אלגברה לינארית 2 – סיכומי הרצאות של ד"ר אלכס אייזנברג

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות והעתקות לינאריות

הגדרה: תהי $A \in Mn(F)$ אם $v \in F^n$ שונה מאפס וקיים סקאלר $\lambda \in F$ כך ש:
$Av=\lambda v$ אנו אומרים שλ הוא ערך עצמי (אופייני) של A ו v וקטור עצמי השייך לλ

טענה: תהי $A \in Mn(F)$ אם v וקטור עצמי של A השייך ל λ אזי αV גם וקטור עצמי של A השייך ל λ.

הוכחה: נתון $Av=\lambda v$ $v \neq 0$ לכן גם $\alpha v \neq 0$ וגם $A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha\lambda v$

טענה: תהי $A \in Mn(F)$, λ הוא ערך עצמי של A אמ"מ $\det(\lambda I-A)=0$

הוכחה:
א. נסמן $B = (\lambda I - A)$ נניח שλ הוא ערך עצמי של A אז קיים $v \in F^n$ שונה מאפס כך ש$Av=\lambda v$ ולכן $Bv = (\lambda I - A)v = \lambda v - Av = 0$ כלומר B סינגולרית ולכן $\det B=0$
ב. נניח $\det B = 0$ אזי B סינגולרית דהיינו קיים $0 \neq v \in F^n$ כך ש $Bv=0$ אבל $B = (\lambda I - A)$ ולכן $(\lambda I - A)v = 0 \Rightarrow \lambda Iv = Av \Rightarrow \lambda v = Av$ כנדרש.

הגדרה: תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית כאשר V מ"ו מעל שדה F.
אם עבור $v \in V$ השונה מ – 0, קיים סקאלר $\lambda \in F$ כך ש $T(v)= \lambda(v)$ אנו אומרים ש λ הוא ע"ע של ההעתקה ו v הוא וקטור עצמי של T השייך ל λ.
הערה: תהי $A \in Mn(F)$ תמיד ניתן להגדיר העתקה לינארית $T_A : F^n \to F^n$ על ידי הנוסחה הבאה $T_A(v) = Av$ לכל $v \in F^n$ ואזי כל ערך עצמי וכל וקטור עצמי של A הם בעצם ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.

משפט: תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית כאשר V הוא מ"ו ממימד סופי מעל F.
יהי $\Gamma = (V_1,V_2,\ldots,V_n)$ בסיס של V המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T (ז"א $T(V_i)=\lambda_i V_i$) אזי המטריצה המתאימה להעתקה T ביחס לבסיס זה היא אלכסונית, יתירה מזאת היא בעלת הצורה:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

הוכחה: אם $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ מטריצה של T ביחס לבסיס Γ אזי לפי הגדרה:

$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ לכל $1 \leq j \leq n$. לכן:

$$a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \ldots + a_{(j-1)j}v_{j-1} + a_{jj}v_j + a_{(j+1)j}v_{j+1} + \ldots + a_{nj}v_n = \lambda_j v_j$$

נעביר אגפים :

$$a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + ... + a_{(j-1)j}v_{j-1} + (a_{jj} - \lambda_j)v_j + a_{(j+1)j}v_{j+1} + ... + a_{nj}v_n = 0$$

לכן כל המקדמים הם אפסים כי Γ בסיס ולכן כאשר $i \neq j$ אזי $a_{ij} = 0$ וכאשר $i = j$ אזי $a_{ij} = \lambda_j$ כנדרש.

למה : יהי V מרחב לינארי $T : V \to V$ ו $V_1, V_2, \ldots, V_k$ וקטורים עצמיים של T, (ז"א $T(V_i)=\lambda_i V_i$) לכל $1 \le i \le k$ ו λ_i שונים זה מזה לכל $1 \le i \le k$ אזי $V_1, V_2, \ldots, V_k$ בלתי תלויים לינארית.

הוכחה : נוכיח באינדוקציה לפי $k \ge 1$

אם k=1 אזי כל הקבוצה היא וקטור בודד שונה מאפס וברור שקבוצה זו הנה בת"ל.

נניח נכונות הטענה עבור k ונוכיח עבור k+1

תהי $v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}$ סדרת וקטורים עצמיים של T כך ש $T(v_i) = \lambda_i v_i$ כאשר λ_i שונים זה מזה לכל $1 \le i \le k+1$.

לפי הנחת האינדוקציה $v_1, v_2, ..., v_k$ בת"ל. נרשום את המשוואה.

$$(1) t_1 v_1 + t_2 v_2 + ... + t_k v_k + t_{k+1} v_{k+1} = 0$$

ונוכיח שהיא מתקיימת רק כאשר כל המקדמים הם אפסים.

אם (1) מתקיימת אז

$$(2) 0 = T\left(\sum_{i=1}^{k+1} t_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} t_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{k+1} t_i \lambda_i v_i = t_1 \lambda_1 v_1 + ... + t_k \lambda_k v_k + t_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1}$$

נכפיל את שני האגפים של (1) ב λ_{k+1} ונקבל :

$$(3) \lambda_{k+1} t_1 v_1 + \lambda_{k+1} t_2 v_2 + ... + \lambda_{k+1} t_k v_k + \lambda_{k+1} t_{k+1} v_{k+1} = 0$$

מ(2) ו(3) נקבל :

$$(4) t_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + t_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})v_2 + ... + t_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0$$

כלומר $t_i(\lambda_i - \lambda_{k+1})v_i = 0$ עבור כל $1 \le i \le k$ ולכן בהכרח כל $t_i = 0$ נציב את זה ב(1) ונקבל $t_{k+1} v_{k+1} = 0$ ולכן מכיוון ש $v_{k+1} \neq 0$ כי הוא וקטור עצמי הרי ש $t_{k+1} = 0$ ולכן $v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}$ בלתי תלויים לינאירת כנדרש.

תוצאה : נניח ש $\dim V = n$ ו $T : V \to V$ העתקה לינארית.

א. אזי ל T יש לכל היותר n ערכים עצמיים השונים זה מזה.

ב. אם ל T יש n ערכים עצמיים השונים זה מזה אזי קיים בסיס Γ של V המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T. יתירה מזאת המטריצה של T ביחס לבסיס זה היא אלכסונית.

הוכחה :

א. אם ע"ע הם שונים זה מזה אזי $v_1, v_2, ..., v_n$ ו"ע המתאימים הם בת"ל לפי הלמה, ובמרחב ממימד n יתכנו לכל היותר n וקטורים בת"ל

ב. ולכן אם יש n וקטורים כאלו אזי הם בת"ל ולכן הם בסיס של V.

תזכורת: יהיה $\Phi=(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ בסיס של V ויהי $v\in V$ אזי $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$

נרשום $\in F^n$ $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ $[v]_\Phi=$ וקטור זה נקרא וקטור המקדמים של V ביחס לבסיס Φ.

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. ותהי A מטריצה של T ביחס לבסיס Φ אזי
$A[v]_\Phi=[T(v)]_\Phi$

טענה: $\lambda\in F$ הוא ע"ע של T אם ורק אם הוא ע"ע של A, יתירה מזאת $v\in V$ הוא וקטור עצמי של T השייך ל λ אם ורק אם $[v]_\Phi\in F^n$ הוא וקטור עצמי של A השייך ל λ.

הוכחה: $\Leftarrow$ אם $T(v)=\lambda(v)$ אזי $v\neq 0$ וגם $[v]_\Phi\neq 0$ לכן
$A[v]_\Phi=[T(v)]_\Phi=[\lambda v]_\Phi=\lambda[v]_\Phi$ כלומר λ ע"ע של A וגם $[v]_\Phi$ הוא וקטור עצמי של A.

תזכורת: תהיינה $A,B\in M_n(F)$ אזי אומרים שהם דומות זו לזו אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A=P^{-1}BP$. המשמעות היא שהן מייצגות את אותה ההעתקה בבסיסים שונים.

טענה: כל ע"ע של A הוא ע"ע של B ולהפך.

הוכחה: נניח ש $\lambda\in F$ ע"ע של A, ז"א קיים $0\neq v\in V$ כך ש $Av=\lambda v$ אזי $P^{-1}BPv=\lambda v$, נכפיל את שני האגפים ב P משמאל ונקבל:
$BPv=\lambda Pv$ ז"א $B(Pv)=\lambda(Pv)$. וקטור Pv שונה מאפס כי P הפיכה ולכן Pv וקטור עצמי של B ו λ ע"ע של B

תזכורת כפל מטריצות: $A_{nxn}B_{nxn}=C_{nxn}$ וכל איבר זהה ל: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

נרשום את B לפי עמודות $B=(\overline{b_1},\overline{b_2},\ldots,\overline{b_n})$, $\overline{b_j}=\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}$ ואז נרשום את נוסחת הכפל $A\bullet\overline{B_j}=\overline{C_j}$ כאשר C_j היא העמודה הjn של C.

מקרה פרטי: $AI=A$ אבל $I=(\overline{e_1},\overline{e_2},\ldots,\overline{e_n})$ לכן $A\bullet\overline{e_j}=\overline{A_j}$ ואם A הפיכה אזי
$\overline{e_j}=A^{-1}\overline{a_j}$

טענה: תהי $A \in M_n(F)$ ויהי $\Gamma = (V_1,V_2,\ldots,V_n)$ בסיס של F^n המורכב כולו

מוקטורים עצמיים של A (ז״א $A(V_i)=\lambda_i V_i$) אזי $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

כאשר $P=(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ כאשר V_i עמודת מקדמים של איברי הבסיס Γ.

הוכחה: העמודות של AP הם בעצם $A\bullet\overline{v_j}$ לכל $1 \le j \le n$ ז״א הן $\lambda_i v_i$ כלומר $AP = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_n v_n)$ ולכן $P^{-1}AP = (P^{-1}(\lambda_1 v_1), P^{-1}(\lambda_2 v_2), \ldots, P^{-1}(\lambda_n v_n))$ ז״א העמודות של $P^{-1}AP$ הם מן הצורה $P^{-1}(\lambda_i v_i)$ לכל $1 \le j \le n$ אבל $P^{-1}v_j = e_j$ כי v_j הנה עמודה של P ולכן נקבל $P^{-1}(\lambda_i v_i) = \lambda_i e_i$ ולכן המטריצה אלכסונית.

הגדרה: אנו אומרים שמטריצה A מן הצורה nxn ניתנת ללכסון אם קיימת מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית B כך ש $P^{-1}AP=B$

טענה: $A \in M_n(F)$ ניתנת ללכסון אמ״מ קיים בסיס $\Gamma = (V_1,V_2,\ldots,V_n)$ של F^n המורכב כולו מוקטורים עצמיים של A. יתירה מזאת, אם קיים בסיס כזה אז $P=(V_1,V_2,\ldots,V_n)$ ו $B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר $A(V_i)=\lambda_i V_i$ לכל $1 \le i \le n$.

הפולינום האופייני

הגדרה : $f(t)=|tI-A|$ נקרא הפולינום האופייני של מטריצה A.

תזכורת פולינומים :
ביטוי פורמלי $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n$ נקרא פולינום מעל שדה F אם $a_i\in F$ לכל $1\le i\le n$.
מספר m הגדול ביותר עבורו $a_m\neq 0$ נקרא המעלה של פולינום degf – f
אם כל המקדמים של הפולינום הנם אפסים הוא נקרא פולינום האפס, כאן הדרגה אינה מוגדרת.
אם $f=a_0\neq 0$ ניתן לזהות עם הסקלר $\deg f=0, a_0\in F$
אם $f=a_0+a_1t$ ביטוי לינארי שהוא פולינום ממעלה 1.
עובדה 1:אם f,g אינם פולינומי אפס אז $\deg(f\bullet g)=\deg f+\deg g$
עובדה 2 : אם $m<n, \deg g=m, \deg f=n$ אזי :
$$f(t)+g(t)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)t+...+(a_m+b_m)t^m+a_{m+1}t^{m+1}+...+a_nt^n$$

תזכורת דטרמיננטות :
S_n - קבוצת כל התמורות של $\{1...n\}$ כלומר אם $\sigma\in S_n$ אזי היא
$$sign\sigma=\begin{cases}1-even\sigma\\-1-odd\sigma\end{cases}\qquad \sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

אם $A\in M_n(F)$ אזי $\det A=|A|=\sum_{\sigma\in Sn}sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$

משפט : תהי $A\in M_n(F)$ אזי $f(t)=|tI-A|=\sum_{i=0}^{n}a_it^i$ כאשר $a_i\in F$ לכל $1\le i\le n$,

ומתקיים : $a_0=(-1)^n\det A, a_{n-1}=-trA, a_n=1$ כאשר $trA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

תכונות trace : $tr(A+B)=trA+trB; tr(AB)=tr(BA)$

הוכחה :
$$tI-A=\begin{pmatrix}t-a_{11} & \dots & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{m1} & \cdots & t-a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots f_{1n}(t)\\ \vdots & \ddots & \ddots\ \vdots\\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots f_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

כאשר
$$i\neq j\Rightarrow f_{ij}(t)=-a_{ij}$$
$$i=j\Rightarrow f_{ij}(t)=-a_{ij}+t$$

זאת אומרת $f_A(t)=\det(tI-A)=\sum_{\sigma\in Sn}sign(\sigma)f_{1\sigma(1)}(t)...f_{n\sigma(n)}(t)$

נסמן : $g_\sigma(t)=sign(\sigma)f_{1\sigma(1)}(t)...f_{n\sigma(n)}(t)$
$g_\sigma(t)$ פולינום עם $\deg\le n$ או פולינום האפס ולכן גם סכום הפולינומים ממעלה קטנה או שווה לn

פולינום $g_\sigma(t)$ הוא פולינום ממעלה n אם ורק אם כל הפולינומים $f_{i\sigma(i)}(t)$ הם ממעלה אחת כלומר $i=\sigma(i)$ אחרת הוא ממעלה אפס או פולינום האפס.

ז״א פולינום $g_\sigma(t)$ הוא ממעלה n אם ורק אם $\sigma = id$.

לא קיימת $\sigma \in Sn$ כך ש $g_\sigma(t)$ הוא ממעלה n-1 מכיוון שתמיד יהיה מספר זוגי של החלפות מקום וע״מ להגיע ל n-1 צריך שרק איבר אחד לא ישלח לעצמו ואין תמורה כזו.

מסקנה: $\deg(g_\sigma(t)) \le n-2 \leftarrow f_A(t) = g_{\sigma id}(t) + \sum_{\substack{\sigma\in Sn \\ \sigma \ne id}} g_\sigma(t)$

כלומר $\deg f_A(t) = n$

נסמן: $g_{\sigma id} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1} + c_n t^n$

אזי: $f_A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-2}t^{n-2} + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n$

כאשר $a_n = c_n ; a_{n-1} = c_{n-1}$

כעת:

$$g_{\sigma id} = f_{11}(t)\cdot f_{22}(t)\cdots f_{nn}(t) = (t-a_{11})(t-a_{22})\cdots(t-a_{nn}) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1}t^{n-1} + c_n t^n$$

ברור מדוע $c_n = 1$ אבל מדוע $c_{n-1} = -trA$?

טענת עזר: אם $(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n) = d_0 + d_1 t + \cdots + d_{n-1}t^{n-1} + d_n t^n$ אזי

$d_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (להוכיח באינדוקציה על n)

וזהו בדיוק המקדם של c_{n-1} ולכן $a_{n-1} = -trA$

נותר להוכיח כי $a_0 = (-1)^n \det A$:

$$f_A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-2}t^{n-2} + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n$$

$$a_0 = f_A(0) = \sum_{\sigma\in Sn} sign(\sigma) f_{1\sigma(1)}(0)\ldots f_{n\sigma(n)}(0)$$

אבל ברור שעבור t=0 כל פולינום קטן נראה $f_{i\sigma(i)} = -a_{i\sigma(i)}$

ולכן נקבל

$$a_0 = f_A(0) = \sum_{\sigma\in Sn} sign(\sigma)(-1)^n f_{1\sigma(1)}(0)\ldots f_{n\sigma(n)}(0) = (-1)^n \sum_{\sigma\in Sn} sign(\sigma) f_{1\sigma(1)}(0)\ldots f_{n\sigma(n)}(0) = (-1)^n \det A$$

טענה: אם A דומה לB אז $f_A(t) = f_B(t)$

הוכחה: אם A דומה ל Bאזי קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $B = P^{-1}AP$ ולכן

$$P^{-1}(tI-A)P = P^{-1}tIP - P^{-1}AP = tI - B$$

$$f_B(t) = \det(tI-B) = \det(P^{-1}(tI-A)P) = \det P^{-1}\det(tI-A)\det P = \frac{1}{\det P} f_A(t)\det P = f_A(t)$$

תזכורת:

1. אם f פולינום ממעלה n כך ש $a_n = 1$ אנו אומרים ש f הוא פולינום מתוקן.
2. אם $\alpha \in F$ מקיים $f(\alpha) = 0$ אנו אומרים ש α הוא שורש של f .
3. אם f פולינום ממעלה n אז יש לו לכל היותר n שורשים.
4. יהיו f,g שני פולינומים שאינם פולינומי האפס אזי קיימים שני פולינומים r(t),d(t) כך ש $f(t) = g(t)\bullet d(t) + r(t); \deg r(t) < \deg g(t)$ או r(t) פולינום האפס.

תוצאה: לכל $\alpha \in F$ קיים u(t) כך ש $f(t) = (t-\alpha)u(t) + f(\alpha)$

הוכחה: כאן $g(t) = t-\alpha$ לכן $r(t) = a_0 \in F$ ז״א $f(t) = (t-\alpha)u(t) + a_0$ נציב $t = \alpha$ ונקבל $f(\alpha) = a_0$ כנדרש.

תוצאה 2: f(t) מתחלק בפולינום $g(t) = t-\alpha$ אמ״מ α שורש של f.

המשפט היסודי של האלגברה: אם f פולינום מעל C כך ש $\deg f \ge 1$ אזי קיים $\alpha \in \mathbb{C}$ אחד לפחות שהוא שורש של f.

תזכורת: למדנו טענה $\det(\lambda I - A) = 0$ אמ״מ λ הוא ע״ע של A.

מסקנה: $\lambda \in F$ הוא ע״ע של A אמ״מ λ שורש של $f_A(t)$.

הוכחה: נובעת מכך ש $f_A(t) = \det(tI - A)$ וכשנציב את λ נקבל את המשפט.

הפולינום המינימלי

יהי f פולינום $f(t)=\sum_{i=0}^{k} a_i t^i$; $0 \le i \le k; a_i \in F$ ותהי $B \in M_n(F)$

נגדיר : $f(B)=\sum_{i=0}^{k} a_i B^i = a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \cdots + a_k B^k$

ברור כי $f(B) \in M_n(F)$

הגדרה : אם f(B)=0 אנו אומרים שB מאפסת את f.

טענה : תהי $B \in M_n(F)$ אזי קיים פולינום מעל שדה F שאינו פולינום האפס המתאפס ע״י מטריצה B.

הוכחה : $M_n(F)$ הוא מרחב לינארי מעל שדה f יתירה מזאת $\dim M_n(F)=n^2$ נסמן $k=n^2$ ונתבונן בסדרת מטריצות $I, B, B^2, ..., B^k$ בסדרה זו יש k+1 מטריצות דהיינו הן תלויות לינארית ז״א קיימים מקדמים $a_0, a_1, ..., a_k \in F$ לא כולם אפס כך ש

$$a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \cdots + a_k B^k = 0$$

נגדיר פולינום $f(t)=\sum_{i=0}^{k} a_i t^i$ אזי הנוסחה האחרונה מקבלת את הצורה שבה f(B)=0 אבל f איננו פולינום האפס.

הגדרה : הפולינום המתוקן ממעלה מינימלית המתאפס ע״י מטריצה A נקרא הפולינום המינימלי של A.

טענה : הפולינום המינימלי הוא יחיד.

הוכחה : נניח שלמטריצה B יש שני פולינומים מינימליים f,g השונים זה מזה. ברור ש $k=\deg f=\deg g$ אזי :

$$f(t)=a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k$$

$$g(t)=b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_{k-1} t^{k-1} + t^k$$

נתבונן ב $r(t)=f(t)-g(t)$, לפי הנחה r(t)איננו פולינום האפס הוא פולינום ממעלה $m \le k-1$: $r(t)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)t+(a_2-b_2)t^2+\cdots+(a_{k-1}-b_{k-1})t^{k-1}$ ברור ש $r(B)=f(B)-g(B)=0$. כמו כן נרשום : $r(t)=c_0+c_1 t+c_2 t^2+\cdots+c_{m-1}t^{m-1}+c_m t^m$ כאשר $m \le k-1; c_m \ne 0$.

ונקבל $r(t)=c_m\left(\frac{c_0}{c_m}+\frac{c_1}{c_m}t+\frac{c_2}{c_m}t^2+\cdots+\frac{c_{m-1}}{c_m}t^{m-1}+t^m\right)=c_m r_1(t)$ אבל $r_1(t)$ מתוקן ו $r_1(B)=0$ בסתירה למינימליות של f,g ולכן f,g לא יכולים להיות שונים זה מזה.

מעבר בסיסים

נניח כי W,V שני מרחבים לינאריים מעל F $T:V\to W$ העתקה לינארית. יהי Γ,Γ' שני בסיסים של V ו Φ,Φ' בסיסים של W. סימנו $A=[T]_{\Phi}^{\Gamma}$ בתור מטריצת ההעתקה ביחס לבסיסים Φ,Γ

$I_v:V\to V$ כך ש $I_v(v)=v$ לכל $v\in V$ נקראת העתקת הזהות ב V. נניח שP מטריצת המעבר מ Γ ל'Γ אזי $P=[I_v]_{\Gamma'}^{\Gamma}$

טענה: בסימונים הקודמים: $[T]_{\Phi'}^{\Gamma'}=[Iw]_{\Phi'}^{\Phi}[T]_{\Phi}^{\Gamma}[Iv]_{\Gamma}^{\Gamma'}$

נסמן: $A=[T]_{\Phi}^{\Gamma}$ המטריצה של T ביחס ל Φ,Γ

$B=[T]_{\Phi'}^{\Gamma'}$ המטריצה של T ביחס ל Φ',Γ'

P – מטריצת המעבר מ Γ ל'Γ - מטריצה הפיכה

Q- מטריצת המעבר מ Φ ל'Φ - מטריצה הפיכה

ואז הנוסחה תראה כך B=QAP (כאן A וB נקראות שקולות ולא שקולות שורה.

מקרה פרטי: $v=w;\Gamma=\Phi;\Gamma'=\Phi'$ ואז מקבלים: $[T]_{\Gamma'}^{\Gamma'}=[Iv]_{\Gamma'}^{\Gamma}[T]_{\Gamma}^{\Gamma}[Iv]_{\Gamma}^{\Gamma'}$

$A=[T]_{\Gamma}^{\Gamma}$ המטריצה של T ביחס ל Γ

$B=[T]_{\Gamma'}^{\Gamma'}$ המטריצה של T ביחס ל 'Γ

ואז נקבל את הנוסחה $B=P^{-1}AP$ ואז A וB נקראות דומות.

פולינומים שמקדמיהם מטריצות

הגדרה: ביטוי מן הצורה $f(t)=A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_kt^k;A_i\in M_n(f);0\le i\le k$ הוא פולינום שמקדמיו מטריצות.

סימון:קבוצת כל הפולינומים מסוג זה יסומנו $M_n(f)[t]$.

הערה:אם $f(t)u(t)=g(t)$ בהנחה ש t סקלאר בכפל פורמלי של פולינומים אין זה אומר ש $f(B)u(B)=g(B)$

דוגמה: $f(t)=tI-A=-A+tI\in M_n(f)[t]$

$f(t)f(t)=(tI-A)(tI-A)=t^2I-tA-At+A^2=t^2I-2tA+A^2=g(t)$ ומספיק שנבחר מטריצה B כך ש $AB\ne BA$ ונקבל $B^2I-BA-AB+A^2\ne B^2I-2BA+A^2$ כפי שרצינו להדגים.

טענה:יהי $u(t)=c_0+tc_1+\cdots+t^mc_m$ כאשר $c_k\in M_n(f)$ לכל $0\le k\le m$ וקיימת מטריצה $A\in M_n(f)$ נניח ש $(tI-A)u(t)=g(t)$ כאשר הכפל הפורמלי נעשה בהנחה ש T סקלאר. תהי $B\in M_n(f)$ כך ש $AB=BA$ אזי נקבל $(B-A)u(B)=g(B)$

הוכחה: נחשב פורמלית את g(t) בהנחה ש t סקלאר:

$$\left(tI-A\right)\left(c_0+tc_1+\cdots+t^mc_m\right)=tc_0+t^2c_1+\cdots+t^{m+1}c_m-Ac_0-tAc_1-\cdots-t^mAc_m=$$

$$-Ac_0+t(c_0-Ac_1)+t^2(c_1-Ac_2)+\cdots+t^m(c_{m-1}-Ac_m)+t^{m+1}c_m=g(t)$$

נציב את B ב g(B)

$$g(B)=-Ac_0+B(c_0-Ac_1)+B^2(c_1-Ac_2)+\cdots+B^m(c_{m-1}-Ac_m)+B^{m+1}c_m$$

מצד שני:

$$\left(B-A\right)u(B)=(B-A)\left(c_0+Bc_1+\cdots+B^mc_m\right)=Bc_0+B^2c_1+\cdots+B^{m+1}c_m-Ac_0-BAc_1-\cdots-B^mAc_m=$$

$$-Ac_0+B(c_0-Ac_1)+B^2(c_1-Ac_2)+\cdots+B^m(c_{m-1}-Ac_m)+B^{m+1}c_m$$

ושני הפיתוחים זהים לחלוטין ולכן $(B-A)u(B)=g(B)$ כנדרש.

תוצאה מהטענה:אם $u(t)=c_0+tc_1+\cdots+t^mc_m$ כאשר $c_k\in M_n(f)$ לכל $0\le k\le m$ ו $(tI-A)u(t)=g(t)$ כאשר הכפל הפורמלי נעשה בהנחה ש T סקלאר. אזי g(A)=0

הוכחה: AA=AA כי A מתחלף עם עצמו ולכן נציב $(A-A)u(A)=g(A)\Rightarrow g(A)=0$

סימון: נסמן ע"י $M_n(F[t])$ קבוצת כל המטריצות שאיבריהן פולינומים מעל F.

דוגמא: יהי $f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2$ כאשר $c_0=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix};c_1=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix};c_2=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$ אזי:

$$f(t)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3t&2-t^2\\0&1+4t+t^2\end{pmatrix}$$

כלומר שפולינום שמקדמיו מטריצות זוהי בעצם מטריצה שאיבריה פולינומים (כאשר מתייחסים לt כאל סקלר) ויסומן ב $\widetilde{f}(t)$

טענה 1: קיימת התאמה חח"ע ועל בין אברי $f(t)\in M_n(f)[t]$ לבין איברי $\widetilde{f}(t)\in M_n(F[t])$

טענה 2: עבור $f,g\in M_n(f)[t]$ מתקיים $\widetilde{f+g}=\widetilde{f}+\widetilde{g}$

טענה 3: עבור $f,g\in M_n(f)[t]$ מתקיים $\widetilde{fg}=\widetilde{f}\widetilde{g}$

משפט קיילי המילטון

משפט: תהי $A\in M_n(f)$ אזי $f_A(A)=0$ כאשר $f_A(t)$ הוא הפולינום האופייני של מטריצה A

הערה:
$$f_A(t)=\det(tI-A)$$
$$f_A(A)=\det(A-A)=\det(0)=0$$

תזכורת: תהי $A\in M_n(f)$, דטרמיננטת המטריצה המתקבלת מ A ע״י מחיקת שורה I ועמודה j נקראת המינור של A המתאים לכל איבר a_{ij} נסמן כל מינור M_{ij}.

נסמן: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ זהו המשלים האלגברי של a_{ij}

לכל $1\le i\le n$ מתקיים $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\det A$ לכל $1\le i\ne k\le n$ $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$

נסמן: המטריצה המצורפת של A
$$AdjA=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}=c$$

הוכחנו בסמסטר שעבר כי
$$A\cdot AdjA=\begin{pmatrix} \det A & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \det A\end{pmatrix}\ (*)$$

וכן שאם $\det A\ne 0$ אזי $A^{-1}=\frac{1}{\det A}AdjA$

נסמן: $A(t)=tI-A\in M_n(F)[t]$ אזי
$$\widetilde{A}(t)=\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn}\end{pmatrix}\in M_n(F[t])$$

(1) נסמן $Adj\widetilde{A}(t)=\widetilde{C}(t)\in M_n(F[t])$ ואזי לפי (*) נקבל:
$$\widetilde{A}(t)\widetilde{C}(t)=\begin{pmatrix} \det\widetilde{A}(t) & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \det\widetilde{A}(t)\end{pmatrix}\in M_n(F[t])$$
אבל $\det\widetilde{A}(t)=f_A(t)$ כלומר הוא הפולינום האופייני של A

רשמנו הטענה הבאה: יהיו $u,f,g\in M_n(F)[t]$ ו $\tilde{u},\tilde{f},\tilde{g}\in M_n(F[t])$ המתאימים אזי $u=fg$ אם ורק אם $\tilde{u}=\tilde{f}\tilde{g}$

לכן (1) גוררת את השוויון הבא (2) $A(t)C(t)=f_A(t)I$ אבל $A(t)=tI-A$ נסמן

$f_A(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i$ ונקבל סופית (3) $(tI-A)C(t)=\sum_{i=0}^{n}b_it^i=f_A(t)I$

הוכחנו טענה שאם $(tI-A)C(t)=f(t)$ כאשר $C(t)\in M_n(f)[t]$ אזי $f(A)=0$ ולכן כאן נקבל $f_A(A)=\sum_{i=0}^{n}A^i(b_iI)=0$ כלומר לסיכום הוכחנו כי לכל $A\in M_n(f)$ מתקיים $f_A(A)=0$.

טענה: יהי $u\in F[t]$ שאיננו פולינום האפס. אם $u(A)=0$ אז u מתחלק ב $m_A(t)$ (הפולינום המינימלי של A) בלי שארית.

הוכחה: נחלק את $u(t)$ ב $m_A(t)$ עם שארית אזי נקבל $u(t)=d(t)m_A(t)+r(t)$ כאשר $\deg r(t)<\deg m_A(t);d(t),r(t)\in F[t]$ או 0.

נציב $t=A$ ונקבל $0=u(A)=d(A)m_A(A)+r(A)\Rightarrow r(A)=0$

נניח בדרך השלילה ש r(t) איננו פולינום האפס אזי נקבל:

$r(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_kt^k;c_k\neq 0$

$c_kr_1(t)=\frac{c_0}{c_k}+\frac{c_1}{c_k}t+\cdots+t^k;\deg r_1(t)=\deg r(t)<\deg m_A(t)$ וכן $r_1(A)=0$ וזאת בסתירה למינימליות של $m_A(t)$. ולכן r(t) חייב להיות פולינום האפס.

משפט קיילי המילטון צורה סופית:

לכל $A\in M_n(f)$:

א. $f_A(t)$ מתחלק ב $m_A(t)$ ללא שארית.

ב. $\deg m_A(t)\le n$

הוכחה:

א. הוכחנו ש $f_A(A)=0$ וגם הוכחנו שאם $f(A)=0$ אזי fמתחלק ב $m_A(t)$ בלי שארית לכן $f_A(t)$ מתחלק ב $m_A(t)$ ללא שארית.

ב. $f_A(A)=0$ כמו כן $f_A(t)$ הוא פולינום מתוקן ולכן $\deg m_A(t)\le\deg f_A(t)=n$

טענה: יהי $g(t)\in M_n(F)[t]$ שאינו פולינום האפס כך ש $g(A)=0$ אזי קיים פולינום $h(t)\in M_n(F)[t]$ כך ש $g(t)=(tI-A)h(t)$

טענת עזר: לכל $k\ge 1$ מתקיים $t^kI-A^k=(tI-A)h_k(t)$ כאשר $h_k(t)=\sum_{i=0}^{k-1}t^iA^{k-1-i}$

הוכחה: $h_k(t)=A^{k-1}+tA^{k-2}+t^2A^{k-3}+\cdots+t^{k-2}A+t^{k-1}I$

לכן:

$$(tI-A)(A^{k-1}+tA^{k-2}+t^2A^{k-3}+\cdots+t^{k-2}A+t^{k-1}I)=$$
$$tA^{k-1}+t^2A^{k-2}+t^3A^{k-3}+\cdots+t^{k-1}A+t^kI-A^k-tA^{k-1}-t^2A^{k-2}+\cdots+t^{k-2}A^2+t^kI-t^{k-1}A=t^kI-A^k$$

כנדרש.

הוכחת הטענה: נרשום את g(t) בצורה המפורשת: $g(t)=c_0+tc_1+\cdots+t^lc_l$ אזי $0=g(A)=c_0+Ac_1+\cdots+A^lc_l$. ונקבל

$$g(t)=g(t)-g(A)=(tI-A)c_1+(t^2I-A^2)c_2+\cdots+(t^lI-A^l)c_l$$

לכן: $g(t)=\sum_{i=1}^{l}(t^iI-A^i)c_i=\sum_{i=1}^{l}(tI-A)h_i(t)c_i=(tI-A)\sum_{i=1}^{l}h_i(t)c_i=(tI-A)h(t)$ כנדרש.

טענה: הפולינום $m_A(t)$ מתחלק ב $f_A(t)$ ללא שארית.

הוכחה: נרשום את $m_A(t)$ בצורה מפורשת: $m_A(t)=\sum_{i=0}^{k}a_it^i$

נגדיר פולינום $m_A(t)I=M_A(t)=\sum_{i=0}^{k}a_it^iI$

$m_A(A)=0$ ולכן גם $M_A(A)=0$ ולכן לפי הטענה הקודמת קיים $h(t)\in M_n(F)[t]$ כך ש $M_A(t)=(tI-A)h(t)$ נעבור למטריצות (לפי האיזומורפיזם) $\widetilde{M}_A(t)=\widetilde{(tI-A)}\widetilde{h(t)}$

כלומר $\widetilde{h(t)}\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \vdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_A(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_A(t) \end{pmatrix}$ נקח את

הדטרמיננטה של שתי האגפים. ונקבל $M_A^n(t)=f_A(t)\det\widetilde{h(t)}$ כלומר הפולינום האופייני מחלק את הפולינום המינימלי בלי שארית.

תוצאה: תהי $A\in M_n(f)$ התנאים הבאים שקולים:

א. $\lambda\in F$ הוא ע"ע של מטריצה A

ב. $f_A(\lambda)=0$

ג. $m_A(\lambda)=0$

הוכחה:

א $\Leftrightarrow$ ב -הוכחנו כבר.

ב $\Leftarrow$ ג - $M_A^n(t)=f_A(t)\mathrm{d}(t)$ ולכן $M_A^n(\lambda)=f_A(\lambda)\mathrm{d}(\lambda)$ ולכן $M_A^n(\lambda)=0$ כלומר $m_A(\lambda)=0$

ג $\Leftarrow$ ב – לפי משפט קיילי המילטון $f_A(t)=m_A(t)d_1(t)$ אבל לפי הנחה $m_A(\lambda)=0$ ולכן $f_A(\lambda)=0$

השלמה בנושא הפולינומים מעל C :

יהי $f(t)\in\mathbb{C}[t]$ אזי :

א. ל f יש שורש אחד לפחות $\alpha\in\mathbb{C}$ (הנשפט היסודי של האלגברה)

ב. אם $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ הם השורשים השונים של f אזי

$f(t)=a_n(t-\alpha_1)^{n_1}(t-\alpha_2)^{n_2}\cdots(t-\alpha_k)^{n_k}$ כאשר a_n - המקדם העליון של f

$$\sum_{i=1}^{k}n_i=n;1\le i\le k;n_i\ge 1$$

ג. יהי $g(t)\in\mathbb{C}[t]$ שאינו פולינום האפס, אם f מתחלק ב g בלי שארית אזי כל שורש של g הוא שורש של f , יתירה מזאת

$g(t)=b_m(t-\alpha_1)^{m_1}(t-\alpha_2)^{m_2}\cdots(t-\alpha_k)^{m_k}$ כאשר b_m - המקדם העליון של g

$$\sum_{i=1}^{k}m_i=m;0\le m_i\le n_i;m=\deg g$$

תוצאה:תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ אזי :

א. $f_A(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_k)^{n_k}$ כאשר $1\le i\le k;\lambda_i\in\mathbb{C}$ הם הערכים העצמיים של A השונים זה מזה בפרט $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$

ב. $m_A(t)=(t-\lambda_1)^{l_1}(t-\lambda_2)^{l_2}\cdots(t-\lambda_k)^{l_k}$ כאשר $1\le l_i\le n_i$

מרחבי מכפלה פנימית

מכפלה סקלארית:

יהי V מ"ו מעל R

הגדרה: העתקה המתאימה לכל זוג של וקטורים $v,u\in V$ את מספר $(u,v)\in R$ נקראת מכפלה סקלארית אם היא מקיימת את הדרישות הבאות:

א. $(u,v)=(v,u)$ - סימטריות.

ב. $(u_1+u_2,v)=(u_1,v)+(u_2,v)$ לכל $v,u_1,u_2\in V$ - לינאריות.

ג. לכל $v,u\in V$ ולכל $\alpha\in R$ מתקיים $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$ - הומוגניות.

ד. אם $v\in V$ שונה מאפס אזי $(v,v)>0$ - חיוביות.

דוגמאות:

א. המכפלה הסקלארית הקלאסית: $(v,u)=\|u\|\|v\|\cos\varphi; v,u\in R^3$

ב. $u,v\in R^n$ כלומר $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$ $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ נגדיר $(u,v)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

ג. יהי V מרחב n מימדי מעל R נבחר בV בסיס כלשהו $v_1\dots v_n$ ונבחר n מספרים $a_1\dots a_n$ חיוביים. יהו $u,v\in V$ שרירותיים אזי

$$u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i;v=\sum_{i=1}^{n}\beta_iv_i \quad \text{נגדיר} \quad (u,v)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_ia_i$$

ד. נסמן $V=C([0,1])$ - קבוצת כל הפונקציות הרציפות בעלות תחום ההגדרה $[0,1]$ עבור $f,g\in V$ נגדיר $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$

טענה 1: $\left(\sum_{m=1}^{k}\alpha_mu_m,v\right)=\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\left(u_m,v\right)$ לכל $\alpha_1,\alpha_2...,\alpha_k\in\mathbb{R},u_1,u_2...,u_k,v\in V$

טענה 2: $\left(v,\sum_{m=1}^{k}\alpha_m,u_m\right)=\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\left(v,u_m\right)$

טענה 3: $(0,u)=(u,0)=0$ לכל $u\in V$

מרחבים אוניטריים:

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל C, ההעתקה המתאימה לכל זוג $u,v\in V$ מספר $(u,v)\in\mathbb{C}$ נקראת הרמטית אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

א. $(u,v)=\overline{(v,u)}$ - הרמטיות.

ב. $(u_1+u_2,v)=(u_1,v)+(u_2,v)$ לכל $v,u_1,u_2\in V$ - לינאריות.

ג. לכל $v,u\in V$ ולכל $\alpha\in R$ מתקיים $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$ - הומוגניות.

ד. אם $v\in V$ שונה מאפס אזי $(v,v)>0$ - ממשי וחיובי.

הגדרה: מ"ו מעל C שבו מוגדרת מכפלה פנימית נקרא מרחב אוניטרי. מרחבים אוקלידיים ואוניטרים נקראים מרחבי מכפלה פנימית.

טענה: יהי V מרחב אוניטרי $\alpha,\beta\in C, u,v\in V$ אזי $(\alpha u,\beta v)=\alpha\overline{\beta}(u,v)$

הוכחה: $(\alpha u,\beta v)=\overline{(\beta v,\alpha u)}=\beta\overline{(v,\alpha u)}=\overline{\beta}(\alpha u,v)=\alpha\overline{\beta}(u,v)$

טענה: יהי V מרחב אוניטרי $\alpha_1,\alpha_2...,\alpha_k\in C, u_1,u_2...,u_k,v\in V$ אזי:

$$\left(\sum_{m=1}^{k}\alpha_m u_m,v\right)=\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\left(u_m,v\right)$$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה:

אם k=1 נקבל $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$ מתכונה שלוש של המכפלה ההרמטית

נניח נכונות הטענה עבור K ונוכיח עבור k+1 ואכן:

$$\left(\sum_{m=1}^{k+1}\alpha_m u_m,v\right)=\left(\sum_{m=1}^{k}\alpha_m u_m+\alpha_{k+1}u_{k+1},v\right)=\left(\sum_{m=1}^{m}\alpha_m u_m,v\right)+(\alpha_{k+1}u_{k+1},v)=$$

$$\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\left(u_m,v\right)+\alpha_{k+1}(u_{k+1},v)=\sum_{m=1}^{k+1}\alpha_m\left(u_m,v\right)$$

טענה: בתנאי הטענה הקודמת $\left(v,\sum_{m=1}^{k}\alpha_m u_m\right)=\sum_{m=1}^{k}\overline{\alpha}_m\left(v,u_m\right)$

הוכחה: $\left(v,\sum_{m=1}^{k}\alpha_m u_m\right)=\overline{\left(\sum_{m=1}^{k}\alpha_m u_m,v\right)}=\overline{\sum_{m=1}^{k}\alpha_m\left(u_m,v\right)}=\sum_{m=1}^{k}\overline{\alpha}_m\overline{\left(u_m,v\right)}=\sum_{m=1}^{k}\overline{\alpha}_m\left(v,u_m\right)$

הערה: אותן התכונות נכונות גם במרחבים אוקלידים מעל R אך יש לזכור שבמקרה זה $\alpha=\overline{\alpha}$ לכל $\alpha\in R$.

סימון: יהי V מרחב מכפלה פנימית נסמן $\|v\|=\sqrt{(v,v)}$ (מוצדק כי (v,v) תמיד גדול מאפס לפי תכונה ד'.

טענה 1: $\|v\|\geq 0$ לכל $v\in V$ יתירה מזאת $\|v\|=0$ אמ"מ V=0 (נובע מההגדרה)

טענה 2: יהי V מרחב מכפלה פנימית $\alpha\in F, v\in V$ אזי $\|\alpha v\|=|\alpha|\|V\|$.

הוכחה:נוכיח עבור המקרה האוניטרי:

תזכורת: $x,y\in\mathbb{R};\alpha=x+iy;|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2}$

אם y=0 אזי $|\alpha|=\sqrt{x^2}=|x|$

לכל $\alpha\in\mathbb{C}$ $\alpha+\overline{\alpha}=2re\alpha;\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$

הוכחה: $\|\alpha v\|^2=(\alpha v,\alpha v)=\alpha\overline{\alpha}(v,v)=|\alpha|^2\|v\|^2$ ולכן $\|\alpha v\|=|\alpha|\|V\|$

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית $v,u\in V$ אזי $\|u\pm v\|=\|u\|^2\pm 2re(u,v)\pm\|v\|^2$

הוכחה:

$$\|u+v\|^2=(u+v,u+v)=(u,u+v)+(v,u+v)=(u,u)+(u,v)+(v,u)+(v,v)=$$

$$\|u\|^2+(u,v)+\overline{(u,v)}+\|v\|^2=\|u\|^2+2re(u,v)+\|v\|^2$$

הגדרה: יהי V מרחב מכפלה פנימית $0\neq v,u\in V$ נסמן $\cos(u,v)=\dfrac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$

דוגמא:

אי שוויון קושי שוורץ

משפט: יהי V מרחב מכפלה פנימית $v,u \in V$ אזי:

1. $|(u,v)| \le \|u\|\|v\|$
2. השויון מתקיים אם ורק אם u,v תלויים לינארית.

דוגמאות:

א. ב $R^2 or R^3$

$$(v,u) = \|u\|\|v\|\cos\varphi$$
$$|(v,u)| = \|u\|\|v\||\cos\varphi| \le \|u\|\|v\|$$

ב. $u,v \in R^n$ כלומר $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ נגדיר $(u,v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i}$$

ג. ב $\mathbb{C}^n$ אי השויון הנ"ל מקבל את הצורה: $\left(\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)$

ד. $V = C([a,b])$ - קבוצת הפונקציות הרציפות המוגדרות על [a,b] :

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt; \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|^2 \le \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

הוכחה:

שלב א. נחשב את הביטוי הבא:

$$\|\alpha u - \beta v\|^2 ; \alpha = \|v\|^2 \in \mathbb{R}; \beta = (u,v) \in \mathbb{C}$$
$$\|\alpha u - \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 - 2re\alpha\overline{\beta}(u,v) + \|\beta v\|^2 =$$
$$|\alpha|^2\|u\|^2 - 2re\alpha\overline{\beta}(u,v) + |\beta|^2\|v\|^2 =$$
$$|\alpha|^2\|u\|^2 - 2re\alpha\overline{\beta}\beta + |\beta|^2\alpha =$$
$$|\alpha|^2\|u\|^2 - 2\alpha|\beta|^2 + |\beta|^2\alpha =$$
$$|\alpha|^2\|u\|^2 - |\beta|^2\alpha =$$
$$\alpha(\alpha\|u\|^2 - |\beta|^2) =$$
$$\|v\|^2(\|v\|^2\|u\|^2 - |(u,v)|^2)$$

שלב ב:

א. אם $v \ne 0$ אזי $0 \le \frac{\|\alpha u - \beta v\|^2}{\|v\|^2} = \|v\|^2\|u\|^2 - |(u,v)|^2$

ומכאן $\left|(u,v)\right|^2 \le \|v\|^2\|u\|^2$

$\left|(u,v)\right| \le \|v\|\|u\|$

אם $v=0$ אזי $0=\left|(u,v)\right|=\|v\|\|u\|=0$

ב.נניח ש u.v תלויים לינארית זאת אומרת קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ כך ש $\alpha u+\beta v=0$ כאשר לפחות סקלאר אחד שונה מאפס. יש שני אפשרויות:

1. אם $\alpha=0$ אזי $\beta\neq 0$ וגם $\beta v=0$ כלומר v=0 ואזי $0=\left|(u,v)\right|=\|v\|\|u\|=0$

2. אם $\alpha\neq 0$ אז $u=-\dfrac{\beta}{\alpha}v$ ז"א $u=tv$ כאשר $t=-\dfrac{\beta}{\alpha}\in\mathbb{C}$ ואזי

$$\left|(u,v)\right|=\left|(tv,v)\right|=\left|t(v,v)\right|=|t|\|v\|^2=\|tv\|\|v\|=\|u\|\|v\|$$

בכיוון השני: נניח $(1)\left|(u,v)\right|=\|v\|\|u\|$ ונוכיח ש u,v תלויים לינארית

לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|\alpha u-\beta v\|^2=\|v\|^2(\|v\|^2\|u\|^2-\left|(u,v)\right|^2)$ אם (1) מתקיים אזי $\|\alpha u-\beta v\|^2=0$ ז"א $\alpha u-\beta v=0$ כאשר $\alpha=\|v\|^2$. יש שני אפשרויות:

א. אם $\alpha=0$ אזי $\beta\neq 0$ וגם $\beta v=0$ כלומר v=0 ולכן u,v תלויים לינארית.

ב. אם $\alpha\neq 0$ אזי $\alpha u-\beta v=0$ והם תלויים לינארית.

תזכורת:אם $\alpha=x+iy\in\mathbb{C}$ אזי $|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{x^2}=|x|\ge x$

משפט אי שויון המשולש:

1. $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$ ושויון מתקיים רק אם הוקטורים תלויים לינארית.
2. תוצאה: $\left|\|u\|+\|v\|\right|\le\|u-v\|$

הוכחה:

$$\|u+v\|^2=\|u\|^2+2re(u,v)+\|v\|^2\le\|u\|^2+2\left|(u,v)\right|+\|v\|^2\le\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2$$

נוציא שורש ונקבל: $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$

ברור שאם אחד הוקטורים הוא אפס אזי מתקיים שויון לכן נדון רק במקרה שבו שניהם שונים מאפס ואז נסמן $u=tv$.

הוכחה:

א. נניח שקיים $0<t\in R$ כך ש $u=tv$ אזי

$$\|u+v\|=\|t(v,v)\|=\|(t+1)v\|=|t+1|\|v\|=(t+1)\|v\|$$

$$\|u\|+\|v\|=\|tv\|+\|v\|=|t|\|v\|+\|v\|=(t+1)\|v\|$$

ב. נניח $\|u+v\|=\|u\|+\|v\|$ אזי:

$$\|u+v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\|v\|^2+2re(v,u)+\|u\|^2=\|v\|^2+2\|v\|\|u\|+\|u\|^2$$

$$(1)re(v,u)=\|v\|\|u\|$$

אבל לכל מספר מרוכב $\alpha\in\mathbb{C}$ $re\alpha\le|\alpha|$ יתירה מזאת אם $re\alpha=|\alpha|$ אזי α ממשי ולכן $re(v,u)\le\left|(v,u)\right|\le\|v\|\|u\|$ לכן יוצא מ(1) $re(v,u)=\left|(v,u)\right|=\|v\|\|u\|$

ולכן u,v תלויים לינארית זאת אומרת קיים $t \in \mathbb{C}$ כך ש $u = tv$ וגם
$(v,u) \in \mathbb{R}$ ויתירה מזאת $(v,u) \geq 0$ ולכן $\bar{t}\|v\|^2 = \bar{t}(v,v) = (v,tv) \geq 0$

לכן $t,\bar{t} \in \mathbb{R}$ ואזי $t = \bar{t} = \frac{(v,tv)}{\|v\|^2} \geq 0$ וכן $t \neq 0$ אחרת u=0.

הוכחת התוצאה:

הטענה שקולה לטענה $-\|u-v\| \leq \|u\| - \|v\| \leq \|u-v\|$

לפי אי שויון המשולש מתקיים:

$$\|u\| = \|(u-v)+v\| \leq \|u-v\| + \|v\|$$

$$(1)\ \|u\| - \|v\| \leq \|u-v\|$$

$$\|v\| = \|(v-u)+u\| \leq \|v-u\| + \|u\|$$

אבל: $\|v-u\| = \|-(u-v)\| = |-1|\|u-v\| = \|u-v\|$

$$\|v\| \leq \|u-v\| + \|u\|$$

ולכן: $\|v\| - \|u\| \leq \|u-v\| / (-1)$

$$(2)\ -\|u-v\| \leq \|u\| - \|v\|$$

ומחיבור של (1) ו(2) נקבל את ההוכחה.

פונקציית המרחק:

הגדרה: תהי d(u,v) פונקציה ממשית של וקטורים $v,u \in V$ פונקציה ג נקראת פונקציית מרחק אם מקיימת את התנאים הבאים:

א. סימטריות d(u,v)=d(v,u) לכל $v,u \in V$
ב. d(u.v)≥0 יתירה מזאת d(u,v) = 0 אם ורק אם u=v
ג. d(u,v)≥d(u,w)+d(w,v) לכל $v,w,u \in V$

דוגמא: נגדיר את הפונקציה להיות $\|u-v\|$ =d(u,v), פונקציה זו מקיימת את כל שלושת התנאים לפונקציית מרחק.

מערכות אורתונורמליות

החל מכאן V מרחב מכפלה פנימית.

הגדרה: אנו אומרים ש $v,u\in V$ ניצבים (אורתוגונליים) זה לזה אם (u,v)=0 נסמן שני וקטורים כאלו: $u\perp v$.

הגדרה: סדרת וקטורים $u_1,u_2...,u_k\in V$ נקראת אורתוגונלית אם לכל $i\neq j$ $1\leq i,j\leq k$ מתקיים $u_i\perp v_j$.

הגדרה: סדרת וקטורים $u_1,u_2...,u_k\in V$ נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונלית ובנוסף לכך לכל וקטור מתקיים $\|u_i\|=1$.

הערה: לכל $v\in V$ השונה מאפס ניתן להגדיר $u=\frac{1}{\|v\|}v$ כך ש $\|u\|=1$ לכן אם סדרה $v_1,v_2,...,v_k\in V$ סדרה אורתוגונלית ניתן להגדיר סדרה חדשה $u_i=\frac{1}{\|v_i\|}v_i$ וברור שהסדרה החדשה היא אורתונורמלית.

משפט: תהי $u_1,u_2...,u_k\in V$ סדרה אורתונורמלית ויהי $v\in V$ אם $v=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i$ אז $a_i=(v,u_i)$ לכל $1\leq i\leq k$

הוכחה: יהי u_j אחד מוקטורי הסדרה אזי:

$$(v,u_j)=(\sum_{i=1}^{n}a_iu_i,u_j)=\sum_{i=1}^{n}a_i(u_i,u_j)=a_j(u_j,u_j)=a_j\|u_j\|^2=a_j$$

כי $\|u_j\|=1$ ועבור $i\neq j$ מתקיים $(u_i,u_j)=0$

תוצאה 1: אם $u_1,u_2...,u_k\in V$ סדרה אורתונורמלית אז היא בת"ל.
הוכחה: נניח בדרך השלילה שהיא תלויה לינארית, אזי קיימים המקדמים $a_1,a_2,...,a_k\in F$ לא כולם אפס כך ש $\sum_{i=1}^{n}a_iu_i=0$ ולכן לפי המשפט לכל $1\leq i\leq k$ $a_i=(0,u_i)=0$ בסתירה להנחה.

תוצאה 2: אם $u_1,u_2...,u_k\in V$ סדרה אורתונורמלית ב V ו $v\in sp(u_1...u_k)$ אזי $\|v\|^2=\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2$ כאשר $a_i=(v,u_i)$

הוכחה: אם $v\in sp(u_1...u_k)$ אזי קיימים מקדמים $a_1,a_2,...,a_k\in F$ כך ש $v=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i$ לכן לפי המשפט $a_i=(v,u_i)$ לכל $1\leq i\leq k$ ולכן מתקיים:

$$\|v\|^2=(v,v)=(\sum_{i=1}^{k}a_iu_i,v)=\sum_{i=1}^{k}a_i(u_i,v)=\sum_{i=1}^{k}a_i\overline{(v,u_i)}=\sum_{i=1}^{k}a_i\overline{a_i}=\sum_{i=1}^{k}|a_i|^2$$

תזכורת: **משפט פיתגורס**: אם $v,u\in V$ כך ש $v\perp u$ אזי $\|v\|^2+\|u\|^2=\|u+v\|^2$

הוכחה: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2re(u,v)+\|v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$

תוצאה 3: $u_1,u_2...,u_k\in V$ סדרה אורתונורמלית ויהי $v\in V$ שרירותי נגדיר $a_i=(v,u_i)$ ונבנה וקטור חדש $g=\sum_{i=1}^{k}a_iu_i$ אזי w=v-g ניצב ל u_i לכל $1\le i\le k$

הוכחה: לפי המשפט $a_i=(g,u_i)$ לכל $1\le i\le k$ ולכן

$(w,u_i)=(v-g,u_i)=(v,u_i)-(g,u_i)=a_i-a_i=0$ לכל $1\le i\le k$

הגדרה: יהי U תת מרחב של V אנו אומרים ש $v\in V$ ניצב ל U אם $v\perp u$ לכל $u\in U$ הסימון: $v\perp U$.

טענה: יהי $u=sp(v_1...v_k)$ כאשר $v_1...v_k\in V$ $v\in V$ וקטור כלשהו אזי $v\perp U$ אם ורק אם $v\perp v_j$ לכל $1\le j\le k$

הוכחה: ברור שאם $v\perp U$ אזי $v\perp v_j$ לכל $1\le j\le k$

בכיוון השני יהי $u\in U$ וקטור שרירותי אזי $u=\sum_{j=1}^{k}a_ju_j$ ולכן אם $v\perp v_j$ לכל $1\le j\le k$ אזי $(u,v)=(v,\sum_{j=1}^{k}a_jv_j)=\sum_{j=1}^{k}\overline{a_j}(v,v_j)=0$

תהליך גרהאם שמידט:

משפט: תהי $v_1...v_k\in V$ סדרת וקטורים בת״ל אזי ניתן לבנות מערכת אורתונורמלית $u_1,u_2...,u_k\in V$ כך ש $sp(v_1...v_m)=sp(u_1...u_m)$ לכל $1\le m\le k$

הוכחה: נגדיר סדרת ביניים $w_j\in V$ לכל $1\le j\le k$

נסמן $U_m=sp(u_1...u_m)$ $W_m=sp(v_1...v_m)$

נגדיר:

$w_1=v_1$	$u_1=\frac{1}{\|w_1\|}w_1$
$w_2=v_2-(v_2,u_1)u_1$	$u_2=\frac{1}{\|w_2\|}w_2$
$w_3=v_3-(v_3,u_1)u_1-(v_3,u_2)u_2$	$u_3=\frac{1}{\|w_3\|}w_3$

ברור ש $\|u_j\|=1$ לכל $1\le j\le 3$. כמו כן ברור ש $U_1=W_1=sp(v_1)$

כעת נבדוק עבור 2:

$$(w_2,u_1)=(v_2-(v_2,u_1)u_1,u_1)=(v_2,u_1)-(v_2,u_1)(u_1,u_1)=(v_2,u_1)-(v_2,u_1)=0$$

ולכן $(u_2,u_1)=\frac{1}{\|w_2\|}(w_2,u_1)=0$

האם $U_2=W_2$?

$u_1\in U_1=W_1=sp(v_1)\subset W_2=sp(v_1,v_2)$

ברור ש v_2 שייך ל W_2 וגם גם w_2 שייך ל W_2 כי הוא צירוף לינארי של v_2 ו u_1, לכן גם u_2 שייך ל W_2 ולכן U_2 מוכל ב W_2 אבל מכיוון שהמימד של U_2 הוא 2 כי הוא מורכב מ span של וקטורים בת״ל וגם מימד W_2 הוא 2 ברור כי $W_2=U_2$

המשך הוכחה באינדוקציה:

עבור k=1,2 הוכחנו.

נניח שקיבלנו סדרת וקטורים $v_1...v_k,v_{k+1}\in V$ בת״ל ובנינו סדרת וקטורים אורתונורמליים $u_1,u_2...,u_k\in V$ כך ש $sp(v_1...v_m)=sp(u_1...u_m)$ לכל $1\le m\le k$

כעת נציב בתוצאה3 את v_{k+1} :

$$w_{k+1}=v_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}(v_{k+1},u_j)u_j$$

אזי w_{k+1} אורתוגונלי ל $U_k=sp(u_1\ldots u_k)$

נניח בשלילה כי $w_{k+1}=0$ אזי $v_{k+1}=\sum_{j=1}^{k}(v_{k+1},u_j)u_j\in U_k$ אבל לפי הנחת האידוקציה $U_k=W_k$ לכן נקבל ש v_{k+1} שייך ל W_k וזאת בסתירה להנחה כי $v_1...v_k,v_{k+1}\in V$ בת״ל

ולכן $w_{k+1}\ne 0$ וניתן להגדיר $u_{k+1}=\frac{1}{\|w_{k+1}\|}w_{k+1}$ ואזי $(u_{k+1},u_j)=0$ לכל $1\le j\le k$

נשאר להוכיח ש $U_{k+1}=W_{k+1}$:

אכן כמו כן $w_{k+1}\in W_{k+1}$ כי הוא צ״ל של $u_1,u_2...,u_k,v_{k+1}$ ולכן גם $u_{k+1}\in W_{k+1}$.

מסקנה : $U_{k+1}\subset W_{k+1}$.

אבל $\dim W_{k+1}=k+1$ וגם $\dim U_{k+1}=k+1$ ולכן ברור ש $U_{k+1}=W_{k+1}$.

תוצאה:

יהי V מרחב מכפלה פנימית (מעל R או C) ויהי U ת״מ של V בעל מימד סופי אזי ניתן לבחור בסיס אורתונורמלי של U.

הוכחה: יהי $v_1...v_k\in U$ בסיס של U נפעיל על סדרה זו תהליך גרהם שמידט ונקבל סדרה אורתונורמלית $u_1,u_2...,u_k\in U$ כך ש $sp(v_1...v_m)=sp(u_1...u_m)$ לכל $1\le m\le k$,

ובפרט זה נכון עבור m=k ומכיוון שכל סדרה אורתונורמלית היא בת״ל אזי $u_1,u_2...,u_k\in U$ מהווים בסיס אורתונורמלי של U.

סכומים וסכומים ישרים של תתי מרחבים

יהי V מרחב לינארי מעל שדה F כלשהו ויהיו U_1,U_2,W תתי מרחבים של V כך ש $U_1 \subset W$ וגם $U_2 \subset W$ אנו אומרים ש W הוא הסכום של U_1 ו U_2 אם לכל $v \in W$ ניתן למצוא $u_1 \in U_1$ ו $u_2 \in U_2$ כך ש $v = u_1 + u_2$.

הגדרה: בתנאי ההגדרה הקודמת אנו אומרים ש W הוא סכום ישר של U_1 ו U_2 אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $W = U_1 + U_2$

ב. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

הסימון יהיה $W = U_1 \oplus U_2$

טענה: אם $W = U_1 \oplus U_2$ אזי קיים $u_1 \in U_1$ ו $u_2 \in U_2$ יחידים אשר לכל $v \in W$ מקיימים $v = u_1 + u_2$.

הוכחה: נניח ש $v = u_1 + u_2$ וגם $v = u_1' + u_2'$ כאשר $u_1, u_1' \in U_1$ וגם $u_2, u_2' \in U_2$

$$u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \Rightarrow u_1 - u_1' = u_2 - u_2' \Rightarrow u_1 - u_1' \in U_1 \bigcap U_2 = \{0\} \Rightarrow u_1 = u_1'$$

טענה 2: אם $W = U_1 \oplus U_2$ ו W בעל מימד סופי אזי $\dim W = \dim U_1 + \dim U_2$

הוכחה: נבחר בסיס $v_1 ... v_k \in U_1$ בסיס של U_1 ונבחר בסיס $u_1, u_2 ..., u_m \in U_2$ של U_2 נוכיח ש $v_1 ... v_k, u_1 ... u_m$ בסיס של W. ראשית נוכיח שקבוצה זו הנה בת״ל:

$$t_1 v_1 + ... + t_k v_k + t_{k+1} u_1 + ... + t_{k+m} u_m = 0$$
$$t_1 v_1 + ... + t_k v_k = -t_{k+1} u_1 - ... - t_{k+m} u_m$$

וקטור זה שייך גם ל U_1 וגם ל U_2 שהחיתוך ביניהם כידוע הוא וקטור האפס בלבד.
ולכן נקבל: $t_1 v_1 + ... + t_k v_k = 0$ ומכיוון ש $v_1 ... v_k \in U_1$ בסיס אזי נקבל כי $t_i = 0$ לכל $1 \le i \le k$ וממשיכים לפי הוכחת משפט המימדים.

הערה: כמובן שזהו מקרה פרטי של משפט המימדים:
אם $W = U_1 + U_2$ אזי $\dim W = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \bigcap U_2)$

המשלים האורתוגונלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית (מעל R או C) ויהי U ת״מ של V בעל מימד סופי.

הגדרה: קבוצת כל הוקטורים של V הניצבים ל U נקראת המשלים האורתוגונלי של U הסימון יהיה: $U^\perp := \{w \in V : w \perp U\}$

טענה 1: $U^\perp$ הנו ת״מ לינארי של V.
הוכחה:
א. $0 \in U^\perp$ כי $(0,v)=0$ לכל $v \in U$. **קבוצה לא ריקה**
ב. אם $w_1, w_2 \in U^\perp$ אזי לכל $v \in U$ מתקיים $(v, w_1+w_2)=(v,w_1)+(v,w_2)=0+0=0$
ולכן $w_1+w_2 \perp U$ ולכן $w_1+w_2 \in U^\perp$. **סגירות לחיבור**
ג. אם $t \in F$ ו $w \in U^\perp$ אזי לכל $v \in U$ נקבל $(v,tw)=\bar{t}(v,w)=\bar{t}\bullet 0=0$ ולכן $tw \in U^\perp$.
סגירות לכפל.
ולכן $U^\perp$ הוא ת״מ.

משפט: יהי V מרחב מכפלה פנימית בעל מימד סופי, U תת מרחב של V אזי $V=U \oplus U^\perp$.
הוכחה: נבחר בסיס אורתונורמלי של U, $u_1,u_2...,u_k \in U$.
הוכחנו שעבור כל $v \in V$ קיימים וקטורים w ו g כך ש
$g=\sum_{i=1}^{k}(v,u_i)u_i \in U$, $w=v-g \in U^\perp$ כך שבעצם אנו מקבלים כי v=w+g לכן $V=U+U^\perp$. כעת נניח כי $v \in U \cap U^\perp$ אזי $(v,v)=0$ ולכן v=0 ז״א $U \cap U^\perp=\{0\}$ דהיינו $V=U \oplus U^\perp$ כנדרש.

טענה 2: יהי V מרחב מכפלה פנימית בעל מימד סופי U תת מרחב של V אזי $(U^\perp)^\perp=U$.
הוכחה: נניח ש $v \in U$ אזי עבור כל $w \in U^\perp$ נקבל ש $(w,v)=0$ ז״א v ניצב ל $U^\perp$ ולכן $v \in (U^\perp)^\perp$, כלומר $U \subset (U^\perp)^\perp$.
בכיוון השני נניח עכשיו כי $v \in (U^\perp)^\perp$ אזי $(v,w)=0$ לכל $w \in U^\perp$ אבל $V=U \oplus U^\perp$ כלומר קיימים וקטורים $w \in U^\perp$ ו $g \in U$ כך ש v=g+w לכן:
$\|w\|^2=(w,w)=(w,v-g)=(w,v)-(w,g)=0-0=0$ כלומר w=0 ולכן v=g כלומר $v \in U$ כנדרש לכן $(U^\perp)^\perp \subset U$ כלומר $U=(U^\perp)^\perp$ כנדרש.

״מירכוב״ של מרחבים לינאריים מעל R

יהי V מרחב לינארי מעל R נגדיר קבוצת כל הביטויים הפורמליים מן הצורה הבאה: $v_1 + iv_2$ כאשר $i \in \mathbb{C}, v_1, v_2 \in V$ כלומר $\overline{V} = \{v_1 + iv_2 : v_1, v_2 \in V\}$

אנו אומרים ש $v_1 + iv_2 = u_1 + iu_2$ אם״ם $v_1 = u_1 \wedge v_2 = u_2$.

נגדיר חיבור: $(v_1 + iv_2) + (u_1 + iu_2) = (v_1 + u_1) + i(v_2 + u_2)$

נגדיר כפל: אם $z \in \mathbb{C}$ כלומר $z = x + iy$ אזי $z \bullet (v_1 + iv_2) = (xv_1 + yv_2) + i(xv_2 + yv_1)$

על מנת להוכיח שזהו מרחב לינארי מעל C יש צורך להוכיח את כל התכונות של מרחבים לינאריים.

העתקות לינאריות במרחבי מכפלה פנימית

פונקציונליים לינאריים במרחבי מכפלה פנימית.

הגדרה: פונקציונל לינארי המוגדר במרחב לינארי V מעל F הוא העתקה לינארית מ V ל F.

הערה: F הוא מ"ו מעל F כאשר dimF=1.

תזכורת: Hom(V,W) – מרחב כל ההעתקות הלינאריות מ V לW.

בפרט אם dimV=n ו dimW=m אזי dimHom(V,W)=m*n

סימון $V^* = Hom(V,F)$ ז"א ממרחב כל הפונקציונליים הלינארים של V, נקרא גם המרחב הדואלי של V

מסקנה: $\dim V^* = n$.

נסמן פונקציונלים לינאריים באותיות יווניות.

יהי $\varphi : V \to F$ פונקציונל לינארי נתבונן ב $\operatorname{Im}\varphi$ שהוא כמובן ת"מ לינארי של F אז יש רק שני אפשרויות:

א. $\dim \operatorname{Im}\varphi = 0$ ואז $\operatorname{Im}\varphi = \{0\}$ כלומר $\varphi(v) = 0$ לכל $v \in V$. פונקציונל כזה נקרא פונקציונל האפס.

ב. $\dim \operatorname{Im}\varphi = 1$ ואז $\operatorname{Im}\varphi = F$ ואז $\dim Ker\varphi = n-1$

החל מעכשיו V מרחב מכפלה פנימית מעל R או C.

משפט: יהי $\varphi \in V^*$ שרירותי אזי קיים וקטור $p \in V$ יחיד כך ש $(v,p) = \varphi(v)$ לכל $v \in V$.

הוכחה: במקרה שזהו פונקציונל האפס זה טריוויאלי (נבחר את p להיות 0)

נדון במקרה של פונקציונל שונה מפונקציונל האפס.

ראשית נוכיח קיום: נסמן $U = \ker\varphi$ אזי $\dim U = n-1$ כאשר n=dimV אזי $V = U \oplus U^{\perp}$ כאשר $\dim U + \dim U^{\perp} = n$ ולכן $\dim U^{\perp} = 1$ כלומר ניתן לבחור ב $U^{\perp}$ בסיס בעל וקטור אחד $u_0 \neq 0$ לכן עבור כל $w \in U^{\perp}$ קיים $t \in F$ כך ש $w = tu$

נגדיר $p = \dfrac{\overline{\varphi(u_0)}}{\|u_0\|^2} u_0$ ונוכיח שעבור כל $v \in V$ מתקיים $(v,p) = \varphi(v)$.

אכן אם $v \in V$ אזי $v = g + w$ כאשר $w \in U^{\perp}, g \in U$ זאת אומרת $v = g + tu_0$ לכן:

$$(1)(v,p) = (g+tu_0, \frac{\overline{\varphi(u_0)}}{\|u_0\|^2}u_0) = (g,u_0) + (tu_0, \frac{\overline{\varphi(u_0)}}{\|u_0\|^2}u_0) = 0 + \frac{\varphi(u_0)}{\|u_0\|^2}(tu_0,u_0) = \frac{\varphi(u_0)}{\|u_0\|^2}t(u_0,u_0) = t\varphi(u_0)$$

$$(2)\varphi(v) = \varphi(g+tu_0) = \varphi(g) + t\varphi(u_0) = t\varphi(u_0)$$

טענת עזר: אם $(v,w_1) = (v,w_2)$ לכל $v \in V$ אז $w_1 = w_2$.

הוכחה: נקבל מיד $(v, w_1 - w_2) = 0$ עבור כל $v \in V$ ולכן אם נציב $v = w_1 - w_2$ נקבל $0 = (w_1 - w_2, w_1 - w_2) = \|w_1 - w_2\|^2 \Leftarrow w_1 = w_2$ כנדרש.

הוכחת יחידות: נניח שקימים p_1, p_2 השייכים לV כך ש $(v,p_2) = (v,p_1) = \varphi(v)$ לכל $v \in V$ אזי $(v,p_2) = (v,p_1)$ לכל $v \in V$ ולכן לפי טענת העזר $p_1 = p_2$.

סימון: בהתאם למשפט זה, ניתן לסמן p_φ הוקטור היחיד במקיים $(v,p_\varphi) = \varphi(v)$ לכל $v \in V$.

טענה 1: לכל $\alpha \in \mathbb{C}, \varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ מתקיים:

א. $p_{\varphi 1+\varphi 2} = p_{\varphi 1} + p_{\varphi 2}$

ב. $p_{\alpha\varphi 1} = \overline{\alpha} p_{\varphi 1}$

הוכחה:

א. נסמן $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ אזי לכל $v \in V$ מתקיים:

$\varphi(v) = (v, p_\varphi), \varphi_1(v) = (v, p_{\varphi 1}), \varphi_2(v) = (v, p_{\varphi 2})$

אבל: $\varphi(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) = (v, p_{\varphi 1}) + (v, p_{\varphi 2}) = (v, p_{\varphi 1} + p_{\varphi 2})$

לכן $(v, p_\varphi) = (v, p_{\varphi 1} + p_{\varphi 2})$

ולפי טענת העזר $p_{\varphi 1+\varphi 2} = p_{\varphi 1} + p_{\varphi 2}$ כנדרש.

ב. נסמן $\varphi = \alpha\varphi_1$ ואזי $\varphi(v) = (v, p_\varphi)$ אבל גם $\varphi(v) = \alpha\varphi_1(v) = \alpha(v, p_{\varphi 1}) = (v, \overline{\alpha} p_{\varphi 1})$

ולכן $p_{\alpha\varphi 1} = \overline{\alpha} p_\varphi$ כנדרש.

תוספת מהתרגול:

משפט: לכל בסיס $v_1...v_n$ של V קיים בסיס $\varphi_1...\varphi_n$ של V^* המקיים

$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}; \delta_{ij}\begin{cases} 1\_ i = j \\ 0\_ i \neq j \end{cases}$ לבסיס כנ"ל נקרא הבסיס הדואלי של $v_1...v_n$

הוכחה: נתון V מ"ו $v_1...v_n$ בסיס נגדיר פונקציונלים לינאריים $\varphi_1...\varphi_n$ באופן הבא:

$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1\_ i = j \\ 0\_ i \neq j \end{cases};$ כל $v \in V$ נראה כך $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ ואזי $\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_i(v_j) \in F$,

קיבלנו n פונקציונלים לינאריים שונים, נראה כי $\varphi_1...\varphi_n$ בת"ל ב V^*:

נקח $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i = 0$ ונוכיח כי כל $c_i = 0$. נפעיל את שני האגפים על v_j לכל $1 \le j \le n$

ונקבל $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(v_j) = 0(v_j) = 0_F \Rightarrow c_j = 0$

משפט: קיים איזומורפיזם בין V ל V^{**} כאשר $V^{**} = \{g : V^* \to F\}$ כלומר נבנה ט"ל $h : V \to V^{**}$ שתהיה איזומורפיזם.

הוכחה: לכל $v \in V$ נגדיר $h_v \in V^{**}$ בצורה הבאה $h_v : V^* \to F$, לכל $\varphi \in V^*$

$h_v(\varphi) = \varphi(v) \in F$ נראה כי היא לינארית יהו $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*; a \in F$ אזי מתקיים

$h_v(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(v) = (\varphi_1)(v) + (\varphi_2)(v) = h_v(\varphi_1) + h_v(\varphi_2)$

$h_v(a\varphi_1) = (a\varphi_1)(v) = a(\varphi_1)(v) = ah_v(\varphi_1)$

$\Leftarrow$ $h_v \in V^{**}$ ולכן $h : V \to V^{**}$ מוגדרת $h(v) = h_v \in V^{**}$ ראשית נראה כי h לינארית:

יהו $v_1, v_2 \in V; a \in F$ אזי

העתקה צמודה:

משפט: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל R או C $T:V\to V$ העתקה לינארית נתונה אזי קיימת העתקה לינארית יחידה T^* המקיימת את השוויון : $(T(v),w)=(v,T^*(w))$ לכל $v,w\in V$.

הוכחה: יהי $w\in V$ נגדיר פונקציה $\varphi_w:V\to F$ על ידי הנוסחה הבאה $\varphi_w(v)=(T(v),w)$ נראה כי העתקה זו הנה לינארית, יהו $\alpha\in F,v_1,v_2\in V$ ומתקיים :

$$\varphi_w(v_1+v_2)=(T(v_1+v_2),w)=(T(v_1)+T(v_2),w)=(T(v_1),w)+(T(v_2),w)=\varphi_w(v_1)+\varphi_w(v_2)$$

$$\varphi_w(\alpha v_1)=(T(\alpha v_1),w)=(\alpha T(v_1),w)=\alpha(T(v_1),w)=\alpha\varphi_w(v_1)$$

כלומר לכל $w\in V$ פונקציה זו הנה פונקציונל לינארי.

מהם התכונות שלו? אם $w_1,w_2\in V$ אזי עבור כל $v\in V$ מתקיים :

$$\varphi_{w1+w2}(v)=(T(v),w_1+w_2)=(T(v),w_1)+(T(v),w_2)=\varphi_{w1}(v)+\varphi_{w2}(v)\Rightarrow\varphi_{w1+w2}=\varphi_{w1}+\varphi_{w2}$$

$$\varphi_{\alpha w}(v)=(T(v),\alpha w)=\overline{\alpha}(T(v),w)=\overline{\alpha}\varphi_w(v)$$

נגדיר העתקה $T^*:V\to V$ לפי הנוסחה הבאה : לכל $w\in V$ $T^*(w)=P_{\varphi w}$

תזכורת: כאן בהתאם לטענה הקודמת $P_{\varphi w}$ הוקטור היחיד המקיים $\varphi_w(v)=(v,p_{\varphi w})$ לכל $v\in V$.

נראה כי ההעתקה הזו לינארית : יהו $\alpha\in F,w_1,w_2\in V$ ואזי

$$T^*(w_1+w_2)=p_{\varphi(w1+w2)}=p_{\varphi w1}+p_{\varphi w2}=T^*(w_1)+T^*(w_2)$$

$$T^*(\alpha w_1)=p_{\varphi\alpha w1}=p_{\overline{\alpha}\varphi w1}=\overline{\overline{\alpha}}p_{\varphi w1}=\alpha T^*(w_1)$$

ולכן ההעתקה לינארית, נציב בנוסחה המופיעה בתזכורת ונקבל $(T(v),w)=(v,T^*(w))$ לכל $v\in V$, $w\in V$ שרירותי.

הוכחת יחידות: נניח ש $G:V\to V$ העתקה לינארית שמקיימת $(T(v),w)=(v,G(w))$ אזי $(v,T^*(w))=(v,G(w))$ לכל $v\in V$ ולכן לפי טענת העזר $T^*(w)=G(w)$ לכל $w\in V$ ז"א $T^*=G$

תכונות של T^*

משפט: אם $T,S:V\to V$ שני העתקות לינאריות אזי :

1. $(T+S)^*=T^*+S^*$
2. $(TS)^*=S^*T^*$
3. $(\alpha T)^*=\alpha T^*\Leftarrow\alpha\in\mathbb{R};(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*\Leftarrow\alpha\in\mathbb{C}$
4. $\left(T^*\right)^*=T$

הוכחה: יהו $v,w\in V$ שרירותיים אזי :

1.
$$(v,(T+S)^*(w))=((T+S)(v),w)=(T(v)+S(v),w)=(T(v),w)+(S(v),w)$$
$$(v,(T^*+S^*)(w))=(v,T^*(w)+S^*(w))=(v,T^*(w))+(v,S^*(w))=(T(v),w)+(S(v),w)$$

2.
$$(v,(TS)^*(w))=((TS)(v),w)$$
$$(v,(S^*T^*)(w))=(v,S^*(T^*)(w))=(S(v),T^*(w))=((TS)(v),w)$$

3. מקרה פרטי של (2) כי כפל בסקאלר הוא העתקה לינארית.

4. $(v,(T^*)^*(w))=(T^*(v),w)=\overline{(w,T^*(v))}=\overline{(T(w),v)}=(v,T(w))$ ומלמת העזר נקבל כי $\left(T^*\right)^*=T$

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל C התנאים הבאים שקולים:

א. $(T(v),v)=0$ לכל $v\in V$

ב. $(T(v),w)=0$ לכל $v,w\in V$

ג. $T=0$

הוכחה: א $\Leftarrow$ ב: יהו $v,w\in V$ אזי

$$0=(T(v+w),v+w)=(T(v),v)+(T(v),w)+(T(w),v)+(T(w),w)$$

מסקנה: $(T(v),w)+(T(w),v)=0$

בדומה: $0=(T(iv+w),iv+w)=(T(iv),iv)+(T(iv),w)+(T(w),iv)+(T(w),w)$

מסקנה: $(T(iv),w)+(T(w),iv)=i(T(v),w)-i(T(w),v)$ ולכן $(T(v),w)-(T(w),v)=0$

ונקבל מהיחס בין שתי המסקנות כי $(T(v),w)=0$

ב $\Leftarrow$ג: $(T(v),w)=(0(v),w)\Rightarrow T=0$

ג$\Leftarrow$א: $(T(v),v)=(0(v),v)=(0,v)=0$

הערה: טענה זו איננה נכונה במרחב אוקלידי לדוגמא $V=\mathbb{R}^2$ מעל R, ונקח את המכפלה הסקלארית הסטנדרטית. נגדיר העתקה $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ ברור כי זו איננה העתקת האפס אבל $(T(v),v)=-xy+yx=0$.

משפט: תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית (כאן V הוא מעל R או C), תהי $A=[\mathrm{T}]_\Gamma$ כאשר $\Gamma=(v_1...v_n)$ בסיס אורתונורמלי. אם $B=\left[\mathrm{T}^*\right]_\Gamma$ אזי $b_{ij}=\overline{a}_{ji}$ לכל $1\le i,j\le n$.

הוכחה: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ מטריצה של T ביחס לבסיס Γ ז"א $T(v_j)=\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$ לכל $1\le j\le n$

תזכורת: אם Γ אורתונורמלי ו $v=\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ אזי $\alpha_i=(v,v_i)$ לכל $1\le i\le n$

כלומר כאן לכל $1\le i,j\le n$ מתקיים $a_{ij}=(T(v_j),v_i)$ וכן $b_{ij}=(T^*(v_j),v_i)$

ולכן $\overline{b_{ji}}=\overline{(T^*(v_i),v_j)}=(v_j,T^*(v_i))=a_{ij}=(T(v_j),v_i)$ כלומר לכל $1\le i,j\le n$ מתקיים

$$\overline{b_{ji}}=a_{ij}\Leftarrow\overline{a_{ij}}=b_{ji}\Leftarrow\overline{a_{ji}}=b_{ij}$$

סימון: נסמן את מטריצה B כ A^*.

מקרה פרטי: אם השדה הוא R אזי $B=A^*=A^T$

העתקה צמודה לעצמה:

הגדרה: אנו אומרים ש $T:V\to V$ צמודה לעצמה אם $T=T^*$, זאת אומרת $(T(v),w)=(v,T(w))$ לכל $v,w\in V$.

אם השדה הוא R אנו אומרים ש T סימטרית.

אם השדה הוא C אנו אומרים ש T הרמטית.

טענה: תהי $T:V\to V$ צמודה לעצמה ותהי $A=[\mathrm{T}]_\Gamma$ כאשר $\Gamma=(v_1...v_n)$ בסיס אורתונורמלי אזי $A=A^*$

הגדרה: אנו אומרים שA צמודה לעצמה אם $A = A^*$ (מעל R סימטרית, מעל C הרמטית)

טענה 1: תהי $T:V \to V$ העתקה לינארית שרירותית אזי:
1. $T+T^*$ צמודה לעצמה.
2. TT^* צמודה לעצמה.

הוכחה:
1. $(T+T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = T + T^*$
2. $(TT^*)^* = (T^*)^* T^* = TT^*$

טענה 2: יהי V מרחב אוניטרי ו $T:V \to V$ העתקה לינארית שרירותית אזי $S = i(T^* - T)$ צמודה לעצמה:

הוכחה: $S^* = (i(T^*-T))^* = \bar{i}(T^*-T)^* = -i((T^*)^* - T^*) = -i(T - T^*) = i(T^* - T) = S$

שיעור 5.5.04

טענה 3: אם T הרמטית ו $\lambda \in \mathbb{R}$ אזי λT גם הרמטית.

הוכחה: $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^* = \lambda T$

טענה 4: תהי T לינארית שרירותית אזי קיימות שתי העתקות הרמטיות T_2, T_1 כך ש $T^* = T_1 - iT_2; T = T_1 + iT_2$.

הוכחה:

$T_2 = \frac{1}{2} i(T^* - T); T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ ברור כי אלו העתקות הרמטיות לפי הטענות הקודמות. אבל $T_1 + iT_2 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* + \frac{1}{2}(i)^2 T^* - \frac{1}{2}(i)^2 T = T$ וכן

$$T^* = \left(T_1 + iT_2\right)^* = T_1^* + \left(iT_2\right)^* = T_1 + \bar{i}T_2^* = T_1 - iT_2$$

טענה 5: T הרמטית אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $(T(v), v) \in R$

הוכחה: נניח ש T הרמטית אזי $(T(v), v) = (v, T(v))$ לכל $v \in V$ אבל $(v, T(v)) = \overline{(T(v), v)}$ ולכן $(T(v), v) = \overline{(T(v), v)}$ ולכן $(T(v), v) \in R$

בכיוון השני: תזכורת אם $(T(v), v) = 0$ לכל $v \in V$ אזי $T \equiv 0$

נניח ש T לינארית כך ש $(T(v), v) \in R$ לכל $v \in V$ אזי:

$$(T^*(v), v) = \overline{(v, T^*(v))} = \overline{(T(v), v)} = (T(v), v)$$

נתבונן ב $T - T^*$ אזי לכל $v \in V$ $((T - T^*)(v), v) = (T(v), v) - (T^*(v), v) = 0 \Rightarrow T = T^*$

העתקות אנטי הרמטיות

הגדרה: T תקרא אנטי הרמטית אם $T^* = -T$

טענה 1: T הרמטית אם ורק אם iT אנטי הרמטית.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח T הרמטית ונסמן S=iT אזי $S^* = (iT)^* = \bar{i}T^* = -iT^* = -S$

$\Leftarrow$ נניח S=iT אנטי הרמטית אזי $T=\frac{1}{i}S=-iS$ ולכן $T^*=\overline{-i}S^*=i(-S)=-iS=T$

טענה2: אם T הרמטית וגם אנטי הרמטית אזי T=0

הוכחה: $T=T^*=-T \Leftarrow T=-T \Leftarrow T=0$

טענה: בפיתוח $T=T_1+iT_2$ כאשר T_2,T_1 הרמטיות T_2,T_1 מוגדרות באופן חד ערכי.

הוכחה: נניח ש $T=S_1+iS_2$ כאשר S_2,S_1 הרמטיות אזי

$$T_1+iT_2=S_1+iS_2 \Rightarrow T_1-S_1=i(S_2-T_2)$$

אבל T_1-S_1 הרמטית וגם S_2-T_2 הרמטית לכן $i(S_2-T_2)$ אנטי הרמטית ולכן

$T_1-S_1=i(S_2-T_2)$ הרמטית וגם אנטי הרמטית ולכן $T_1-S_1=0$ ולכן $T_1=S_1;T_2=S_2$

העתקות סימטריות במרחב אוקלידי

טענה: תהי $T:V\to V$ העתקה סימטרית, כאשר V אוקלידי אזי התנאים הבאים שקולים:

א. $(T(v),v)=0$ לכל $v\in V$

ב. $(T(v),w)=0$ לכל $v,w\in V$

ג. $T=0$

הוכחה: א$\Leftarrow$ב נניח $(T(v),v)=0$ לכל $v\in V$ אזי לכל $v,w\in V$ מתקיים

$$0=(T(v+w),v+w)=(T(v),v)+(T(v),w)+(T(w),v)+(T(w),w)=(T(w),v)+(v,T(w))=$$

$$(v,T(w))+(v,T(w))=2(v,T(w))=0\Rightarrow (v,T(w))=0\Rightarrow (T(v),w)=0$$

ב$\Leftarrow$ג נניח $(T(v),w)=0$ לכל $v,w\in V$ אזי נציב $w=T(v)$ ל $v\in V$ שרירותי ונקבל

$(T(v),T(v))=0 \Leftarrow \|T(v)\|^2=0 \Leftarrow T(v)=0$ לכל $v\in V$ ומכאן נקבל $T=0$

ג$\Leftarrow$א – טריויאלי.

העתקות אוניטריות

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל R או C $T:V\to V$ לינארית

הגדרה: העתקה T תקרא אוניטרית אם $(T(v),T(w))=(v,w)$ לכל $v,w\in V$

הערה: כאשר F=R אומרים גם ש T אורתוגונלית.

משפט: התנאים הבאים שקולים:

(א) T אוניטרית.

(ב) $\|T(v)\|=\|v\|$ לכל $v\in V$

(ג) T הפיכה ו $T^*=T^{-1}$ כלומר $T\circ T^*=I$ וגם $T^*\circ T=I$

(ד) לכל בסיס אורתונורמלי $\Gamma=(v_1...v_n)$ של V גם $T(v_1)...T(v_n)$ בסיס אורתונורמלי.

(ה) קיים בסיס אורתונורמלי $\Gamma=(v_1...v_n)$ כך ש $T(v_1)...T(v_n)$ אורתונורמלי.

הוכחה:

(א) $\Leftarrow$ **(ב)** נניח ש T אוניטרית, זאת אומרת $(T(v),T(w))=(v,w)$ לכל $v,w\in V$ בפרט לכל $v\in V$ מתקיים $\|T(v)\|^2=(T(v),T(v))=(v,v)=\|v\|^2 \Rightarrow \|v\|=\|T(v)\|$

(ב) $\Leftarrow$ **(ג)** נניח $\|T(v)\|=\|v\|$ לכל $v\in V$ אזי $(T(v),T(v))=(v,v)$ ולכן לפי הגדרה של T^* נקבל $(T^*T(v),v)=(T(v),T(v))=(v,v)$ כלומר $((T^*T-I)(v),v)=0$ לכל $v\in V$

כעת:

אם אנחנו מעל C אזי ברור ש $T^*T=I$

אם אנחנו מעל R צריכים להוכיח שהיא סימטרית כלומר T^*T-I אכן

$\left(T^*T-I\right)^*=(T^*T)^*-I^*=T^*T^{**}-I=T^*T-I$ ולכן $T^*T-I=0$ כלומר $T^*T=I$

כנדרש. מכיוון ש V הוא בעל מימד סופי נקבל גם כי $T^*=T^{-1}$

(ג) $\Leftarrow$**(ד)** נניח ש $T^*=T^{-1}$ יהי $\Gamma=(v_1...v_n)$ בסיס אורתונורמלי שרירותי, נגדיר בסיס חדש $u_i=T(v_i)$ $1\le i\le n$ אזי נקבל:

$1=(v_i,v_i)=(v_i,(T^*T)(v_i))=(T(v_i),T(v_i))=(u_i,u_i)$ כלומר הנורמה של כל וקטור u_i היא 1 . נותר להראות כי הם אורתוגונליים זה לזה:

$i\ne j\Rightarrow (u_i,u_j)=(T(v_i),T(v_j))=(v_i,(T^*T)(v_j))=(v_i,v_j)=0$ ולכן כל הוקטורים u_i הם בת"ל ומהווים בסיס כי dimW=n.

(ד) $\Leftarrow$**(ה)** מקרה פרטי.

(ה) $\Leftarrow$**(א)**

טענת עזר: יהי $\Gamma=(v_1...v_n)$ בסיס אורתונורמלי של V אם $v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i;w=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i$ אזי $(v,w)=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}$ (המשמעות היא שניתן לייצג כל מכפלה פנימית כמכפלה סטנדרטית עפ"י בסיס אורתונורמלי)

הוכחה: למדנו שאם $v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$ אזי $(v,v_i)=a_i$ כאשר $\Gamma=(v_1...v_n)$ בסיס אורתונורמלי לכן $(v,w)=(v,\sum_{i=1}^{n}b_iv_i)=\sum_{i=1}^{n}\overline{b_i}(v,v_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}$

הוכחת (ה) $\Leftarrow$**(א)** נניח שקיים $\Gamma=(v_1...v_n)$ בסיס אורתונורמלי כך שגם $T(v_1)...T(v_n)$ אורתונורמלי. נסמן $w_i=T(v_i)$ $1\le i\le n$ כלומר $w_1...w_n$ אורתונורמלי.

יהי $v,w\in V$ אזי $v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i;w=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i$ ולכן לפי טענת העזר $(v,w)=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}$ אבל $T(v)=\sum_{i=1}^{n}a_iT(v_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iw_i;T(w)=\sum_{i=1}^{n}b_iT(v_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iw_i$ ולכן שוב לפי טענת העזר עבור הבסיס החדש $w_1...w_n$ שגם הוא אורתונורמלי נקבל $(T(v),T(w))=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}=(v,w)$ לכל $v,w\in V$ כנדרש ולכן T אוניטרית.

הגדרה: אנו אומרים ש $A\in M_n(F)$ אוניטרית אם $A^*=A^{-1}$ (מעל R – אורתוגונלית)

טענה 1: תהי $T:V\to V$ (כאשר V ממ"פ בעל מימד סופי מעל R או C) העתקה לינארית יהי $\Gamma=(v_1...v_n)$ בסיס אורתונורמלי של V נסמן $A=\left[T\right]_\Gamma$ אזי A אוניטרית אם ורק אם T אוניטרית

הוכחה: הוכחנו שאם $A=\left[T\right]_\Gamma$ אזי $A^*=\left[T^*\right]_\Gamma$ (נכון לכל העתקה לינארית ולכל בסיס אורתונורמלי)

$\Leftarrow$ נניח ש A אוניטרית אזי $\left[TT^*\right]_\Gamma^\Gamma=\left[T\right]_\Gamma^\Gamma\left[T^*\right]_\Gamma^\Gamma=AA^*=I$ ולכן T אוניטרית.

$\Rightarrow$ נניח ש T אוניטרית אזי $TT^*=I$ ולכן $AA^*=[T]_\Gamma^\Gamma[T^*]_\Gamma^\Gamma=[TT^*]_\Gamma^\Gamma=I$ מכאן ש $A^*=A^{-1}$ ולכן A אוניטרית.

עובדה: $[S]_\Gamma^\Gamma=I$ אם ורק אם S העתקת הזהות ולכן $TT^*=I$

תוצאה: נגדיר העתקה: $T_A:F^n\to F^n$ כאשר ב F^n מוגדרת המכפלה הסקלארית או ההרמטית הסטנדרטית, אזי T_A אוניטרית אם ורק אם A אוניטרית
הוכחה: הבסיס הסטנדרטי E הוא אורתונורמלי ומתקיים $[T_A]_E=A$
הערה: תהי A אוניטרית אזי העתקה $T_A:F^n\to F^n$ המוגדרת ע"י $T_A(v)=Av$ לכל $v\in F^n$ היא אוניטרית לפי התוצאה. E הוא בסיס אורתונורמלי של F^n לכן, גם $w_i=T_A(e_i)=Ae_i$ לכל $1\le i\le n$ בסיס זה הוא גם אורתונורמלי אבל Ae_i זו עמודה ה I של A.
מסקנה: אם A אוניטרית אזי העמודות של A הם בסיס אורתונורמלי של F^n.
תרגיל: הוכיחו שאם העמודות של מטריצה A ריבועית כלשהי מעל שדה F הן בסיס אורתונורמלי של F^n אזי A אוניטרית.
טענת עזר: אם A אוניטרית אזי גם A^* אוניטרית.
הוכחה: $\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A;\left(A^*\right)^*=A\Rightarrow\left(A^*\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}$
טענה 2: אם A אוניטרית אזי השורות של A הן בסיס אורתונורמלי של F^n

הוכחה: לפי טענת העזר A^* אוניטרית אבל $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n;A^*=\left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ כאשר $a_{ij}=\overline{b_{ji}}$ לכל $1\le i\le n$, העמודות של A^* הן מן הצורה $v_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{pmatrix};v_k=\begin{pmatrix}b_{1k}\\b_{2k}\\\vdots\\b_{nk}\end{pmatrix}$ ואז לפי המסקנה הקודמת העמודות של A^* הן בסיס אורתונורמלי של F^n ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית. לכן: $0=\left(v_j,v_k\right)=\sum_{i=1}^n b_{ij}\overline{b_{ik}}=\sum_{i=1}^n\overline{a_{ji}}\,\overline{\overline{a_{ki}}}=\sum_{i=1}^n a_{ki}\overline{a_{ji}}$ שזו בדיוק המכפלה הפנימית הסטנדרטית שבין השורות הK וה J של A. כלומר כל שורות A אורתוגונליות זו לזו. כעת נוכיח גם כי הנוקמה של כל שורה שווה ל1:
$1=(v_j,v_j)=\sum_{i=1}^n b_{ij}\overline{b_{ij}}=\sum_{i=1}^n a_{ji}\overline{a_{ji}}=\sum_{i=1}^n\left|a_{ji}\right|^2$ זו בדיוק הנורמה בריבוע של השורה הJ של A כנדרש.

טענה:
א. יהו Γ,Φ שני בסיסים אורתונורמליים במרחב מכפלה פנימית כלשהו V הוכיחו שמטריצת המעבר ביניהם היא אוניטרית.
ב. תהי A מטריצה אוניטרית, הוכיחו שקיים מרחב מכפלה פנימית V ובו שני בסיסים Γ,Φ כך ש A היא מטריצת המעבר ביניהם.

תוספת מהתרגול:

משפט: תהי T ט״ל אוניטרית A המטריצה שלה ביחס לבסיס אורתונורמלי אזי $|\det A|=1$.

הוכחה:
$$TT^*=I\Rightarrow A\overline{A}^t=I\Rightarrow \det A\overline{A}^t=\det I=1\Rightarrow$$
$$\det A\det\overline{A}^t=1\Rightarrow (\det A)\overline{(\det A)}=1\Rightarrow |\det A|=1$$

משפט: תהי T ט״ל אוניטרית v וקטור עצמי עם ערך עצמי λ אזי $\lambda\overline{\lambda}=1$

הוכחה: $(v,v)=(Tv,Tv)=(\lambda v,\lambda v)=\lambda\overline{\lambda}(v,v)\Rightarrow \lambda\overline{\lambda}=1$

משפט: יהו v,u וקטורים עצמיים של T ט״ל אוניטרית בעלי ע״ע שונים אזי הם ניצבים.

הוכחה: נסמן λ ע״ע של v ו-μ ע״ע של u אזי נקבל $(v,u)=(Tv,Tu)=(\lambda v,\mu u)=\lambda\overline{\mu}(v,u)$ נניח $(v,u)\neq 0$ אזי נקבל $1=\lambda\overline{\mu}$ אבל מהמשפט הקודם אנחנו יודעים כי $\mu\overline{\mu}=1$ ולכן נקבל כי $\mu\overline{\mu}=\lambda\overline{\mu}\Rightarrow\lambda=\mu$ וזאת בסתירה להנחה.

העתקות נורמליות

הגדרה: $T:V\to V$ נורמלית אם $TT^*=T^*T$

הערה: אם T צמודה לעצמה אזי $TT^*=TT=T^*T$ ולכן היא נורמלית.

אם T אוניטרית אזי $TT^*=I=T^*T$ ולכן היא נורמלית.

טענה 1: אם T נורמלית אזי לכל ערך עצמי $\lambda\in F$ של T מתקיים $\overline{\lambda}$ הוא ערך עצמי של T^* ביחס לאותו וקטור עצמי V (כלומר אם $T(v)=\lambda v$ אזי $T^*(v)=\overline{\lambda}v$)

טענת עזר: לכל העתקה $T:V\to V$ נורמלית מתקיים $\|T(v)\|=\|T^*(v)\|$ לכל $v\in V$

הוכחה: $\|T(v)\|^2=(T(v),T(v))=(v,T^*(T(v))=(v,T(T^*(v))=(T^*(v),T*(v))=\|T^*(v)\|^2$

הוכחת טענה 1: נגדיר $S=\lambda I-T$ נוכיח שגם היא נורמלית: $S^*=\overline{\lambda}I-T^*$ ולכן נקבל כי
$$SS^*=(\lambda I-T)(\overline{\lambda}I-T^*)=\lambda\overline{\lambda}I-\lambda T^*-\overline{\lambda}T+TT^*$$
$$S^*S=(\overline{\lambda}I-T^*)(\lambda I-T)=\lambda\overline{\lambda}I-\lambda T^*-\overline{\lambda}T+T^*T$$
כלומר S נורמלית.

כעת יהי $v\in V$ כך ש $T(v)=\lambda v$ אזי $S(v)=\lambda v-T(v)=0$ ומכאן נקבל $0=\|S(v)\|=\|S^*(v)\|=\|\overline{\lambda}I-T^*\|$ ויוצא $T^*(v)=\overline{\lambda}v$ כנדרש

טענה 2: יהי V ממ״פ מעל F בעל מימד סופי, אם v_1,v_2 שני וקטורים עצמיים של העתקה נורמלית T כך ש $T(v_1)=\lambda_1v_1;T(v_2)=\lambda_2v_2$ ונתון ש $\lambda_2\neq\lambda_1$ אזי $v_1\perp v_2$.

הוכחה: $\lambda_1(v_1,v_2)=(\lambda_1v_1,v_2)=(T(v_1),v_2)=(v_1,t^*(v_2))=(v_1,\overline{\lambda_2}v_2)=\lambda_2(v_1,v_2)$

ומכאן נקבל כי $(\lambda_1-\lambda_2)(v_1,v_2)=0$ אבל נתון כי $\lambda_2\neq\lambda_1$ ולכן נקבל את המסקנה כי $(v_1,v_2)=0$.

תת מרחבים אינווריאנטים

יהי V מרחב לינארי מעל שדה F, תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

הגדרה: יהי U תת מרחב של V, U יקרא **אינווריאנטי** אם עבור כל $v\in U$ גם $T(v)\in U$

אם U אינווריאנטי לגבי T אזי ניתן להגדיר העתקה $T_u:U\to U$ המוגדרת כך:
לכל $v\in U$ נגדיר $T_u(v)=t(v)$. זהו בעצם רק שינוי של תחום ההגדרה של ההעתקה.
להעתקה כזו קוראים הצמצום של T לתת מרחב U.

בפרט ניתן לבחור ב U בסיס $\Gamma=(v_1...v_m)$ ונגדיר מטריצה $A\in M_n(F)$ באופן רגיל $A=\left[T_u\right]_\Gamma$ אזי לכל $1\le j\le m$ מתקיים $T_u(v_j)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}v_i$

טענה 3: יהי $v\in U$, U תת מרחב אינווריאנטי לגבי T אזי:
$A\left[v\right]_\Gamma=\lambda\left[v\right]_\Gamma\Leftrightarrow T_u(v)=T(v)=\lambda v$ כאשר $\left[v\right]_\Gamma$ הוא וקטור הקוארדינטות של V ביחס לבסיס Γ ו $A=\left[T_u\right]_\Gamma$.

הוכחה: טענה שכזאת נכונה לגבי כל העתקה וכל בסיס בכל מרחב לינארי בעל מימד סופי (הוכח במסגרת לימוד ערכים עצמיים) בפרט היא נכונה עבור U כמרחב לינארי מעל F (כי כל תת מרחב הוא מרחב מעל F) ועבור ההעתקה $T_u:U\to U$.

מסקנה: יהי V מרחב לינארי מעל C ויהי $U\neq\{0\}$ תת מרחב של V אינווריאנטי לגבי העתקה לינארית $T:V\to V$, אזי קיים וקטור אחד לפחות $v\in U$ השונה מאפס כך ש $T(v)=\lambda v$, כלומר λ הוא ערך עצמי של T.

הוכחה: נגדיר את מטריצה A כמו בטענה 3 $1\le m;A\in M_m(\mathbb{C})$ וידוע (המשפט היסודי של האלגברה) שלכל מטריצה כזו קיים $0\neq u\in\mathbb{C}^m$ אחד לפחות כך ש $\lambda\in\mathbb{C};Au=\lambda u$ נרשום $u=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$ כאשר $1\le i\le m;x_i\in\mathbb{C}$ נגדיר וקטור $v=\sum_{i=1}^{m}x_iv_i$
כאשר $\Gamma=(v_1...v_m)$ בסיס של U אזי $u=\left[v\right]_\Gamma$ היינו $A\left[v\right]_\Gamma=\lambda\left[v\right]_\Gamma$ ולכן לפי טענה 3 נקבל כי $T_u(v)=T(v)=\lambda v$ כלומר λ הוא ערך עצמי של T.

טענה 4: יהי Vמרחב מכפלה פנימית מעל C או R ותהי $T:V\to V$ לינארית. אם U אינווריאנטי ביחס ל T^* אזי $U^\perp$ אינווריאנטי לגבי T.

הוכחה: יהי $v\in U^\perp$ ואזי עבור כל $w\in U$ מתקיים $(v,w)=0$ נתבונן ב $w\in U$ שרירותי ונקבל $(T(v),w)=(v,T^*(v))=0$ כי $T^*(w)\in U$ בגלל האינווריאנטיות. כלומר $T(v)\in U^\perp$ ז״א $U^\perp$ אינווריאנטי לגבי T.

משפט: יהי V מרחב אוניטרי ותהי $T:V\to V$ נורמלית אזי קיים בסיס אורתונורמלי של V המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T.

הוכחה: יהיו $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}$ כל הערכים העצמיים של T השונים זה מזה. נסמן המרחב העצמי של T המתאים ל λ_i: $1\le i\le k;V_i=\left\{v\in V:T(v)=\lambda_iv\ \right\}$ ברור שכל אחת מן הקבוצות V_i היא תת מרחב לינארי של V נבחר בכל תת מרחב V_i בסיס אורתונורמלי Γ_i, זה תמיד אפשרי לפי תהליך גראהם שמידט. נגדיר סדרה סופית

$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$ נקבל $\Gamma=(v_1...v_m)$ נוכיח שזו מערכת אורתונורמלית. אם $v_j\in\Gamma$ אזי $v_j\in\Gamma_i$ בעבור I מסויםולכן $\|v_j\|=1$ כי Γ_i הוא בסיס אורתונורמלי. ברור ש v_j הוא וקטור עצמי של T כי $v_j\in\Gamma_i$ זאת אומרת $T(v_j)=\lambda_i v_j$.

יהיו $v_j,v_k\in\Gamma$ כאשר $j\neq k$ כעת ישנן שתי אפשרויות:

אם $v_j,v_k\in\Gamma_i$ עבור Γ_i מסוים אזי, מכיוון ש Γ_i אורתונורמלי נקבל כי $(v_j,v_k)=0$

אם $v_j\in\Gamma_i, v_k\in\Gamma_l$ כאשר $l\neq i$ אזי $T(v_k)=\lambda_l v_k$ ו $T(v_j)=\lambda_i v_j$ לכן לפי טענה 2 $v_k\perp v_k$.

הוכחנו ש $\Gamma=(v_1...v_m)$ מערכת אורתונורמלית המורכבת מוקטורים עצמיים של T (בפרט הם בת"ל) נסמן: $U=sp(v_1...v_m)$ ברור ש Γ בסיס של U. לכל $v_i\in\Gamma$ מתקיים לפי טענה 1 $T^*(v_i)=\overline{\lambda}_j v_i\in U$ אז $v_i\in\Gamma_j$ לכן אם $v\in U$ אז $v=\sum_{i=1}^{m}a_i v_i$, לכן

$T^*(v)=\sum_{i=1}^{m}a_i T^*(v_i)$ אבל $T^*(v_i)\in U$ לכל $1\leq i\leq m$ לכן $T^*(v)\in U$ ז"א U אינווריאנטי לגבי T^* לכן לפי טענה 4 $U^\perp$ אינווריאנטי לגבי T.

נניח בדרך השלילה ש $U\neq V$ אזי $m<\dim V$ ז"א $\dim U^\perp=\dim V-m\geq 1$ אז לפי המסקנה שרשמנו קיים $v\in U^\perp$ השונה מאפס כך ש $T(v)=\lambda v$ $\lambda\in\mathbb{C}$ הוא ע"ע של T. ז"א $\lambda=\lambda_i$ עבור i מסוים כך ש $1\leq i\leq k$ (אחד מאלו שסימנו בתחילת ההוכחה) ז"א $T(v)=\lambda_i v$ ז"א $v\in V_i\subseteq U$ לכן $v\in U\bigcap U^\perp$ כלומר v=0 **בסתירה**. ולכן U=V כלומר $m=\dim V; V=sp(v_1...v_m)$ ז"א Γ בסיס של V כנדרש.

תוצאה: לכל העתקה נורמלית T במרחב אוניטרי קיים בסיס Γ אורתונורמלי כך ש $[T]_\Gamma$ היא אלכסונית.

שיעור 16.5.04

הגדרה: $A\in M_n(\mathbb{C})$ נקראת נורמלית אם $AA^*=A^*A$.

טענה: יהי V מרחב אוניטרי (בעל מימד סופי) ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. יהי Γ בסיס אורתונורמלי של V. נסמן $A=[T]_\Gamma$ אזי A נורמלית אם ורק אם T נורמלית.

הוכחנו כי Γ אורתונורמלי ולכן $\left[T^*\right]_\Gamma=A^*$

הוכחת הטענה:

$\Rightarrow$ נניח כי T נורמלית אזי $TT^*=T^*T$ ולכן נוכל לרשום:

$\left[T^*T\right]_\Gamma=\left[T^*\right]_\Gamma\left[T\right]_\Gamma=A^*A; \left[TT^*\right]_\Gamma=\left[T\right]_\Gamma\left[T^*\right]_\Gamma=AA^*$ ומכאן נקבל כי $AA^*=A^*A$

$\Leftarrow$ אם $AA^*=A^*A$ אזי ניתן להוכיח ש $TT^*=T^*T$ (תרגיל) חשוב לזכור שאם שתי העתקות מיוצגות ביחס לאותו בסיס ע"י אותה מטריצה אז זוהי אותה העתקה.

משפט : תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נורמלית אזי קיימת מטריצה אוניטרית U ומטריצה אלכסונית B כך ש $UAU^* = B$. יתירה מזאת $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_1 ... \lambda_n$ הם הערכים העצמיים של A (לא בהכרח שונים זה מזה)

הוכחה : נגדיר העתקה $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ על ידי הנוסחה $T_A(v) = Av$ לכל $v \in \mathbb{C}^n$ אזי $[T_A]_E = A$ כאשר E הוא הבסיס הסטנדרטי שהוא אורתונורמלי ביחס למכפלה ההרמטית הסטנדרטית ב $\mathbb{C}^n$, לכן לפי הטענה T_A נורמלית. לכן קיים בסיס Γ של $\mathbb{C}^n$ אורתונורמלי ביחס למכפלה ההרמטית הסטנדרטית המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T_A, שהם כמובן וקטורים עצמיים של A (אכן אם $T_A(v) = \lambda v$ אז $Av = \lambda v$ על פי הגדרת ההעתקה שהגדרנו) ידוע שאם קיים בסיס של $\mathbb{C}^n$ שמורכב כולו מוקטורים עצמיים של A ז"א אם $\Gamma = (v_1 ... v_n)$ כאשר $Av_i = \lambda_i v_i \quad 1 \le i \le n$ אז $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר $P = (v_1, v_2, ..., v_n)$ במקרה שלנו Γ הוא אורתונורמלי לכן העמודות של P הנם מערכת אורתונורמלית, דהיינו P אוניטרית ולכן $P^{-1} = P^*$ נסמן $U = P^*$ ולכן $U^* = P$ ונקבל $UAU^* = B$ כאשר $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כנדרש.

משפט: תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נורמלית אזי קיימת מטריצה אוניטרית U ומטריצה הרמטית H כך ש A=UH=HU.

הוכחה : תהי B מטריצה אלכסונית, ז"א $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad 1 \le i \le n; \lambda_i \in \mathbb{C}$ נרשום כל λ_j בצורה $1 \le j \le n; \lambda_j = r_j(\cos\varphi_i + i\sin\varphi_i)$ נסמן $z_j = \cos\varphi_i + i\sin\varphi_i$ אזי $|z_j| = 1$ לכן $\lambda_j = r_j z_j$ כאשר $0 \le r_j \in \mathbb{R}$ וכן $(1) z_j \overline{z_j} = 1$ נסמן מטריצה $H_1 = \begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{pmatrix}$ וכן מטריצה $U_1 = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}$ אם כופלים שתי מטריצות אלכסוניות מקבלים

מטריצה אלכסונית כאשר באלכסון ישנו כפל איבר איבר ולכן נקבל

$$B=\begin{pmatrix} r_1z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_nz_n \end{pmatrix}= H_1U_1=U_1H_1$$ אבל:

$$H_1=\begin{pmatrix} \overline{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{r_n} \end{pmatrix}=\overline{H_1}^t=H_1^*$$ ומכיוון ש $0\le r_j\in\mathbb{R}$ אזי נקבל כי H_1 הרמטית.

$$U_1^*=\begin{pmatrix} \overline{z_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z_n} \end{pmatrix}$$ ולפי (1) נקבל $$I=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1\overline{z_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\overline{z_n} \end{pmatrix}=U_1U_1^*$$ ולכן

U_1 אוניטרית.

תהי A נורמלית כלשהי

$$UAU^*=B$$

לפי המשפט הקודם $A=U_2BU_2^*$ (הסבר: $\underbrace{U^*U}_{I}A\underbrace{U^*U}_{I}=U^*BU$)

$$A=\underbrace{U^*}_{u_2}B\underbrace{U}_{u_{2^*}}$$

הוכחנו $H_1U_1=U_1H_1=B$.

מסקנה:

$UH=U_2H_1U_2^*U_2U_1U_2^*=U_2U_1H_1U_2^*=A(2)$ כאשר נגדיר $U=U_2U_1U_2^*;H=U_2H_1U_2^*$

נוכיח כי H הרמטית: $H^*=(U_2H_1U_2^*)^*=(U_2^*)^*H_1^*U_2^*=U_2H_1U_2^*=H$ לכן H הרמטית.

נוכיח כי U אוניטרית:

$$U^{-1}=(U_2U_1U_2^*)^{-1}=(U_2^*)^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}=U_2U_1^*U_2^*$$

$$U^*=(U_2U_1U_2^*)^*=(U_2^*)^*U_1^*U_2^*=U_2U_1^*U_2^*=U^{-1}$$

לכן U אוניטרית.

לפי (2) $UH=U_2U_1H_1U_2^*$ נחשב את HU $HU=(U_2H_1\underbrace{U_2^*)(U_2}_{I}U_1U_2^*)=U_2H_1U_1U_2^*$

אבל $U_1H_1=H_1U_1$ כי שניהם אלכסוניות ולכן UH=HU כנדרש.

טענה: תהי A מטריצה נורמלית אם כל הערכים העצמיים של A הם ממשיים אזי היא הרמטית.

הוכחה: $A=UBU^*$ כאשר $B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_1...\lambda_n$ הם הערכים העצמיים של A (לא בהכרח שונים זה מזה). נתון ש $\lambda_j=\overline{\lambda_j}\ ;1\le j\le n$ לכן $B=B^*$ אזי:

$$A^*=(UBU^*)^*=(U^*)^*B^*U^*=UB^*U^*=UBU^*=A$$

הערה: תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ הרמטית כך ש $1\le i,j\le n;a_{ij}\in\mathbb{R}$ אזי

$$UAU^*=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ $U\in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית $\lambda_j\in\mathbb{R}$.

האם ניתן לבחור $U \in M_n(\mathbb{R})$? תשובה: כן

(תרגיל) טענת עזר: תהי A מטריצה סימטרית ויהי $w \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של A, הוכיחו שקיים וקטור עצמי $v \in \mathbb{R}^n$ המתאים לאותו הערך העצמי כמו w.

לפי טענת העזר ניתן לבנות מטריצה U כך שכל המטריצה תהיה ממשית.

לכסון ממשי של מטריצה נורמלית $A \in M_n(\mathbb{C})$

א. נרשום את כל הערכים העצמיים של A השונים זה מזה $1 \le k \le n; \alpha_1 ... \alpha_k \in \mathbb{C}$

ב. נסמן $1 \le j \le k; V_j = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \alpha_j v\}$ ונבחר בכל V_j בסיס אורתונורמלי Γ_j (כמובן שזה אפשרי לפי תהליך גראהם שמידט)

ג. נרשום את הבסיס המורכב מן הבסיס הנ"ל $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2 ... \Gamma_k = (v_1 ... v_n)$

ד. נסמן מטריצה $P = \underbrace{(v_1 ... v_n)}_{columns}$ אזי היא מטריצה אוניטרית וגם מתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}; Av_j = \lambda_j v_j$$

ה. נסמן $U = P^{-1} = P^*$ ולכן $U^* = P$ ונקבל $UAU^* = B$ כאשר $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר U אוניטרית ו B אלכסונית.

מקרה מיוחד: נניח שמטריצה A היא ממשית וגם צמודה לעצמה כלומר היא סימטרית אזי כל הערכים העצמים שלה $1 \le k \le n; \alpha_1 ... \alpha_k \in \mathbb{R}$ אזי אפשר להסתפק רק בוקטורים של $\mathbb{R}^n$ כלומר להגדיר מרחב $1 \le j \le k; V_j = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \alpha_j v\}$ ולהמשיך את התהליך כמו קודם, נקבל מטריצה $U \in M_n(\mathbb{R})$ וגם $B \in M_n(\mathbb{R})$ כלומר במקרה שA סימטרית וגם ממשית, **זה המקרה שלפנינו**:

הסבר: נניח ש $w \in \mathbb{C}^n$ הוא וקטור עצמי של A המתאים לאיזשהו ערך עצמי ממשי שנסמנו $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי: $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{u} + i \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{v} \Rightarrow u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{C}^n, w = u + iv$

ולכן נקבל $Aw = \alpha w \Rightarrow A(u + iv) = \alpha u + i\alpha v \Rightarrow Au + iAv = \alpha u + i\alpha v$

$Au = \alpha u, Av = \alpha v \Rightarrow v \in \mathbb{R}^n$ כאשר לפחות אחד מבין u,v שונה מאפס.

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ מצאו מטריצה אוניטרית ממשית U ומטריצה אלכסונית B כך ש $U^*AU = B$.

מטריצה (ריבועית) ממשית נורמלית

המטרה: למצוא $B,U\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש U אוניטרית וB פשוטה מאוד. עד כמה פשוטה יכולה B להיות?

מירכוב של מרחב אוקלידי

יהי V מרחב אוקלידי, כלומר מרחב בעל מימד סופי מעל R בו מוגדרת מכפלה סקלרית נתונה מסוימת, נגדיר מרחב $\hat{V}$ כקבוצה של כל הביטויים הפורמליים מן הצורה $u,v\in V: u+iv$.

נגדיר חיבור: $(v_1+iv_2)+(u_1+iu_2)=(v_1+u_1)+i(v_2+u_2)$

נגדיר כפל: אם $z\in\mathbb{C}$ כלומר $z=x+iy$ אזי $z\bullet(v_1+iv_2)=(xv_1+yv_2)+i(xv_2+yv_1)$

כל מנת להוכיח שזהו מרחב לינארי מעל C יש צורך להוכיח את כל התכונות של מרחבים לינאריים.

הערות:

א. אנו אומרים ש $v_1+iv_2=u_1+iu_2$ אס"ם $v_1=u_1\wedge v_2=u_2$.

ב. סימון אם $u,v\in V; w=u+iv$ נרשום $\overline{w}=u-iv; \mathrm{Re}W=u; \mathrm{Im}W=v$

ג. אם $v\in V$ אנו נזהה את v עם הביטוי הפורמלי $0\in V: v+i0$, ז"א אנו מניחים כי $V\subset\hat{V}$

טענה 1: אם $v_1\ldots v_k\in V$ קבוצה בת"ל אזי היא בת"ל גם ב $\hat{V}$ (כאשר לגבינו $\widehat{v_j}=v_j+i0$)

הוכחה: נרשום את המשוואה $\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k=0$ כאשר $\alpha_j\in\mathbb{C}$ $1\le j\le k$ אבל $\alpha_j=a_j+ib_j$ ולכן המשוואה מקבלת את הצורה הבאה:

$(a_1+ib_1)v_1+\cdots+(a_k+ib_k)v_k=0$ שניתן לכותבה כמובן גם כ:

$(a_1v_1+\cdots+a_kv_k)+i(b_1v_1+\cdots+b_kv_k)=0+i0\_0\in V$ כלומר קיבלנו בעצם שתי משוואות שבכל אחת מהם יש את K הוקטורים עם מקדמים מR שסכומם שווה ל0 ולכן כל המקדמים הם 0 ונקבל כי גם $\alpha_j=0$ $1\le j\le k$

טענה 2: אם $v_1\ldots v_n$ בסיס של V אז הם גם בסיס של $\hat{V}$.

הוכחה: הוכחנו בטענה 1 שהם בת"ל נותר להוכיח שהם פורסים את המרחב $\hat{V}$, אכן אם $w\in\hat{V}$ אזי $w=v+iu$ כאשר $u,v\in V$ לכן $a_j,b_j\in\mathbb{R}; v=\sum_{j=1}^n a_jv_j; u=\sum_{j=1}^n b_jv_j$

ולכן $w=\sum_{j=1}^n a_jv_j+i\sum_{j=1}^n b_jv_j=\sum_{j=1}^n(a_j+ib_j)v_j$ כלומר ניתן להציג כל וקטור שרירותי $w\in\hat{V}$ כצירוף לינארי של $v_1\ldots v_n$

מסקנה: $\dim V=\dim\hat{V}$ כאשר V מעל R ו $\hat{V}$ מעל C.

נגדיר מכפלה הרמטית ב $\hat{V}$ בעזרת המכפלה הסקלרית המוגדרת ב V.

יהיו $w_1=u_1+iv_1; w_2=u_2+iv_2; w_1,w_2\in\hat{V}$ נגדיר:

$(w_1,w_2)_{\mathbb{C}}=(u_1+iv_1,u_2+iv_2)=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)+i((v_1,u_2)-(u_1,v_2))$

נראה כי המכפלה החדשה הנה הרמטית:

ההעתקה אכן הרמטית ויתירה מזאת מתקיים: $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

הגדרה: תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, נגדיר העתקה חדשה $\hat{T}:\hat{V}\to\hat{V}$ על ידי הנוסחה הבאה: אם $w=u+iv$ אזי $\hat{T}(w)=T(u)+iT(v)$

טענה 1: $\hat{T}$ היא לינארית.

הוכחה:

טענה 2:

א. אם $u_1,u_2\in V$ אזי $(u_1,u_2)_{\mathbb{C}}=(u_1,u_2)$

ב. לכל $w_1,w_2\in\hat{V}$ מתקיים $\overline{w_1+w_2}=\overline{w_1}+\overline{w_2}$

ג. אם $w\in\hat{V}$ $z\in\mathbb{C}$ אזי $\overline{zw}=\overline{z}\overline{w}$

ד. אם $w\in\hat{V}$ אזי $w+\overline{w}=2re(w); w-\overline{w}=2\operatorname{Im}(w)$

ה. אם $w_1,w_2\in\hat{V}$ אז $(\overline{w_1},\overline{w_2})_{\mathbb{C}}=\overline{(w_1,w_2)_{\mathbb{C}}}$

ו. $w=\overline{w}\Leftrightarrow w\in V$

הוכחות:

טענה 3:תכונות של $\hat{T}$

יהו S,T העתקות לינאריות מV לV אזי:

א. $\widehat{T+S}=\hat{T}+\hat{S}$

ב. אם $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\widehat{\alpha T}=\alpha\hat{T}$

ג. $\widehat{TS}=\hat{T}\hat{S}$

הוכחת ג': נסמן $w=u+iv\in\hat{V}$ שרירותי אזי

$$\widehat{TS}(w)=TS(u)+iTS(w)=T(S(u))+iT(S(v))=\hat{T}(S(u)+iS(v)=\hat{T}(\hat{S}(w))$$

טענה 4: אם $T:V\to V$ לינארית אזי $\widehat{T^*}=\left(\hat{T}\right)^*$

הוכחה:

טענה 5: תהי $I:V\to V$ העתקת הזהות של V אזי $\hat{I}$ היא העתקת הזהות של $\hat{V}$

הוכחה: לכל $w=u+iv\in\hat{V}$ מתקיים $\hat{I}(w)=I(u)+iI(v)=u+iv=w$

תוצאה:

א. אם T נורמלית אזי $\hat{T}$ נורמלית

ב. אם T אוניטרית אזי $\hat{T}$ אוניטרית

ג. אם T צמודה לעצמה אזי $\hat{T}$ הרמטית

הוכחה:

א. $\hat{T}\left(\hat{T}\right)^*=\hat{T}\widehat{T^*}=\widehat{TT^*}=\widehat{T^*T}$ וגם $\left(\hat{T}\right)^*\hat{T}=\widehat{T^*}\hat{T}=\widehat{T^*T}$ לכן $\left(\hat{T}\right)^*\hat{T}=\hat{T}\left(\hat{T}\right)^*$

ב. נתון T אוניטרית ז"א $TT^*=I$ לכן $\hat{T}\left(\hat{T}\right)^*=\hat{T}\widehat{T^*}=\widehat{TT^*}=\hat{I}$ ז"א $\hat{T}$ אוניטרית.

ג. אם T צמודה לעצמה אז $T^*=T$ לכן $\left(\widehat{T}\right)^*=\widehat{T^*}=\widehat{T}$ כנדרש.

משפט 1: תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$ ע״ע של $\widehat{T}$ (אם יש כזה) אזי α הוא ע״ע של T, יתירה מזאת קיים בסיס א״נ של $\widehat{V_\alpha}=\{w\in\widehat{V}:\widehat{T}(w)=\alpha w\}$ שמורכב כולו מוקטורים של V.

הוכחה: אם α הוא ע״ע של $\widehat{T}$ אזי קיים $0\neq w\in\widehat{V}$ כך ש $\widehat{T}(w)=\alpha w$ נרשום $w=u+iv$ אזי $\widehat{T}(u+iv)=\alpha(u+iv)\Rightarrow T(u)+iT(v)=\alpha u+i\alpha v$ אבל $T(u),T(v),\alpha u,\alpha v\in V$ כי $\alpha\in\mathbb{R}$ ולכן $T(u)=\alpha u;T(v)=\alpha v$ אבל לפחות אחד מן הוקטורים u,v שונה מאפס(כי w שונה מאפס) ולכן α הוא ע״ע של T. נסמן $0\neq V_\alpha=\{v\in V:T(v)=\alpha v\}$ בהתאם לתהליך גראהם שמידט נבחר ב V_α בסיס א״נ $v_1...v_k$ אזי $\widehat{T}(v_i)=T(v_i)=\alpha v_i$ לכל $1\le i\le k$ לכן $v_i\in\widehat{V_\alpha}$ אם $i\neq j$ אזי $(v_i,v_j)_{\mathbb{C}}=(v_i,v_j)=0$ אם $i=j$ אזי $(v_i,v_i)_{\mathbb{C}}=(v_i,v_i)=1$ לכן הם מערכת אורתונורמלית ב $\widehat{V_\alpha}$ בפרט היא בת״ל.

נראה כי היא פורסת את $\widehat{V_\alpha}$, יהי $w=u+iv\in\widehat{V_\alpha}$ שרירותי הוכחנו קודם כי מתקיים $T(u)=\alpha u;T(v)=\alpha v$ לכן $u,v\in V_\alpha$ כלומר $u=\sum_{i=1}^{k}a_iv_i;v=\sum_{i=1}^{k}b_iv_i;a_i,b_i\in\mathbb{R}$ לכן $w=\sum_{i=1}^{k}a_iv_i+i\sum_{i=1}^{k}b_iv_i=\sum_{i=1}^{k}(a_i+ib_i)v_i$ לכן $v_1...v_k$ פורסים את $\widehat{V_\alpha}$ ומהווים בסיס א״נ כנדרש.

משפט 2 : בתנאים של המשפט הקודם אם $\lambda\notin\mathbb{R}$ הוא ע״ע של $\widehat{T}$ אזי גם $\bar{\lambda}$ הוא ע״ע של $\widehat{T}$, יתירה מזאת אם $v_1...v_k$ הוא בסיס א״נ של $\widehat{V_\lambda}$ אזי $\overline{v_1}...\overline{v_k}$ הוא בסיס א״נ של $\widehat{V_{\bar{\lambda}}}$

הוכחה : אם $\lambda=a+ib$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$ ו $b\neq 0$ הוא ערך עצמי של $\widehat{T}$ אזי קיים $w=u+iv\in\widehat{V}$ $u,v\in V$ כך ש $\widehat{T}(w)=\lambda w$ לכן $\widehat{T}(\bar{w})=T(u)-iT(v)=\overline{\widehat{T}(w)}=\overline{\lambda w}=\bar{\lambda}\bar{w}$

לכן $\bar{\lambda}$ הוא ע״ע של $\widehat{T}$ וגם אם w ו״ע המתאים לλ אזי $\bar{w}$ ו״ע המתאים ל $\bar{\lambda}$.

המשך הוכחה : תרגיל.

משפט 3 : תהי $T:V\to V$ העתקה נורמלית כאשר V הוא מרחב אוקלידי בעל מימד סופי אזי קיים בסיס א״נ של V כך שהמטריצה המייצגת את Tביחס לבסיס זה היא מן הצורה
$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \lambda_m & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & A_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & A_k\end{pmatrix}$$
כאשר $1\le i\le m;\lambda_i\in\mathbb{R}$

ו $1\le j\le k;A_j=\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ -b_j & a_j\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ וכן מתקיים $m+2k=n$.

תרגול:

משפט: בהנתן מטריצה רגולרית A קיים פירוק שלה לאוניטרית וצמודה לעצמה.

הוכחה: נתבונן במטריצה AA^* מטריצה זו הנה מטריצה צמודה לעצמה (ולכן גם נורמלית) מכיוון ש $AA^* = AA^*$ $\left(AA^*\right)^* = \left(A^*\right)^* A^* = AA^*$ לכן קיים לה פירוק $AA^* = UBU^*$ כאשר U אוניטרית וB אלכסונית.

טענה: עבור כל T ט"ל צמודה לעצמה כל ערך עצמי של T הוא ממשי ≥ 0.

בנוסף, אם A רגולרית אזי גם A^* רגולרית ולכן Ker(AA^*)=0

יהי v ו"ע של AA^* עם ע"ע λ אזי מתקיים

$$0 < \underbrace{(A^*v, A^*v)}_{v\neq 0 \Rightarrow A^*v\neq 0} = (AA^*v, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v,v) \Rightarrow \lambda > 0$$

מטריצה B היא מן הצורה $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ נגדיר $S^* = S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ ניתן להגדיר זאת כי הוכחנו שכל הערכים העצמיים חיוביים וממשיים.

ולכן קיבלנו $AA^* = \underbrace{US}_{R}\underbrace{S^*U^*}_{R^*}; A = \underbrace{RR^{-1}}_{I}A$

טענה: $R^{-1}A$ אוניטרית.

הוכחה: $\left(R^{-1}A\right)\left(R^{-1}A\right)^* = R^{-1}AA^*\left(R^{-1}\right)^* = \underbrace{S^{-1}U^{-1}}_{R^{-1}}\underbrace{USS^*U^*}_{AA^*}\underbrace{\left(U^{-1}\right)^*\left(S^{-1}\right)^*}_{\left(R^{-1}\right)^*} = I$ ולכן נוכל

כעת לרשום $A = \underbrace{RR^{-1}}_{I}A = RU^*UR^{-1}A$ כאשר $UR^{-1}A$ אוניטרית ככפל של מטריצות אוניטריות.

טענה: RU^* צמודה לעצמה.

הוכחה: $RU^* = USU^* \Rightarrow \left(RU^*\right)^* = \left(USU^*\right)^* = \left(U^*\right)^* S^*U^* = USU^*$

ולכן הראנו פירוק של כל מטריצה A רגולרית לאוניטרית וצמודה לעצמה.

צורת ג'ורדן

סכומים ישרים

הגדרה: יהי V מרחב לינארי מעל F ויהיו $U_1...U_m$ תתי מרחבים של V. נאמר שתת מרחב W של V הוא סכום $U_1...U_m$ אם לכל וקטור $w \in W$ קיימים $1 \le i \le m; u_i \in U_i$ כך ש $w=\sum_{i=1}^{m} u_i$. אם קיימת סדרה יחידה של וקטורים כאלו המקיימים $w=\sum_{i=1}^{m} u_i$ אזי נאמר ש W הוא סכום ישר של $U_1...U_m$.

סימון: $W = \bigoplus_{l=1}^{m} U_l$

טענה1: יהי V מרחב לינארי מעל F $U_1...U_m$ ת"מ של V אזי W הוא סכום ישר של $U_1...U_m$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

i. W הוא סכום של $U_1...U_m$

ii. לכל $1 \le i \le m$ מתקיים $\left(\sum_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}} U_j\right) \cap U_i = \{0\}$

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח ש W הוא סכום ישר של $U_1...U_m$ אזי W הוא סכום שלהם לפי ההגדרה. נניח בדרך השלילה כי $\left(\sum_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}} U_j\right) \cap U_i \ne \{0\}$ אזי קיים $w \ne 0$ כך ש $w \in U_i$ וגם $w \in \sum_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}} U_j$ אזי ניתן להציג אותו כ $w = 0+0+\cdots+w+0+\cdots+0$ כלומר $w = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} u_j}_{u_i=w_i;\, j\ne i, u_j=0}$ וגם $w = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} v_j}_{v_i=0; v_j \in U_j}$ כלומר קיימות שתי הצגות שונות של w כי $w = u_i \ne v_i = 0$ בסתירה להנחה ש W סכום ישר של $U_1...U_m$.

$\Rightarrow$ נניח כי לכל $1 \le i \le m$ מתקיים $\left(\sum_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}} U_j\right) \cap U_i = \{0\}$ וגם W הוא סכום של $U_1...U_m$. נניח כי עבור $w \in W$ מסוים מתקיים $w=\sum_{i=1}^{m} u_i$ וגם $w=\sum_{i=1}^{m} v_i$ כאשר $1 \le i \le m; u_i, v_i \in U_i$ אזי $(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\cdots+(u_m-v_m)=0$ נניח בדרך השלילה כי $u_i - v_i \ne 0$ עבור i מסוים אזי $u_i - v_i = \sum_{i\ne j=1}^{m} -(u_j - v_j) \in \sum_{i\ne j=1}^{m} U_j$ אבל $u_i - v_i \in U_i$ ולכן $u_i - v_i = 0$ בסתירה להנחה.

טענה 2: יהיו $U_1...U_m$ תתי מרחבים של V ויהיו Γ_i בסיסים של U_i. נגדיר קבוצת וקטורים $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_m=(v_1,v_2,\ldots,v_k)=(\underbrace{v_1...v_{m1}}_{\Gamma_1}\underbrace{v_{m1+1}..v_{m2}}_{\Gamma_2}...v_{(m-1)}\underbrace{v_{(m-1)+1}...v_{mm}}_{\Gamma_m})$ אזי W הוא סכום ישר של $U_1...U_m$ אם ורק אם $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_m$ הוא בסיס של W

הערה: יהי $m_j=\dim U_j$ $1\le j\le m$ *נסמן* $n_1=m_1,n_2=m_1+m_2,...,n_l=n_{l-1}+m_l$ *אזי* $n_m=\sum_{j=1}^{m}m_j$ *אזי הוקטורים של* Γ_l *הם* $v_{m_{l-1}+1},...,v_{n_l}$

הוכחה: $\Leftarrow$נניח ש W הוא סכום ישר של $U_1...U_m$ אזי לכל $w\in W$ קיים $1\le i\le m;u_i\in U_i$ כך ש $w=\sum_{i=1}^{m}u_i$ אזי $u_i\in U_i=sp(\Gamma_i)\subseteq sp(v_1...v_{n_m}$ לכן הקבוצה $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_m$ פורסת את W נרשום את המשוואה $\sum_{i=1}^{n_m}a_iv_i=0$ אזי נקבל

$$0=\underbrace{a_1v_1+\cdots+a_{n_1}v_{n_1}}_{u_1}+\underbrace{a_{n_1+1}v_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2}v_{n_2}}_{u_2}+\cdots+\underbrace{a_{n_{m-1}+1}v_{n_{m-1}+1}+\cdots+a_{n_m}v_{n_m}}_{u_m}$$

נסמן $u_l=\sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l}a_jv_j$ כלומר $\sum_{l=1}^{m}u_l=0$ דהיינו $u_l\in U_l$ אבל גם 0=0+0+…+0 אבל W הוא סכום ישר של $U_1...U_m$ וכמובן ש 0 שייך לW לכן יש לו הצגה יחידה ולפיכך $1\le l\le m;u_l=0$ ונקבל $\sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l}a_jv_j=0$ כאשר v_j אלו בת"ל כי הם אברי בסיס ולכן $a_j=0$ לכן כל המקדמים ברשימה המוקרית שווים לאפס כלומר כל הוקטורים ברשימה המקורית בת"ל ולכן מכיוון שכבר הוכחנו שהם פורסים הם בסיס של W.

$\Rightarrow$ נניח כי $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_m=(v_1,v_2,\ldots,v_k)$ בסיס של W אזי כל וקטור $w\in W$ ניתן להצגה $\sum_{i=1}^{n_m}a_iv_i$ נסמן כמו קודם:

$$w=\underbrace{a_1v_1+\cdots+a_{n_1}v_{n_1}}_{u_1}+\underbrace{a_{n_1+1}v_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2}v_{n_2}}_{u_2}+\cdots+\underbrace{a_{n_{m-1}+1}v_{n_{m-1}+1}+\cdots+a_{n_m}v_{n_m}}_{u_m}$$

נסמן $u_l=\sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l}a_jv_j$ כלומר $w=\sum_{l=1}^{m}u_l$ כלומר כל וקטור של W ניתן להצגה כסכום של $U_1...U_m$ (צריך להוכיח שאם $w=\sum_{l=1}^{m}u_l$ אזי $w\in W$ - תרגיל)

נניח שעבור $w\in W$ קיימת הצגה $w=\sum_{l=1}^{m}w_l$ כאשר $1\le l\le m;w_l\in U_l$ אזי ניתן לרשום $w_l=\sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_l}b_jv_j$ אזי $w=\sum_{l=1}^{m}w_l=\sum_{j=1}^{n_m}b_jv_j\Rightarrow\sum_{j=1}^{n_m}a_jv_j=\sum_{j=1}^{n_m}b_jv_j$ אבל $v_1...v_{n_m}$ בסיס ולכן $1\le j\le n_m;a_j=b_j$ כלומר $1\le l\le m;u_l=w_l$ ולכן ההצגה של w יחידה.

טענה 3: יהי $W=\overset{m}{\underset{l=1}{\oplus}}U_l$ אזי $\dim W=\sum_{l=1}^{m}\dim U_l$

הוכחה: יהו $1\le l\le m;\Gamma_l$ בסיסים של U_l אזי לפי טענה 2 $\Gamma_1\dots\Gamma_m$ בסיס של W ולכן $\dim W=\sum_{l=1}^{m}\dim U_l$ כנדרש.

טענה 4: נניח ש $W=\sum_{l=1}^{m}U_l$ וגם $\dim W=\sum_{l=1}^{m}\dim U_l$ אזי $W=\overset{m}{\underset{l=1}{\oplus}}U_l$

הוכחה: כל $w\in W$ ניתן להצגה $w=\sum_{l=1}^{m}u_l$ כאשר $1\le l\le m;u_l\in U_l$ אבל כל $u_i\in U_i=sp(\Gamma_i)\subseteq sp(\Gamma_1...\Gamma_m)$ ולכן ברור כי $w\in sp(\Gamma_1...\Gamma_m)$ לכן $\Gamma_1\dots\Gamma_m$ פורסת את W אבל מספר הוקטורים ב $\Gamma_1\dots\Gamma_m$ הוא בדיוק $\dim W=\sum_{l=1}^{m}\dim U_l$ ולכן $\Gamma_1\dots\Gamma_m$ בסיס של W ולפי טענה 2 $W=\overset{m}{\underset{l=1}{\oplus}}U_l$.

טענה 5: נניח ש $1\le l\le m;U_l\subset W$ כך ש $\dim W=\sum_{l=1}^{m}\dim U_l$ וגם לכל $1\le i\le m$ מתקיים $\left(\sum_{\substack{1\le j\le m\\ j\ne i}}U_j\right)\bigcap U_i=\{0\}$ אזי $W=\overset{m}{\underset{l=1}{\oplus}}U_l$

מטריצות בלוקים

הגדרה: תהי $A\in M_n(F)$ ותהי $1\le k\le m;A_k$ סדרה של מטריצות כך ש $A_k\in M_{n_k}(F)$ נגדיר מספרים $l_0=0,l_1=n_1,l_2=n_1+n_2,...,l_k=l_{k-1}+n_k$ בפרט $l_m=n$ כי $\sum_{k=1}^{m}n_k=n$ כאשר האיברים של A הנמצאים בשורות ועמודות בעלי המספר הסידורי בין $l_{k-1}+1$ ל l_k הם אברי A_k בהתאם לסדר. במקרה שכזה אנו אומרים ש A היא מטריצת בלוקים מן הצורה $A=\begin{pmatrix}A_1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&A_m\end{pmatrix}$.

הערה: נרשום את A_k בצורה מפורשת $A_k=\begin{pmatrix}b_{11}^{(k)}&\dots&b_{1n_k}^{(k)}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{n_k1}^{(k)}&\cdots&b_{n_kn_k}^{(k)}\end{pmatrix}$ אזי $1\le i,j\le n_k\Rightarrow a_{l_{k-1}+i,l_{k-1}+j}=b_{ij}^{(k)}$.

משפט: יהי V מרחב לינארי מעל F ויהיו $1\le k\le m; U_k$ ת"מ של V כך ש $W=\bigoplus_{l=1}^{m} U_l$ (בפרט אם $n_k=\dim U_k$ אזי $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$ כאשר dimV=n) תהי $T:V\to V$ לינארית כך שכל $1\le k\le m; U_k$ אינווריאנטים לגבי T נבחר בכל $1\le k\le m; U_k$ בסיס Γ_k ונבנה בסיס של V בדרך הרגילה $\Gamma=\Gamma_1...\Gamma_m$ אזי $A=[T]_\Gamma=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$ כאשר $.1\le k\le m, A_k=\left[T_{U_k}\right]_{\Gamma_k}$

הוכחה: נרשום את $A_k=\begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & \cdots & b_{1n_k}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_k1}^{(k)} & \cdots & b_{n_kn_k}^{(k)} \end{pmatrix}$ המטרה היא להראות כי $1\le i,j\le n_k \Rightarrow a_{l_{k-1}+i,l_{k-1}+j}=b_{ij}^{(k)}$ ושאר האברים באותן השורות והעמודות הם אפסים.
נסמן וקטורי Γ_k בצורה הבאה $v_1^{(k)},...,v_{n_k}^{(k)}$ ז"א אם $\Gamma=v_1...v_n$ אזי $1\le j\le n_k \Rightarrow v_j^{(k)}=v_{l_{k-1}+j}$ לפי הגדרת מטריצה A_k נקבל $T(v_j^{(k)})=T_{U_k}(v_j^{(k)})=\sum_{i=1}^{n_k} b_{ij}^{(k)}v_i^{(k)}$
כמו כן לפי הגדרה של A נקבל $T(v_j^{(k)})=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i$ שזה בעצם $T(v_{l_{k-1}+j})$ עבור וקטורים בין $l_{k-1}+1$ לבין l_k ונקבל $T(v_{l_{k-1}+j})=\sum_{i=1}^{n} a_{il_{k-1}+j}v_i$ ובגלל יחידות ההצגה נקבל כמסקנה כי כל המקדמים a_{ij} שאנם מתאימים לוקטורים של Γ_k הם אפסים. ואז נקבל $T(v_{l_{k-1}+j})=\sum_{i=1}^{n} a_{l_{k-1}+il_{k-1}+j}v_{l_{k-1}+i}$ כלומר $a_{l_{k-1}+i,l_{k-1}+j}=b_{ij}^{(k)}$ כנדרש.

תת מרחבים T ציקליים.

הגדרה: יהי V מרחב לינארי מעל F $T:V\to V$ לינארית ויהי $v\in V$ וקטור נתון השונה מאפס. נתון כי dimV=n ונתבונן בסדרת וקטורים $v,T(v),T^2(v),...,T^n(v)$ אזי הם תלויים לינארית נמצא k מינימלי כך ש $v,T(v),T^2(v),...,T^k(v)$ תלויה לינארית אזי $k\le n$, אזי $v,T(v),T^2(v),...,T^{k-1}(v)$ היא סדרה בת"ל של k וקטורים.
אזי $T^k(v)$ הוא צ"ל של $v,T(v),T^2(v),...,T^{k-1}(v)$ נסמן
$U=sp(v,T(v),T^2(v),...,T^{k-1}(v))$ אזי U נקרא תת מרחב T ציקלי.

טענה 1: לכל $j\ge 0$ $T^j(v)\in U$
הוכחה: $0\le j\le k-1$ טריויאלי. לגבי $T^k(v)$ הראנו כי הוא צ"ל של $v,T(v),T^2(v),...,T^{k-1}(v)$ ולכן הוא שייך לU, עבור $j>k$ נוכיח באידוקציה.
נניח ש $T^j(v)\in U$ אזי $T^j(v)=a_1v+a_2T(v)+a_3T^2(v)+\cdots+a_kT^{k-1}(v)$ ולכן $T^{j+1}(v)=a_1T(v)+a_2T^2(v)+a_3T^3(v)+\cdots+a_{k-1}T^{k-1}(v)+a_kT^k(v)$ ולכן גם $T^{j+1}(v)\in U$

טענה 2: U הוא אינווריאנטי.

הוכחה: אם $u \in U$ אזי $u = \sum_{i=0}^{k-1} a_i T^i(v)$ ולכן

$T(u) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i T^{i+1}(v) = a_0 T(v) + \cdots + a_{k-1} T^k(v)$ ששיך לU כנדרש.

טענה 3: בסימונים של הטענות הקודמות נסמן $v_j = T^{k-j}(v)$ ז״א

$v_1 = T^{k-1}(v), v_2 = T^{k-2}(v), ..., v_k = T^0(v) = v$ אזי $\Gamma = v_1 ... v_k$ היא בסיס של U ונקבל כי

$$[T_U]_\Gamma = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ c_{k-1} & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

הוכחה: נסמן $T(v_1) = T^k(v) = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$ ולכן העמודה הראשונה הנה $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$

באופן כללי לכך $2 \le j \le k$ מתקיים $T(v_j) = T(T^{k-j}(v)) = T^{k-j+1}(v) = T^{k-(j-1)}(v) = v_{j-1}$

ולכן העמודה ה jהיא תמיד העמודה ה $j-1 \Leftarrow$ $e_{j-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ונקבל את המטריצה

שבטענה.

העתקות נילפונטיות

הגדרה : אנו אומרים ש $T:V\to V$ נילפוטנטית אם $T^k=0$ עבור $k\geq 1$ מסוים (k זה יקרא אינדקס הנילפוטנטיות של T) בדומה אם מטריצה $A^k=0$ אזי A נילפוטנטית.

תכונות מיידיות :

1. T נילפוטנטית אם ורק אם הע״ע היחיד של T הוא אפס.
2. הפולינום האופייני של T הוא $f(t)=t^n$ כאשר n=dimV
3. הפולינום המינימלי של T הוא $1\leq r\leq n;m(t)=t^r$ ולכן r הוא אינדקס הנילפוטנטיות של T.

טענה 1 : אם r הוא אינדקס הנילפוטנטיות של T, $v\in V$ כזה ש $T^{r-1}(v)\neq 0$ אזי הקבוצה $U=sp(v,T(v),T^2(v),...,T^{r-1}(v))$ היא T ציקלית.

הוכחה : נוכיח ש $v,T(v),T^2(v),...,T^{r-1}(v)$ בת״ל. נרשום את המשוואה $a_1v+a_2T(v)+a_3T^2(v)+\cdots+a_rT^{r-1}(v)=0$ נוכיח ש $a_1=0$. אכן נפעיל T^{r-1} על שני האגפים במשוואה ונקבל כי $a_1T^{r-1}(v)+a_2T^r(v)+a_3T^{r+1}(v)+\cdots+a_rT^{2r-2}(v)=0$ כלומר $a_1T^{r-1}(v)=0$ ולכן $a_1=0$ כי $T^{r-1}(v)\neq 0$.
נניח שהוכחנו כי $a_1...a_j$ הם אפסים ונוכיח ש a_{j+1} גם אפס, אכן נקבל מהנחת האידוקציה $a_{j+1}T^j(v)+\cdots+a_rT^{r-1}(v)=0$ נפעיל על שני האגפים T^{r-j-1} ונקבל כי $a_{j+1}=0$ כי $T^{r-1}(v)\neq 0$.
$v,T(v),T^2(v),...,T^{r-1}(v)$ בת״ל ו $T^k(v)=0$ צירוף לינארי שלהם לכן $U=sp(v,T(v),T^2(v),...,T^{r-1}(v))$ היא T ציקלית כנדרש.

טענה 2 : בתנאים של הטענה הקודמת, נסמן $\Gamma=v_1...v_k$ כאשר $v_j=T^{k-j}(v)$ אזי היא בסיס של U ונקבל כי

$$[T_U]_\Gamma=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&1&0\\0&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

הוכחה : לפי התזכורת המטריצה צריכה להראות

$$[T_U]_\Gamma=\begin{pmatrix}c_1&1&0&\cdots&0\\c_2&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&1&0\\c_{k-1}&\vdots&\ddots&\ddots&1\\c_k&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

כאשר $T^r(v)=\sum_{i=1}^{k}c_iv_i$ אבל במקרה שלנו $T^r=0$ ולכן $1\leq j\leq k;c_j=0$

תוצאה של טענה 1: יהי V מרחב nממימדי מעל F $T:V\to V$ נילפוטנטית אזי קיים תת מרחב T ציקלי r מימדי של V אחד לפחות כאשר r הוא אינדקס הנילפוטנטיות של T.

הוכחה: אם r הוא אינדקס הנילפוטנטיות של T אזי קיים $v\in V$ כזה ש $T^{r-1}(v)\neq 0$ אזי לפי טענה 1 הקבוצה $U=sp(v,T(v),T^2(v),...,T^{r-1}(v))$ היא T ציקלית.

משפט: יהי V מרחב לינארי מעל F כך ש dimV=n, $T:V\to V$ נילפוטנטית ובעלת אינדקס הנילפוטנטיות r . ויהי U תת מרחב T ציקלי r מימדי אזי קיים תת מרחב W של V שהוא אינווריאנטי לגבי Tכך ש $V=U\oplus W$.

הערה: אם U תת מרחב כלשהו של V אזי תמיד ניתן לבחור בסיס כלשהו $v_1...v_k$ של U ולהשלים אותו עד לבסיס של V: $v_1...v_k,v_{k+1},...v_n$ ואזי אם נסמן $W=sp(v_{k+1},...v_n)$ נקבל כי $V=U\oplus W$, כל הקושי הוא למצוא W שיהיה T אינווריאנטי.

נוכיח קודם כל מספר טענות עזר:

טענת עזר 1: נסמן $V_1=\operatorname{Im}T$ (ברור ש V_1 אינווריאנטי לגבי T) נגדיר $T_1:V_1\to V_1$ על ידי הנוסחה: $T_1=T_{|V_1}$ אזי T_1 נילפוטנטית בעלת אינדקס הנילפוטנטיות r-1.
הוכחה: אם $v_1\in V_1$ אזי $v_1=T(v)$ עבור $v\in V$ מסוים. לכן $T_1^{r-1}(v_1)=T^{r-1}(v_1)=T^r(v)=0$ אבל קיים $v_0\in V$ כך ש $T^{r-1}(v_0)\neq 0$ (כי אינדקס הנילפוטנטיות הוא r) נסמן $v_1=T(v_0)$ אזי $v_1\in V_1$
וגם $T_1^{r-2}(v_1)=T^{r-2}(v_1)=T^{r-1}(v_0)\neq 0$ כלומר $T_1^{r-2}\neq 0$ ולכן אינדקס הנילפוטנטיות של T_1 הוא r-1 כנדרש.

טענת עזר 2: בתנאים של הטענה הקודמת, יהי U תת מרחב T ציקלי r מימדי של V. דהיינו $U=sp(v,T(v),T^2(v),...,T^{r-1}(v))$ כאשר $T^{r-1}(v)\neq 0$ אזי תת מרחב $U_1=sp(T(v),T^2(v),...,T^{r-1}(v))$ הוא תת מרחב T_1 ציקלי r-1 מימדי של V_1 יתירה מזאת אם $u\in U$ אזי $T(u)\in U_1$ ואם $u_1\in U_1$ אזי קיים $u\in U$ כך ש $u_1=T(u)$.

הוכחה: נסמן $u=T(v)\in V_1$ אזי
$U_1=sp(T_1(v),T_1^2(v),...,T_1^{r-1}(v))=sp(u,T_1(u),T_1^2(u),...,T_1^{r-2}(u))$ כאשר $T_1^{r-2}(u)=T^{r-1}(u)\neq 0$ לכן U_1הוא תת מרחב T ציקלי r-1 מימדי של V_1. יתירה מזאת נניח ש $w\in U$ ז״א $w=\sum_{j=0}^{r-1}a_jT^j(v)$ אזי $T(w)=\sum_{j=0}^{r-1}a_jT^{j+1}(v)\in U_1$

בכיוון השני, נניח $u_1\in U_1$ אזי $u_1=\sum_{j=1}^{r-1}a_jT^j(v)$ ולכן $u_1=T\left(\sum_{j=0}^{r-2}a_{j+1}T^j(v)\right)$ כלומר

$u_1=T(u)$ כאשר $u=\sum_{j=0}^{r-2}a_{j+1}T^j(v)\in U$ כנדרש.

טענת עזר 3: בתנאים של הטענה הקודמת אם $u \in U$ ו $T(u)=0$ אזי $u \in U_1$

הוכחה: אם $u \in U$ אזי $u=\sum_{j=0}^{r-1} a_j T^j(v)$ ואזי $T(u)=\sum_{j=0}^{r-1} a_j T^{j+1}(v)=0$ כלומר $a_0T(v)+\cdots+a_{r-2}T^{r-1}(v)+\underbrace{a_{r-1}T^r(v)}_{0}=0$ וקבלנו $a_0T(v)+\cdots+a_{r-2}T^{r-1}(v)=0$ אבל $T(v)...T^{r-1}(v)$ בת"ל ולכן $a_0...a_{r-2}=0$ ונקבל כמסקנה כי $u=a_{r-1}T^{r-1}(v)\in U_1$ כנדרש.

הוכחת המשפט: נוכיח את המשפט באינדוקציה לפי r.

בסיס: אם r=1 אזי $T^1=T=0$, נשלים את U באופן שרירותי ע"י ת"מ W כלשהו כך ש $V=U\oplus W$, אם $v \in W$ אזי T(v)=0 כמובן שייך גם הוא ל W ולכן W הוא T אינווריאנטי.

הנחה: נניח שטענת המשפט נכונה עבור כל מרחב V, כל העתקה T נילפוטנטית בעלת אידקס הנילפוטנטיות r-1 וכל תת מרחב T ציקלי r-1 מימדי.

צעד: יהי V מ"ו מעל F ו $T:V\to V$ נילפוטנטית בעלת אינדקס הנילפוטנטיות r, ויהי U ת"מ של V שהוא T ציקלי r מימדי. לפי טענות העזר 1 ו2 $T_1:V_1\to V_1$ כאשר $V_1=ImT$ היא בעלת אינדקס הנילפוטנטיות r-1 ו U_1 הוא T_1 ציקלי r-1מימדי. לכן לפי הנחת האינדוקציה, קיים תת מרחב W_1 של V_1 שהוא T_1 אינווריאנטי כך ש $V_1=U_1\oplus W_1$.

נגדיר $(1) W_0=\{v\in V: T(v)\in W_1\}$ אם $v\in W_1$ אזי $T(v)\in W_1$ ולכן $v\in W_0$ לכן $W_1\subseteq W_0$.

אם $v\in W_0$ אזי $T(v)\in W_1\subseteq W_0$.

מסקנה: (2) W_0 הוא T אינוריאנטי.

נוכיח $(3) V=W_0+U$:

יהי $v\in V$ אזי $T(v)\in V_1$ ולכן $T(v)=u_1+w_1$ כאשר $w_1\in W_1; u_1\in U$ לפי טענת עזר 2 קיים $u\in U$ כך ש $u_1=T(u)$. נרשום $v=u+(v-u)$ אזי

$T(v-u)=T(v)-T(u)=(u_1+w_1)-u_1\in W_1$

לכן לפי (1) $v-u\in W_0$ ו $u\in U$ כלומר כל וקטור של V ניתן לרשום כסכום של וקטורי W_0וU כנדרש ולכן (3) מתקיים.

נוכיח $(4) U\cap W_1=\{0\}$:

אם $u\in U\cap W_1$ אזי $u\in U$ וגם $u\in W_1$, לכן לפי טענת עזר 2 $T(u)\in U_1$. גם $T(u)\in W_1$ כי $T(u)=T_1(u)$ ו W_1 הוא T_1 אינוריאנטי לכן $T(u)\in U_1\cap W_1$ לכן T(u)=0 כי $U_1\cap W_1=\{0\}$ לכן לפי טענת עזר 3 $u\in U_1$, לכן $u\in U_1\cap W_1=\{0\}$ כלומר $U\cap W_1=\{0\}$ כנדרש.

אזי $(5)(U\cap W_0)\cap W_1\subseteq U\cap W_1=\{0\}$

נגדיר $W_2=(U\bigcap W_0)\oplus W_1$ ז"א $W_2=\{v_1+v_2: v_1\in U\bigcap W_0, v_2\in W_1\}$ לכן
$(6)W_2=\left(U\bigcap W_0\right)\oplus W_1$ אבל: $U\bigcap W_0\subseteq W_0$, $W_1\subseteq W_0$ לכן $W_2\subseteq W_0$ תמיד ניתן לבחור
תת מרחב W_3של W_0 כך ש $(7)W_0=W_2\oplus W_3$ לפי (6) ו(7) ניתן לכתוב
$W_0=W_2\oplus W_3=\left(U\bigcap W_0\right)\oplus W_1\oplus W_3$ נסמן $W=W_1\oplus W_3$ אזי $(8)W_0=\left(U\bigcap W_0\right)\oplus W$
W זה הוא ה W המבוקש. $W_3\subseteq W_0$ לפי (7) $W_1\subseteq W_0$ - מהגדרה של W_0 לכן
$W_1\subseteq W\subseteq W_0$ לפי ההגדרה של W .
נבדוק כי מתקיימות כל הדרישות:
1. W הוא T אינוריאנטי – אכן אם $v\in W$ אזי $v\in W_0$, לכן $T(v)\in W_1\subseteq W$ לפי (8)
2. $W\bigcap U=(W\bigcap W_0)\bigcap U=W\bigcap(W_0\bigcap U)=\{0\}$
3. נוכיח ש $V=W\oplus U$, הוכחנו קודם ש $(3)V=W_0+U$, לכן אם $v\in V$ אזי
$v=u+w_0$ כאשר $u\in U; w_0\in W_0$ אבל לפי (8) $w_0=u_1+w$ כאשר
$u_1\in\left(U\bigcap W_0\right)\subset U; w\in W$ ולכן $v=u_1+u+w$ כאשר $u+u_1\in U; w\in W$ ז"א
$V=U+W$ כנדרש.

צורת Jordan של מטריצה נילפוטנטית:

יהי V מ"ו מעל F, כך ש dimV=n $T:V\to V$ נילפוטנטית ובעלת אינדקס הנילפוטנטיות r_1 אזי:

א. ניתן לרשום את V בצורה $V=\overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}}U_j$ כאשר U_j הם תת מרחבים T ציקליים של V (ולכן גם T אינוריאנטים) $\dim U_j=r_j$ כאשר $r_1\ge r_2\ge\cdots\ge r_m$

ב. נרשום U_j בצורה הרגילה $U_j=sp(v_j,T(v_j),T^2(v_j),...,T^{r_j-1}(v_j))$ אזי
$\Gamma_j=v_j,T(v_j),T^2(v_j),...,T^{r_j-1}(v_j)$ הוא בסיס של U_j נבנה בסיס $\Gamma=\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_m$
לפי חלק א' זהו בסיס של V אזי $B=\left[T\right]_\Gamma=\begin{pmatrix}B_1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&B_m\end{pmatrix}$ כאשר

$B_j=\left[T_{|U_j}\right]_{\Gamma_j}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&\ddots&1&0\\ 0&\vdots&\ddots&\ddots&1\\ 0&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$ אם $r_j=\dim U_j\ge 2$ אם $r_j=1$ אזי $B_j=(0)$

מטריצה זו נקראת צורת Jordanשל מטריצה נילפוטנטית.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה לפי $1\le n$. אם n=1 אזי $r_1\le n$ לכן $r_1=1$ ז"א $\dim U_1=1$ כלומר $U_1=V$.

ג. נניח שהוכחנו את הטענה עבור כל $\dim V=m<n$ ונוכיח עבור V כך ש dimV=n.
לפי טענה שהוכחנו קיים תת מרחב U_1 T ציקלי r_1מימדי. לפי המשפט האחרון קיים W ת"מ של V שהוא T אינווריאנטי כך ש $V=U_1\oplus W_1$, נגדיר העתקה $T':W\to W$ כך ש $T'=T_{|W}$. אזי לכל $w\in W$ $T'^{r_1}(w)=0$ לכן 'T נילפוטנטית,
אינדקס הנילפוטנטיות שלה הוא מספר $r_2\le r_1$. אבל $\dim W<n$, לכן לפי הנחת

האינדוקציה $W=\overset{m}{\underset{j=2}{\oplus}}U_j$ כאשר U_j הם תת מרחבים T ציקליים $\dim U_j=r_j$

כאשר $r_2\ge\cdots\ge r_m$ לכן $V=U_1+\overset{m}{\underset{j=2}{\oplus}}U_j$ כלומר $V=\overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}}U_j$ כנדרש.

טענה 1: תהי B מטריצה בגודל $l\cdot l$ מן הצורה

$B=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&1&0\\0&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}=\left(0,e_1,\dots,e_{l-1}\right)$ כאשר $l\ge 2$ אזי מספר העמודות השונות

מאפס במטריצה B^k הוא $\begin{matrix}0\le k\le l\Rightarrow l-k\\k>l\Rightarrow 0\end{matrix}$

הוכחה: $2\le i\le l;Be_i=e_{i-1}\mid Be_1=0$ לפי צורת המטריצה. נוכיח ש

$B^k=\left(0,0,\dots,e_1,\dots,e_{l-k}\right)$ באינדוקציה.

בסיס: אם k=1 זה נתון.

צעד: אכן, אם זה נכון עבור k אז

$B^{k+1}=B(B^k)=\left(B0,B0,\dots,Be_1,\dots,Be_{l-k}\right)=\left(0,0,\dots,e_1,\dots,e_{l-k-1}\right)$ לכן במטריצה B^k יש

בדיוק $l-k$ עמודות השונות מאפס. בפרט אם k=l אזי $B^k=0$. (נכון גם מהעובדה שאינדקס הנילפוטנטיות של מטריצה קטן או שווה ממימד המרחב שהוא גודל המטריצה.)

תוצאה 1: בתנאים של טענה 1. אם דרגה של מטריצה $0<B^k$ _ $(r(B^k)>0)$ אזי

$r(B^{k+1})=r(B^k)-1$ ואם $r(B^k)=0$ אזי $r(B^{k+1})=r(B^k)$.

תזכורת: אם $A=\begin{pmatrix}B_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&B_m\end{pmatrix}$ אזי $A^k=\begin{pmatrix}B_1{}^k&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&B_m{}^k\end{pmatrix}$ לכל $k\ge1$. כלומר כל

בלוק B_i כאשר $1\le i\le m$ מקיים את התוצאה..

הדרגה של המטריצה A^k שווה לסכום הדרגות של כל מטריצות הבלוקים שמרכיבות אותה, כי אם עמודה מסוימת בבלוק מסוים שווה לאפס אזי גם ב A^k

היא שווה לאפס ולכן $r(A^k)=\sum_{j=1}^{m}r(B_j{}^k)=\sum_{\substack{1\le j\le m\\B_j{}^k\ne0}}r(B_j{}^k)$ ונקבל כי

$r(A^{k+1})=\sum_{\substack{1\le j\le m\\B_j{}^k\ne0}}(r(B_j{}^k)-1)=\sum_{\substack{1\le j\le m\\B_j{}^k\ne0}}r(B_j{}^k)-c(k)$ כאשר C(k) הוא מספר הבלוקים של

A^k השונים מאפס.

מסקנה: $r(A^k)-r(A^{k+1})=C_k$

סימון: יהי $j \geq 0, k \geq 1$ נסמן n(j,k) מספר הבלוקים של A^k כך שדרגת הבלוק היא j.
אם j>1 מספר זה בדיוק שווה למספר הבלוקים במטריצה A^{k-1} כאלה שדרגתם היא j+1. ז"א n(j,k)=n(j+1,k-1). אם j=0 אז n(0,k)=n(0,k-1)+n(1,k-1) ולכן נקבל n(0,k)-n(0,k-1)=n(1,k-1) כלומר מספר הבלוקים שהפכו לאפס בשלב המעבר מ k-1 ל k הם הבלוקים שדרגתם הייתה 1. בנוסף נקבל

$$(1)n(1,k-1) = n(2,k-2) = n(3,k-3) = \cdots = n(k-1,1)$$

הערה: n(k-1,1) זה מספר הבלוקים במטריצה A בעלי דרגה k-1 אבל בלוקים של המטריצה A בעלי דרגה k-1 הם מן הצורה $B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ כאשר $B_j \in M_k(F)$.

נסמן d_k מספר הבלוקים של A בעלי הצורה k*k אזי d_k=n(k-1,1) כמו כן n(0,k) הוא מספר הבלוקים של A^k שדרגתם היא אפס, כלומר שהם שווים לאפס לכן $n(0,k) = \underbrace{m}_{\substack{all\\blocks}} - C_k$ ולפי 1 נקבל $m - C_k - (m - C_{k-1}) = d_k$ כלומר $(2)C_{k-1} - C_k = d_k$

ולפי המסקנה נקבל כנוסחה סופית

$$(3)d_k = C_{k-1} - C_k = \left(r(A^{k-1}) - r(A^k)\right) - \left(r(A^k) - r(A^{k+1})\right)$$

משפט: תהי A מטריצה נילפוטנטית בצורת Jordan נסמן על ידי d_k מספר הבלוקים של A בעלי הצורה k*k אזי לכל $k \geq 2 \Rightarrow d_k = r(A^{k-1}) + r(A^{k+1}) - 2r(A^k)$ (נובע מהמסקנה)

תזכורת: r(T)=dimIm(T) אם $A = [T]_\Gamma$ כאשר Γ בסיס כלשהו אזי r(A)=r(T).

תוצאה 1: תהי $T: V \to V$ נילפוטנטית, V בעל מימד סופי ותהי A צורת Jordan של העתקה T אזי מספר הבלוקים מן הצורה k*k $2 \leq k$ ב A הוא $r(T^{k-1}) + r(T^{k+1}) - 2r(T^k)$

תוצאה 2: בתנאים של התוצאה הקודמת, צורת Jordan של T מוגדרת באופן חד ערכי.

צורת Jordan של מטריצה כלשהי A:

תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ ויהיו $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m\in\mathbb{C}$ הם הע״ע של A השונים זה מזה. אזי אנו אומרים ש A היא בעלת צורת Jordan אם:

א. $A=\begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$ כאשר A_j מן הצורה $n_j \bullet n_j$ ו $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$

ב. $A=\begin{pmatrix} A_{1j} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{r_j j} \end{pmatrix}$ כאשר A_{ij} הן מטריצות ריבועיות שיכולות להיות משני הצורות הבאות בלבד:

1. מטריצה 1X1 ואז $A_{ij}=(\lambda_j)$

2. $A_{ij}=\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$ זהו בעצם צירוף של שני מטריצות האחת שבאלכסון שלה מופיע λ_j והשני צורת Jordan של מטריצה נילפוטנטית.

במטריצה כזו יתקיים: $f_A(t)=\det(tI-A)=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_m)^{n_m}$

משפט: יהי V מרחב לינארי ממימד n, $T:V\to V$ לינארית אזי קיים בסיס Γ של V כך ש $A=[T]_\Gamma$ היא בעלת צורת Jordan. יתירה מזאת A מקיימת את הדרישות הבאות:

$f_T(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-\lambda_j)^{n_j}$ כאשר A_j היא מן הצורה $n_j \bullet n_j$

יהי r_j מספר הבלוקים הקטנים ב A_j אזי r_j הוא הריבוי הגיאומטרי של λ_j

נסמן על ידי $A_{ij};1\le i\le r_j$ את הבלוקים הקטנים של A_j אזי ניתן לכתוב ש A_{ij} הוא מן הצורה r_{ij}xr_{ij} אזי $l_j=\max_{1\le i\le r_j} r_{ij}$ הוא החזקה של $t-\lambda_j$ בפולינום המינימלי.

טענה: יהי V מרחב לינארי $T:V\to V$ ו $U_i;1\le i\le k$ ת״מ של V אינווריאנטים לגבי T. יהי $U=\bigotimes_{i=1}^{k}U_i$ אם $T_{|U_i}$ רגולריות לכל $1\le i\le k$ אזי $T_{|U}$ גם רגולרית.

הוכחה: נוכיח למקרה k=2 כלומר $U=U_1\oplus U_2$ נניח $u\in U$ כך ש $T(u)=0$ אזי $u=u_1+u_2;u_1\in U_1,u_2\in U_2$ אזי $T(u_1)+T(u_2)=0$ אזי $T(u_1)=-T(u_2)$ ולכן $T(u_1)\in U_1\bigcap U_2=\{0\}$ אבל $T_{|U_1}$ רגולרית ולכן $u_1=0$ ולכן $T(u_2)=0$ ולכן $u_2=0$ כי גם $T_{|U_2}$ היא רגולרית.

נניח נכונות הטענה עבור k ונוכיח עבור k+1 .

אכן, $\sum_{i=1}^{k+1} W \oplus U_{k+1}$ כאשר $W = \overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}} U_i$ לפי הנחת האינדוקציה $T_{|W}$ רגולרית, וברור גם ש W הוא T אינוריאנטי ועבור מקרה של שני ת״מ הוכחנו ולכן T רגולרית על $W \oplus U_{k+1}$ כנדרש.

משפט 1: יהי V מרחב לינארי מעל F ותהי $T: V \to V$ לינארית כך ש $f_T(t) = \prod_{j=1}^{m} (t-\lambda_j)^{n_j}$ כאשר $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ הם הע״ע של T השונים זה מזה אזי קיימים תתי מרחבים $1 \le j \le m; U_j$ אינוואריאנטים לגבי T כך ש $V = \overset{m}{\underset{j=1}{\otimes}} U_j$ וגם $T_{|U_j} = \lambda_j I + N_j$ כאשר N_j היא נילפוטנטית.

טענת עזר 1: יהי λ ע״ע של T אזי קיים $1 \le m_\lambda$ כך ש לכל $m_\lambda \le j$ $\ker\left((T-\lambda I)^j\right) = \ker\left((T-\lambda I)^{m_\lambda}\right)$.

הוכחה: לכל $1 \le j$ נקבל $\ker\left((T-\lambda I)^j\right) \subseteq \ker\left((T-\lambda I)^{j+1}\right)$ אכן אם $v \in \ker\left((T-\lambda I)^j\right)$ אזי

$$(T-\lambda I)^{j+1}(v) = (T-\lambda I)(T-\lambda I)^j(v) = (T-\lambda I)(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker(T-\lambda I)^{j+1}$$

נסמן $d_j = \dim\ker(T-\lambda I)^j$ ונקבל לכל $1 \le j$ כי $d_j \le d_{j+1}$ אבל $d_j \le n$ לכן קיים m כך ש $d_j = d_m$ עבור כל $m \le j$ כנדרש.

נסמן $U_\lambda = \ker\left((T-\lambda I)^{m_\lambda}\right)$

טענת עזר 2: U_λ הוא T אינווריאנטי.

הוכחה: אם $v \in U_\lambda$ אזי גם $(T-\lambda I)(v) \in U_\lambda$ אכן:

$(T-\lambda I)^{m_\lambda}(T-\lambda I)(v) = (T-\lambda I)(T-\lambda I)^{m_\lambda}(v) = (T-\lambda I)(0) = 0$ ולכן

$$T(v) = (T-\lambda I)(v) + \lambda v \in U_\lambda$$

טענת עזר 3: יהיו $\lambda \neq \mu$ שני ע"ע של T אזי $T-\lambda I_{|U\mu}$ רגולרית וגם $U\mu$ אינווריאנטית לגבי $T-\lambda I$.

הוכחה: ברור שאם $v \in U_\mu$ אזי $\left(T-\lambda I\right)(v)=T(v)-\lambda v \in U_\mu$ כי $U\mu$ T אינווריאנטית לפי טענת עזר 2.

נניח בשלילה ש $T-\lambda I_{|U\mu}$ איננה רגולרית אזי קיים $0 \neq v \in U_\mu$ כך ש $\left(T-\lambda I\right)(v)=0$ אזי $T(v)=\lambda v$ ולכן $\left(T-\mu I\right)(v)=T(v)-\mu v=(\lambda-\mu)v$ ובאינדוקציה לפי m נקבל ש: $\left(T-\mu I\right)^m (v)=(\lambda-\mu)^m v$. לכל $1 \le m$ $U_\mu=\ker\left(\left(T-\mu I\right)^{m_\mu}\right)$ לכן אם $v \in U_\mu$ אז $\left(T-\mu I\right)^{m_\mu}(v)=(\lambda-\mu)^{m_\mu} v=0$ אבל $\lambda-\mu \neq 0; v \neq 0$ ולכן קיבלנו סתירה ז"א $T-\lambda I_{|U\mu}$ רגולרית.

מסקנה: $\left(\left(T-\lambda I\right)_{|U\mu}\right)^m$ רגולרית לכל $1 \le m$

הוכחת משפט 1:

יהיו $\lambda_1\lambda_2...\lambda_m$ ע"ע של T השונים זה מזה ונסמן $U_j=U_{\lambda j}$. נסמן

$$1 \le k \le m; W_k=\sum_{j=1}^{k} U_j$$

שלב 1: נוכיח ש $(1) W_k=\bigoplus_{j=1}^{k} U_j$ באינדוקציה לפי k.

בסיס: עבור k=1 נקבל בצורה טריויאלית $W_1=\bigoplus_{j=1}^{1} U_j=U_1$

נניח שטענה (1) נכונה עבור k אזי $W_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1} U_j=W_k+U_{k+1}$ כאשר $W_k=\bigoplus_{j=1}^{k} U_j$ לפי הנחת האינדוקציה. נניח כי $v \in W_k \bigcap U_{k+1}$ אזי $v \in U_{k+1}$ כלומר $(2)(T-\lambda_{k+1}I)^{m_{\lambda_{k+1}}}(v)=0$. $v \in \bigoplus_{j=1}^{k} U_j$ אבל $(T-\lambda_{k+1}I)$ רגולרית על U_j כאשר $1 \le j \le k$ לפי טענה 3. לפי הטענה שהוכחנו לפני המשפט $(T-\lambda_{k+1}I)_{|W_k}$ רגולרית כי $W_k=\bigoplus_{j=1}^{k} U_j$

לכן $(T-\lambda_{k+1}I)^m$ רגולרית על W_k לכל $1 \le m$ לכן לפי (2) v=0.

מסקנה: $W_k \bigcap U_{k+1}=0$ לכן $W_{k+1}=W_k \oplus U_{k+1}$

נוכיח ש $W_m=V$.

נשים לב כי $f_T(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-\lambda_j)^{n_j}$ נסמן $T_0=I; T_k=\prod_{j=1}^{k}(T-\lambda_j I)^{n_j}$ אזי $(1) 1 \le k \le m; T_k=(T-\lambda_k I)^{n_k} T_{k-1}$ נניח בדרך השלילה כי קיים $v \in V$ כך ש $v \notin W_m$.

נתבונן בסדרה של וקטורים: $v=T_0(v), T_1(v), T_2(v), ..., T_m(v)$ לפי ההנחה $T_0(v) \notin V$ אבל $T_m(v)=0$ כי $T_m=f_T(T)=0$ ולכן $T_m(v) \in W_m$. קיים k מינימלי $1 \le k \le m$ כך ש $T_k(v) \in W_m$ אבל $T_{k-1}(v) \notin W_m$.

אם $T_k(v) \in W_m$ אז $1 \le i \le k; u_i \in U_i; T_k(v)=\sum_{i=1}^{k} u_i$

סימון: $W_m = \underset{\substack{j=1\\ j\neq k}}{\overset{m}{\oplus}} U_j \oplus U_k = G_k \oplus U_k$ כלומר $(2)G_k = \underset{\substack{j=1\\ j\neq k}}{\overset{m}{\oplus}} U_j$

לכן $(3)T_k(v) = g_k + u_k$ כאשר $g_k \in G_k, u_k \in U_k$

לפי טענת עזר 3 $(T-\lambda_k I)_{|U_{\lambda j}}$ היא רגולרית כל עוד $j \neq k$. לכן $(T-\lambda_k I)_{|G_K}$ וגם

$(T-\lambda_k I)^{n_k}{}_{|G_K}$ רגולריות לפי סימון (2) והטענה שהוכחנו לפני ניסוח המשפט. כלומר

$(T-\lambda_k I)^{n_k} : G_k \to G_k$ רגולרית ז״א $\mathrm{Im}((T-\lambda_k I)^{n_k}{}_{|G_k}) = G_k$ זאת אומרת קיים

$q_k \in G_k$ כך ש $(4)(T-\lambda_k I)^{n_k}(q_k) = g_k$ לפי (3) ו(1) נקבל

$(T-\lambda_k I)^{n_k} T_{k-1}(v) \overset{(4)}{=} u_k + (T-\lambda_k I)^{n_k}(q_k)$ נעביר אגף ונקבל

$(T-\lambda_k I)^{n_k}(T_{k-1}(v) - q_k) = u_k$ נפעיל את $(T-\lambda_k I)^{m_{\lambda k}}$ על שני האגפים ונקבל:

$(T-\lambda_k I)^{n_k + m_{\lambda k}}(T_{k-1}(v) - q_k) = (T-\lambda_k I)^{m_{\lambda k}}(u_k) = 0$ לכן

$(T_{k-1}(v) - q_k) \in \ker(T-\lambda_k I)^{n_k m_{\lambda k}}$ אבל לפי טענת עזר 1 $\ker(T-\lambda_k I)^{n_k m_{\lambda k}} = U_k$ ז״א

$T_{k-1}(v) - q_k) \in U_k \subseteq W_m$ אבל $q_k \in G_k$ כאשר $G_k \subseteq W_m$ ולכן

$T_{k-1}(v) = q_k + (T_{k-1}(v) - q_k) \in W_m$ בסתירה. כלומר ההנחה שקיים v שאיננו שייך ל

W_m מביאה לסתירה ולכן $V=W_m$ כנדרש. כלומר $V = \overset{m}{\underset{j=1}{\oplus}} U_j$ כאשר כל U_j הוא T

אינוריאנטי, יתירה מזאת $U_j = \ker\left(\left(T-\lambda_j I\right)^{m_{\lambda j}}\right)$ ז״א $T-\lambda_j I_{|Uj}$ נילפוטנטית.

נסמן $T-\lambda_j I_{|Uj} = N_j$ ז״א $T_{|Uj} = \lambda_j I + N_j$.

טענה: תהי $N : W \to W$ נילפוטנטית כאשר W מרחב לינארי מעל F, יהי $\lambda \in F$ אזי ניתן למצוא ת״מ לינאריים W_j $1 \le j \le k$ N ציקליים ובסיסים Γ_j $1 \le j \le k$ בתת מרחבים הנ״ל ונבנה בסיס $\Gamma = \Gamma_1 ... \Gamma_k$ אזי: $\left[N + \lambda I\right]_\Gamma = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$ ו

$B_j = \left[N + \lambda I\right]_{\Gamma j}$ כאשר $B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

הוכחה: לפי המשפט על צורת Jordan של מטריצה נילפוטנטית קיימים ת״מ W_j N ציקליים ובסיסים Γ_j $1 \le j \le k$ כך ש $\left[N\right]_\Gamma = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}$

ו $A_j = \left[N\right]_{\Gamma j} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\left[N + \lambda I\right]_{\Gamma j} = \left[N_{|Wj}\right]_{\Gamma j} + \left[\lambda I_{|Wj}\right]_{\Gamma j}$ כנדרש.

תוצאה: תהי $T:V\to V$ לינארית שרירותית ויהיו $\lambda_1\lambda_2...\lambda_m$ כל הע"ע של T השונים זה מזה ו $f_T(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-\lambda_j)^{n_j}$ אזי קיימים תתי מרחבים T אינווריאנטים של V U_j כך ש $T_{|Uj}=N_j+\lambda_j I$ ו $V=\bigoplus_{j=1}^{m}U_j$. יתירה מזאת כל ת"מ U_j מתפרק בעצמו לתת מרחבים T אינווריאנטים, כלומר $U_j=\bigoplus_{i=1}^{r_j}U_{ij}$ וניתן לבחור בסיסים Γ_{ij} בכל תת מרחב U_{ij} כך ש $[T]_\Gamma=\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & B_m\end{pmatrix}$ כך ש $\Gamma=\Gamma_1...\Gamma_k$ כאשר כל B_j $1\le j\le m$ הוא

$$B_j=\left[T_{|Uj}\right]_{\Gamma j}=\begin{pmatrix} B_{1j} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_{2j} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & B_{r_j j}\end{pmatrix}$$ כאשר $\Gamma_j=\Gamma_{1j}...\Gamma_{r_j j}$ וכל מטריצה

$$B_{ij}=\left[T_{|Uij}\right]_{\Gamma ij}=\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_j & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ & & & \ddots & 1\\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_j\end{pmatrix}$$

תוצאה: תהי J צורת Jordan של העתקה T אזי $f_T(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-\lambda_j)^{n_j}$ כאשר n_j הוא מספר השורות (או העמודות) בחלק B_j המופיע בפיתוח $J=\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & B_m\end{pmatrix}$

הערה: אם g פולינום מעל שדה F ו $J=\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & B_m\end{pmatrix}$ אז

$g(J)=\begin{pmatrix} g(B_1) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & g(B_m)\end{pmatrix}$ ז"א אם $g(J)=0$ אזי $g(B_j)=0$ לכל $1\le j\le m$ וזה מתקיים רק אם g מתחלק בכל הפולינומים המינימליים של B_j אבל $B_j=N_j+\lambda_j I$ כאשר N_j נילפוטנטית ולכן $m_{Bj}=(t-\lambda_j)^{l_j}$ הפולינום המינימלי של B_j.

$$B_j=\begin{pmatrix} B_{1j} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_{2j} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & B_{r_j j}\end{pmatrix}$$ $m_{Bij}(t)=(t-\lambda_j)^{r_{ij}\to\dim Bij}$ ולכן $l_j=\max_{1\le i\le r_j} r_{ij}$