תרגיל 3 אלגברה לינארית 2

הערות :התרגיל אינו מיועד להגשה.

בשבוע הבא (28,29 מרץ) יהיה בוחן.

הבוחן הוא על התרגילים וכמו כן עליכם לדעת לנסח משפטים והגדרות שנתנו בהרצאה (ללא הוכחות).

1) מצאו את הפולינום המינימלי של המטריצות הבאות (מומלץ להעזר במשפט קיילי-המילטון):

א) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ב) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) יהי $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ פולינום . כזכור, לכל טרנספורמציה לינארית $T:V\to V$, מגדירים $f(T):V\to V$ להיות $f(T):=a_o\cdot I+a_1\cdot T+...+a_n\cdot T^n$, ולכל $A\in M_n[f]$ מגדירים: $f(A):=a_0I+a_1A+.....+a_nA^n$ $f(A)\in M_n[f]$. הוכיחו:

א) אם λ ע"ע של T אזי $f(\lambda)$ ע"ע של $f(T)$;

ב) אם A מייצגת את T לפי בסיס כלשהו, אזי $f(A)$ מייצגת את $f(T)$ ביחס לאותו בסיס.

3) א. תהא $D=\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0\dots & \dots 0 \\ 0\dots & \ddots & \dots 0 \\ 0\dots & \cdots & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$ מטריצת בלוקים אלכסונית, עם A_i מטריצות רבועיות, ויהי f פולינום . הוכיחו כי:

$$f(D)=\begin{pmatrix} \boxed{f(A_1)} & 0\dots & \dots 0 \\ 0\dots & \ddots & \dots 0 \\ 0\dots & \cdots & \boxed{f(A_k)} \end{pmatrix} .$$

ב. יהיו $P_A(D)$, $P_A(A_i)$ $i=1,...k$ הפולינומים האופייניים של A_i,D בהתאמה. הוכיחו ש- $P_A(D)=\Pi_{i=1}^{k}A_i$

ג) יהיו m_{A_i} , m_D הפול' המינ' של A_i , D בהתאמה. הוכיחו כי m_{A_i} / m_D , $\forall 1 \le i \le k$ והראו ש- $m_D(t) = m.c.m.\{m_{A_1},...,m_{A_k}\}$
($m.c.m =$ הכפולה המשותפת המינימלית)

4) בשאלה זו $\varphi(n)$ מסמנת את המספר פיבונצ'י ה n-י , כלומר:
$\varphi(0) := 0$, $\varphi(1) := 1$, ואם $n > 1$, $\varphi(n) := \varphi(n-1) + \varphi(n-2)$
מצאו נוסחה מפורשת עבור $\varphi(n)$.

רמז: שימו לב כי מתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(n-2) \\ \varphi(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(n-1) \\ \varphi(n) \end{pmatrix}$)

5) (שאלה ממבחן) תהי T טרנספורמציה לינארית של R_2 המקיימת לכל וקטור α : $T(T\alpha) = T\alpha + C\alpha$
מהם הערכים האפשריים של C אם ידוע שיש ל- T שני וקטורים עצמיים בילתי תלויים לינארית?

פתרון תרגיל 3 אלגברה לינארית 2

1) מצאו את הפולינום המינימלי של המטריצות הבאות (מומלץ להעזר במשפט קיילי-המילטון):

א) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ב) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון 1:

א) הפולינום האופיני של A הוא $p_A(t)=t^4$ וקל לראות שזה גם הפולינום המינימלי של A , כי $A^3 \neq 0$.

ב) הפולינום האופיני של A הוא $p_A(t)=t^2(t-1)^2$. כיוון שלפולינום האופיני ולפולינום המינימלי אותם גורמים אי-פריקים, האפשרויות לפולינום המינימלי הם:

$t(t-1)$, $t^2(t-1)$, $t(t-1)^2$, $t^2(t-1)^2$. בדיקה מעצבנת אך קלה מראה כי האופציה האחרונה היא הנכונה, ולכן $m_A(t)=p_A(t)$.

2) יהי $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ פולינום . כזכור, לכל טרנספורמציה לינארית $T:V\to V$, מגדירים $f(T):V\to V$ להיות $f(T):=a_o\cdot I+a_1\cdot T+...+a_n\cdot T^n$, ולכל $A\in M_n[f]$ מגדירים: $f(A):=a_0I+a_1A+.....+a_nA^n$ $f(A)\in M_n[f]$. הוכיחו:

א) אם λ ע"ע של T אזי $f(\lambda)$ ע"ע של $f(T)$;

ב) אם A מייצגת את T לפי בסיס כלשהו, אזי $f(A)$ מייצגת את $f(T)$ ביחס לאותו בסיס.

פתרון 2:

.- א) אם λ ע"ע של T, אזי קיים $v\neq 0$ כך ש- $Tv=\lambda v$. לכן:

$$f(T)(v)=(a_0I+a_1T+...+a_nT^n)v=a_0Iv+a_1Tv+...+a_nT^nv=$$

$$a_0Iv+a_1\lambda v+...+a_n\lambda^n v=(a_0+a_1\lambda+...+a_n\lambda^n)v=f(\lambda)v$$

ולכן $f(\lambda)$ ע"ע של $f(T)$ עם ו"ע v. □

ב) נניח כי A מייצגת את T ביחס לבסיס α, נכתוב: $A=[T]_\alpha$.כיוון שלכל שתי טרנספורמציות לינאריות R,S מתקיים $[R\circ S]_\alpha=[R]_\alpha[S]_\alpha$, נקבל כאן כי

$\left[T^2\right]_\alpha = \left([T]_\alpha\right)^2 = A^2$ ובאופן אינדוקטיבי $\left[T^k\right]_\alpha = A^k$, $\forall k$. כמו כן, לכל שתי טרנספורמציות ליניאריות R,S מתקיים: $[tR]_\alpha = t[R]_\alpha$, $[R+S]_\alpha = [R]_\alpha + [S]_\alpha$. מכאן הטענה מיידית.

3) א. תהא $D = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0\dots & \dots 0 \\ 0\dots & \ddots & \dots 0 \\ 0\dots & \cdots & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$ מטריצת בלוקים אלכסונית, עם A_i מטריצות רבועיות, ויהי f פולינום . הוכיחו כי:

$$f(D) = \begin{pmatrix} \boxed{f(A_1)} & 0\dots & \dots 0 \\ 0\dots & \ddots & \dots 0 \\ 0\dots & \cdots & \boxed{f(A_k)} \end{pmatrix} .$$

ב. יהיו $P_A(A_i)\ \ i=1,\dots k,\ P_A(D)$ הפולינומים האופייניים של A_i, D בהתאמה. הוכיחו ש- $P_A(D) = \Pi_{i=1}^k A_i$

ג) יהיו $m_{A_i}\ ,\ m_D$ הפולינומים המינימלים של $A_i\ ,\ D$ בהתאמה. הוכיחו כי $\forall 1 \le i \le k\ \ ,\ \ m_{A_i} / m_D$ והראו ש- $m_D(t) = m.c.m.\{m_{A_1},\dots,m_{A_k}\}$

($m.c.m =$ הכפולה המשותפת המינימלית)

פתרון 3:

א) פתרון השאלה נובע באופן מיידי משלוש הטענות הפשוטות הבאות:

(i) אם D מטריצת בלוקים עם בלוקים רבועים $A_1,\dots,A_k$ כבשאלה, ואם β סקלר, אז βD היא מטריצת בלוקים עם בלוקים רבועים $\beta A_1,\dots,\beta A_k$;

(ii) אם C,D מטריצות בלוקים כנ"ל, עם בלוקים רבועים: $A_1,\dots,A_k$, $B_1,\dots,B_k$, כאשר A_i, B_i בעלות אותו סדר לכל i, אזי $C+D$ מטריצת בלוקים עם בלוקים $A_1+B_1,\dots,A_k+B_k$;

(iii) אם D כנ"ל, אזי D^l גם מטריצת בלוקים עם בלוקים $A_i^l,\dots,A_k^l$.

ב) זה נובע מכך שדטרמיננטה של מטריצת בלוקים רבועים היא

מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים.

ג) עפ"י סעיף (א), לכל פולינום f , $f(D)=0 \Leftrightarrow f(A_i)=0 \ , \ \forall i$.

כיוון שהפולינום המינימלי של מטריצה מחלק כל פולינום אחר המאפס את המטריצה נקבל כי:

מכך ש- $m_D(D)=0$ נובע ש $m_D(A_i)=0 \quad \forall i$ ולכן $m_{A_i}(x)/m_D(x) \quad \forall i$ ומכאן ש $m.c.m.(m_{A_1}....m_{A_k})(x) \ / \ m_D(x)$

מכך ש- $m.c.m.(m_{A_i}...m_{A_k})(A_i)=0 \quad \forall i$ נובע ש

$m.c.m.(m_{A_i}...m_{A_k})(D)=0$ ולכן $m_D(x)/m.c.m.(m_{A_1}....m_{A_k})(x)$.

מכיוון ש- $m_D(x), m.c.m.(m_{A_1}....m_{A_k})(x)$, שניהם פולינומים מתוקנים, קיים השוויון $m_D(x)=m.c.m.(m_{A_1}....m_{A_k})(x)$.

4) בשאלה זו $\varphi(n)$ מסמנת את המספר פיבונצ'י ה n-י , כלומר:

$\varphi(0)=0 \ , \varphi(1):=0 \ ,$ ואם $n>1 \ , \varphi(n):=\varphi(n-1)+\varphi(n-2)$

מצאו נוסחה מפורשת עבור $\varphi(n)$.

רמז: שימו לב כי מתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi(n-2) \\ \varphi(n-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi(n-1) \\ \varphi(n) \end{pmatrix}$)

פתרון 4) קל לחשב שלמטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ שני ע"ע שונים: $\varphi_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

, ולכן $A=P\cdot\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\cdot P^{-1}$, כאשר P מטריצת מעבר

(עמודותיה הן ו"ע של A): $P=\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

. מכאן $A^n = P\cdot\begin{pmatrix}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0\\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$ (חשבו את P^{-1})

, אך באופן אינדוקטיבי קל לראות כי $A^n\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(n)\\ \varphi(n+1)\end{pmatrix}$, וע"י השוואת שני הביטויים הנ"ל מקבלים $\boxed{\varphi(n)=\alpha\varphi_1^n+\beta\varphi_2^n}$, כאשר α,β קבועים התלויים ב- P .

5) (שאלה ממבחן) תהי T טרנספורמציה לינארית של R_2 המקיימת לכל וקטור α : $T(T\alpha)=T\alpha+C\alpha$
מהם הערכים האפשריים של C אם ידוע שיש ל- T שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית?

פתרון 5: לכל α וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ, מתקיים: :
$T(T\alpha)=T\alpha+C\alpha$ ולכן : $\lambda^2\alpha=\lambda\alpha+C\alpha \quad\Rightarrow C=\lambda^2-\lambda$
ז.א כל ע"ע λ של T מקיים: $C=\lambda^2-\lambda$
שימו לב ש- T טרנספורמציה לינארית של R_2 ולכן λ ממשי.
למשוואה $\lambda^2-\lambda-C=0$ יש פתרונות ממשיים עבור $C\ge-\frac{1}{4}$.
לכן $C\ge-\frac{1}{4}$ הוא תנאי הכרחי לכך שיש ל- T ערך עצמי\וקטור עצמי.
מצד שני, $C\ge-\frac{1}{4}$ הוא גם תנאי מספיק לקיום T המקיימת את הנדרש בשאלה:

אם λ_1,λ_2 פתרונות של המשוואה $\lambda^2-\lambda-C=0$ אז הטרנספורמציה הלינארית שמיוצגת ע"י: $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס כלשהו מקיימת את הנדרש בשאלה.

הערה:
אם יש ל- T שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית שמתאימים **לערכים עצמיים שונים** אז $C>-\frac{1}{4}$

אם יש ל- T שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית שמתאימים **לאותו ערך עצמי** אז $C=-\frac{1}{4}$. לכן $\lambda=\frac{1}{2}$ ולכן $T=\frac{1}{2}I$.

תרגיל 4 - אלגברה לינארית 2

1.א. יהי $p(x)\in M_3(\mathbb{R})[x]$

$$p(x)=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&2&1\\3&3&1\end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix}4&0&2\\3&3&1\\0&-1&1\end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix}4&0&2\\3&1&1\\0&-7&3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1&-3&2\\4&4&1\\0&3&0\end{pmatrix}$$

מהי תמונת $p(x)$ תחת האיזומורפיזם הקנוני $M_3(\mathbb{R})[x]\to M_3(\mathbb{R}[x])$? (בו השתמשתם בהוכחת משפט קיילי - המילטון)

ב. מהי תמונת $A=\begin{pmatrix}2x^2+4x-1 & 3x^3+2x & 4x+1\\ x^3-3x^2+4 & 2x^3-4x^2 & 5x^2+3x+2\\ x^3+2x^2-3x+1 & 4x^3+2x-1 & -x^3+3x-5\end{pmatrix}$ תחת האיזומורפיזם ההפכי $M_3(\mathbb{R}[x])\to M_3(\mathbb{R})[x]$?

2. לגבי המטריצות הבאות, קבעו מי מהן דומות (אם יש כאלו)

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

3. א. הוכיחו כי כל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ דומה למטריצה משולשית עליונה

(הדרכה: הוכיחו באינדוקציה על n - בחרו ע"ע λ ווקטור עצמי מתאים לו v_1 (מדוע אפשר?) השלימו לבסיס של $\mathbb{C}^n$. תהי V מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס החדש, $B=V^{-1}AV$. כיצד נראית B ? השתמשו בהנחת האינדוקציה כדי למצוא מטריצה הפיכה C כך ש- $C^{-1}BC$ משולשית עליונה.)

ב. הסיקו כי תנאי הכרחי ומספיק לכך שמטריצה ב $M_2(\mathbb{C})$ ניתנת ללכסון הוא כי הפולינום המינימלי שלה מתפרק למכפלת גורמים לינאריים ללא ריבוי (כלומר שכל גורם מחזקה 1)

4. במרחב הוקטורי $M_n(\mathbb{C})$ נגדיר מכפלה פנימית $(A,B\in M_n(\mathbb{C})),<A,B>=tr(A\overline{B}^t)$

כאשר אם $B=(b_{ij})_{i,j=1}^n$ אז $c_{ij}=\overline{b_{ji}},\overline{B}^t=(c_{ij})_{i,j=1}^n$ (למשל $\overline{\begin{pmatrix}1&i\\1+3i&2-4i\end{pmatrix}}^t=\begin{pmatrix}1&1-3i\\-i&2+4i\end{pmatrix}$)

(נזכיר כי $trA=\sum_{i=1}^n a_{ii},A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$)

הוכיחו כי זו מכפלה פנימית, ושהמטריצות האלמנטריות E_{ij} הן בסיס אורתונורמלי לפי מכפלה זו. (E_{ij} היא המטריצה שכל איבריה שווים לאפס פרט לאבר ה-(i,j) השווה ל-1)

5. א. מצאו בסיס אורתונורמלי המתאים למכפלה הפנימית הבאה על $\mathbb{R}^3$:

$$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)>=x_1y_1+\frac{1}{2}x_1y_3+\frac{1}{2}x_3y_1+2x_2y_2+x_3y_3$$

(שכנעו את עצמכם שזו אכן מכפלה פנימית!)

ב. יהי P^2 המרחב הוקטורי של הפולינומים מדרגה ≤ 2 מעל $\mathbb{R}$. תהי נתונה המכפלה הפנימית הבאה:

$$(f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]), < f(x), g(x) >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

i) הוכיחו כי זו מכפלה פנימית. (השתמשו בתכונות של אינטגרלים של פונקציות רציפות כפי שלמדתם באינפי)

ii) מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב מכפלה פנימית זה.

ג. מצאו בסיס אורתונורמלי לתת המרחב של $\mathbb{R}^4$ הנפרש ע"י הוקטורים -

$(1,0,1,0),(2,1,0,0),(0,2,0,1)$ (ביחס למכפלה הסקלרית הרגילה - מצומצמת לתת המרחב)

.1 .א

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\0&2&1\\3&3&1\end{pmatrix}X^3+\begin{pmatrix}4&0&2\\3&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}X^2+\begin{pmatrix}4&0&2\\3&1&1\\0&-7&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1&-3&2\\4&4&1\\0&3&0\end{pmatrix}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}3X^3+4X^2+4X+1 & X^3-3 & 2X^3+2X^2+2X+2\\ 3X^2+3X+4 & 2X^3+X^2+X+4 & X^3+X^2+X+1\\ 3X^3 & 3X^3-X^2-7X+3 & X^3+X^2+3X\end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix}2X^2+4X-1 & 3X^3+2X & 4X+1\\ X^3-3X^2+4 & 2X^3-4X^2 & 5X^2+3X+2\\ X^3+2X^2-3X+1 & 4X^3+2X-1 & -X^3+3X-5\end{pmatrix}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}0&3&0\\1&2&0\\1&4&-1\end{pmatrix}X^3+\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&-4&5\\2&0&0\end{pmatrix}X^2+\begin{pmatrix}4&2&4\\0&0&3\\-3&2&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-1&0&1\\4&0&2\\1&-1&-5\end{pmatrix}$$

.2 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

ראשית, $\det C=2$ ואילו $4=\det A=\det B=\det D$

לכן C אינה דומה לכל השאר.

שנית, קל לראות שהפולינום המינימלי של A ו- D הוא $(X-2)(X-1)$

ואילו של B הוא $(X-2)^2(X-1)$ (מחישוב הפולינום האופיני

ההכרח הפולינום המינימלי הוא אחד משני פולינומים אלו - הצבה

ב- $(X-2)(X-1)$ של המטריצות השונות מוכיחה את הטענה)

לכן B אינה דומה ל A ו- D ובפי שהכר האינו, לא ל- C.

מאידך, הוקטורים $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ הם וקטורים

עצמיים בת"ח השייכים ל A עבור הערך העצמי 2

ו- $(1\ 0\ -1)$ ו"ע השייך ל A עבור הערך העצמי 1

לכן A דומה למטריצה האלכסונית $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

באופן דומה $(1,0,1)$, $(0,1,0)$ ו"ע בת"ח השייכים

ל D עבור הערך העצמי 2, ו- $(0\ 0\ 1)$ ו"ע המתאים

ל D עבור הע"ע 1. לכן גם D דומה ל- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ולכן A ו- D דומות.

(חישוב הוקטורים העצמיים נעשה כרגיל ע"ה החישוב $(A-\lambda I)v=0$

עבור $\lambda=1,2$ $(D-\lambda I)v=0$)

3. א. נראה כי כל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ דומה למטריצה

משולשית עליונה באינדוקציה על n.

עבור $n=1$ הטענה ברורה (כל מטריצה 1×1 היא

"משולשית עליונה")

נניח נכונות הטענה עבור $n-1$, ותהי $A\in M_n(\mathbb{C})$

נוכל לבחור ערך עצמי λ של A, כי לפולינום האופייני

של A יש שורש ב- $\mathbb{C}$, נבחר וקטור עצמי v_1 מתאים לו.

~~נסמן ב V את מטריצת~~ נשלים לבסיס $(v_1,\dots,v_n)$

של $\mathbb{C}^n$. נסמן ב V את מטריצת המעבר מהבסיס

הסטנדרטי לבסיס החדש, $B=V^{-1}AV$, B היא

המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה המתאימה ל A לפי

הבסיס החדש.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad \text{לכן} \qquad BV_1 = \lambda V_1$$

כאשר B_1 מטריצה $n-1 \times n-1$ (ובמקום כפולות יש מספרים כלשהם)

לפי הנחת האינדוקציה יש מטריצה הפיכה $C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ כך ש- $C_1^{-1}B_1C_1$ משולשית עליונה.

נסמן $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, $C \in M_n(\mathbb{C})$

(כלומר הפיכה ~~מטריצה~~ פיתוחים התחתונים נמצאת מטריצה הנ"ל C_1.

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1^{-1}B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1^{-1}B_1C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

לפי הנחת האינדוקציה $C_1^{-1}B_1C_1$ משולשית עליונה

לכן גם $C^{-1}BC$ משולשית עליונה.

ד. האינו בשאלה התבקש כי תנאי הכרחי לכך שמטריצה ב $M_n(\mathbb{C})$ ניתנת ללכסון הוא כי הפולינום האינימלי שלה מתפרק למכפלת גורמים לינאריים, ללא חזרות.

נראה כי אמור $n=2$ כמו גם תנאי מספיק (פתנאי מספיק גם לכל n אך אין לנו עניין הכלים למוכיח כ"א)

מסעיף ג' נובע כי כל מטריצה פונה למטריצה מבוכה

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, אם ל $A \in M_2(\mathbb{C})$ שני ע"ע שונים אזי A ניתנת ללכסון, אחרת נניח שיש ע"ע יחיד של A,

אזי הפולינום האופיני של A הוא מהצורה $(\lambda-x)^2$.

לכן A דומה למטריצה המצורפת $B^* = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(לפי סעיף א', ולמטריצות פולינום מאופיינים)

כדי להראות שהתנאי שלנו הוא תנאי הכרחי נראה שאם A

אינה נילפוטנטית אזי הפולינום המינימלי שלה אינו מתפרק

למכפלת גורמים לינאריים ללא חזרות, כלומר $m_A = (x-\lambda)^2$

ואכן אם A אינה נילפוטנטית אז קיימת מטריצה למטלה $b \neq 0$.

הפולינום המינימלי של B^* נמצא בתוך של A,

אבל המטריצה $B - \lambda I \neq 0$. ולכן $(x-\lambda)$ אינו פולינום מינימלי של A.

4. א. $A, A', B \in M_n(\mathbb{C})$ $\langle A+A', B\rangle = tr((A+A')\bar{B}^t) = tr(A\bar{B}^t + A'\bar{B}^t)$

$= tr(A\bar{B}^t) + tr(A'\bar{B}^t) = \langle A, B\rangle + \langle A', B\rangle$ מתכונות עקבה

ב. $\langle \lambda A, B\rangle = tr(\lambda A\bar{B}^t) = \lambda tr(A\bar{B}^t) = \lambda\langle A, B\rangle$ $\lambda \in \mathbb{C}$

תכונות עקבה

ג. $\langle B, A\rangle = tr(B\bar{A}^t) = tr(\overline{(A\bar{B}^t)^t})$

(לפי שני הכיוונים A, B $(AB)^t = B^t A^t$)

$= \overline{tr((A\bar{B}^t)^t)} = \overline{tr(A\bar{B}^t)} = \overline{\langle A, B\rangle}$

(לפי הראות ש- $\overline{trA} = tr\bar{A}$) $(trA^t = trA)$

ד. נשים לב כי במקום ה- (i,i) במטריצה $A\bar{A}^t$

מתקבל $(A\bar{A}^t)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}}$

$= \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$, לכן: $\langle A, A\rangle = tr(AA^t)$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 > 0$ אם $A \neq 0$ אז יש $a_{ij} \neq 0$

כלומר לכן מכפלת האלכסון אמיתי.

נוכל מכאן כי $\langle A, B\rangle$ מכפלה פנימית.

נראה ש המטריצות האלמנטריות $E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ מהוות בסיס

אורתונורמלי.

$$\langle E_{ij}, E_{ij}\rangle = tr(E_{ij}\overline{E_{ij}}^t)$$

$$E_{ij}\overline{E_{ij}}^t = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & i \\ \hline j & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c|c} & i \\ \hline i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

כלומר במכפלה יש 1 במקום ה (i,i), לכן $tr(E_{ij}\overline{E_{ij}}^t)=1$.

$$\langle E_{ij}, E_{kl}\rangle = tr(E_{ij}\overline{E_{kl}}^t)$$

ונניח $i \neq k$ או $j \neq l$

$$E_{ij}\overline{E_{kl}}^t = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & k \\ \hline l & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cancel{\neq (\emptyset)}$$

אם $j \neq l$ נקבל את מטריצת האפס כי כרור שאפשר
לקבל מספר שונה מאפס רק מכפל השורה ה i בעמודה ה k, אבל
אם $j \neq l$ עדיין נקבל 0.
אם $j = l$, $i \neq k$ נקבל אפס בכל מקום ואחד (1) במקום ה i,k
אבל אז עדיין מעקבה תמיד 0.
לכן $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ בסיס אורתונורמלי.

.1 .א

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\0&2&1\\3&3&1\end{pmatrix}X^3+\begin{pmatrix}4&0&2\\3&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}X^2+\begin{pmatrix}4&0&2\\3&1&1\\0&-7&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1&-3&2\\4&4&1\\0&3&0\end{pmatrix}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}3X^3+4X^2+4X+1 & X^3-3 & 2X^3+2X^2+2X+2\\ 3X^2+3X+4 & 2X^3+X^2+X+4 & X^3+X^2+X+1\\ 3X^3 & 3X^3-X^2-7X+3 & X^3+X^2+3X\end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix}2X^2+4X-1 & 3X^3+2X & 4X+1\\ X^3-3X^2+4 & 2X^3-4X^2 & 5X^2+3X+2\\ X^3+2X^2-3X+1 & 4X^3+2X-1 & -X^3+3X-5\end{pmatrix}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}0&3&0\\1&2&0\\1&4&-1\end{pmatrix}X^3+\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&-4&5\\2&0&0\end{pmatrix}X^2+\begin{pmatrix}4&2&4\\0&0&3\\-3&2&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-1&0&1\\4&0&2\\1&-1&-5\end{pmatrix}$$

.2 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

ראשית, $\det C=2$ ואילו $4=\det A=\det B=\det D$

לכן C אינה דומה לכל השאר.

שנית, קל לראות שהפולינום המינימלי של A ו- D הוא $(X-2)(X-1)$

ואילו של B הוא $(X-2)^2(X-1)$ (מחישוב הפולינום האופיני

ההכרח הפולינום המינימלי הוא אחד משני פולינומים אלו - הצהה

ה- $(X-2)(X-1)$ של המ C ריבות השונות מוכיחה את הC ענה)

לכן B אינה דומה ל A ו- D ובפי שהכר האינו, לא ל- C.

מאידך, הוקטורים $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ הם וקטורים

עצמיים בת"ל השייכים ל A עבור הערך העצמי 2

ו- $(1\ 0\ -1)$ ו"ע השייך ל A עבור הערך העצמי 1

לכן A דומה למטריצה האלכסונית $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

באופן דומה $(1,0,1)$, $(0,1,0)$ ו"ע בת"ל השייכים

ל D עבור הערך העצמי 2, ו- $(0\ 0\ 1)$ ו"ע המתאים

ל D עבור הע"ע 1. לכן גם D דומה ל- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ולכן A ו- D דומות.

(חישוב הוקטורים העצמיים נעשה כרגיל ע"ה החישוב $(A-\lambda I)v=0$

עבור $\lambda=1,2$ $\quad (D-\lambda I)v=0$)

3. א. נראה כי כל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{C})$ דומה למטריצה

משולשית עליונה באינדוקציה על n.

עבור $n=1$ הטענה ברורה (כל מטריצה 1×1 היא

"משולשית עליונה")

נניח נכונות הטענה עבור $n-1$, ותהי $A\in M_n(\mathbb{C})$

נוכל לבחור ערך עצמי λ של A, כי לפולינום האופייני

של A יש שורש ב- $\mathbb{C}$, נבחר וקטור עצמי v_1 מתאים לו.

~~נסמן ב V את מטריצת~~ נשלים לבסיס $(v_1,\dots,v_n)$

של $\mathbb{C}^n$. נסמן ב V את מטריצת המעבר מהבסיס

הסטנדרטי לבסיס החדש, $B=V^{-1}AV$, B היא

המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה המתאימה ל A לפי

הבסיס החדש.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad \text{לכן} \qquad BV_1 = \lambda V_1$$

כאשר B_1 מטריצה $n-1 \times n-1$ (ובמקום כפולות יש מספרים כלשהם)

לפי הנחת האינדוקציה יש מטריצה הפיכה $C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ כך ש- $C_1^{-1}B_1C_1$ משולשית עליונה.

נסמן $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, $C \in M_n(\mathbb{C})$

(כלומר הפיכה ~~מטריצה~~ פיתוחים התחתונים נמצאת מטריצה הנ"ל C_1.

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B_1 \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1^{-1}B_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1^{-1}B_1C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

לפי הנחת האינדוקציה $C_1^{-1}B_1C_1$ משולשית עליונה

לכן גם $C^{-1}BC$ משולשית עליונה.

ד. האינו בשאלה התבקש כי תנאי הכרחי לכך שמטריצה ב $M_n(\mathbb{C})$ ניתנת ללכסון הוא כי הפולינום האינימלי שלה מתפרק למכפלת גורמים לינאריים, ללא חזרות.

נראה כי אמור $n=2$ כמו גם תנאי מספיק (פתנאי מספיק גם לכל n אך אין לנו עניין הכלים למוכיח כ"א)

מסעיף ג' נובע כי כל מטריצה פונה למטריצה מבוכה

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, אם ל $A \in M_2(\mathbb{C})$ שני ע"ע שונים אזי A ניתנת ללכסון, אחרת נניח שיש ע"ע יחיד של A,

אזי הפולינום האופיני של A הוא מהצורה $(\lambda-x)^2$.

לכן A דומה למטריצה המצורפת $B^* = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(לפי סעיף א', ולמטריצות פולינום מאופיינים)

כדי להראות שהתנאי שלנו הוא תנאי הכרחי נראה שאם A

אינה נילפוטנטית אזי הפולינום המינימלי שלה אינו מתפרק

למכפלת גורמים לינאריים ללא חזרות, כלומר $m_A = (x-\lambda)^2$

ואכן אם A אינה נילפוטנטית אז קיימת מטריצה למטלה $b \neq 0$.

הפולינום המינימלי של B^* נמצא בתוך של A,

אבל המטריצה $B - \lambda I \neq 0$. ולכן $(x-\lambda)$ אינו פולינום מינימלי של A.

4. א. $A, A', B \in M_n(\mathbb{C})$ $\langle A+A', B\rangle = tr((A+A')\bar{B}^t) = tr(A\bar{B}^t + A'\bar{B}^t)$

$= tr(A\bar{B}^t) + tr(A'\bar{B}^t) = \langle A, B\rangle + \langle A', B\rangle$ מתכונות עקבה

ב. $\langle \lambda A, B\rangle = tr(\lambda A\bar{B}^t) = \lambda tr(A\bar{B}^t) = \lambda\langle A, B\rangle$ $\lambda \in \mathbb{C}$

תכונות עקבה

ג. $\langle B, A\rangle = tr(B\bar{A}^t) = tr(\overline{(A\bar{B}^t)^t})$

(לפי שני הכיוונים A, B $(AB)^t = B^t A^t$)

$= \overline{tr((A\bar{B}^t)^t)} = \overline{tr(A\bar{B}^t)} = \overline{\langle A, B\rangle}$

(לפי הראות ש- $\overline{trA} = tr\bar{A}$) $(trA^t = trA)$

ד. נשים לב כי במקום ה- (i,i) במטריצה $A\bar{A}^t$

מתקבל $(A\bar{A}^t)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}}$

$= \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$, לכן: $\langle A, A\rangle = tr(AA^t)$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 > 0$ אם $A \neq 0$ אז יש $a_{ij} \neq 0$

כלומר לכן מכפלת האלכסון אמיתי.

נוכל מכאן כי $\langle A, B\rangle$ מכפלה פנימית.

נראה ש המטריצות האלמנטריות $E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ מהוות בסיס

אורתונורמלי.

$$\langle E_{ij}, E_{ij}\rangle = tr(E_{ij}\overline{E_{ij}}^t)$$

$$E_{ij}\overline{E_{ij}}^t = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & i \\ \hline j & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c|c} & i \\ \hline i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

כלומר במכפלה יש 1 במקום ה (i,i), לכן $tr(E_{ij}\overline{E_{ij}}^t)=1$.

$$\langle E_{ij}, E_{kl}\rangle = tr(E_{ij}\overline{E_{kl}}^t)$$

ונניח $i \neq k$ או $j \neq l$

$$E_{ij}\overline{E_{kl}}^t = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & k \\ \hline l & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cancel{\neq (\emptyset)}$$

אם $j \neq l$ נקבל את מטריצת האפס כי כרור שאפשר
לקבל מספר שונה מאפס רק מכפל השורה ה i בעמודה ה k, אבל
אם $j \neq l$ עדיין נקבל 0.
אם $j = l$, $i \neq k$ נקבל אפס בכל מקום ואחד (1) במקום ה i,k
אבל אז עדיין מעקבה תמיד 0.
לכן $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ בסיס אורתונורמלי.

תרגיל 6 – אלגברה ליניארית (2)

1. יהי $V:=\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ויהי $W:=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1+i\end{pmatrix}\right\}$. מצאו בסיסים אורתונורמליים הן עבור W והן עבור $W^{\perp}$.

2. יהי V המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הרציפות על הקטע $[-1,1]$. נגדיר מכפלה פנימית על V באופן הבא: $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$. יהי W ת"מ של V המורכב מכל הפונקציות הזוגיות. (כלומר $f(x)=f(-x)$ לכל $-1\le x\le 1$). מצאו את $W^{\perp}$.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית, W ת"מ של V. ניקח וקטור $v\in V$ ונביט בהטלה הניצבת שלו על W. יהי $w\in W$ ההטלה הניצבת (כלומר $w\perp(v-w)$). הראו כי לכל $u\in W$ מתקיים $\|w-v\|\le\|u-v\|$.

4. א. יהי V מרחב מכפלה פנימית. לכל $w\in V$ נגדיר $f_w:V\to\mathbb{F}$ באופן הבא $f_w(v)=\langle v,w\rangle$. הראו כי f_w פונקציונל לינארי וכי $g_w:V\to\mathbb{F}$ המוגדרת $g_w(v)=\langle w,v\rangle$ אינה פונקציונל לינארי.

ב. יהי $W\subseteq V$ תת מרחב. $U\subseteq V^*$ תת מרחב המוגדר ע"י $U=\{f_w:w\in W\}$ הראו כי $U=(W^{\perp})^0$. (כאשר עבור מרחב V נגדיר את המאפס של V להיות $V^0=\{f\in V^*:f(v)=0\quad\forall v\in V\}$).

5. יהי P_7 מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ ממעלה ≤ 7. נגדיר העתקה $\varphi:P_7\to\mathbb{R}$ ע"י $\varphi(p)=\int_0^1 p(x)dx$.

   א. הוכיחו כי ההעתקה היא פונקציונל לינארי.

   ב. מצאו בסיס דואלי לבסיס $\{1,x,x^2,\dots,x^7\}$ של P_7, והציגו את φ בבסיס זה.

6. א. תהא $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ נתונה ע"י $T(x,y,z)=(2x+iy,y-3iz,x+4iy)$. חשבו את T^*.

   ב. $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ כמרחבים וקטורים ממשיים, ע"י האיזומורפיזם $(1,0)\to 1,(0,1)\to i$. האיזומורפיזם הנ"ל מעביר גם את המכפלה הפנימית ב-$\mathbb{R}^2$ למכפלה פנימית ב-$\mathbb{C}$. עבור $u=a+bi\in\mathbb{C}$ נגדיר $L_u(z)=uz$. הוכיחו כי L_u העתקה ליניארית ומצאו את L_u^*.

פתרון תרגיל 6 – אלגברה ליניארית (2)

1. תחילה נמצא בסיס אורתונורמלי ל- W אח"כ נשלים אותו לבסיס של V וההשלמה הזאת תהיה בסיס ל-$W^{\perp}$ מכיוון ש- $W \oplus W^{\perp} = V$.

בסיס אורתונורמלי ל-W נמצא ע"י ביצוע תהליך גרם שמידט ל- $\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1+i\end{pmatrix}$

שהם בסיס ל-W.

תחילה ננרמל את הוקטור הראשון $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+i\bar{i}} = \sqrt{2}$ אזי נגדיר

$\alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ כעת ע"פ תהליך גרם שמידט

$$\alpha_2 = (2,1,1+i) - \langle (2,1,1+i),\alpha_1\rangle \alpha_1 = (2,1,1+i) - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + (1+i)\overline{\frac{i}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (2,1,1+i) - \left(\frac{3-i}{\sqrt{2}}\right)\alpha_1 = \left(2-\frac{3-i}{2},1,1+i-\frac{1+3i}{2}\right) = \left(\frac{1+i}{2},1,\frac{1-i}{2}\right)$$

כל מה שנותר לעשות כרגע זה לנרמל את α_2.

$$\|\alpha_2\| = \sqrt{\frac{(1+i)(1-i)}{4} + 1 + \frac{(1-i)(1+i)}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}+1+\frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

הבסיס האורתונורמלי ל-W הוא אם כן $\left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

נחפש כעת וקטור שניצב לשני הוקטורים האלה אזי הוא יהיה ב-$W^{\perp}$ ומכיוון שהמימד של $W^{\perp}$ הוא 2 אזי נצטרך רק לנרמל אותו כדי למצוא בסיס אורתונומלי ל-$W^{\perp}$.

אם כן מחפשים וקטור (x,y,z) המקיים

$\left\langle (x,y,z),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = 0, \left\langle (x,y,z),\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i,2,1-i)\right\rangle = 0$ כלומר נקבל

את המערכת ההומוגנית הבאה: $x+iz=0, (1+i)x+2y+(1-i)z=0$.

נקבל אם כן $x=-iz \Rightarrow (1+i)(-iz)+2y+(1-i)z=0$

כלומר יש לנו דרגת חופש אחת נבחר $z=1$ ונקבל את הוקטור $(-i,i-1,1)$

ונותר לנו רק לנרמל אותו בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי ל-$W^{\perp}$.

$\|(-i,i-1,1)\| = \sqrt{1+2+1} = 2 \Leftarrow \frac{1}{2}(-i,i-1,1)$ בסיס אורתונורמלי ל-$W^{\perp}$.

2. טענה: $W^{\perp}$ הוא מרחב הפונקציות האי זוגיות.
ראשית נראה כי כל פונקציה אי זוגית ניצבת לפונקציה זוגית (זה יראה הכלה בכיוון אחד).
תהי f פונקציה זוגית ו- g פונקציה אי זוגית. אזי
$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)g(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)g(x)dx$ כעת באינטגרל הראשון בסכום נבצע הצבה $y=-x$ אזי נקבל:
$$\int_{-1}^{0}f(x)g(x)dx=\int_{1}^{0}f(-y)g(-y)(-1)dy=\int_{1}^{0}f(y)(-g(y))(-1)dy$$
מכיוון ש- f זוגית ו- g אי זוגית. כעת מתכונות אינטגרל מסוים נקבל $-\int_{0}^{1}f(y)g(y)dy$ ומכיוון שאין חשיבות לשם המשתנה נקבל $\langle f,g\rangle=0$.
כעת נותר לנו להראות שאם g היא כזאת שניצבת לכל פונקציה זוגית אזי g חייבת להיות אי זוגית.
תהיה g כזאת המקיימת שלכל פונקציה זוגית $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$ שוב פעם עם אותה הצבה נקבל $\int_{-1}^{1}f(y)g(-y)(-1)dy=0\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(y)g(-y)dy=0$
ומכיוון שאין חשיבות לשם המשתנה נקבל
$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)g(-x)dx=0$ נחבר בין שני האינטגרלים האלה
ונקבל:(*) $\int_{-1}^{1}f(x)(g(x)+g(-x))dx=0$ נסמן $h(x)=g(x)+g(-x)$ ואז כל לראות שזאת פונקציה זוגית. מכיוון ש-(*) נכון לכל f זוגית נחליף את f ב-h ונקבל בעצם $\langle h,h\rangle=0$ ומתכונות המכפלה הפנימית זה גורר $h(x)=0$ ולכן נקבל $g(x)=-g(-x)\Leftarrow g$ פונקציה אי זוגית וגמרנו.

3. V מרחב מכפלה פנימית W ת"מ שלו. אזי $V=W\oplus W^{\perp}$, כלומר לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=w+(v-w)$ כך ש- $v-w\in W^{\perp},w\in W$.
לוקטור w הזה אנו קוראים **<u>ההטלה הניצבת של v על W</u>**.
עלינו להוכיח כי עבור v,W,w כנ"ל מתקיים: $\|v-w\|\le\|v-u\|$ לכל $u\in W$.
מכיוון ש- $v-w\in W^{\perp}$ ו- $w-u\in W$ נקבל $(w-u)\perp(v-w)$ ולכן ממשפט פיתגורס נקבל: $\|v-u\|^2=\|v-w\|^2+\|w-u\|^2\ge\|v-w\|^2$ וסיימנו.

4. א. הסיבה ש- f_w הוא פ"ל ולעומת זאת g_w אינו פ"ל היא שבמרחב מכפלה פנימית מעל המרוכבים נקבל
$f_w(av)=\langle av,w\rangle=a\langle v,w\rangle=af_w(v)$ ולעומת זאת עבור g_w נקבל
$g_w(av)=\langle w,av\rangle=\bar{a}\langle w,v\rangle=\bar{a}g_w(v)$ ולכן עבורה לא מתקיימת ההומוגניות. את שאר התכונות ניתן לבדוק לבד.

ב. נתון: $W \subseteq V$ ת"מ. $U = \{ f_w : w \in W \} \subseteq V^*$.

צ"ל: $U = \left(W^{\perp}\right)^0$.

עלינו להראות אם כן הכלה דו כיוונית:

יהי $g \in U \Leftarrow g = f_w$ עבור $w \in W$ כלשהו. נרצה להראות $g \in \left(W^{\perp}\right)^0$.

כלומר עלינו להראות שלכל $u \in W^{\perp}$ מתקיים $g(u) = 0$.

$g(u) = f_w(u) = \langle u, w \rangle = 0$ כי $w \in W$, $u \in W^{\perp}$.

קיבלנו אם כן $U \subseteq \left(W^{\perp}\right)^0$.

כעת בשביל ההכלה בכיוון השני נבנה תחילה בסיס א"נ ל- V ע"י כך שנבנה בסיסים א"נ ל- $W, W^{\perp}$. יהי $w_1, \ldots, w_k$ בסיס א"נ של W ו- $w_{k+1}, \ldots, w_n$ בסיס א"נ של המשלים הניצב.

כעת יהי $g \in \left(W^{\perp}\right)^0 \Leftarrow g(u) = 0$ לכל $u \in W^{\perp}$.

טענה: $g = f_w$ עבור $w = \sum_{i=1}^{n} g(w_i) w_i$.

זה כמובן יסיים את ההוכחה.

תחילה צריך להוכיח כמובן ש- $w \in W$ זה כמובן נובע בכך ש- g מתאפס על אברי המשלים הניצב.

בשביל להראות שיוויון בין ט"ל ליניאריות די להראות זאת על אברי הבסיס לכן נותר לכם רק לבדוק זאת.

5. א. בשביל להראות שפונקציה מסוימת היא פ"ל עלינו להראות ט"ל לתוך השדה. הפונקציה הנ"ל היא פונקציונל לינארי מכיוון שאינטגרל מסוים נותן ערכים בשדה והוא לינארי והומוגני.

ב. נגדיר פונקציונלים $\varphi_0, \ldots, \varphi_7$ באופן הבא: $\varphi_i(p) = a_i$ עבור $p(x) = \sum_{i=0}^{7} a_i x^i \Leftarrow \varphi_i(x^j) = \delta_{ij}$ עליכם רק לבדוק שהפונקציות הנ"ל הן ט"ל וזה נובע בסכימה של פולינומים.

נותר רק להציג את φ בבסיס זה. נשים לב ש-

$\varphi(p) = \frac{1}{8}a_7 + \frac{1}{7}a_6 + \frac{1}{6}a_5 + \frac{1}{5}a_4 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0$ פשוט מחישוב אינטגרל מסוים על פולינום.

כעת קל לראות מה הוא הצירוף הלינארי המתבקש

$\varphi = \frac{1}{8}\varphi_7 + \frac{1}{7}\varphi_6 + \frac{1}{6}\varphi_5 + \frac{1}{5}\varphi_4 + \frac{1}{4}\varphi_3 + \frac{1}{3}\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_1 + \varphi_0$.

6. א. נבנה את המטריצה של T לפי הבסיס הסטנדרטי שהוא אורתונורמלי במקרה של המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & -3i \\ 1 & 4i & 0 \end{pmatrix}$ המטריצה של T לפי $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

כעת מכיוון שעבור בסיס אורתונורמלי המטריצה של T^* היא $\overline{A^t}$ נחשב אותה.

$\overline{A^t}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & -4i \\ 0 & 3i & 0 \end{pmatrix}$. אם זאת המטריצה של T^* לפי הבסיס הסטנדרטי אז

נקבל. $T^*(x,y,z)=\overline{A^t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(2x+z,-ix+y-4iz,3iy)$.

ב. באותו אופן נחשב את המטריצה של L_u ביחס לבסיס הסטנדרטי שהוא אורתונורמלי. $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ אזי נקבל שהמטריצה של L_u^* היא $\overline{A^t}$ ולכן עבור $z=x+iy$ נקבל

$L_u^*(z)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ -bx+ay \end{pmatrix}=(ax+by)+(-bx+ay)i$ ולכן נקבל כי

$L_u^*=L_{\bar{u}}$ (בדקו זאת).

תרגיל 9 – אלגברה לינארית 2

1. פרקו את המטריצה הנורמלית הבאה (בדקו שהיא נורמלית) למכפלה A=UH כך ש- U אוניטרית H הרמיטית ו- UH=HU;

$$A=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{i}{2} & \frac{3i}{2} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

2. יהי V מ"ו ממימד סופי ויהי $B=\{v_1,v_2...v_n\}$ בסיס של V .
נניח שלכל טרנספורמציה לינארית T מתקיים כי אם המטריצה שלה ביחס לבסיס זה היא $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ אז המטריצה של T^* ביחס לבסיס זה היא $(\overline{a_{ji}})_{i,j=1}^{n}$. (בסימונים: $([T]_B)^*=[T^*]_B$)
הוכיחו כי B בסיס אורתוגונלי המורכב מוקטורים בעלי אורך שווה (לא בהכרח מאורך 1!)

3. יהי V מ"ו אוניטרי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. $\hat{T}:V\to V$ ט"ל עליו.
מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $\hat{T}$ היא מירכוב של ט"ל $T:W\to W$, כאשר W מרחב אוקלידי ש- V מירכוב שלו.

4. א. תהי $T:V\to V$ ט"ל נורמלית על מרחב אוניטרי סוף מימדי, $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ פולינום.
הוכיחו כי קיימת ט"ל נורמלית $S:V\to V$ כך ש- $p(S)=T$.

ב. תהי T כנ"ל, הראו כי קיים פולינום $p(x)$ כך ש- $T^*=p(T)$.
(הדרכה: הראו כי לכל שתי סדרות של מספרים מרוכבים $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)$ יש פולינום $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ המקיים $p(x_i)=y_i$ באופן הבא - תחילה מצאו פולינומים המקיימים $q_i(x_j)=\delta_{ij}$ ובעזרתם מצאו את $p(x)$. עתה הוכיחו את הטענה)

5. יהי V מ"ו אוניטרי ממימד סופי, $T:V\to V$ ט"ל נורמלית.

א. הוכיחו כי אם T אידמפוטנטי, כלומר: $T^2=T$ אז T צמוד לעצמו.
ב. הוכיחו כי אם T נילפוטנטי אז $T=0$.

6. בתרגיל הקודם (תר' 8) הגדרתם מהי מטריצה חיובית $0\le A$ וראיתם כי ניתן למצוא לה שורש חיובי.

א. מצאו שורש חיובי ל- $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. (שימו לב כי משאלה בתרגיל הקודם נובע $0\le A$)

ב. תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ הפיכה, הראו כי קיים U אוניטרי ו $0\le P$ כך ש- $A=UP$.
(רמז- בחרו ב- P להיות השורש החיובי של A^*A כפי שהוגדר בתרגיל 8, והראו ש- $U=AP^{-1}$ אוניטרי. נמקו גם מדוע P הפיכה)

פתרון תרגיל 9 - אלגברה לינארית II

1. נתונה המטריצה הנורמלית

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3i}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{i}{2} & \frac{3i}{2} \end{pmatrix}$$

יש למצוא $\mathcal{U}$ אוניטרית, H הרמיטית כך ש- $\mathcal{U}H = H\mathcal{U} = A$

נמצא תחילה פעולות:

א. נלכסן את A לכסון אורתוגונלי, כלומר נמצא P אוניטרית כך ש- $P^*AP = D$, D אלכסונית.

ב. נכתוב את D לכסלת הרמיטית $\tilde{H}$ ואוניטרית $\tilde{\mathcal{U}}$.

מכיוון ש P אוניטרית $P\tilde{\mathcal{U}}P^*$ אוניטרית ו- $P\tilde{H}P^*$ הרמיטית.

ומתקיים כן $A = P\tilde{\mathcal{U}}P^*P\tilde{H}P^* = P\tilde{H}P^*P\tilde{\mathcal{U}}P^*$

לכן $H = P\tilde{H}P^*$ $\mathcal{U} = P\tilde{\mathcal{U}}P^*$.

נמצא תחילה:

א. $|xI - A| = (x-i)^2(x-2i)$

לכן ע"ע הם $i, 2i$.

עבור i נקבל מטריצת המשלים המתאימה

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

כלומר $y = -z$.

לכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ פורשים את המרחב העצמי של i.

כדי לקבל בסיס אורתונורמלי נרמל את $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ונקבל את הבסיס

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

עבור $2i$ נקבל את מטריצת המשלים המתאימה

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

כלומר $x = 0$, $y = z$, לכן $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ פורש את

המרחב העצמי, ובאותו אופן 1 (ובמילים כיצד לוקחים בשביל

לערוך מרחב עצמי i)

(2)

לכן
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

וכמו כן
$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

ב.
$$D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\tilde{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}}_{\tilde{U}}$$

$$H = P\tilde{H}P^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$U = P\tilde{U}P^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

---

2. V מ"ו ממימד סופי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V.

נראה כי לכל $T:V\to V$ ל"ל מתקיים
$$[T]_B^* = [T^*]_B$$

נבחר B בסיס אורתונormלי שאותו מוצאים אלו שלם.

נניח שתי פעולות אלגוריתמיות

א. עבור $1 \le i,j \le n$ $i \ne j$ נבדוק
$Tv_i = v_j$
$Tv_j = v_i$
ולכל $k \ne i,j$ נבדוק
$Tv_k = v_k$
(אפשר לבנות שמתאים V בגודל מ 1)

③

$$[T]_B = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \quad & i & \quad & j & \quad \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[T^*]_B = [T]_B^* = [T]_B$$

לכן $T=T^*$. נקבל:

א. $\|V_j\| = \langle TV_i, V_j\rangle = \langle V_i, TV_j\rangle = \|V_i\|$

ב. $\langle V_i, V_j\rangle = \langle TV_j, V_j\rangle = \langle V_j, TV_j\rangle = \langle V_j, V_i\rangle$

נגדיר עתה $SV_i = iV_j$, $SV_j = -iV_i$, $SV_k = V_k$ $(k \neq i, j)$

$$[S]_B = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \quad & i & \quad & j & \quad \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & -i & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & i & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ושוב נקבל-

$$[S^*]_B = [S]_B^* = [S]_B$$

ולכן $S=S^*$ ומתקבל:

$$i\langle V_j, V_i\rangle = \langle iV_j, V_i\rangle = \langle SV_i, V_i\rangle = \langle V_i, SV_i\rangle = \langle V_i, iV_j\rangle$$

$$= -i\langle V_i, V_j\rangle \underset{\uparrow}{=} -i\langle V_j, V_i\rangle$$

לפי מה שהראינו למעלה

לכן $\langle V_j, V_i\rangle = -\langle V_j, V_i\rangle \Leftarrow \langle V_i, V_j\rangle = 0$

הוכחה I. תהי T כל כלשהי $A = [T]_B = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

$$A^* = [T^*]_B = (\overline{a_{ji}})_{i,j=1}^{n}$$

כתבה:

$$\langle TV_i, V_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} V_k, V_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\langle V_k, V_j\rangle$$

(4)

מאידך -

$$\langle TV_i, V_j\rangle = \langle V_i, T^* V_j\rangle$$

$$= \langle V_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* V_k\rangle = \langle V_i, \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{jk}} V_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \langle V_i, V_k\rangle$$

קיבלנו את השוויון הבא:

$$(\langle V_1, V_j\rangle, \dots \langle V_n, V_j\rangle) \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = (a_{j1} \dots a_{jn}) \cdot \begin{pmatrix} \langle V_i, V_1\rangle \\ \vdots \\ \langle V_i, V_n\rangle \end{pmatrix}$$

אם נסמן מטריצה H, $H = (\langle V_i, V_j\rangle)_{i,j=1}^{n}$

אז השוויון למעלה לכל i, j פירושו $HA = AH$

כיוון ש- T כ"ל כלשהי, A מטריצה כלשהי, ומטריצה המתחלפת

עם כל מטריצה אחרת היא סקלרית, כלומר $H = \lambda I$

עבור $\lambda \in \mathbb{C}$, I מטריצת היחידה.

לכן $\langle V_i, V_j\rangle = \lambda \delta_{ij}$. //

הערה - למי שאינו מכיר את הטענה כי מטריצה המתחלפת עם כל

המטריצות היא סקלרית יוכל להשתכנע באופן הבא:

נניח ש- A כזאת, B כלשהי, $AB = BA$, או $B^{-1}AB = A$. $\forall B$.

בחרו תחילה במטריצה שהכל משמאל מחליפה שורות (כמו T בעובדה)

נקרא לה B_{ij}, מכך ש- $B_{ij} A B_{ij}^{-1} = A$

תוכלו לבדוק כי $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots \\ b & a & b & \\ b & b & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$, כלומר אברי האלכסון שווים

וכן כל האיברים שאינם על האלכסון שווים.

לכסוף תהי $B_{i\lambda} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ (אחדים על האלכסון ובמקום ה i, $\lambda \neq 0, 1$)

מכך ש- $B_{i\lambda} A B_{i\lambda}^{-1} = A$ תוכלו לבדוק $b = 0$, $A = \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}$

(5)

ב. V מ"ו אוניטרי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$.
$\hat{T}: V \to V$ ל"ג

<u>יעוד:</u> תנאי ספרתי ומספיק לכך ש $\hat{T}$ מירבוב של $T: W \to W$,
כאשר W מרחב שמירבוב שלו פוא V,
פוא שיש ל- V בסיס אורתונורמלי שביחס אליו מטריצה
מייצגת את $\hat{T}$ פיא ממשית.

<u>פוסחם:</u> - נניח ש $\hat{T}$ מירבוב של $T: W \to W$, V מירבוב של W.
נבחר בסיס אורתונורמלי של W ביחס למכפלה סקלרית עליו.
מיוון שכל איבר ב- V פוא מצורה $v+iw$ עבור $v, w \in W$
נובע שבסיס שבחרנו ל W מעל $\mathbb{R}$ פוא גם בסיס של V מעל $\mathbb{C}$.
בנוסף, מכיוון שמכפלה פנימית על V פיא מרחב של מכפלה על W
נקבל שזהו בסיס אוי"נ גם ב- V.
מכיוון ש- $T: W \to W$ ל"ג במרחב ממשי, מטריצה מייצגת
אותו לפי בסיס שלנו פיא ממשית.
אבל ברור שאותה מטריצה מייצגת את $\hat{T}$ ביחס לבסיס זה
כי על איברי בסיס $\hat{T}$ ו- T מתלבדות.
- מצד שני, נניח של- V בסיס אוי"נ $\mathcal{B}$, שביחס אליו מטריצה
של $\hat{T}$ ממשית.
נגדיר את W לפיות מרחב ליניארי שפורשים אברי $\mathcal{B}$ מעל $\mathbb{R}$.
מכפלה סקלרית תהיה צמצום מכפלה פנימית על V.
ברור שנקבל $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ עבור $v, w \in W$
כי אם $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ $v = \sum v_i \varepsilon_i$ $w = \sum w_i \varepsilon_i$, $w_i, v_i \in \mathbb{R}$
אז- $\langle v, w \rangle = \sum \sum v_i w_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle \in \mathbb{R}$.
ברור ש- V מירבוב של W לפי פנימית של W.
תהי $T = \hat{T}|_W$ כלומר T צמצום של $\hat{T}$ ל W.
מכיוון ש $[\hat{T}]_{\mathcal{B}}$ ממשית, נובע ש- $T\varepsilon_i = \sum a_{ij} \varepsilon_j$ עבור $a_{ij} \in \mathbb{R}$
לכל איבר בבסיס, לכן Tv לכל $v \in W$ נותן צירוף ליניארי
ממשי של איברי בבסיס, לכן $T(W) \subset W$, ו- T ל"ג על W.
מכיוון ש- T צמצום של $\hat{T}$ ברור ש $\hat{T}$ מירבוב של T ⇐

(6)

4. א. $T: V \to V$ ט"ל נורמלית על מרחב מ"פ מעל $\mathbb{C}$

$p(x) \in \mathbb{C}[x]$

<u>ג"ל</u> קיימת ט"ל נורמלית $S: V \to V$ כך ש- $p(S) = T$

<u>פוסחס:</u> T נורמלית, לכן נוכל ל"ש אותה במטריצה אלכסונית

ביחס לבסיס אורתונורמלי B $[T]_B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

לכל i, לפולינום $p(x) - \lambda_i$ יש שורש ב $\mathbb{C}$, נסמנו μ_i,

מתקבל ש- $p(\mu_i) = \lambda_i$.

נסמן $D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$, ברור ש- $p(D') = D$

אם S הט"ל המתאימה ל D', כלומר $[S]_B = D'$,

אז S נורמלית כי יש לה בסיס או"נ של ו"ע,

ובמו כן מתרתאמה בין מטריצות ל ט"ל מתקיים $p(S) = T$

ב. תהי T ט"ל נורמלית על מרחב מ"פ מעל $\mathbb{C}$.

<u>ג"ל</u> קיים פולינום $p(x)$ כך ש- $T^* = p(T)$

<u>פוסחס:</u> <u>טענה:</u> לכל שתי סדרות של מספרים מרוכבים

$(x_1 \dots x_n)$, $(y_1 \dots y_n)$ כאשר כ- x_i שונים זה מזה,

ישנו פולינום $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ המקיים $p(x_i) = y_i$.

<u>פוסחס הטענה:</u>

נסמן $\tilde{q}_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (x - x_k)$ ויהי $c = \tilde{q}_i(x_i) \in \mathbb{C}$

נסמן עתה: $q_i(x) = \frac{1}{c} \cdot \tilde{q}_i(x)$, אז ברור ש- $q_i(x_i) = \delta_i$

לבסוף - $p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i q(x)$, מתקבל ש- $\forall i \; p(x_i) = y_i$

נניח אם כן כי T נורמלי,

ונ"ל שזה אומר שקיים אורתונורמלי בסיס B $[T]_B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

מכיוון שבסיס אל מקבל $D^* = [T^*]_B = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$

יתכן שיש עד כמה ערכים איגנלים של D, לכן נסמן $\mu_1 \dots \mu_k$

לערכים עצמיים עצמיים <u>השונים</u> של T. (בלומר כל λ שווה לאחד

מה-μ_j ולכל אחד מה-μ_j שווה לאחד מה-λ)

לפי סיגמה שמוכחנו יש פולינום $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ המקיים $p(\mu_i) = \bar{\mu}_i$

בדומה שעבור הפולינום $p(x)$ המקיים $p(D) = D^*$

ושוב, מסתבר אם כן מהרצוי ל"ל $p(T) = T^*$

5. V מ"ו אוקלידי ממימד סופי. $T: V \to V$ נורמלי.

א. <u>ז"ל</u> $T = T^2$ $\Leftarrow$ T דומה לעצמו

<u>פתרון</u>: אם λ ע"ע של T, $Tv = \lambda v$, $v \neq 0$,

אז $\lambda^2 v = T^2 v = T\lambda v = \lambda T v = \lambda v$

לכן $\lambda^2 = \lambda$, $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

בשיעור הראינו כי ז"ל נורמלי שכל ע"ע שלו ממשי הוא

דומה לעצמו.

ב. אם T נילפוטנטי אז $T = 0$.

<u>פתרון</u>: נ"ל שזה אם T ע"י מטריצה אלכסונית היא

לפי אל B: $[T]_B = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

אם $T^m = 0$ אז גם $D^m = 0$, ולכן $\lambda_i^m = 0$ $\forall i$,

ומכאן $\lambda_i = 0$ $\forall i$, $\Leftarrow$ $D = 0$ $\Leftarrow$ $T = 0$.

(8)

6. א.

$$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

מחפשים שורש חיובי ל A.

נלכסן את A בעזרת בסיס אוג'; $P_A(x)=|xI-A|=x(x-2)$

עבור ע"ע 0 נקבל מערכת משוואות סומוגנית $\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

ולכן $x=-iy$, נבחר ו"ע מאורך 1; $\begin{pmatrix}-\frac{i}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$,

עבור ע"ע 2 נקבל את המערכת $\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

ולכן $x=iy$, ו"ע מתאים מאורך 1 יהיה $\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

מטריצת המעבר מאוניטרית הפיה אם כן;

$P=\begin{pmatrix}-\frac{i}{\sqrt2} & \frac{i}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, ובמיקן המטריצה האלכסונית $D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

נבחר שורש ל D; $\sqrt{D}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sqrt2\end{pmatrix}$

(ברור כי זהו שורש חיובי, כי $\sqrt{D}$ נורמלית
ויש לה ע"ע ≥ 0 לכן נובע משאלה בתרגיל 8)

נסמן;

$$\sqrt{A}=P\sqrt{D}\,P^*=\begin{pmatrix}-\frac{i}{\sqrt2} & \frac{i}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{i}{\sqrt2}\\ -\frac{i}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

ברור ש $\sqrt{A}^2=A$,

כמו כן $\sqrt{A}$ חיובי כי $\sqrt{D}$ חיובי ו- P אוניטרי, (או כי ניתן ללכסון
ע"י בסיס אוג' ו ע"ע ≥ 0) //

(9)

ב. $A\in M_n(\mathbb{C})$ ספיכה.

<u>ד"ל</u> קיים u אוניטרי, $P\geq 0$, כך ש- $A=uP$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר $P=\sqrt{A^*A}$ - השורש החיובי של A^*A ברי שהוגדר בתרגיל 8.

<u>טענת עזר:</u> P ספיכה

<u>הוכחה לטענת העזר:</u> A ספיכה $\Leftarrow$ A^* ספיכה

כי אם $A^*v=0$ אז $\langle w, A^*v\rangle=0$ $\forall w\in\mathbb{C}^n$

$\Leftarrow$ $\langle Aw, v\rangle=0$ $\forall w\in\mathbb{C}^n$

A ספיכה ולכן ספרט על, כלומר יש $w\in\mathbb{C}^n$ כך ש- $Aw=v$

לכן $\langle v,v\rangle=0$ $\Leftarrow$ $v=0$. כלומר $\ker A^*=\{0\}$, A^* ספיכה.

מכאן ש- A^*A ספיכה, ולכן ע"ע שלה גדולים <u>ממש</u> מאפס,

ובהיות שזה גורר שכל ע"ע של $\sqrt{A^*A}$ גדולים ממש מאפס

(כי הם שורשים של ע"ע של A^*A), לכן P ספיכה.

נחזור להוכחת הטענה: נגדיר $u=AP^{-1}$.

ברור ש- $A=uP$.

נותר להראות ש- u אוניטרית:

$$(AP^{-1})(AP^{-1})^* = AP^{-1}(P^{-1})^*A^* = AP^{-1}P^{-1}A^*$$

P ממש לעצמו

ו- $(P^{-1})^*=(P^*)^{-1}$

$$= A(P^{-1})^2A = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^{-1}A^{*-1}A^* = I$$

ומישוב דומה לצד שני, לכן $u^{-1}=(AP^{-1})^{-1}=(AP^{-1})^*=u^*$

ו- u אוניטרית

תרגיל 10 אלגברה לינארית 2

1 . יהי V מרחב וקטורי ממימד n ויהיו $\alpha_1,...\alpha_n \in V$ $\varphi_1,...\varphi_n \in V^*$
כך שמתקיים: $\forall_{i,j}\ \varphi_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$. הוכיחו ש $\{\alpha_1,...\alpha_n\}$ בסיס של V
וש- $\{\varphi_1,...\phi_n\}$ בסיס של V^* .

2. יהי P_n מרחב כל הפולינומים הממשיים ממעלה $n \geq$, ויהיו $a_0, a_1,...a_n \in R$ שונים זה מזה. לכל $0 \leq i \leq n$ נגדיר $\phi_i \in P_n^*$ ע"י $\phi_i(p(x)) := p(a_i)$ (תיווכחו שאכן ϕ_i פונקציונלים לינאריים!).
הוכיחו שהקבוצה $\{\phi_0,...,\phi_n\}$ מהווה בסיס של P_n^* .

3. יהי V מרחב וקטורי ממימד n. תהא $S = \{\phi_1,...\phi_n\} \subset V^*$, ונתון שקיים $0 \neq v \in V$ שעבורו $\forall i = 1,...,n\ ,\ \phi_i(v) = 0$. הוכיחו שהקבוצה S תלוייה לינארית.

4. תהא $A \in M_n(F)$ מטריצה ו- $k \in N$ כך ש- $A^k = 0$. הוכיחו ש- $A^n = 0$.

הגדרה: טרנספורמציה לינארית T נקראת נילפוטנטית מסדר k , ($k \in N$) אם T מקיימת: $T^{k-1} \neq 0$ $T^k = 0$.
טרנספורמציה לינארית T נקראת נילפוטנטית , אם קיים $k \in N$ כך ש- T נילפוטנטית מסדר k .
.

5. תהא $T: V \to V$ ט"ל מעל שדה סגור אלגברית. (V סוף-ממדי).
א. הוכיחו כי T נילפוטנטית אם ורק אם כל הע"ע של T הם 0.
ב. נניח כי לכל $v \in V$ קיים k, כך ש- $T^k v = 0$. הוכיחו כי T נילפוטנטית.
ג.הוכיחו: אם T נילפוטנטית וניתנת ללכסון, אזי $T = 0$;
ד. הוכיחו: אם $\dim \operatorname{Im} T = 1$, אז T נילפוטנטית או ניתנת ללכסון אך לא שניהם.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי, $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית. , ויהי W תת מרחב. W . נקרא T - אינוריאנטי אם $T(W) \subset W$.

6. תהא $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב T-אינוארינטי.
נגדיר: $T(W) = \{Tx \mid x \in W\},\quad T^{-1}(W) = \{x \in V \mid Tx \in W\}$
הוכיחו כי $T(W),\ T^{-1}(W)$ הם תת-מרחבים T-אינוארינטיים.

פתרון תרגיל 10 אלגברה לינארית 2

1 . יהי V מרחב וקטורי ממימד n ויהיו $\alpha_1,...\alpha_n \in V$ $\varphi_1,...\varphi_n \in V^*$
כך שמתקיים: $\forall_{i,j}\ \varphi_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$ **. הוכיחו ש** $\{\alpha_1,...\alpha_n\}$ **בסיס של** V
וש- $\{\varphi_1,...\phi_n\}$ **בסיס של** V^* **.**

נראה ש- $\{\varphi_1,...\phi_n\}$ בת"ל: $\sum t_i\varphi_i = 0 \Leftarrow \forall 1 \le j \le n \quad t_j = \sum t_i\varphi_i(\alpha_j) = 0$
נראה ש- $\{\alpha_1,...\alpha_n\}$ בת"ל: $\sum t_i\alpha_i = 0$
$\Leftarrow \forall 1 \le j \le n \quad t_j = \sum t_i\varphi_j(\alpha_i) = \varphi_j(\sum t_i\alpha_i) = 0$

2. יהי P_n מרחב כל הפולינומים הממשיים ממעלה $n \ge$, ויהיו $a_0, a_1,...a_n \in R$
שונים זה מזה. לכל $0 \le i \le n$ **נגדיר** $\phi_i \in P_n^*$ **ע"י** $\phi_i(p(x)) := p(a_i)$ **(תיווכחו שאכן** ϕ_i **פונקציונלים לינאריים!).**
הוכיחו שהקבוצה $\{\phi_0,...,\phi_n\}$ **מהווה בסיס של** P_n^* **.**

נגדיר $n+1$ פולינומים $0 \le j \le n$ $P_j(x) = \dfrac{(x-a_0)...(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})...(x-a_n)}{(a_j-a_0)...(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})...(a_j-a_n)}$
מתקיים $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$. משאלה 1 נובע שהקבוצה $\{\phi_0,...,\phi_n\}$ מהווה בסיס של P_n^* .

3. יהי V מרחב וקטורי ממימד n. תהא $S = \{\phi_1,...\phi_n\} \subset V^*$ **, ונתון שקיים** $0 \ne v \in V$ **שעבורו** $\forall i = 1,...,n\ ,\ \phi_i(v) = 0$ **. הוכיחו שהקבוצה S תלוייה לינארית.**

. מכיוון ש- $v \ne 0$ קיים $\psi \in V^*$ המקיים $\psi(v) \ne 0$. לא יתכן שהוא צרוף לינארי של $\{\phi_1,...\phi_n\}$.
ולכן הקבוצה הזו אינה בסיס ומכיוון שגודלה הוא כמימד המרחב היא תלויה לינארית.

4. תהא $A \in M_n(F)$ **מטריצה ו-** $k \in N$ **כך ש-** $A^k = 0$ **. הוכיחו ש-** $A^n = 0$ **.**

A מאפסת את הפולינום $P(x) = x^k$ ולכן הפולינום המינימלי שלה מחלק את x^k ומכאן ש- $t \le n \quad A^n = 0 \Leftarrow A^t = 0 \Leftarrow m_A(x) = x^t$.

הגדרה: טרנספורמציה לינארית T נקראת נילפוטנטית מסדר k, ($k \in N$) אם T מקיימת: $T^{k-1} \neq 0$ $T^k = 0$.
טרנספורמציה לינארית T נקראת נילפוטנטית, אם קיים $k \in N$ כך ש- T נילפוטנטית מסדר k.
.

5. תהא $T:V \to V$ ט"ל מעל שדה סגור אלגברית. (V סוף-ממדי).
א. הוכיחו כי T נילפוטנטית אם ורק אם כל הע"ע של T הם 0.

כוון ראשון: נניח ש- T נילפוטנטית.
יהי - $k \in N$ הקטן ביותר כך ש- $T^k = 0$, לכן:
$\exists v \in V \;\; T^{k-1}(v) \neq 0 \Leftarrow T^{k-1} \neq 0$. נסמן $w = T^{k-1}(v)$, ונקבל כי $Tw = T^k v = 0$
ו- $w \neq 0 \Leftarrow 0$ הוא ע"ע של T. נראה שאין ע"ע אחרים.
נניח ש- λ ע"ע של T עם ו"ע v. קל להראות שלכל m, λ^m ע"ע של T^m עם ו"ע v. לכן $\lambda = 0 \Leftarrow 0 = T^k v = \lambda^k \cdot v$.
כוון שני: נניח שכל הע"ע של T הם 0. אז הפולינום האופייני של T הוא x^n וממשפט קיילי המילטון נובע ש- $T^n = 0$ ולכן נילפוטנטית.

ב. נניח כי לכל $v \in V$ קיים $n(v)$, כך ש- $T^{n(v)}(v) = 0$. הוכיחו כי T נילפוטנטית..

יהי $\{v_1,...,v_k\}$ בסיס של V, ונבחר $n := \max_{1 \le i \le k}\{n(v_i)\}$, ואז $\forall i, T^n v_i = 0$. עבור וקטור כללי $v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$, $a_i \in \mathbb{F}$, מקבלים:

$$T^n v = \sum_{i=1}^{k} a_i T^n v_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot 0 = 0$$, ולכן $T^n = 0$ □

ג.הוכיחו: אם T נילפוטנטית וניתנת ללכסון, אזי $T = 0$;

אם T נילפוטנטית אז 0 הוא הע"ע היחיד שלה. אם בנוסף, T ניתנת לליכסון אז קיים בסיס של ו"ע של T $\alpha_1,...\alpha_n$
מכיון ש- $\forall 1 \le i \le n$ $T(\alpha_i) = 0 \cdot \alpha_i = 0$ נובע ש- $T = 0$.

ד. הוכיחו: אם $\dim \operatorname{Im} T = 1$, אז T נילפוטנטית או ניתנת ללכסון אך לא שניהם.

$\dim \ker T = n-1 \Leftarrow \dim \operatorname{Im} T = 1$. יהי $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ בסיס של $\ker T$ ונשלימו לבסיס $\beta = \{v_1,\dots,v_n\}$ של $V \Leftarrow$ $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \dots 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a \end{pmatrix}$, ולכן הפולי' האופי' של T הוא $x^{n-1}(x-a)$, כאשר $a \in \mathbb{F}$ סקלר כלשהו. אם $a=0$ אזי הפולי' האופי' הוא x^n וממשפט קיילי המילטון נובע כי T נילפוטנטית.

אם $a \neq 0$ אזי a ע"ע נוסף לע"ע אפס של T. יהי w ו"ע של T השייך ל-$a \Leftarrow \{v_1,\dots,v_{n-1},w\}$ בסיס של V (כי $T(w) \neq 0$ ולכן $w \notin sp\{v_1,\dots v_{n-1}\}$) והוא מורכב כולו מו"ע של $T \Leftarrow T$ ניתנת ללכסון.

לפי (ג) לעיל, אם T גם נילפוטנטי וגם ניתנת ללכסון אזי $T=0$, אך זה לא ייתכן בי הרי $\dim \operatorname{Im} T = 1 \Leftarrow$ □

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי, $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית. , ויהי W תת מרחב. W. נקרא T- אינוריאנטי אם $T(W) \subseteq W$.

6. תהא $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב T-אינוארינטי.

נגדיר: $T(W) = \{Tx \mid x \in W\}, \quad T^{-1}(W) = \{x \in V \mid Tx \in W\}$

הוכיחו כי $T(W), \quad T^{-1}(W)$ **הם תת-מרחבים** T**-אינוארינטיים.**

. W הוא תת-מרחב T-אינוארינטי , ז"א $T(W) \subseteq W$. יהי $v \in T(W)$, כלומר קיים $w \in W$ עבורו $v = T(w)$. $Tw \in W$, לכן $Tv = T(Tw) \in T(W)$. לכן $T(W)$ T-אינוארינטי.

יהי $u \in T^{-1}(W)$, כלומר $Tu \in W$. W הוא T-אינוארינטי, לכן $T(Tu)) \in W$. מכאן $Tu \in T^{-1}(W)$. ולכן $T^{-1}(W)$ T-אינוארינטי.

תרגיל 11 – אלגברה ליניארית (2)

1. יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $T:V\to V$ ט"ל נילפוטנטית. הוכיחו שהפולינום האופיני של T הוא x^n.

2. נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 & -60 \\ 2 & -5 & 9 & -48 \\ 6 & -17 & 29 & -152 \\ 1 & -3 & 5 & -26 \end{pmatrix}$ מעל הממשיים. האם היא נילפוטנטית? אם כן, מה דרגת הנילפוטנטיות שלה?

3. תהי $T:V\to V$ ט"ל נילפוטנטית, מסדר נילפוטנטיות r. יהי $i<r$. הוכיחו כי: א. $T|_{KerT^i}$ ט"ל נילפוטנטית מסדר i.
ב. $T|_{\operatorname{Im}T^i}$ ט"ל נילפוטנטית מסדר $r-i$.

4. מצאו את צורת ז'ורדן את המטריצה: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. יהי P_n מרחב כל הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{C}$, ותהי $D:P_n\to P_n$ טרנספורמצית הגזירה, המוגדרת ע"י: $D\left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right)=\sum_{k=0}^{n} kc_k x^k$
מצא את צורת ז'ורדן של D, ואת הבסיס של P_n שלפיו D בצורה זו.

פתרון תרגיל 11 – אלגברה ליניארית (2)

1. לפי הגדרתו פולינום אופיני של ט"ל $T:V\to V$ כאשר $\dim V=n$ הוא פולינום ממעלה n. הוכחנו גם כי 0 הוא ע"ע יחיד לכל ט"ל נילפוטנטית. לכן בהכרח $p_T(x)=x^n$. זה הפולינום היחיד ממעלה n שאין לו שורשים פרט לאפס.

2. ע"י חישוב ישיר מקבלים כי עבור $A=\begin{pmatrix}2&-8&12&-60\\2&-5&9&-48\\6&-17&29&-152\\1&-3&5&-26\end{pmatrix}$ מתקבל $A^2=0$ לכן זאת מטריצה נילפוטנטית ודרגת הנילפוטנטיות היא 2.

3. א. ברור כי $T|_{KerT^i}$ ט"ל נילפוטנטית מסדר $\le i$. זה נובע פשוט מהגדרת המרחב $\ker T^i$. צריך להראות כי הסדר $\le i$ וסיימנו. ידוע כי T נילפוטנטית מסדר r. לכן קיים $v\in V$ כך ש- $T^r(v)=0$, $T^{r-1}(v)\neq 0$. נתבונן ב- $w=T^{r-i}(v)$ $w=T^{r-i}(v)$, אזי קל לבדוק כי $w\in\ker T^i$, וכן מתקיים $T^{i-1}(w)=T^{r-1}(v)\neq 0$. לכן סדר הנילפוטנטיות של $T|_{\ker T^i}$ הוא לפחות i.

   ב. $T|_{\operatorname{Im}T^i}$ שוב קל לוודא כי זו ט"ל נילפוטנטית מסדר $\ge r-i$. כדי להוכיח שסדר הנילפוטנטיות הוא לפחות $r-i$, נשתמש, כקודם, באותו $v\in V$ המקיים $T^{r-1}(v)\neq 0$. נשים לב כי $T^i(v)\in\operatorname{Im}T^i$ ומתקיים $T^{r-1-i}(T^i(v))\neq 0$ וסיימנו.

4. הפולינום האופיני של A הוא x^5 משאלה 1. קל לראות כי $A^3=0$, $A^2\neq 0$, לכן הפולינום המינימלי של A הוא x^3. לכן בצורת ז'ורדן של A יש בלוק בגודל 3 (תמיד יש בלוק בגודל סדר הנילפוטנטיות).
ומכאן שזאת יכולה להיות $\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.
כדי להחליט איזו מהן היא הנכונה, נשווה את דרגות המטריצות

(דרגת מטריצה נשמרת תחת דמיון): דרגת A היא 2, ולכן הצורה הראשונה היא צורת ז'ורדן של A.

5. ביחס לבסיס $\{1, x, \ldots, x^n\}$ מיוצגת טרנספורמצית הגזירה ע"י:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

. אפשר להמשיך מכאן ע"י חישוב פולינומיים אופייניים ומינימלים. אולם במקרה זה קל לראות כי שינוי הבסיס ל- $\left\{1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}\right\}$ ייתן מיד צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

הערה: אכן קל לוודא כי טרנס' הגזירה נילפוטנטית על P_n. כמו כן קל להראות כי סדר הנילפוטנטיות הוא בדיוק $n+1$, למשל כי $P_n\left(x^n\right) \neq 0$.

תרגיל 12 אלגברה ליניארית (2)

1. מצאו מטריצה P כך ש- $P^{-1}AP$ היא בצורת ז'ורדן:

א. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ ב. $A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-17&-6&-1&0\end{pmatrix}$

2. שאלה ממבחן:

א. תהי T ט"ל נילפוטנטית במרחב 4 מימדי, כך שמתקיים: $\ker T^2 \neq \ker T^3$.

אילו מהטענות הבאות נכונה ואילו אינן נכונות? נמק לגבי כל אחת מהן.

א. $T^3=0$

ב. בצורת ז'ורדן של T יש רק בלוק אחד.

ג. בצורת ז'ורדן של T יש בלוק מסדר ≤ 3.

ד. $T^3\neq 0$

3. נתונה $T:V\to V$ ט"ל V ממימד 5 מעל $\mathbb{C}$. יהי $m_T(x)=(x-2)^2$ הפולינום המינימלי של T. מימד המרחב העצמי עם ע"ע 2 הוא 3.
מהי צורת ז'ורדן של T.

4. יהיו:

$$A=\begin{pmatrix}4&1&0&\dots&\dots&&&0\\0&4&1&0&\dots&&&0\\0&0&4&0&\dots&&&0\\0&\dots&0&4&1&0&0&0\\0&\dots&&0&4&0&0&0\\0&\dots&&&&2&1&0\\0&\dots&&&&0&2&0\\0&\dots&&&&&0&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4&1&0&\dots&\dots&&&0\\0&4&0&0&\dots&&&0\\0&0&4&1&0&0&0&0\\0&\dots&0&4&0&0&0&0\\0&\dots&&0&4&0&0&0\\0&\dots&&&0&2&1&0\\0&\dots&&&&0&2&1\\0&\dots&&&&&0&2\end{pmatrix}$$

שתי מטריצות בצורת ז'ורדן:

א) מהם הפולינומים האופיינים של A,B ?

ב) מהם הע"ע של A,B ?

ג) האם A,B דומות?

ד) מהם הפולינומיים המינימליים של A,B ?

ה) מהם המימדים של המרחבים העצמיים של A,B המתאימים לערכים עצמיים שונים.

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית ו- $U \subseteq V$ ת"מ. אז גם U הוא מרחב מכפלה פנימית.
אם $T \in Hom(V,V)$ מקיימת $T(U) \subseteq U$ אנו אומרים כי U הוא ת"מ T-אינוריאנטי. במקרה כזה הצמצום של T ל- U שאותו אנו מסמנים ב- $T|_U$ הוא איבר של $Hom(U,U)$.

א. אם T,U,V כמו בדיון דלעיל ו- P היא ההטלה הניצבת של V על U, הוכיחו כי $(T|_U)^* = PT^*$.

ב. אם $T \in Hom(V,V)$ נורמלית ו- U ת"מ T אינוריאנטי אז U הוא גם T^* אינוריאנטי.

הדרכה: היזכרו שאם T נורמלית אז $V = \oplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$ כאשר λ_i הם הע"ע של T ו- V_{λ_i} הוא מרחב הוקטורים העצמיים עם ע"ע λ_i. ביחרו $u \in U$, צריך להראות כי $T^*u \in U$. ישנה הצגה $u = v_1 + \ldots + v_k$ כאשר $v_i \in V_{\lambda_i}$.

ג. הסיקו שאם U הוא ת"מ T אינוריאנטי ו- T נורמלית אז $T|_U$ גם נורמלית

6. $S,T : V \to V$ ט"ל, הן **ניתנות ללכסון סימולטני** אם יש בסיס B של V עבורו $[S]_b, [T]_B$ אלכסוניות.
נוכיח כי S,T ניתנות ללכסון סימולטני $\Leftrightarrow$ $ST = TS$.

א) נניח B בסיס של וקטורים עצמיים ל- S ו- T.
צ"ל: ST,TS מסכימים על הוקטורים ב- B.

ב) נניח $ST = TS$.
צ"ל: כל המרחבים העצמיים של T הם S אינווריאנטים.

ג) אם S_i צמצום S למרחב העצמי ה- i של T, הראו כי S_i ניתנת ללכסון.
רמז: התבוננו בפולינומים המינימליים של S ו- S_i.

ד) בעזרת ב',ג' השלימו את ההוכחה. (כלומר $ST = TS$ אזי S ו- T ניתנות ללכסון סימולטני).

7. הוכיחו: אם $I - AB$ הפיכה אז גם $I - BA$ הפיכה
ו- $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1} A$.
הסיקו מכך של- AB ול- BA אותם ערכים עצמיים.

8. תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ט"ל, $T(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$.
הציגו את T כצירוף לינארי של: א) 3 הטלות אורתוגונליות.
ב) 2 הטלות אורתוגונליות.

9. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה משולשית עליונה.

הוכיחו כי A נורמלית $\Leftrightarrow$ A אלכסונית.

פתרון תרגיל 12 – אלגברה ליניארית (2)

1. החלק של חישוב מטריצת המעבר בין הבסיסים הוא חלק טכני ולכן אינו חשוב בנושא של צורת ז'ורדן. אנו נפתור רק את החלק של מציאת צורת ז'ורדן.

א) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\5&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ הערכים העצמיים של A הם: $\lambda_1=1,\lambda_2=3$. הפולינום המינימלי של A הוא $m_A(x)=(x-1)^2(x-3)$ $m_A(x)=(x-1)^2(x-3)$ ולכן:

$J_A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

ב) נמצא את הערכים העצמיים של A: $|xI-A|=(x-1)^4\Rightarrow\lambda=1$.

מספר תתי הבלוקים של J_A הוא $\dim V_\lambda$. $V_\lambda=\ker(A-I)$. נבצע פעולות גאוס על $A-I$:

$$A-I=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\-4&-2&0&0\\7&1&1&1\\-17&-6&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}17&6&1&1\\7&1&1&1\\4&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}17&6&1&1\\10&5&0&0\\2&1&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}17&6&1&1\\2&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מימד מרחב המשוואות הוא 2 ולכן $\dim V_\lambda=4-2=2$. מכאן שב-J_A יש שני תתי בלוקים. יתכנו שתי אפשרויות: בלוק בגודל 3 ובלוק בגודל 1 או שני בלוקים בגודל 2.
כדי לבדוק אילו מבין שתי האפשרויות היא הנכונה נבדוק האם הפולינום המינימלי של A הוא $(x-1)^2$ או $(x-1)^3$. בדקו ש-$(A-I)^2=0$ ומכאן ש-

$J_A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2. $T:V\to V$ ט"ל נילפוטנטית במרחב 4 מימדי. $\ker T^2\neq\ker T^3$.

א) $T^3=0$ לא נכון. דוגמא: תהי T מיוצגת ע"י $T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. אזי T נילפוטנטית, $T^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $T^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. $\dim\ker T^2\neq\dim\ker T^3$

ולכן $\ker T^2\neq\ker T^3$ אבל $T^3\neq 0$.

ב) בצורת ז'ורדן של T יש רק בלוק אחד, לא נכון.

דוגמא: תהי T מיוצגת ע"י $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. אזי T נילפוטנטית

$T^3 = (0)$, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן $\ker T^2 \neq \ker T^3$ אבל למטריצה יש שני בלוקים.

ג) בצורת ז'ורדן של T יש בלוק מסדר ≤ 3.

נכון: אחרת, הבלוק המקסימלי הוא בגודל ≥ 2 ולכן קיים $k \leq 2$ כך ש- $m_T(x) = x^k$

ומכאן נובע ש- $T^2 = 0$ ולכן גם $T^3 = 0$. כלומר $\ker T^2 = \ker T^3 = V$ סתירה לנתון.

ד) $T^3 \neq 0$ לא נכון. הדוגמא של סעיף ב' טובה גם לכאן.

3. לפולינום המינימלי והאופיני של ט"ל אותם שורשים. לכן הפולינום האופיני של T הוא $p_T(x) = (x-2)^5$. זה כבר אומר שעל האלכסון הראשי בצורת ז'ורדן יופיע רק 2. בנוסף מהפולינום המינימלי אנו מסיקים שהבלוק המקסימלי חייב להיות בגודל 2. לכן יש שתי מועמדות לצורת ז'ורדן: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

שתי המטריצות נבדלות במימד המרחב העצמי של 2 (שהוא 4 בשניה ו-3 בראשונה). לכן המטריצה השניה היא צורת ז'ורדן הנכונה.

4. א) $p_A(x) = p_B(x) = (x-4)^5 (x-2)^3$.

ב) לפי א' הע"ע העצמיים של שתי המטריצות הם 4,2.

ג) בגלל יחידות צורת ז'ורדן שתי המטריצות אינן דומות כי אין להן את אותם בלוקים בצורת ז'ורדן.

ד) כיוון שהגודל המקסימלי של בלוק ז'ורדן השייך לע"ע 4 ב-A הוא 3, והגודל המקסימלי של בלוק ז'ורדן השייך לע"ע 2 הוא2, נקבל כי $m_A(x) = (x-4)^3 (x-2)^2$.

ע"י שימוש בשיקולים דומים נקבל $m_B(x) = (x-4)^2 (x-2)^3$.

ה) ל-A שני בלוקים הן העבור הע"ע 2 והן עבור הע"ע 4, לכן: $\dim V_2^A = \dim V_4^A = 2$.
שיקול דומה נותן $\dim V_2^B = 1, \dim V_4^B = 3$.

5. א) ניזכר שלכל $v \in V$ יש הצגה יחידה $v = u + w$ כאשר $u \in U, w \in U^\perp$ ובמקרה הזה $P(v) = u$. אנו צריכים להוכיח כי $(T|_U)^* = PT^*$, כאשר שני האגפים הם איברים ב-$Hom(U,U)$ כלומר צריך להוכיח שלכל $u_1, u_2 \in U$ מתקיים $(Tu_1, u_2) = (u_1, PT^* u_2)$.

בהנתן u_1, u_2 כנ"ל אז נסמן $v = T^* u_2$ ולכן קיימים u, w כמו בהערה למעלה כך ש-$v = u + w$.

$$(Tu_1, u_2) = (u_1, T^* u_2) = (u_1, u + w) = (u_1, u) = (u_1, PT^* u_2)$$

כנדרש.

ב) אנו יודעים ש- $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$ כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הם הע"ע של T ו- V_{λ_i} הוא מרחב הוקטורים העצמיים עם ע"ע λ_i.

נבחר $u \in U$ אז $u = v_1 + \cdots + v_k$ כאשר $v_i = V_{\lambda_i}$. אם נצליח להוכיח שמכאן נובע $v_i \in U$ לכל i אז נסיים כי אז $T^*(u) = \sum \bar{\lambda}_i v_i \in U$.

נוכיח כי $v_k \in U$ ומסימטריה ינבע שלכל $1 \le i \le k$ $v_i \in U$.

<u>למה</u>: אם $1 \le i \le k$ ונתונים סקלרים $a_i, \ldots, a_k$ שונים מאפס, כך ש- $a_i v_i + \ldots + a_k v_k \in U$ אז קיימים סקלרים $b_{i+1}, \ldots, b_k$ שונים מאפס כך ש- $b_{i+1} v_{i+1} + \ldots + b_k v_k \in U$.

אם נוכיח את הלמה אז נסיים כי אנו מתחילים מהעובדה ש- $v_1 + \cdots + v_k \in U$ ואז שימוש חוזר בלמה $k-1$ פעמים ייתן לנו קיום $c \ne 0$ כך ש- $cv_k \in U$ ולכן $v_k \in U$ כנדרש.

הוכחת הלמה: מתקיים $\lambda_i \left(\sum_{j=i}^{k} a_j v_j \right) = \sum_{j=i}^{k} a_j \lambda_i v_j$, $T\left(\sum_{j=i}^{k} a_j v_j \right) = \sum_{j=i}^{k} a_j \lambda_j v_j$.
שני הוקטורים הללו שייכים ל- U מהנתון ומכך ש- U אינווריאנטי. מכאן שההפרש ביניהם גם הוא ב- U, אבל ההפרש ביניהם הוא $\sum_{j=i+1}^{k} a_j (\lambda_j - \lambda_i) v_j$ והמקדמים שונים מאפס.

ג) <u>מסקנה</u>: אם U הוא ת"מ T אינו' של V ו- T נורמלית אז: $(T|_U)^* = PT^* = T^*|_U$.
כאשר השיוויון הראשון הוא סעיף א' והשיוויון האחרון נובע מכך ש- U הוא T^* אינווריאנטי (סעיף ב'). כעת לאחר שהשיוויון הנ"ל הוכח (עבור T נורמלית) נקבל באופן טריביאלי ש- $(T|_U)(T|_U)^* = (T|_U)^*(T|_U)$ כלומר $T|_U \in Hom(U,U)$ נורמלית כנדרש.

6. כאמור נוכיח בתרגיל זה כי אם $S, T : V \to V$ ט"ל ניתנות ללכסון אזי הן ניתנות ללכסון סימולטני $\Leftrightarrow$ $ST = TS$.

א) נוכיח שאם S, T ניתנות ללכסון סימולטני אז הן מתחלפות.

נניח ש- $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של וקטורים עצמיים של S,T ונניח אזי: $Tv_i=\lambda_i v_i,\quad Sv_i=\mu_i v_i$

$$\forall i\quad TSv_i=T\mu_i v_i=\mu_i Tv_i=\mu_i\lambda_i v_i=\lambda_i\mu_i v_i=\lambda_i Sv_i=S\lambda_i v_i=STv_i$$

לכן מכיוון ש- $ST=TS$ על אברי הבסיס אזי הן שוות.

ב) נניח עתה ש- $ST=TS$ (S,T לכסינות לא בהכרח סימולטנית). יהי V_λ המרחב העצמי של T המתאים לע"ע λ. $v\in V_\lambda$ כלומר $Tv=\lambda v$ אזי: $T(Sv)=STv=S\lambda v=\lambda Sv$ לכן $Sv\in V_\lambda$ וזה אומר ש- V_λ הוא S אינווריאנטי.

ג) נביט על $S|_{V_{\lambda_i}}=S_i$ הצמצום של S למרחב העצמי ה- i של T (מוגדר היטב ע"פ ב'). S ניתנת ללכסון, לכן הפולינום המינימלי שלה מתפרק למכפלת גורמים לינאריים ללא ריבוי. אם $p(x)$ פולינום המאפס את S אז ודאי שהוא מאפס את S_i, לכן הפולינום המינימלי של S_i מחלק את הפולינום המינימלי של S, בפרט זוהי מכפלת גורמים לינאריים ללא ריבוי, ולכן S_i ניתנת ללכסון.

ד) נבחר עתה בכל V_{λ_i} בסיס B_i עבורו S_i אלכסונית. ברור שלצמצום של T ל- V_{λ_i} מתאימה מטריצה אלכסונית (שערכיה על האלכסון הם λ_i) וזאת לפי כל בסיס. לכן אם ניקח כבסיס את $B=\bigcup B_i$ נקבל בסיס שלפיו גם S וגם T ניתנות ללכסון. לכן הן ניתנות ללכסון סימולטני.

7. נביט בחישוב הבא:

$$(I-BA)\left(I+B(I-AB)^{-1}A\right)=I+B(I-AB)^{-1}A-BA-BAB(I-AB)^{-1}A$$
$$=I-BA+B(I-AB)(I-AB)^{-1}A=I-BA+AB=I$$

כנ"ל אפשר לחשב בכיוון ההפוך: $\left(I+B(I-AB)^{-1}A\right)(I-AB)=I$ (עבור ט"ל במ"ו ממימד סופי היה מספיק למעשה להראות כיוון אחד).

נרצה להסיק של- AB ול- BA אותם ערכים עצמיים. נשים לב כי λ הוא ע"ע של מטריצה (או ט"ל) $\lambda I-C\Leftarrow C$ מטריצה סינגולרית- כלומר לא הפיכה. לכן אם נראה ש- $\lambda I-AB$ הפיכה $\Leftarrow\lambda I-BA$ הפיכה נקבל שלשניהם בדיוק אותם ע"ע.

נניח תחילה $\lambda\neq 0$, $\lambda I-AB$ הפיכה. $\lambda I-BA=\lambda\left(I-\lambda^{-1}BA\right)$. נסמן $\tilde{B}=\lambda^{-1}B$.

לפי מה שראינו, אם $I-A\tilde{B}$ הפיכה אזי גם $I-\tilde{B}A$ הפיכה, ואם ההופכי של $I-\tilde{B}A$ הוא C אזי $\lambda^{-1}C$ ההופכי של $\lambda I-BA$. אבל $I-A\tilde{B}=I-\lambda^{-1}AB=\lambda^{-1}(\lambda I-AB)$ הפיכה לפי הנתון. לכן $\lambda I-BA=\lambda\left(I-\tilde{B}A\right)$ הפיכה כנדרש.

לבסוף אם $\lambda=0$ אז $|BA|=|B||A|=|A||B|=|AB|=0$ ולכן אם אפס הוא ע"ע של AB אז הוא גם ע"ע של BA.

8. ניישם את משפט הפירוק הספקטרלי: יהי T ט"ל סימטרית, ולכן ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{R}$ עם בסיס א"נ. נמצא אותו. נחשב פולינום אופיני , ע"ע וו"ע של T:

$$p_T(a)=\det\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}=a^3-3a-2=(a+1)(a+1)(a-2).$$

נחשב את המרחב העצמי של -1:

$$V_{-1}=\left\{v\in\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}v=0\right\}=sp\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$$ נבצע תהליך גרם שמידט

כדי לקבל בסיס א"נ ל-V_{-1}. $u_1=\frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$u_2=\frac{(1,-1,0)-u_1\langle(1,-1,0),u_1\rangle}{\|''\|}=\frac{\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)\right\|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$V_{-1}=sp\{u_1,u_2\}$. נותר לנו עוד למצוא את המרחב העצמי של 2 . אבל ידוע שמימדו 1 ולכן מספיק למצוא וקטור אחד עם ע"ע 2.

$V_2=sp\{(1,1,1)\}$ ננרמל אותו ונקבל $u_3=\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. הוא ניצב ל-$u_1,u_2$ כי הטרנספורמציה נורמלית.

נגדיר $P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ הטלה אורתוגונלית על $span\{u_i\}$ $i=1,2,3$. אז

$$\begin{cases} P_1+P_2+P_3=I \\ T=-P_1-P_2+2P_3 \end{cases}$$

ניתן לחסוך את תהליך גרם שמידט אם נביע את T כסכום של שתי הטלות אורתוגונליות:
נגדיר $P_{-1}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ להיות הטלה אורתוגונלית על V_{-1} שניצב כמובן ל-V_2. ואז:

$$\begin{cases} I=P_{-1}+P_3 \\ T=-P_{-1}+P_3 \end{cases}.$$

9. $\Rightarrow$ ברור שאם A אלכסונית אז היא נורמלית.

$\Leftarrow$ באינדוקציה על n: ל-$n=1$ הטענה טריויאלית. נניח שנכון עד $n-1$ ונוכיח ל-n.

$(AA^*)_{11}=\overline{a_{11}}a_{11}=(A^*A)_{11}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\overline{a_{1k}}\geq 0$ זה מתקבל מכיוון ש-A נורמלית

ומשולשית עליונה. מזה נקבל $a_{12}=\ldots=a_{1n}=0\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

כך ש- B משולשית עליונה ונורמלית מגודל $(n-1)\times(n-1)$. (ודאו שבאמת נורמלית). מהנחת האינדוקציה: B אלכסונית $\Leftarrow$ A אלכסונית.