגת לא את התבנית הריבועית המתאימה.

טענה: לתבניות ריבועיות נקבעות ע"י תבניות בילינאריות סימטריות.

דוגמה: נסתכל בתבנית הריבועית על $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) = x \longmapsto x\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}x^t$$

התבנית הינו $x_1^2+2x_1x_2+4x_2x_1+3x_2^2 =$

$$= x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2 =$$

$$= x_1^2+3x_1x_2+3x_2x_1+3x_2^2 =$$

$$= x\begin{pmatrix}1&3\\3&3\end{pmatrix}x^t$$

הוכחת הטענה: תהי A המטריצה של התבנית f לפי בסיס מסוים $A=(a_{ij})$. נגדיר $B=(b_{ij})$ ע"י $b_{ij}=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$. B כמובן מטריצה סימטרית ומייצגת את אותה התבנית הריבועית כמו A. שהרי:

$$xAx^t = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$$

$$xBx^t = \sum_{i,j} b_{ij}x_ix_j$$

הרי להראות שוויון זו להראות ש-

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = b_{ij}x_ix_j + b_{ji}x_jx_i$$

אבל

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij}+a_{ji})x_ix_j =$$

$$= \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_ix_j + \frac{a_{ji}+a_{ij}}{2}x_jx_i = b_{ij}x_ix_j + b_{ji}x_jx_i$$

נ לבור לתבניות ריבועיות מעל $\mathbb{R}$.

הגדרה: תבנית ריבועית q נקראת אי-שלילית אם לכל α $q(\alpha) \geq 0$
q נקראת חיובית אם לכל $\alpha \neq 0$ $q(\alpha) > 0$.

משפט: תבנית ריבועית היא אי שלילית (חיובית) אמ"מ המטריצה הסימטרית המייצגת אותה q הלא הם אי שליליים (חיוביים).

הוכחה: המטריצה A היא סימטרית. לכן לפי מה שראינו יש מטריצה אורתוגונלית P כך ש P^tAP אלכסונית. נסמן

$$P^{-1}AP \overset{\text{כי } P \text{ אורתוגונלית}}{=} P^tAP = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

מטריצה זו מייצגת את q לפי בסיס אחר.
$a_1, \dots, a_n$ הם הערכים העצמיים של A !
$$xP^tAPx^t = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$$
לכן אם $a_1, \dots, a_n \geq 0$ אם התוצאה אי שלילית. ואם $a_1, \dots, a_n > 0$ התוצאה חיובית אלא אם $x = \vec{0}$.
אם אחד מבין a_i שלילי אז התוצאה שלילית כאשר x הוא הווקטור שמתאים ל.i אופ.ז 1 ובשאר המקומות 0.

המבחן - כמו בשנה שעברה - משפטים
תרגילים
נשים / לא נשים