אלגברה לינארית 2 - תרגיל 1

20.2.05

1. א. מצא את הסימן של התמורות הבאות ב - S_5:

$\pi = (4\ 2\ 5\ 3\ 1),\ \sigma = (3\ 2\ 1\ 5\ 4),\ \tau = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$

ב. חשב את $\tau\cdot\sigma, \pi\cdot\sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$, וכן חשב את סימנם.

2. כתבו את התמורות הבאות כמכפלת מחזורים זרים:

א. $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 5\ 2\ 1\ 3\ 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 3\ 1\ 5\ 4 \end{pmatrix}$

3. חשבו את המכפלות הבאות:

א. $(1\ 2\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 6\ 2)$

ב. $(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)....(n-1\ n)$

ג. $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^5$

ד. $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(1\ 2)(3\ 5\ 4)$

4. תהי $\sigma \in S_n$ ובעלת התכונה $\sigma(n) = n$. תהי $\sigma^* \in S_{n-1}$ המוגדרת בצורה הבאה:

$\sigma^*(x) = \sigma(x)$ עבור כל $x = 1,...,n-1$. הראה כי $sign(\sigma^*) = sign(\sigma)$.

5. חשב את שטח המקבילית ששלושה מקודקודיה הן: $A = (4,4), B = (5,4), C = (2,8)$.

6. תהי $\tau \in S_n$, הראה כי $\tau\cdot\sigma$ עוברת על S_n כאשר σ עוברת על S_n כלומר:

$S_n = \{\tau\cdot\sigma : \sigma \in S_n\}$.

הדרכה: הראה כי לכל תמורה $\pi \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש- $\tau\cdot\sigma = \pi$.

אלגברה לינארית 2 - תרגיל 1- פתרון

20.2.05

1. א. מצא את הסימן של התמורות הבאות ב - S_5:

$\pi=(4\ 2\ 5\ 3\ 1),\ \sigma=(3\ 2\ 1\ 5\ 4),\ \tau=(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$

פתרון: $Sign\tau=1, Sign\sigma=1, Sign\pi=1$

ב. חשב את $\tau\cdot\sigma, \pi\cdot\sigma, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$, וכן חשב את סימנם.

פתרון: $\tau\cdot\sigma=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\pi\cdot\sigma=(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$,

$\sigma^{-1}=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\tau^{-1}=(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$.

$Sign\tau\cdot\sigma=1,\ Sign\pi\cdot\sigma=1,\ \mathrm{Sign}\sigma^{-1}=1,\ Sign\tau^{-1}=1$

2. כתבו את התמורות הבאות כמכפלת מחזורים זרים:

א. $\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\\ 5\ 2\ 1\ 3\ 4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\\ 2\ 3\ 1\ 5\ 4\end{pmatrix}$

פתרון: א. $(1\ 5\ 4\ 3)(2)$. ב. $(1\ 2\ 3\ )(4\ 5)$

3. חשבו את המכפלות הבאות:

א. $(1\ 2\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 6\ 2)$

פתרון: $(1)(2\ 6\ 3\ 4\ 5)$.

ב. $(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)....(n-1\ n)$

פתרון: $(1\ 2\ 3\ 4\ ,...,\ \mathrm{n}\text{-}1\ \mathrm{n})$.

ג. $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)^5$

פתרון: תמורת הזהות.

ד. $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(1\ 2)(3\ 5\ 4)$

פתרון: $(1)(2)\ (3)(4)(5)$ תמורת הזהות.

4. תהי $\sigma\in S_n$ ובעלת התכונה $\sigma(n)=n$. תהי $\sigma^*\in S_{n-1}$ המוגדרת בצורה הבאה: $\sigma^*(x)=\sigma(x)$ עבור כל $x=1,...,n-1$. הראה כי $sign(\sigma^*)=sign(\sigma)$.

פתרון: תהי $T=\{(i,j):\sigma(i)>\sigma(j)\,\&\,i<j, i=1,...,n,\ \mathrm{j=1,...,n}\}$ (קבוצת כל ההיפוכים ב- σ)

מכיוון ש- $\sigma(n)=n$ לכן לכול $(i,j)\in T$ $j\neq n$.

בתוצאה מכך (ומהגדרת σ^*) נקבל שכל היפוך $(i,j)\in T$ הוא היפוך ב- σ^* ולהיפך. לכן $sign(\sigma^*)=sign(\sigma)$.

5. חשב את שטח המקבילית ששלושה מקודקודיה הן: $A=(4,4), B=(5,4), C=(2,8)$.

פתרון: אנו נזיז את המשולש לראשית ע"י שנפחית הווקטור A מהוקטורים A,B,C ונקבל: $A'=(0,0), B'=(1,0), C'=(-2,4)$. ברור כי שטח המשולש $S(ABC)$ שווה לשטח המשולש $S(A'B'C')$, כי המשולשים דומים ועל כן שטח המקבילית המוגדרת ע"י הקודקודים הנ"ל היא: $\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4-0\cdot(-2)=4$.

6. תהי $\tau \in S_n$, הראה כי $\sigma \cdot \tau$ עוברת על S_n כאשר σ עוברת על S_n כלומר: $S_n = \{\tau \cdot \sigma : \sigma \in S_n\}$.

הדרכה: הראה כי לכל תמורה $\pi \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש- $\tau \cdot \sigma = \pi$.

פתרון: נוכיח כי הרכבה של תמורות ב- S_n היא פעולה אסוציאטיבית, כלומר לכל $\sigma, \pi, \tau \in S_n$ מתקיים $\sigma \cdot (\pi \cdot \tau) = (\sigma \cdot \pi) \cdot \tau$. זה אכן נכון: כי לכל $x = 1, \ldots, n$ מהגדרת הרכבה של פונקציות, מתקיים

$$\sigma \cdot (\pi \cdot \tau)(x) = \sigma \cdot \pi \cdot (\tau(x))) = \sigma \cdot (\pi \cdot (\tau(x))) =$$
$$\sigma \cdot \pi \cdot (\tau(x)) = (\sigma \cdot \pi) \cdot \tau(x)$$

ולכן ההרכבה היא פעולה אסוציאטיביות (הערה: זו תכונה שמתקיימת בחבורה, ו- S_n היא בפרט חבורה).

כעת הרכבה של תמורה היא תמורה ולכן $\tau \cdot S_n \subset S_n$.

כעת נראה הכלה בכיוון השני, כלומר נראה שלכול תמורה $\pi \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש- $\tau \cdot \sigma = \pi$.

אכן תהי $\pi \in S_n$ אזי נגדיר $\sigma = \tau^{-1} \cdot \pi$ ונקבל $\tau \cdot \sigma = \tau \cdot (\tau^{-1} \cdot \pi) = \pi$. על כן $\tau \cdot S_n = S_n$.

תרגיל 2, אלגברה לנארית 2

24 בפברואר 2005

הגדרה: תמורה ב S_n תקרא חילוף (טרנספוזיציה) אם היא מהצורה (i,j) עבור $i,j\in\{1,..,n\}$.
הגדרה: מעתה בקורס הכפלה של תמורות היא הרכבה של פונקציות כלומר מימין לשמאל.
קרי, $\rho\cdot\sigma$ היא הפעלת ρ ואחריה σ.

1. הציגו את התמורות הבאות כמכפלת חילופים:

   (א) $(1,2,3,4)$
   (ב) $(1,2,3)\,(4,6,5)$
   (ג) $(1,2,3)\,(2,3,5)$
   (ד) $(1,2,3)\,(3,5)\,(2,3,5)$

2. הציגו את התמורות הבאות כמכפלת חילופים מהצורה (i,j) שמקיימים $|i-j|=1$:

   (א) $(1,3)(2,4)$
   (ב) $(1,3,5,2)$
   (ג) $(1,3,2)\,(2,5)$
   (ד) $(2,5)\,(1,2,3)\,(2,5)$

3. חזרו על שאלה 2 והפעם השתמשו רק בחילופים מהצורה $(1,i)$.

4. הציגו את התמורה משאלה 1 סעיף ד' $(1,2,3)\,(3,5)\,(2,3,5)$ כמכפלת חילופים בדרך הקצרה ביותר. כלומר מכפלה של k חילופים ואין הצגה כמכפלה קצרה יותר של חילופים של תמורה זו. האם המכפלה הנ"ל יחידה או שיש עוד מכפלות באורך זה היוצרות את $(1,2,3)\,(3,5)\,(2,3,5)$.

5. הוכיחו שב S_n חצי מהתמורות עם סימן חיובי וחצי עם סימן שלילי.

6. הוכיחו כי לכל תמורה $\alpha\in S_n$ מתקיים

$$\alpha\left(i_1,..,i_k\right)\alpha^{-1}=\left(\alpha\left(i_1\right),..,\alpha\left(i_k\right)\right)$$

7. חשבו את הדטרמיננטה של $M_3\ni\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ ו $\mathbb{Z}_7$.

8. יהא F שדה כלשהו ותהא $\alpha\in S_n$. נגדיר מטריצת פרמוטציה $A\in M_n\left(F\right)$ ע"י $Ae_i=e_{\alpha(i)}$ כאשר e_i ווקטור עמודה סטנדרטי שכל ערכיו הם 0 פרט למקום i שערכו 1. במילים אחרות בעמודה i של המטריצה מופיע הווקטור $e_{\alpha(i)}$. הוכיחו ש $det\left(A\right)=sign\left(\alpha\right)$.

פתרון תרגיל 2, אלגברה לנארית 2

7 במרץ 2005

הגדרה: תמורה ב S_n תקרא חילוף (טרנספוזיציה) אם היא מהצורה (i,j) עבור $i,j \in \{1,..,n\}$ שונים.
הגדרה: מעתה בקורס הכפלה של תמורות היא הרכבה של פונקציות כלומר מימין לשמאל.
קרי, $\rho \cdot \sigma$ היא הפעלת ρ ואחריה σ.

1. הציגו את התמורות הבאות כמכפלת חילופים:

(א) $(1,2,3,4) = (1,4)\,(1,3)\,(1,2)$

(ב) $(4,6,5)\,(1,2,3)$ ע"י שרשור הפרוקים של כל מחזור נקבל $(4,6)\,(4,5)\,(1,2)\,(1,3)$.

(ג) $(2,3,5)\,(1,2,3)$ כנ"ל גם כשהמחזורים אינם זרים $(2,3)\,(2,5)\,(1,2)\,(1,3)$.

(ד) $(1,2,3)\,(3,5)\,(2,3,5) = (1,3)\,(1,2)\,(3,5)\,(3,2)\,(3,5)$

2. הציגו את התמורות הבאות כמכפלת חילופים מהצורה (i,j) שמקיימים $|i-j| = 1$:

(א) $(1,3)(2,4) = (2,3)\,(1,2)\,(3,4)\,(2,3)$

(ב) $(1,3,5,2) = (3,5,2,1) = (2,3)\,(1,2)\,(3,4)\,(4,5)\,(3,4)$

(ג) $(1,3,2)\,(2,5) = (3,2,5,1) = (2,5,1,3) = (2,3)\,(2,1)\,(5,2) = (2,3)\,(2,1)\,(4,5)\,(3,4)\,(2,3)\,(3,4)\,(4,5)$

(ד) $(2,5)\,(1,2,3)\,(2,5) = (1,3,5) = (3,5,1) = (3,1)\,(3,5) = (2,3)\,(2,1)\,(2,3)\,(4,5)\,(3,4)\,(4,5)$
הסבר: ע"פ שאלה 6 נקבל $(i,i+2) = (i+1,i+2)\,(i,i+1)\,(i+1,i+2)$ ולכן לכל $i < j$ נקבל את (i,j) מ $(i,i+1)$ ע"י כפל משמאל ומימין מספיק פעמים בחילופים מהצורה $(i+k,i+k+1)$. ולכן אחרי פרוק לחילופים כלשהם ניתן להמיר את הפרוק באופן זה לחילופים מהצורה המבוקשת.

3. חזרו על שאלה 2 והפעם השתמשו רק בחילופים מהצורה $(1,i)$:

(א) $(1,3)(2,4) = (1,3)\,(1,2)\,(1,4)\,(1,2)$

(ב) $(1,3,5,2) = (1,2)\,(1,5)\,(1,3)$

(ג) $(1,3,2)\,(2,5) = (1,2)\,(1,3)\,(1,5)\,(1,2)\,(1,5)$

(ד) $(2,5)\,(1,2,3)\,(2,5) = (1,2,5,3) = (1,3)\,(1,5)\,(1,2)$
הסבר: ע"פ שאלה 6 לכל i,j שונים נקבל $(i,j) = (1,i)\,(1,j)\,(1,i)$ ולכן אחרי פרוק לחילופים כלשהם ניתן להמיר את הפרוק באופן זה לחילופים מהצורה המבוקשת. טריק דומה אפשר לעשות למחזור כלשהו שאינו מכיל את 1 ואם הוא כן מכיל את 1 אז הפרוק לחילופים מהצורה המבוקשת ברור.

4. הציגו את התמורה משאלה 1 סעיף ד' $(1,2,3)\,(3,5)\,(2,3,5)$ כמכפלת חילופים בדרך הקצרה ביותר. כלומר מכפלה של k חילופים ואין הצגה כמכפלה קצרה יותר של חילופים של תמורה זו. האם המכפלה הנ"ל יחידה או שיש עוד מכפלות באורך זה היוצרות את $(1,2,3)\,(3,5)\,(2,3,5)$.
פתרון:

$$(1,3)\,(1,2)\,(3,5)\,(3,2)\,(3,5) = (1,3)\,(1,2)\,(5,2)$$

כיוון ש $(5,2)=(3,5)(3,2)(3,5)$ (או ע"י בדיקה ישירה או ע"י שאלה 6). זו בוודאי המכפלה הקצרה ביותר כי סימן התמורה -1 ולכן מכפלה בגודל 2 לא אפשרית ומכפלה בגודל 1 לא אפשרית כי תמורה זו אינה חילוף (כי תמורה זו שווה למחזור $(2,5,3,1)$). המכפלה לא יחידה כיוון ש

$$(1,2,3)(3,5)(2,3,5)=(1,2,5,3)=(1,2)(1,5)(1,3)$$

5. הוכיחו שב S_n חצי מהתמורות עם סימן חיובי וחצי עם סימן שלילי.
פתרון: ראינו בתרגיל 1 שלכל $\alpha\in S_n$ ההעתקה $f_\alpha(\beta)=\alpha\cdot\beta$ היא חח"ע ועל (חחע"ל) מ S_n לעצמה. עבור α חילוף נקבל ההעתקה חחע"ל שמשנה את סימן β. לכן אם נצמצם את f_α לאוסף התמורות אם סימן חיובי (נסמנם A_n) נקבל ההעתקה חח"ע מ A_n ל $S_n\setminus A_n$. כמו"כ אם נצמצם את f_α לאוסף התמורות אם סימן שלילי נקבל ההעתקה חח"ע בכוון ההפוך (אפשר גם ישירות להראות שהצמצומים הנ"ל הם גם העתקות על שהרי המקור של תמורה β היא התמורה $\alpha\cdot\beta$ שסימנה הפוך לסימן β). כלומר $|A_n|=|S_n\setminus A_n|$ וזה מש"ל.

6. הוכיחו כי לכל תמורה $\alpha\in S_n$ מתקיים

$$\alpha(i_1,..,i_k)\,\alpha^{-1}=(\alpha(i_1),..,\alpha(i_k))$$

פתרון: ע"י בדיקה ישירה, אגף ימין(=א"י) מעביר את $\alpha(i_1)$ ל $\alpha(i_2)$. אגף שמאל(=א"ש) מעביר את $\alpha(i_1)$ ל $\alpha^{-1}\alpha(i_1)=i_1$ ואז ל i_2 ואז ל $\alpha(i_2)$. באותו אופן ל $\alpha(i_2)$ עד $\alpha(i_k)$. ואילו לאיבר j שאינו מצורה זו א"י לא עושה כלום ואילו א"ש קודם מעביר אותו ל $\alpha^{-1}(j)$ שאינו $i_1,..,i_k$ ולכן המחזור אינו עושה לו כלום ולבסוף α מחזיר אותו ל $\alpha\alpha^{-1}(j)=j$ כלומר גם כן לא עושה ל j כלום.

7. חשבו את הדטרמיננטה של $M_3\ni\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ ו $\mathbb{Z}_7$.
פתרון: מכיוון שערכי המטריצה שלמים נחשב את התוצאה ב $\mathbb{Z}$ ובסוף נחשב את השארית בחלוקה ב 2 או ב 7. נעשה את הפיתוח לפי שורה ראשונה:

$$\begin{aligned}1\begin{vmatrix}2&3\\4&9\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&3\\1&9\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}&=(18-12)-(9-3)+(4-2)\\&=6-6+2=2\end{aligned}$$

לכן מעל $\mathbb{R}$ $det=2$, מעל $\mathbb{Z}_2$ $det=0$ ומעל $\mathbb{Z}_7$ $det=2$.

8. יהא F שדה כלשהו ותהא $\alpha\in S_n$. נגדיר מטריצת פרמוטציה $A\in M_n(F)$ ע"י $Ae_i=e_{\alpha(i)}$ כאשר e_i ווקטור עמודה סטנדרטי שכל ערכיו הם 0 פרט למקום i שערכו 1. במילים אחרות בעמודה i של המטריצה מופיע הווקטור $e_{\alpha(i)}$. הוכיחו ש $det(A)=sign(\alpha)$.
פתרון: וודאו ש A מטריצת פרמוטציה אמ"מ A פועלת על $e_1,..,e_n$ כפרמוטציה על האנדקסים. לכן אם A מטריצת פרמוטציה של α ו B מטריצת פרמוטציה של B אז $A\cdot B$ מטריצת פרמוטציה של $\alpha\cdot\beta$. מכאן שניתן לפרק את A למכפלת מטריצות פרמוטציה של חילופים. מכיוון שדטרמיננטה היא כפלית מספיק להראות שהדטרמינטה של מטריצת פרמוטציה(=מ"פ) של חילוף היא -1. ובאמת אם A מ"פ של (i,j) אז ע"י החלפת עמודות i,j של A נקבל את מטריצת היחידה. כיוון שהדטרמיננטה של מטריצת היחידה היא 1 והחלפת שורות או עמודות משנה את סימן הדטרמיננטה קיבלנו מש"ל (שימו לב שגם ללא ידיעה שהדרמיננטה היא פונקציונל כפלי נקבל את המבוקש וזאת כיוון שהפרוק של α למכפלת חילופים משרה דרוג של המטריצה ע"י החלפות של עמודות ואנו כבר יודעים שהחלפת עמודות משנה את סימן הדטרמיננטה ולכן הדטרמיננטה שווה ל -1 בחזקת מספר ההחלפות עד קבלת מטריצת יחידה וזה שווה בדיוק ל -1 בחזקת מספר החילופים במכפלה הנ"ל וזה שווה לסימן α).

אלגברה לינארית 2

תרגיל 3

4 במרץ 2005

1) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}5&3&7&2\\2&4&0&4\\3&6&4&0\\1&5&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&4&7&0\\2&4&3&1\\0&6&0&2\\2&1&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&3i&1\\2-i&3&1\\-i&0&2i-1\end{pmatrix}$$

כאשר $A\in M_4(\mathbb{R})$, $B\in M_4(\mathbb{Z}_{11})$, $C\in M_3(\mathbb{C})$

2) המטריצה הבאה נקראת מטריצת ונדרמונדה $(Wandermonde)$. מצאו את הדטרמיננטה שלה:

$$\begin{pmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^{n-1}\\1&x_3&x_3^2&\cdots&x_3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

3) מצאו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix}a+b&a&a&\cdots&a\\a&a+b&a&\cdots&a\\a&a&a+b&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&a&\cdots&a+b\end{pmatrix}$$

4) מהי הדרגה של המטריצות הבאות:

א) $\begin{pmatrix}1&4&1&2\\2&3&1&0\end{pmatrix}$ ב) $\begin{pmatrix}1&0&4&1\\2&2&1&0\\5&3&2&1\end{pmatrix}$ ג) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

5) תהי A מטריצה $n\times n$. הראו כי אם n אי זוגי ו-A מטריצה אנטי סימטרית, כלומר $A=-A^t$, אז בשדה ממציין שונה מ- 2 מתקיים $|A|=0$.

6) ענו בקצרה נכון או לא נכון. אין צורך להוכיח משפטים שהוכחו בכיתה רק לציין אותם.
במקרה שהטענה לא נכונה תנו דוגמא נגדית:
א) $|A+B| = |A| + |B|$
ב) $|A \cdot B| = |A| \times |B|$
ג) אם A מטריצה $2n \times 2n$ ונניח כי $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ ארבע מטריצות $n \times n$ כך ש- $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ אז $|A| = |A_{11}|\,|A_{22}| - |A_{12}|\,|A_{21}|$
ד) למטריצות דומות אותה דטרמיננטה
ה) תהי A מטריצת בלוקים מסדר n מהצורה הבאה: (כאשר A_i מציינת מטריצה ריבועית מסדר n_i ו-$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

אז $|A| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$.

אלגברה לינארית 2

פתרון תרגיל 3

6 במרץ 2005

1. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}5&3&7&2\\2&4&0&4\\3&6&4&0\\1&5&1&0\end{pmatrix}$$

תשובה: נבצע כמה פעולות אלמנטריות על מנת לצמצם את החישובים. בצורה זו נשתדל להקטין את מספר הטעויות שלנו.

$$|A|=\begin{vmatrix}5&3&7&2\\2&4&0&4\\3&6&4&0\\1&5&1&0\end{vmatrix}=_{(1)}2\begin{vmatrix}5&3&7&1\\2&4&0&2\\3&6&4&0\\1&5&1&0\end{vmatrix}=_{(2)}2\begin{vmatrix}4&1&7&1\\0&0&0&2\\3&6&4&0\\1&5&1&0\end{vmatrix}$$

$$=_{(3)}4\begin{vmatrix}4&1&7\\3&6&4\\1&5&1\end{vmatrix}=_{(4)}4\begin{vmatrix}3&-19&0\\1&-9&0\\1&5&1\end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix}3&-19\\1&-9\end{vmatrix}=-4(19-27)=32$$

(1) - הוצאת 2 מהעמודה הרביעית

(2) - החסרת העמודה הרביעית מהראשונה והשניה

(3) - פיתוח לפי שורה שניה

(4) - החסרת השורה השלישית מהאחרות.

באותו האופן עבור $B=\begin{pmatrix}1&4&7&0\\2&4&3&1\\0&6&0&2\\2&1&0&1\end{pmatrix}$. נמצא את הדרטמיננטה של B מעל $\mathbb{Z}$ (השלמים) ובסוף נחשב את התוצאה מודולו 11.

התשובה הסופית $|A|=24(mod11)=2(mod11)$

עבור $C=\begin{pmatrix}0&3i&1\\2-i&3&1\\-i&0&2i-1\end{pmatrix}$ אין צורך להבהל מכך שהשדה הוא $\mathbb{C}$. דרך הפתרון זהה בכל שדה. נפתח לפי עמודה ראשונה:

$$|C|=-(2-i)\begin{vmatrix}3i&1\\0&2i-1\end{vmatrix}-i\begin{vmatrix}3i&1\\3&1\end{vmatrix}=(-2+i)(3i)(2i-1)-3i(i-1)$$

$$=15+3+3i=18+3i$$

2. מטריצת ונדרמונדה W, נסמן ב- W_n את מטריצת ונדרמונדה מסדר n:
עבור $n=1$: $|W_1|=1$.
נראה באינדוקציה כי עבור $n\geq 2$ מתקיים $|W_n|=\prod_{i<j}(x_j-x_i)$.
עבור $n=2$ מתקיים $x_2-x_1=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=|W_2|$, כלומר הטענה נכונה.
נניח נכונות עבור $n-1$, ונבדוק עבור n.

$$|W_n|=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & x_1-x_n & x_1^2-x_n^2 & \cdots & x_1^{n-1}-x_n^{n-1}\\ 0 & x_2-x_n & x_2^2-x_n^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_n^{n-1}\\ 0 & x_3-x_n & x_3^2-x_n^2 & \cdots & x_3^{n-1}-x_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}-x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

נשתמש בעובדה הבאה: $a^k-b^k=(a-b)(\sum_{j=0}^{k}a^jb^{k-j})$. לכן נוכל להוציא מכל שורה גורם משותף מהצורה x_j-x_n ונקבל:

$$=\prod_{j<n}(x_j-x_n)\begin{vmatrix}0 & 1 & x_1+x_n & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1}x_1^jx_n^{n-1-j}\\ 0 & 1 & x_2+x_n & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1}x_1^jx_n^{n-1-j}\\ 0 & 1 & x_3+x_n & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1}x_1^jx_n^{n-1-j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

נחסר מכל העמודות את העמודה השניה כפול x_n ונקבל

$$=\prod_{j<n}(x_j-x_n)\begin{vmatrix}0 & 1 & x_1 & x_1^2+x_1x_n\cdots & \sum_{j=0}^{n-2}x_1^jx_n^{n-1-j}\\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2+x_2x_n\cdots & \sum_{j=0}^{n-2}x_1^jx_n^{n-1-j}\\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2+x_3x_n\cdots & \sum_{j=0}^{n-2}x_1^jx_n^{n-1-j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & 0\cdots & 0\end{vmatrix}$$

נחסר מכל העמודות את העמודה השלישית כפול x_n ונקבל

$$= \prod_{j<n}(x_j - x_n)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & \sum_{j=0}^{n-3} x_1^j x_n^{n-1-j} \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 \cdots & \sum_{j=0}^{n-3} x_1^j x_n^{n-1-j} \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 \cdots & \sum_{j=0}^{n-3} x_1^j x_n^{n-1-j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

נמשיך באותו אופן עד שנקבל :

$$= \prod_{j<n}(x_j - x_n)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 \cdots & x_2^{n-1} \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix} = \prod_{j<n}(x_n - x_j) det(W_{n-1})$$

נפתח על פי העמודה הראשונה. העמודה הזו שווה ל-0 למעט האיבר ה-n-י. לכן:

$$|W_n| = (-1)^{n-1}\prod_{j<n}(x_j - x_n)\,|W_{n-1}| = \prod_{j<n}(x_n - x_j)\,|W_{n-1}|$$

וזה על פי הנחת האינדוקציה שווה ל-$\prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

3. נחסיר שורה ראשונה מכל האחרות:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

כעת נוסיף את כל העמודות לעמודה הראשונה:

$$= \begin{vmatrix} na+b & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1}$$

4. דרגת המטריצה נתונה על ידי המינור המירבי שלה בעל דטרמיננטה שונה מ-0. לכן:

א) $R\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

ב) $R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$

ג) $R\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2$

5. תהי A מטריצה $n \times n$, אנטי סימטרית, כלומר $A = -A^t$, נניח כי n אי זוגי , ומציין השדה שונה מ-2.
$|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|$.
מצד שני ידוע כי לכל מטריצה מתקיים $|A| = |A^t|$. לכן קיבלנו $|A| = -|A|$ או $2|A| = 0$.
אם מציין השדה שונה מ-2 נובע כי $2 \neq 0$ לכן 2 הפיך ולכן נובע כי $|A| = 0$.

6. א) $|A + B| = |A| + |B|$- לא נכון, לדוגמא, ניקח $A = B$ עבור ($n > 2$) אז:

$$|A + A| = |2A| = 2^n |A| \neq |A| + |A| = 2|A|$$

ב) $|A \cdot B| = |A| \times |B|$- נכון, כפי שראיתם בשיעור.
ג) אם A מטריצה $2n \times 2n$ ונניח כי $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ ארבע מטריצות $n \times n$ כך ש- $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ אז $|A| = |A_{11}||A_{22}| - |A_{12}||A_{21}|$ - לא נכון, ניקח לדוגמא את המטריצה הבאה - $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$|A_{11}| = |A_{12}| = |A_{21}| = |A_{22}| = 0$$

בעוד $|A| = -1$.

ד) למטריצות דומות אותה דטרמיננטה - נכון. נניח כי $A = PBP^{-1}$ אז

$$|A| = \left|PBP^{-1}\right| = |P|\,|B|\,\left|P^{-1}\right| = |P|\,\left|P^{-1}\right|\,|B| = \left|BPP^{-1}\right| = |B|$$

ה) תהי A מטריצת בלוקים מסדר n מהצורה הבאה: (כאשר A_i מציינת מטריצה

ריבועית מסדר n_i ו-n = $\sum_{i=1}^{k} n_i$)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

אז $|A| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$ - נכון. אם A אלכסונית הטענה ברורה. כל מטריצה ריבועית ניתנת לליכסון על ידי פעולות אלמנטריות. בגלל מבנה הבלוקים של המטריצה הנ"ל ביצוע פעולות אלמנטריות על השורות בהן נמצא הבלוק ה-i ישפיעו רק על בלוק זה. המסקנה היא שאם נבצע את אותן הפעולות האלמנטריות שביצענו על כל בלוק על המטריצה כולה נקבל מטריצה אלכסונית בעלת אותה הדטרמיננטה, שהיא מכפלת איברי האלכסון, וזה שווה למכפלת הדטרמיננטות של מטריצות הבלוקים.

תרגיל 4 בלינארית 2

1) השתמשו במטריצת ה $adjoint$ כדי לחשב את A^{-1} כאשר $A=\begin{pmatrix}13&7&12\\3&2&3\\6&3&6\end{pmatrix}$ (בדקו את תשובתכם!).

2) השתמשו בנוסחת קרמר כדי לפתור את המערכת $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&2\\2&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\13\\13\end{pmatrix}$.

3) תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית (V מרחב וקטורי כמובן) ויהיו $\lambda_1,....,\lambda_k$ כל ערכיה העצמיים השונים. נסמן $V_{\lambda_i}=\{v\in V\mid T(v)=\lambda_i v\}$. זהו המרחב העצמי של λ_i וראיתם כי זהו תת מרחב וקטורי. לכל i נסמן $d_i=\dim V_{\lambda_i}$. ויהיו $u_{i1},u_{i2},....,u_{id_i}$ בסיס של V_{λ_i}.

א. הוכיחו כי הקבוצה $\{u_{ij}\mid 1\le i\le k,1\le j\le d_i\}$ בת"ל. (רמז: הוכחתם כי ו"ע המתאימים לע"ע שונים הם בת"ל).

ב. הוכיחו כי T לכסינה (כלומר קיים בסיס כך שהמטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה מלוכסנת) אמ"ם $\sum_{i=1}^{k}d_i=\dim V$.

ג. הוכיחו כי אם T לכסינה אזי המטריצה המלוכסנת המייצגת אותה יחידה.

4) תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית הנתונה ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x+2y\\-4x-2y\end{pmatrix}$.

א. מצאו את הערכים העצמיים (ע"ע) של T.

ב. לכל ע"ע שמצאתם מצאו בסיס למרחב העצמי שלו.

ג. האם T לכסינה? נמקו את התשובה ואם היא חיובית עברו לסעיף הבא.

ד. תהי A המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי. מצאו מטריצות הפיכות P,P^{-1} כך ש $PAP^{-1}=B$ כאשר B המטריצה המלכסנת את T.

5) סעיפי שאלה 4 לגבי ההעתקה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ הנתונה ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\y\end{pmatrix}$.

6) סעיפי שאלה 4 לגבי ההעתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\2y-z\\-y+2z\end{pmatrix}$.

7) בצעו חלוקה עם שארית של הפולינום $x^5+3x^3+2x^2+1$ בפולינום x^3+1 מעל R.

8) מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את הממ"מ $d(x)$ של $a(x)=x^3-7x^2+15x-9$ ו $b(x)=x^5-1$ ואת הצגתו (כלומר מצאו פולינומים $p(x),q(x)$ כך ש $q(x)a(x)+p(x)b(x)=d(x)$.

פתרונות לתרגיל 4:

1) כזכור, מטריצת ה $adjoint$ היא מטריצה $B\in M_{n\times n}$ המוגדרת ע"י $b_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ji}|$ וראינו כי $A^{-1}=\frac{B}{|A|}$. נחשב את מטריצת ה $adjoint$ במקרה המרתק שלפנינו: ובכן

$$b_{11}=\det\begin{pmatrix}2&3\\3&6\end{pmatrix}=3, b_{12}=-\det\begin{pmatrix}7&12\\3&6\end{pmatrix}=-6, b_{13}=\det\begin{pmatrix}7&12\\2&3\end{pmatrix}=-3$$

$$,b_{21}=-\det\begin{pmatrix}3&3\\6&6\end{pmatrix}=0, b_{22}=\det\begin{pmatrix}13&12\\6&6\end{pmatrix}=6, b_{23}=-\det\begin{pmatrix}13&12\\3&3\end{pmatrix}=-3$$

$b_{31}=\det\begin{pmatrix}3&2\\6&3\end{pmatrix}=-3, b_{32}=-\det\begin{pmatrix}13&7\\6&3\end{pmatrix}=3, b_{33}=\det\begin{pmatrix}13&7\\3&2\end{pmatrix}=5$ בנוסף $|A|=3$.

לכן $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-6&-3\\0&6&-3\\-3&3&5\end{pmatrix}$ עכשיו בואו ונבדוק את תשובתינו (סתם...).

2) ובכן לפי נוסחת קרמר כדי לחשב את הנעלם ה k יש להציב את וקטור התשובה במקום העמודה ה k במטריצה A ולחשב את הדטרמיננטה, את התשובה יש לחלק ב $|A|$. לכן

$$|A|=-4\Rightarrow x=\frac{1}{-4}\det\begin{pmatrix}6&1&1\\13&3&2\\13&4&1\end{pmatrix}=1, y=\frac{1}{-4}\det\begin{pmatrix}1&6&1\\1&13&2\\2&13&1\end{pmatrix}=2, z=\frac{1}{-4}\det\begin{pmatrix}1&1&6\\1&3&13\\2&4&13\end{pmatrix}=3$$

3)א. נניח $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d_i}a_{ij}u_{ij}=0$. נסמן $v_i=\sum_{j=1}^{d_i}a_{ij}u_{ij}$, שימו לב כי v_i ו"ע של λ_i (מרחב עצמי הוא מרחב וקטורי) או $v_i=0$. נניח בשלילה יש $v_j\neq 0$. מהמשוואה למעלה קיבלנו כי $\sum_{i=1}^{k}v_i=0$ אך זהו צ"ל של ו"ע של ע"ע שונים והוכחתם שאלו בת"ל. לכן בהכרח $v_i=0$ לכל i. אבל $v_i=\sum_{j=1}^{d_i}a_{ij}u_{ij}$ ומאחר וזה צ"ל של וקטורים בת"ל מיידי כי $a_{ij}=0$ לכל j. זה נכון לכל i ולכן סיימנו.

ב. נסמן $\dim V=n$. נניח T לכסינה ותהי $B=\begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_n\end{pmatrix}$ המטריצה המלכסנת אותה לפי בסיס $v_1,...,v_n$. שימו לב כי כל a_i הינו ע"ע של T כי $T(v_i)=B\cdot e_i=a_ie_i=a_iv_i$ (e_i הוא הייצוג של v_i לפי הבסיס הנתון). לכן $a_i\in\{\lambda_1,...,\lambda_k\}$ וגם ברור כל $v_1,...,v_n$ הם ו"ע של ע"ע מתאים. נסמן l_i להיות מס הו"ע של λ_i מתוך $v_1,...,v_n$. ברור $l_i\le d_i$ כי זו קבוצה של ו"ע בת"ל של λ_i. מצד שני $n=\sum_{i=1}^{k}l_i\le\sum_{i=1}^{k}d_i$ ולכן $l_i=d_i\ \forall i$ (לא ייתכן $n<\sum_{i=1}^{k}d_i$ בגלל סעיף א) ובזאת סיימנו הוכחת הכיוון הראשון.

כיוון שני: נניח $n=\sum_{i=1}^{k} d_i$ אז יחד עם סעיף א נובע כי הקבוצה $\{u_{ij} \mid 1\le i\le k, 1\le j\le d_i\}$ היא בסיס של V וברור כי המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה היא אלכסונית.

ג. תיקון: המטריצה המלוכסנת יחידה עד כדי שינוי סדר האיברים באלכסון. הוכחה: פשוט מספר הפעמים ש λ_i מופיע באלכסון הוא d_i.

5) תהי $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי. נמצא את הע"ע: נחשב קודם את הפולינום האופייני: $f_A(x)=\det\begin{pmatrix}x-1&-2\\0&x-1\end{pmatrix}=(x-1)^2$ ויש לו שורש יחיד והוא 1. נמצא בסיס ל V_1 (מ"ע של 1): בעצם אנו צריכים למצוא בסיס לגרעין של $I-A=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}$. מימד השורות הוא 1 ולכן מימד הגרעין הוא $2-1=1$. ניקח את $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ בתור בסיס. אין יותר ע"ע, ברור כי המטריצה אינה לכסינה (אין איך להשיג 2 ו"ע בת"ל).

6) תהי $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי. נמצא את הע"ע: נחשב קודם את הפולינום האופייני:

$$f_A(x)=\det\begin{pmatrix}x-3&0&0\\0&x-2&1\\0&1&x-2\end{pmatrix}=(x-3)(x^2-4x+3)=(x-3)(x-1)(x-3)$$

שורשיו הם מן הסתם 1,3 ולכן אלו הע"ע.

נמצא בסיס ל V_3 (המ"ע של 3): פשוט צריך למצוא בסיס לגרעין של $3I-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. מכיוון שמימד השורות הוא 1 נובע כי מימד הגרעין (ולכן גם מימד V_3) הוא 2 וניקח למשל $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ בתור בסיס. באותו אופן נמצא כי לע"ע 1 מימד המ"ע שלו הוא 1 ושם ניקח את $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ בתור בסיס.

T לכסינה כי סכום המימדים הוא 2+1=3 ולפי 3ב T לכסינה. אז $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ מטריצה המלכסנת את

T לפי הבסיס $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. אם אנו רוצים למצוא את המטריצות P,P^{-1} כך ש $PAP^{-1}=B$ אזי P^{-1}

צריכה להיות המטריצה שמעבירה מייצוג לפי הבסיס הנ"ל לבסיס הסטנדרטי וזו פשות המטריצה עם וקטורי

הבסיס "המיוחד" בעמודות: $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. את P ניתן עתה לחשב כהופכית של P^{-1}.

אלגברה לינארית 2
<u>תרגיל בית מספר 5</u>

<u>תרגיל (1)</u>:
נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. הוכח כי A לכסינה.
2. מצא מטריצה המלכסנת את A ומטריצה אלכסונית הדומה ל- A.
3. חשב את A^{100} על-ידי שימוש בסעיף הקודם.

<u>הדרכה ל-1.</u>: הוכח כי $\lambda = 0, n$ הם הערכים העצמיים היחידים של A.

<u>תרגיל (2)</u>: תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר טרנספורמציה לינארית

$$T : M_n^{\mathbb{F}} \to M_n^{\mathbb{F}}$$
$$T(X) = AX$$

($M_n^{\mathbb{F}}$ מציין את המרחב הוקטורי של המטריצות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$)
הוכח כי כל ערך עצמי של A הוא גם ערך עצמי של T.
<u>הדרכה:</u> השתמש בוקטור עצמי v המתאים לערך עצמי λ של A, כדי לבנות מטריצה X שהיא וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ של T. השתמש בתכונות כפל מטריצות.

<u>תרגיל (3)</u>:
1. הוכח כי סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של מטריצה מסדר $n \times n$ קטן או שווה ל- n.
2. הוכח כי במקרה וסכום הריבויים האלגבריים שווה ל- n הפולינום האופיני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

<u>תרגיל (4)</u>:
ידוע כי לשתי מטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני.
1. האם הטענה ההפוכה נכונה לשתי מטריצות כלליות?
2. האם הטענה ההפוכה נכונה לשתי מטריצות לכסינות?

<u>תרגיל (5)</u>:
נתונות שתי מטריצות ריבועיות A, B מסדר $n \times n$.
נתון כי $AB = BA$ (A, B מתחלפות בכפל), וכי ל- A יש n ערכים עצמיים שונים.
הוכח כי במקרה זה גם B לכסינה, ויש ל A ול- B אותה מטריצה מלכסנת.
<u>הדרכה</u>: הראה כי לכל וקטור עצמי של A מתקיים $A(Bv) = \lambda(Bv)$ הסק מכאן כי Bv הוא וקטור עצמי של A.

<u>תרגיל (6)</u>: תהא A לכסינה מסדר $n \times n$ עם פולינום אופיני $p(t)$. תן הוכחה לכך ש- $p(A) = 0$ שאינה עושה שימוש במשפט קיילי-המילטון.

אלגברה לינארית 2
פתרון תרגיל בית מספר 5

תרגיל (1):
נתונה המטריצה מסדר $n\times n$

$$A=\begin{pmatrix}1&\cdots&\cdots&1\\ \vdots&&&\vdots\\ \vdots&&&\vdots\\ 1&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}$$

1. הוכח כי A לכסינה.
2. מצא מטריצה המלכסנת את A ומטריצה אלכסונית הדומה ל- A.
3. חשב את A^{100} על-ידי שימוש בסעיף הקודם.

הדרכה ל-1.: הוכח כי $\lambda=0,n$ הם הערכים העצמיים היחידים של A.

פתרון:

1. נשתמש בהדרכה ונוכיח כי $\lambda=0,n$ הם שני הערכים העצמיים היחידים של A.

$\lambda=0$ הינו ערך עצמי משום ש- $\det(0I-A)=\det(-A)=0$, כלומר, $\lambda=0$ הוא שורש של הפולינום האופייני של A.

$\lambda=n$ הינו ערך עצמי משום ש-

$$\begin{aligned}\det(nI-A) &= \det\left(\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\0&n&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&n&0\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&\cdots&\cdots&1\\ \vdots&&&\vdots\\ \vdots&&&\vdots\\1&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}\right)\\
&= \det\left(\begin{pmatrix}n-1&-1&\cdots&-1\\-1&n-1&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&n-1&-1\\-1&\cdots&-1&n-1\end{pmatrix}\right)\\
R_1\to R_1+\sum_{i=2}^{n}R_i \quad &= \det\left(\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\-1&n-1&-1&-1\\ \vdots&\ddots&n-1&-1\\-1&\cdots&-1&n-1\end{pmatrix}\right)\\
&= 0\end{aligned}$$

כלומר, $\lambda=n$ הוא שורש של הפולינום האופייני של A.

ממדי המרחבים העצמיים של הערכים העצמיים שווים לממדי מרחבי הפתרונות של המטריצות $\lambda I-A$, ולכן מקיימים

$$\dim V_{\lambda=0}=n-rank(A)=n-1$$

$$\dim V_{\lambda=n}\geq 1$$

מכאן ש- $\dim V_{\lambda=0}+\dim V_{\lambda=n}\geq n$.

אולם תמיד מתקיים כי $\dim V_{\lambda=0}+\dim V_{\lambda=n}\leq n$.

לכן בהכרח $\dim V_{\lambda=0}+\dim V_{\lambda=n}=n$.

מכאן נובע כי $\lambda=0,n$ הם הערכים העצמיים היחידים של A ו-A לכסינה.

2. המטריצה המלכסנת את A היא מטריצת המעבר מן הבסיס המורכב מן הוקטורים העצמיים של A לבסיס הסטנדרטי. נמצא בסיס של וקטורים עצמיים של A.

לשם כך נמצא את המרחבים העצמיים של הערכים העצמיים של A.

עבור $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} V_{\lambda=0} &= \{v \mid Av = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1 + \ldots + x_n = 0 \right\} \\ &= span\left\{ (1,0,0,\ldots,0,-1)^t, (0,1,0,\ldots,0,-1)^t, \ldots, (0,0,0,\ldots,1,-1)^t \right\} \end{aligned}$$

עבור $\lambda = n$:

$$\begin{aligned} V_{\lambda=n} &= \{v \mid Av = nv\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} (1-n)x_1 + x_2 + \ldots + x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + (1-n)x_n & = & 0 \end{matrix} \right\} \\ &= span\left\{ (1,\ldots,1)^t \right\} \end{aligned}$$

בסיס של וקטורים עצמיים של A נתון על-ידי

$$span\left\{ (1,0,0,\ldots,0,-1)^t, (0,1,0,\ldots,0,-1)^t, \ldots, (0,0,0,\ldots,1,-1)^t, (1,\ldots,1)^t \right\}$$

אם P, המטריצה המלכסנת, היא מטריצת המעבר מן הבסיס המורכב מן הוקטורים העצמיים של A לבסיס הסטנדרטי אזי

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

והמטריצה האלכסונית נתונה על-ידי

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

3. מתקיים $A=P^{-1}DP$.

באמצעות הסעיף הקודם נוכל לחשב

$$A^{100}=(P^{-1}DP)^{100}=P^{-1}D^{100}P$$

נחשב את $P^{-1}D^{100}P$

$$\begin{aligned}
P^{-1}D^{100}P &= P^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&n\end{pmatrix}^{100}P\\
&= P^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&n^{100}\end{pmatrix}P\\
&= P^{-1}\left(n^{99}I\right)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&n\end{pmatrix}P\\
&= \left(n^{99}I\right)P^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&n\end{pmatrix}P\\
&= \left(n^{99}I\right)P^{-1}DP\\
&= \left(n^{99}I\right)A\\
&= n^{99}A
\end{aligned}$$

וקיבלנו כי $A^{100}=n^{99}A$, ובאופן כללי מתקיים $A^n=n^{n-1}A$.

<u>תרגיל (2)</u>: תהי A מטריצה מסדר $n\times n$ מעל שדה F. נגדיר טרנספורמציה לינארית

$$T: M_n^{\mathrm{F}} \to M_n^{\mathrm{F}}$$
$$T(X) = AX$$

(M_n^{F} מציין את המרחב הוקטורי של המטריצות מסדר $n\times n$ מעל F)

הוכח כי כל ערך עצמי של A הוא גם ערך עצמי של T.

<u>הדרכה:</u> השתמש בוקטור עצמי v המתאים לערך עצמי λ של A, כדי לבנות מטריצה X שהיא וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ של T. השתמש בתכונות כפל מטריצות.

<u>פתרון</u>: יהא λ ערך עצמי של A, ויהא $v\in \mathrm{F}^n$ וקטור עצמי המתאים לו.

נגדיר מטריצה X_λ להיות

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ v & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, X_λ היא מטריצה שעמודתה הראשונה שווה v וכל יתר העמודות – אפסים.

נשים לב כי $X_\lambda \neq 0$ משום ש-$v\neq 0$ (מעצם היותו וקטור עצמי).

נחשב את $T(X_\lambda)$

$$\begin{aligned} T(X_\lambda) &= AX_\lambda \\ &= A\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ v & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ Av & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ \lambda v & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ v & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda X_\lambda \end{aligned}$$

מכאן ש-X_λ היא וקטור עצמי T המתאים לערך העצמי λ.

חשוב לשים לב לכך ש-A **אינה** המטריצה המיצגת של הטרנספורמציה T (בבסיס הסטנדרטי או בכל בסיס אחר), ואי אפשר להשתמש בעובדה זו לצורך פתרון התרגיל.

__תרגיל (3):__

1. הוכח כי סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של מטריצה מסדר $n\times n$ קטן או שווה ל- n.
2. הוכח כי במקרה וסכום הריבויים האלגבריים שווה ל- n הפולינום האופיני של A מתפרק לגורמים לינאריים.

__פתרון:__

1. נסמן ב- $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ את השורשים השונים של הפולינום האופייני של A, $p(t)$, מעל השדה הנתון. ראינו בתרגול כי

$$\forall i \quad (t-\lambda_i)\big| p(t)$$

נסמן ב- r_i את החזקה המקסימלית (החיובית) כך ש-

$$(t-\lambda_i)^{r_i}\big| p(t)$$

משום ש- λ_i שונים מתקיים כי

$$(t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\cdots(t-\lambda_k)^{r_k}\big| p(t)$$

לכן נוכל לרשום

$$p(t)=(t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\cdots(t-\lambda_k)^{r_k}q(t)$$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ הם הערכים העצמיים של A, ו- $r_1,r_2,\ldots,r_k$ הם על-פי ההגדרה הריבויים האלגבריים המתאימים. $q(t)$ הוא פולינום שאין לו שורשים מעל השדה.

$p(t)$ הוא פולינום ממעלה n ולכן

$$n=r_1+r_2+\ldots+r_k+\deg(q)$$

ובפרט

$$r_1+r_2+\ldots+r_k\le n$$

והוכחנו את מה שרצינו.

2. מן הדיון בסעיף הקודם אנו לומדים כי שיוויון באי-השיוויון האחרון מחייב כי $\deg(q)=0$.

משום שהפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן (פולינום שהמקדם של החזקה הגבוהה שלו שווה 1), אנו יכולים לקבוע כי למעשה $q(t)\equiv 1$.

מכאן נקבל ש-

$$p(t)=(t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\cdots(t-\lambda_k)^{r_k}$$

והפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים כפי שרצינו להוכיח.

תרגיל (4):

ידוע כי לשתי מטריצות דומות יש אותו פולינום אופיני.

1. האם הטענה ההפוכה נכונה לשתי מטריצות כלליות?
2. האם הטענה ההפוכה נכונה לשתי מטריצות לכסינות?

פתרון:

1. הטענה ההפוכה אינה נכונה לשתי מטריצות כלליות.

דוגמא נגדית: נקח שתי מטריצות

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני של שתיהן שווה ל- $(t-1)^2$.

המטריצה A לכסינה (כל מטריצה אלכסונית היא בפרט לכסינה).

המטריצה B אינה לכסינה (ממד המרחב העצמי של הערך העצמי היחיד $\lambda=1$ שווה 1).

מכאן ששתי המטריצות הללו אינן דומות.

2. הטענה ההפוכה נכונה לשתי מטריצות לכסינות.

הוכחה: תהינה B,A שתי מטריצות לכסינות עם אותו פולינום אופייני. אזי יש להן אותם ערכים עצמיים ואותם ריבויים אלגבריים בהתאמה. מכאן שלשתיהן מתאימה אותה מטריצה אלכסונית D.

למטריצה A מתאימה מטריצה מלכסנת P כך ש- $D=PAP^{-1}$.

למטריצהB מתאימה מטריצה מלכסנת Q כך ש- $D=QBQ^{-1}$.

נוכל כעת לרשום

$$PAP^{-1}=QBQ^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad A=\left(P^{-1}Q\right)B\left(P^{-1}Q\right)^{-1}$$

ולכן המטריצות דומות.

תרגיל (5):

נתונות שתי מטריצות ריבועיות A, B מסדר $n\times n$.

נתון כי $AB=BA$ (A, B מתחלפות בכפל), וכי ל- A יש n ערכים עצמיים שונים.

הוכח כי במקרה זה גם B לכסינה, ויש ל A ול- B אותה מטריצה מלכסנת.

הדרכה: הראה כי לכל וקטור עצמי של A מתקיים $A(Bv)=\lambda(Bv)$ הסק מכאן כי Bv הוא וקטור במרחב העצמי של A.

פתרון: יהא v_i וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ_i של A.

מן הנתון מתקיים כי

$$ABv_i = BAv_i = B\lambda_i v_i = \lambda_i Bv_i$$

נתיחס לשני מקרים נפרדים:

מקרה ראשון - $Bv_i \neq 0$

מקרה שני - $Bv_i = 0$

במקרה הראשון נסיק כי Bv_i הוא וקטור עצמי של A המתאים גם כן לערך העצמי λ_i.

במקרה השני נסיק כי v_i הוא וקטור עצמי המתאים לערך עצמי אפס של B.

בשני המקרים נוכל לרשום כי בוודאות $Bv_i \in V_{\lambda_i}$.

נתון כי ל-A יש n ערכים עצמיים שונים, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, עם ריבויים אלגבריים $r_1, r_2, \ldots, r_k$ בהתאמה.

כפי שכבר ציינו הריבוי האלגברי גדול או שווה לריבוי הגיאומטרי ולכן

$$\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_n} \leq r_1 + \ldots + r_n \leq n$$

אולם λ_i הם ערכים עצמיים ולכן בהכרח

$$\forall i \quad \dim V_{\lambda_i} \geq 1$$

ומכאן ש-

$$\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_n} \geq n$$

לכן נקבל כי

$$\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_n} = n$$

וגם

$$\forall i \quad \dim V_{\lambda_i} = 1$$

$\{v_i, Bv_i\}$ הם וקטורים ב- V_{λ_i} (מרחב ממימד 1), ולכן $\{v_i, Bv_i\}$ תלויים לינארית.

לכן נקבל כי $Bv_i = \alpha_i v_i$ עבור סקלרים α_i כלשהם (כאשר אנו משתמשים בעובדה כי $v_i \neq 0$).

לכן $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ הוא גם בסיס של וקטורים עצמיים של B.

לכן B לכסינה, ויש לה אותה מטריצה מלכסנת.

תרגיל (6): תהא A לכסינה מסדר $n\times n$ עם פולינום אופיני $p(t)$. תן הוכחה לכך ש- $p(A)=0$ שאינה עושה שימוש במשפט קיילי-המילטון.

פתרון: תהא A לכסינה עם מטריצה מלכסנת P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $A=P^{-1}DP$.

הפולינום האופייני של A נתון על-ידי $p(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$.

נחשב את $p(A)$

$$\begin{aligned} p(A) &= A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I \\ &= \left(P^{-1}DP\right)^n+a_{n-1}\left(P^{-1}DP\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(P^{-1}DP\right)+a_0I \\ &= P^{-1}D^nP+a_{n-1}P^{-1}D^{n-1}P+\ldots+a_1P^{-1}DP+a_0I \\ &= P^{-1}\left(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1D+a_0I\right)P \end{aligned}$$

המטריצה האלכסונית D נתונה על-ידי

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

והחזקות שלה נתונות על-ידי

$$D^k=\begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

נציב אותן בפולינום

$$\begin{aligned} p(A) &= P^{-1}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix}+a_{n-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}+\ldots+a_1\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}+a_0I\right)P \\ &= P^{-1}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^n+a_{n-1}\lambda_1^{n-1}+\ldots+a_1\lambda_1+a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n+a_{n-1}\lambda_2^{n-1}+\ldots+a_1\lambda_2+a_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^n+a_{n-1}\lambda_n^{n-1}+\ldots+a_1\lambda_n+a_0 \end{pmatrix}\right)P \\ &= P^{-1}\left(\begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p(\lambda_n) \end{pmatrix}\right)P \\ &= P^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)P \\ &= 0 \end{aligned}$$

וקיבלנו כי $p(A)=0$ כפי שרצינו להוכיח.

<u>אלגברה ליניארית (2) - תרגיל 6</u>

<u>שאלה 1</u>:

תהי A מטריצה הפיכה מסדר n. השתמשו במשפט קיילי-המילטון על-מנת להוכיח ש- A^{-1} שווה לפולינום ב-A שמעלתו קטנה או שווה ל- (n-1).

<u>שאלה 2</u>:

תהא A מטריצה ריבועית מסדר n. נניח שקיים k טבעי כך ש- $A^k=0$. הוכיחו כי: $A^n=0$.

(הדרכה: מצאו את הפולינום המינימלי ש-A מקיימת).

<u>שאלה 3</u>:

יהי $T:R^2 \to R^2$ אופרטור הסיבוב במישור בזוית θ, המיוצג ע"י מטריצת הסיבוב:

$$A=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

א. הראו כי למטריצת הסיבוב A אין ערכים עצמיים ממשיים מלבד במקרה ש- $\theta=\pi k$ (k שלם). מהם המרחבים העצמיים במקרה זה?

ב. הוכיחו כי המטריצה A לכסינה מעל המספרים המרוכבים. מצאו את המטריצה האלכסונית D הדומה ל-A, ומטריצה מלכסנת P המקיימת $P^{-1}AP=D$.

<u>שאלה 4</u>: נתונות שתי המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של A ושל B.

ב. לכל-אחת מהמטריצות A ו-B מצאו את הערכים העצמיים, את המרחבים העצמיים המתאימים להם, את הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי, וקבעו האם היא לכסינה.

ג. האם A ו-B דומות? הוכיחו טענתכם. (הדרכה: התבוננו במטריצות A-I ו- B-I).

<u>שאלה 5</u>:

תהא A מטריצת בלוקים אלכסונית, המורכבת מ-k בלוקים, כלומר: $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$.

א. הוכיחו כי אם P(t) פולינום, אז: $P(A)=\begin{pmatrix} P(A_1) & & & 0 \\ & P(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P(A_k) \end{pmatrix}$,

כלומר חישוב פולינום ב-A ניתן לבצע על כל בלוק לחוד.

ב. הוכיחו כי הפולינום האופייני של A שווה למכפלת הפולינומים האופייניים של $A_1,\ldots,A_k$. כלומר: $P_A(t)=P_1(t)P_2(t)\ldots P_k(t)$, כאשר P_A הפולינום האופייני של A, ו-P_i הפולינום האופייני של A_i.

ג. יהי $m_i(t)$ הפולינום המינימלי של A_i. הוכיחו כי הפולינום המינימלי $m_A(t)$ של A הוא הפולינום מהמעלה הנמוכה ביותר המתחלק ב- $m_i(t)$ לכל i. כלומר: $m_A(t)$ הוא המכפלה המשותפת הקטנה ביותר של $m_1(t),\ldots,m_k(t)$.

(היעזרו בתרגיל 3, שאלה 6, סעיף ה').

<u>שאלה 6:</u>

א. חשבו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה מסדר n:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix} \quad , \quad a_{i,i}=\lambda, a_{i,i+1}=1, a_{i,j}=0 \ \ (j\neq i,i+1)$$

הערה: מטריצה כנ"ל נקראת **בלוק ז'ורדן**.

ב. באמצעות שאלה 5 חשבו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של מטריצת בלוקים אלכסונית שהבלוק ה-r שלה (מסדר n_r) הוא:

$$A_r=\begin{pmatrix}\lambda_r & 1 & & 0\\ & \lambda_r & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_r\end{pmatrix} \quad , \quad a_{i,i}=\lambda_r, a_{i,i+1}=1, a_{i,j}=0 \ \ (j\neq i,i+1)$$

שימו לב שה- λ_r-ים אינם בהכרח שונים זה מזה!

הערה: מטריצה כנ"ל נקראת **מטריצה בצורת ז'ורדן**.

אלגברה ליניארית (2) – פתרון לתרגיל 6

שאלה 1:

תהי A מטריצה הפיכה מסדר n, ויהי $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ הפולינום האופייני של A. לפי משפט קיילי-המילטון:

$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$

משום ש-A הפיכה, $a_0=(-1)^n\det(A)\neq 0$, לכן ניתן לחלק בו ולקבל:

$A\left((-1/a_0)A^{n-1} + (-a_{n-1}/a_0)A^{n-2} + \dots + (-a_1/a_0)I\right) = I$

ולכן בסוגריים רשומה המטריצה A^{-1}, כלומר: $A^{-1} = (-1/a_0)A^{n-1} + (-a_{n-1}/a_0)A^{n-2} + \dots + (-a_1/a_0)I$.

שאלה 2:

תהא A מטריצה ריבועית מסדר n. נניח שקיים k טבעי כך ש- $A^k=0$. צ"ל: $A^n=0$.

אם $k\le n$ אז הטענה ברורה. לכן נניח ש- $k>n$.

לפי הנתון, A מאפסת את הפולינום $q(t)=t^k$, ולכן הפולינום המינימלי של A מחלק את q(t). מכאן שהפולינום המינימלי הוא $m(t)=t^j$ לאיזה $j=0,\dots,n$, כיוון שמעלת הפולינום המינימלי קטנה או שווה לסדר המטריצה. A מאפסת את הפולינום המינימלי שלה, לכן $A^j=0$, ולכן $A^n = A^jA^{n-j} = 0$.

שאלה 3:

יהי $T:R^2 \rightarrow R^2$ אופרטור הסיבוב במישור בזוית θ, המיוצג ע"י מטריצת הסיבוב:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

א. הפולינום האופייני: $\det(tI - A) = \begin{pmatrix} t-\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & t-\cos(\theta) \end{pmatrix} = t^2 - 2\cos(\theta) + 1$. הדיסקרימיננטה שלו שווה ל- $4\cos^2(\theta)-4 = -4\sin^2(\theta) \le 0$. לכן ל-A יש ע"ע ממשיים רק כאשר $\sin(\theta)=0$, כלומר: $\theta=\pi k$ (k שלם).

במקרה זה, $A = I$ או $A = -I$. כאשר $A=I$, הע"ע היחיד של A הוא $\lambda=1$, והוא מתאים למרחב העצמי R^2. כאשר $A=-I$, הע"ע היחיד של A הוא $\lambda=-1$, והוא שוב מתאים למרחב העצמי R^2.

ב. מעל למרוכבים, לפולינום האופייני יש 2 שורשים שונים: $\lambda_{1,2}=\cos(\theta)\pm i\sin(\theta) = e^{\pm i\theta}$. לכן: $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. לערך העצמי $e^{i\theta}$ מתאים הוקטור העצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, ולערך העצמי $e^{-i\theta}$ מתאים הוקטור העצמי $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, אלו הם וקטורים בת"ל (כי הם מתאימים לע"ע שונים), לכן: $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. וניתן לוודא כי אכן:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = D$$

<u>שאלה 4</u>: נתונות שתי המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

	A	B
פולינום אופייני	$(t-1)^4$	$(t-1)^4$
פולינום מינימלי	$(t-1)^2$	$(t-1)^2$
ערכים עצמיים	1	1
מרחב עצמי (של הע״ע 1)	מרחב הפתרונות של: $I-A=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ כלומר: $Sp\{(1,0,0,0)^t, (0,0,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$	מרחב הפתרונות של: $I-B=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ כלומר: $Sp\{(1,0,0,0)^t, (0,0,1,0)^t\}$
ריבוי אלגברי (של הע״ע 1)	4	4
ריבוי גיאומטרי (של הע״ע 1)	3	2
לכסינות	A לא לכסינה	B לא לכסינה

נוכיח כי A ו-B אינן דומות. נניח בשלילה כי יש מטריצה P כך ש- $B=PAP^{-1}$, אז גם:

$P(A-I)P^{-1} = PAP^{-1} - PIP^{-1} = B-I$

כלומר, גם A-I ו- B-I דומות. אך rank(A-I)=1 בעוד rank(B-I)=2, לכן אינן יכולות להיות דומות, ולכן גם A ו-B אינן דומות.

<u>שאלה 5</u>:

תהא A מטריצת בלוקים אלכסונית, המורכבת מ-k בלוקים, כלומר: $A=\begin{pmatrix}A_1&&&0\\&A_2&&\\&&\ddots&\\0&&&A_k\end{pmatrix}$.

א. צ״ל כי אם P(t) פולינום, אז: $P(A)=\begin{pmatrix}P(A_1)&&&0\\&P(A_2)&&\\&&\ddots&\\0&&&P(A_k)\end{pmatrix}$.

ראשית, נבחין כי אם A ו-B שתי מטריצות בלוקים, עם בלוקים שווי-גודל, אז:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & 0 \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_kB_k \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & 0 \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k+B_k \end{pmatrix}$$

לכן: אם $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, אז:

$$P(A) = a_n\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}^n + a_{n-1}\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}^{n-1} + \cdots + a_1\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix} + a_0I =$$

$$= a_n\begin{pmatrix} {A_1}^n & & & 0 \\ & {A_2}^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {A_k}^n \end{pmatrix} + a_{n-1}\begin{pmatrix} {A_1}^{n-1} & & & 0 \\ & {A_2}^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {A_k}^{n-1} \end{pmatrix} + \cdots + a_1\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix} + a_0I =$$

$$= \begin{pmatrix} P(A_1) & & & 0 \\ & P(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P(A_k) \end{pmatrix}$$

ב. נחשב את הפולינום האופייני של A, לפי סעיף א' ולפי תרגיל 3, שאלה 6-ה':

$$P_A(t) = \det(tI - A) = \det\begin{pmatrix} tI-A_1 & & & 0 \\ & tI-A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & tI-A_k \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k}\det(tI - A_i) = \prod_{i=1}^{k}P_i(t)$$

ג. יהי Q(t) פולינום כלשהו. לפי סעיף א': $Q(A) = \begin{pmatrix} Q(A_1) & & & 0 \\ & Q(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q(A_k) \end{pmatrix}$. לכן Q(A)=0

אס"ם $Q(A_i)=0$ לכל $i=1,..,k$. מכאן נובע, שהפולינום Q(t) מתחלק בפולינום המינימלי $m_i(t)$ של A_i, ולכן Q(t) מתחלק גם בכפולה המשותפת המינימלית של $m_1(t),\dots,m_k(t)$. לכן, הפולינום המתוקן מן המעלה הנמוכה ביותר המתחלק ב- $m_i(t)$ לכל $i=1,\dots,k$ הוא הכפולה המשותפת המינימלית של $m_1(t),\dots,m_k(t)$, וזהו הפולינום המינימלי של A.

<u>שאלה 6:</u>

א. הפולינום האופייני: $(t-\lambda)^n$, הפולינום המינימלי: $(t-\lambda)^n$.

ב. הפולינום האופייני: $(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\ldots(t-\lambda_k)^{n_k}$.

נסמן ב- $\mu_1,\ldots,\mu_s$ את הערכים העצמיים <u>השונים</u>, ונגדיר לכל $i=1,..,s$: $N_i = \max\{n_j: \lambda_j=\mu_i\}$,
אז הפולינום המינימלי הוא $(t-\mu_1)^{N_1}(t-\mu_2)^{N_2}\ldots(t-\mu_s)^{N_s}$.

הערה: בהמשך הקורס תלמדו שכל מטריצה דומה למטריצה בצורת ז'ורדן ושצורה זו יחידה (עד כדי סדר הבלוקים). לכן, שאלה זו נותנת לכם למעשה אלגוריתם יעיל לחישוב הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של כל מטריצה שהיא.

אלגברה לינארית 2 - תרגיל 7 (לא להגשה)

הערה חשובה: ב - 10-11/4 בזמן התרגול יערך הבוחן הראשון. הבוחן ימשך כ – 45 דקות ויהיה על החומר שהוצג בהרצאות, בתירגולים ובתרגילים בנושא הפולינום האופייני של מטריצה ושל ט"ל, ו"ע, ע"ע, מרחבים עצמיים, הפולינום המינימלי של מטריצה ושל ט"ל, משפט קיילי המילטון ושימושים שלו.

1. נתבונן ב- $\mathbb{R}[t]$ אוסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים המהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר העתקה $(\ ,\ ):\mathbb{R}[t]\times\mathbb{R}[t]\to\mathbb{R}$ ע"י: $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)=\sum_{l=1}^{N}a_lb_l$ (כאשר $N=\max(m,n)$ ו- $a_i=0$ עבור $i>n$ ו- $b_j=0$ עבור $j>n$. הוכחו כי $(\ ,\ )$ מהווה מכפלה סקלארית.

מתי נאמר שזוג פולינומים ניצב אחד לשני? הביאו דוגמא לפולינום הניצב ל- $p(x)=1+x^2+x^3$.

2. נתון מרחב מכפלה פנימית V יחד עם מ"פ $(\ ,\ )$. עבור $v\in V$ נתון (קבוע), נגדיר העתקות $f_v:V\to V$ ו- $g_v:V\to V$ ע"י $f_v(w)=(w,v)$ ו- $g_v(w)=\overline{(v,w)}$. הוכיחו כי f_v ו- g_v הן ט"ל.

הגדרה: פונקציית נורמה על מ"ו V הינה פונקציה $\|\ \|:V\to\mathbb{R}^+$ המקיימת:

1. חיוביות: $\|v\|=0 \Leftrightarrow v=0$
2. $\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\| \quad \forall\alpha\in\mathbb{F}$
3. אי שוויון המשולש: $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$.

מרחב וקטורי יחד עם נורמה יקרא מרחב נורמי.

3. נתון מרחב מכפלה פנימית V יחד עם מ"פ $(\ ,\ )$. נגדיר העתקה: $\|v\|=\sqrt{(v,v)}$. הראו ש- $\|\ \|$ מוגדרת היטב וכי היא אכן נורמה. (שימו לב לדרישה שנורמה היא פונקציה אי שלילית. עבור אי שוויון המשולש כדאי אולי להשתמש בזהות הבאה במרוכבים: $\mathrm{Re}(z)<|z| \quad \forall z\in\mathbb{C}$ ובא"ש שוורץ

4. עבור V ו- $\|\ \|$ כבשאלה 3, השתמשו בתכונות המ"פ להוכחת שווין המקבילית:
$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

הגדרה: פונקציית מרחק (מטריקה) על מ"ו V היא העתקה $d:V\times V\to\mathbb{R}^+$ המקיימת:

1. סימטריות: $d(x,y)=d(y,x)$
2. חיוביות: $d(v,w)=0 \Leftrightarrow v=w$.
3. אי שוויון המשולש: $d(v,w)\le d(v,u)+d(u,w) \quad \forall v,w,u\in V$

5. הוכיחו כי בהנתן מ"ו V ונורמה $\|\ \|$ ההעתקה $d(v,w)=\|v-w\|$ היא אכן מטריקה.

6. א. השתמשו במ"ס אשר הוצגה בכיתה ובשאלה 3 על מנת להגדיר נורמה על מרחב הפונקציות הרציפות על $[0,1]$.
השתמשו בנורמה ובשאלה 5 על מנת להגדיר מטריקה על המרחב. בשני המקרים כתבו את הביטוי המפורש של אי שוויון המשולש.

ב. הגדירו נורמה על $\mathbb{R}[t]$ אוסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים, הגדירו מטריקה על $\mathbb{R}[t]$.

ג. הוכיחו כי אם $p(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ ו $q(t)=\sum_{j=1}^{n} b_j x^j$ פולינומים מדרגה n, אזי $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} * \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2}$.

7. נתונים V מרחב מכפלה סקלארית ממימד n ו- $v_1,...,v_n$ בסיס . נגדיר מטריצה ריבועית $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ע"י

$a_{i,j}=\left(v_i,v_j\right)$ (כאשר $(\ ,\ )$ היא המ"ס הנתונה).

א. הוכיחו כי בהנתן וקטורים $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ ו- $w=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ מתקיים: $\left(v,w\right)=\left(\alpha_1...\alpha_n\right)A\left(\beta_1...\beta_n\right)^T$ כלומר:

$\left(v,w\right)=\left(a_1...a_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

ב. הסיקו כי A אינה תלויה בבחירת בסיס עד כדי שקילות מטריצות (כלומר בהנתן בסיס שונה $w_1,...,w_n$ של V

נגדיר את P להיות מטריצת מעבר הבסיסים המתאימה. אם $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ מוגדרת ע"י $b_{i,j}=\left(w_i,w_j\right)$

אז מתקיים ש- $B=P^T AP$).

אלגברה לינארית 2 – פתרון תרגיל 7

שאלה 1. נתבונן ב- $\mathbb{R}[t]$ אוסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים המהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר העתקה $(\ ,\ ):\mathbb{R}[t]\times\mathbb{R}[t]\to\mathbb{R}$ ע"י: $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)=\sum_{l=1}^{N}a_lb_l$ כאשר $N=\max(m,n)$. הוכחו כי $(\ ,\ )$ מהווה מכפלה סקלארית. מתי נאמר שזוג פולינומים ניצב אחד לשני? הביאו דוגמא לפולינום הניצב ל- $p(x)=1+x^2+x^3$.

פתרון:

א. סמטריות ברורה שכן $\sum_{l=1}^{N}a_lb_l=\sum_{l=1}^{N}b_la_l$ (כמובן - $\max(n,m)=\max(m,n)$).

ב. חיוביות: נתון $p(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i$. $\left(p(x),p(x)\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\sum_{j=1}^{n}a_ix^i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$. מאחר וכל הגורמים בסכום הם אי-שליליים, $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ אי-שלילי והוא שווה לאפס אם"ם כל הגורמים בסכום שווים לאפס כלומר $a_i^2=0$ לכל i, כלומר $a_i=0$ לכל i, כלומר $p(x)\equiv 0$.

ג. לנאריות: נתונים הפולינמים $\sum_{i=1}^{n}a_ix^i$, $\sum_{l=1}^{k}c_lx^l$, $\sum_{j=1}^{m}b_jx^j$. נסמן $M=\max(n,k)$ ו- $N=\max(M,m)$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i+\sum_{l=1}^{k}c_lx^l,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)=\left(\sum_{i=1}^{M}a_ix^i+c_ix^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)=\sum_{l=1}^{N}(a_l+c_l)b_l=\sum_{l=1}^{N}a_lb_l+c_lb_l=$$
$$\sum_{l=1}^{N}a_lb_l+\sum_{l=1}^{N}c_lb_l=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)+\left(\sum_{l=1}^{k}c_lx^l,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)$$

ד. הומגניות: נניח $\alpha\in\mathbb{R}$ נתון,

$$\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i)x^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)=\sum_{l=1}^{N}\alpha a_lb_l=\alpha\sum_{l=1}^{N}a_lb_l=\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right).$$

נאמר כי $\sum_{i=1}^{n}a_ix^i\perp\sum_{j=1}^{m}b_jx^j$ אם"ם $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^i,\sum_{j=1}^{m}b_jx^j\right)=\sum_{l=1}^{N}a_lb_l=0$.

לדוגמא $p(x)=1+x^2+x^3$ ניצב ל $q(x)=1-x^2$

שאלה 2. נתון מרחב מכפלה פנימית V יחד עם מ"פ $(\ ,\ )$. עבור $v\in V$ נתון (קבוע), נגדיר העתקות $f_v:V\to V$ ו- $g_v:V\to V$ ע"י $f_v(w)=(w,v)$ ו- $g_v(w)=\overline{(v,w)}$. הוכיחו כי f_v ו- g_v הן ט"ל.

פתרון:

לינאריות f_v נובעת מיד מהלינאריות וההומוגניות של המכפלה הפנימית בקורדינטה הראשונה. הביטויים המפורשים דומים לביטויים במקרה של g_v ונסתפק בהם:

$$g_v(w_1+w_2)=\overline{(v,w_1+w_2)}\underset{*}{=}\overline{(v,w_1)+(v,w_2)}=\overline{(v,w_1)}+\overline{(v,w_2)}=g_v(w_1)+g_v(w_2)$$
$$g_v(\alpha w)=\overline{(v,\alpha w)}\underset{*}{=}\overline{\bar{\alpha}(v,\alpha w)}=\alpha\overline{(v,w)}=\alpha g_v(w)$$

(השוויונות המסומנים ב - * הם ביטויים ללינאריות והומוגניות בקורדינטה השניה כפי שהם מתקבלים מתכונות המ"פ. השוני בין המכפלה הסקלארית ומ"פ במקרה זה נעוץ בעובדה שמ"פ אינה סימטרית).

הגדרה: פונקציית נורמה על מ"ו V הינה פונקציה $\| \ \|: V \to \mathbb{R}^+$ המקיימת:

1. חיוביות: $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

2. $\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \| \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$

3. אי שוויון המשולש: $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

מרחב וקטורי יחד עם נורמה יקרא מרחב נורמי.

שאלה 3. נתון מרחב מכפלה פנימית V יחד עם מ"פ $(\ ,\ )$. נגדיר העתקה: $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$. הראו ש- $\| \ \|$ מוגדרת היטב וכי היא אכן נורמה. (שימו לב לדרישה שנורמה היא פונקציה אי שלילית. עבור אי שוויון המשולש כדאי אולי להוכיח קודם את משפט פיטגורס).

פתרון:

$\| \ \|$ מוגדרת היטב ע"פ חיוביות המ"פ. $\| \ \|$ אי שלילית כיוון שפעולת לקיחת שורש היא אי-שלילית ו- $\|v\| = 0$ שווה לאפס אם"ם $(v,v) = 0$ (וע"פ חיוביות המ"פ) אם"ם $v = 0$.

נראה הומוגניות: $\| \alpha v \| = \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} (v,v)} = \sqrt{|\alpha|^2 (v,v)} = |\alpha| \sqrt{(v,v)} = |\alpha| \| v \|$.

אי שוויון המשולש:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(v,w) + \|w\|^2 \le \|v\|^2 + 2|(v,w)| + \|w\|^2 \le \|v\|^2 + \|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

האי-שוויון הראשון נובע מהזהות $\operatorname{Re}(z) < |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

האי שוויון השני נובע מא"ש שוורץ.

כעת נוכל לקחת שורש על שני האגפים ולקבל את אי שוויון המשולש, כנדרש.

שאלה 4. עבור V ו- $\| \ \|$ כבשאלה 3, השתמשו בתכונות המ"פ להוכחת שווין המקבילית:

$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$.

פתרון:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) + (-y,x) + (x,-y) + (-y,-y) =$$
$$= 2(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) - (y,x) - (x,y) + (-1)^2 (y,y) = 2((x,x) + (y,y)) = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

הגדרה: פונקציית מרחק (מטריקה) על מ"ו V היא העתקה $d: V \times V \to \mathbb{R}^+$ המקיימת:

1. סימטריות: $d(x,y) = d(y,x)$

2. חיוביות: $d(v,w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.

3. אי שוויון המשולש: $d(v,w) \le d(v,u) + d(u,w) \quad \forall v,w,u \in V$

שאלה 5. הוכיחו כי בהנתן מ"ו V ונורמה $\| \ \|$ ההעתקה $d(v,w) = \|v - w\|$ היא אכן מטריקה.

פתרון:

d היא אי שלילית שכן הנורמה היא אי שלילית. לכל d מוגדרת היטב.

1. סמטריות: $d(v,w) = \|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |(-1)| \|(w - v)\| = \|(w - v)\| = d(w,v)$.

2. חיוביות: $d(v,w) = 0 \Leftrightarrow \|v - w\| = 0 \Leftrightarrow v - w = 0 \Leftrightarrow v = w$.

3. . אי שוויון המשולש:

$$d(v,w) = \|v - w\| = \|v - u + u - w\| \le \|v - u\| + \|u - w\| = d(v,u) + d(u,w) \quad \forall v,w,u \in V$$

<u>שאלה 6</u>. א. השתמשו במ"ס אשר הוצגה בכיתה ובשאלה 3 על מנת להגדיר נורמה על מרחב הפונקציות הרציפות על $[0,1]$. השתמשו בנורמה ובשאלה 5 על מנת להגדיר מטריקה על המרחב. בשני המקרים כתבו את הביטוי המפורש של אי שוויון המשולש.

.

ב. הגדירו נורמה על $\mathbb{R}[t]$ אוסף הפולינומים עם מקדמים ממשיים, הגדירו מטריקה על $\mathbb{R}[t]$.

ג. הוכיחו כי אם $p(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ ו $q(t)=\sum_{j=1}^{n} b_j x^j$ פולינומים מדרגה n, אזי

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} * \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}.$$

פתרון:

א. נשתמש במ"ס: $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$. ע"פ שאלה 3 נגדיר $\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$. אי

שוויון המשולש במקרה זה הוא: $\|f+g\|=\sqrt{\int_0^1 (f(x)+g(x))^2 dx} \le \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}+\sqrt{\int_0^1 g(x)^2 dx}$.

נגדיר מטריקה בעזרת שאלה 5:

$$d(f,g)=\|f-g\|=\sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx}.$$

אי שוויון המשולש במקרה זה הינו:

$$d(f,h)=\sqrt{\int_0^1 (f(x)-h(x))^2 dx} \le \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx}+\sqrt{\int_0^1 (g(x)-h(x))^2 dx}=d(f,g)+d(g,h)$$

ב. נשתמש במ"ס אשר הוגדרה בשאלה 1: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \sum_{j=1}^{m} b_j x^j\right)=\sum_{l=1}^{N} a_l b_l$. נגדיר (כזכור $N=\max(m,n)$)

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right\|=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \sum_{j=1}^{m} b_j x^j\right)=\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x^i-\sum_{j=1}^{m} b_j x^j\right\|=\left\|\sum_{l=1}^{N}(a_l-b_l)x^l\right\|=\sum_{l=1}^{N}(a_l-b_l)$$

ג. נשתמש בא"ש שוורץ:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|= \left|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \sum_{j=1}^{n} b_j x^j\right)\right| \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right\| * \left\|\sum_{j=1}^{n} b_j x^j\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} * \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}.$$

<u>שאלה 7</u>. נתונים V מרחב מכפלה סקלארית ממימד n ו- $v_1,...,v_n$ בסיס . נגדיר מטריצה ריבועית $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

ע"י $a_{i,j}=\left(v_i,v_j\right)$ (כאשר $(\ ,\ )$ היא המ"ס הנתונה).

א. הוכיחו כי בהנתן וקטורים $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ ו- $w=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$ מתקיים: $(v,w)=(\alpha_1...\alpha_n)A(\beta_1...\beta_n)^T$ כלומר:

$$(v,w)=(\alpha_1...\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

ב. הסיקו כי A אינה תלויה בבחירת בסיס עד כדי שקילות מטריצות (כלומר בהנתן בסיס שונה $w_1,...,w_n$ של V נגדיר את P להיות מטריצת מעבר הבסיסים המתאימה. אם $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ מוגדרת ע"י $b_{i,j}=\left(w_i,w_j\right)$ אז מתקיים ש- $B=P^TAP$).

פתרון:

א.

$$(\alpha_1...\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}=(\alpha_1...\alpha_n)\begin{pmatrix} \sum a_{1j}\beta_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj}\beta_j \end{pmatrix}=\sum_i\sum_j \alpha_i a_{ij}\beta_j=$$

$$=\sum_i\sum_j\alpha_i\left(v_i,v_j\right)\beta_j=\sum_i\alpha_i\sum_j\left(v_i,v_j\right)\beta_j=\sum_i\alpha_i\left(v_i,\sum_j\beta_jv_j\right)=\left(\sum_i\alpha_iv_i,\sum_j\beta_jv_j\right)=(v,w)$$

ב. נתונים בסיס $w_1,...,w_n$ של V, ומטריצת מעבר הבסיסים P כך ש- $P\Big(0...\underset{i}{1}...0\Big)^T$ זהו וקטור המקדמים המבטא את w_i ביחס ל- $v_1,...,v_n$. כלומר $w_j=\sum_i p_{ij}v_i$. די להוכיח כי: $b_{i,j}=\left(w_i,w_j\right)=\Big(0...\underset{i}{1}...0\Big)P^TAP\Big(0...\underset{j}{1}...0\Big)^T$. ע"פ סעיף א. נקבל:

$$\Big(0...\underset{i}{1}...0\Big)P^TAP\Big(0...\underset{j}{1}...0\Big)^T=\left(P\Big(0...\underset{i}{1}...0\Big)^T\right)^TA\left(P\Big(0...\underset{j}{1}...0\Big)^T\right)=\left(w_i,w_j\right)=b_{i,j}$$

לכן $P^TAP=B$, כנדרש.

תרגיל 8 באלגברה ליניארית 2

11 באפריל 2005

סכום ישר

1. בהינתן מרחב ווקטרי V מקובל לרשום $End(V)$ במקום $Hom(V,V)$.
2. איבר $P \in End(V)$ ייקרא אופרטור הטלה אם $P^2 = P$.
3. תתי מרחב $V_1,\dots,V_n$ של מרחב ווקטורי נתון V נקראים בת"ל אם $\big(x_1+\ldots+x_n=0$ וגם $x_i \in V_i\ i=1\ldots n\big) \Rightarrow (\forall i \quad x_i=0)$
4. אומרים ש- V הוא סכום ישר של $V_1,\dots,V_n$ ומסמנים $V=\oplus_{i=1}^n V_i$ אם הם תתי מרחב בת"ל וגם $V=V_1+\cdots+V_n$.

בהינתן רשימה של מרחבים וקטורים $V_1,\dots,V_n$, נגדיר על הקבוצה $V_1\times\cdots\times V_n=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in V_i\}$ מבנה של מרחב וקטורי ע"י שנגדיר את החיבור והכפל בסקלר רכיב רכיב, בדיוק כפי שהגדרנו בעבר את מרחב ה- n-יות F^n.
המרחב הוקטורי המתקבל נקרא הסכום הישר החיצוני של ה- V_i.

שאלה 1

1. במצב שלעיל נניח ש- $V_1,\dots,V_n$ הם תתי מרחב של מרחב וקטורי נתון V, ונגדיר ההעתקה $S: V_1\times\cdots\times V_n \longrightarrow V$ ע"י $S(x_1,\dots,x_n)=x_1+\cdots x_n$. קל לראות שזו העתקה ליניארית. הראה שהיא חח"ע אם"ם תתי המרחב הללו בת"ל, ושהיא איזומורפיזם אם"ם $V=\oplus_{i=1}^n V_i$.
2. בהינתן מרחב וקטורי V ושני תתי מרחב V_1,V_2 הראה ש- $V=V_1\oplus V_2$ אם"ם $V=V_1+V_2$ וגם $V_1\cap V_2=0$.
3. הראה שייתכן ש-- $V=V_1+V_2+V_3$ וגם $V_i\cap V_j=\{0\}\ \forall i\neq j$ אבל ש- V איננו סכום ישר שלהם.
4. נניח ש- $V=\oplus_{i=1}^n V_i$ הראה שיש אופרטורי הטלה $P_1,\dots,P_n\in Evd(V)$ כך ש- $id_V=P_1+\cdots+P_n$ וכך שלכל $i\neq j\quad P_iP_j=0$ וכך שלכל $i\quad Im(P_i)=V_i$.
5. בהינתן רשימה $P_1,\dots,P_n$ של אופרטורי הטלה ב- $End(V)$ כך ש- $id_V=P_1+\cdots+P_n$ וכך שלכל $i\neq j\quad P_iP_j=0$ נסמן $V_i=image(P_i)$. הראה ש- $V=\oplus_{i=1}^n V_i$.

פירוק קאנוני של מרחב וקטורי ביחס לאופרטור נתון

הגדרה: בהינתן מרחב וקטורי V ו- $T \in End(V)$ נאמר שתת מרחב $W \subseteq V$ הוא T-אנוריאנטי אם $\forall x \in W \quad T(x) \in W$. אם W הוא תת-מרחב T-אנוריאנטי אז נהוג לסמן ב- $T|_W$ את האיבר של $End(W)$ שנתון ע"י $T|_W(x) = T(x) \quad \forall x \in W$.

יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ויהא $T \in End(V)$. יהא $M_T(X)$ הפולינום המינימלי של T. נציג אותו כ- $M_T(X) = P_1(X)^{n_1} \cdots P_r(X)^{n_r}$ כמו בסעיף-6 של הנספח על חוג הפולינומים (בסוף התרגיל). נסמן $V_i = Ker\ P_i(T)^{n_i}$.

שאלה 2

הוכח את הטענות הבאות:

1. לכל i V_i הוא T-אנוריאנטי.
2. $V = \oplus_{i=1}^r V_i$.
3. לכל i הפולינום המינימלי של $T|_{V_i}$ הוא $P_i(X)^{n_i}$.
4. הפולינום האופייני של T הוא $P_1(X)^{m_1} \cdots P_r(X)^{m_r}$ כאשר לכל i $\dim V_i = m_i \cdot deg(P_i)$.
5. אם $P_1(X) = X - \lambda$ אז הריבוי האלגברי של λ שווה ל- $\dim V_1$.
6. אם $P_i(X) = X - \lambda_i \quad i = 1, \ldots, r$ אז T לכסינה.

רמז: השתמש בתוצאות של הנספח ובפולינומים $Q_i(X) = \Pi_{j \neq i} P_j(X)^{n_j}$.
שים לב שסעיף א' של שאלה 3 בתרגיל 4 נובע מייד מתוך סעיף 2 שלעיל.
שים לב שקיבלנו את התוצאה הבאה: מטריצה היא לכסינה אם"ם הפולינום המינימלי שלה הוא מכפלה של גורמים ליניארים שונים זה מזה.

שאלה 3

נתונים מרחבים וקטורים ממימד סופי n V_i עם בסיס B_i וגם נתון $T_i \in End(V_i)$ $i = 1, 2$. יהיו $A_i \in M_n(F)$ המטריצות שמייצגות את T_i ביחס לבסיסים הנ"ל. הוכח שהמטריצות A_1 ו- A_2 הן דומות זו לזו אם"ם קיים איזומורפיזם $f : V_1 \longrightarrow V_2$ כך ש- $f \circ T_1 = T_2 \circ f$.

תבניות בי-ליניאריות ומרחבי מכפלה פנימית והרמיטית

ראשית נחזור על מספר הגדרות:

1. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה F. תבנית בי-ליניארית על V זו העתקה

$$(-,-) : V \times V \longrightarrow F$$

שמקיימת שלכל $a \in F \quad x, y, z \in V$:

(א) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

(ב) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$

(ג) $(ax,y)=(x,ay)=a(x,y)$

ניתן לנסח זאת בקיצור ע"י שנאמר שברגע שקובעים את אחד הרכיבים בתבנית מקבלים העתקה ליניארית $F \longrightarrow V$.

2. בהינתן תבנית בי-ליניארית כנ"ל, אומרים שהיא סימטרית אם לכל $x,y \in V$ מתקיים $(x,y)=(y,x)$.

3. במקרה ש $F=R$ הוא השדה הממשי, מגדירים את המושג 'מכפלה פנימית': מכפלה פנימית על מרחב וקטורי V מעל השדה הממשי, זו תבנית בי-ליניארית סימטרית שמקיימת שלכל $0 \neq x \in V$ $(x,x)>0$.

4. במקרה ש $F=C$ הוא השדה המרוכב, מגדירים את המושג 'מכפלה הרמיטית': מכפלה הרמיטית על מרחב וקטורי V מעל שדה המרוכבים זו העתקה

$$(-,-): V \times V \longrightarrow C$$

שמקיימת שלכל $a \in C$ $x,y,z \in V$:

(א) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

(ב) $(ax,y)=a(x,y)$

(ג) $(x,y)=\overline{(y,x)}$ כאן $\overline{}$ מסמן את הצמוד המרוכב

(ד) אם $x \neq 0$ אז $(x,x)>0$

שאלה 4

תהא $(-,-)$ תבנית בי-ליניארית על מרחב וקטורי V ממימד סופי מעל שדה F, ותהא $T \in End(V)$, ויהא $v_1,\ldots,v_n$ בסיס של V. תהא A המטריצה שנתונה ע"י $A_{i,j}=(v_i,v_j)$ ותהא $A(T)$ המטריצה שנתונה ע"י $A(T)_{i,j}=(Tv_i,v_j)$. הראה ש $detA(T)=det\ T\ detA$. הראה שאותו דבר גם מתקיים אם השדה הוא C ולוקחים מכפלה הרמיטית במקום תבנית בי-ליניארית.

שאלה 5

בשאלה זו נשתמש בסימון שנקרא הדלתא של קרונקר: אם i,j הם אינדקסים אז $\delta_{i,j}$ מוגדר להיות שווה 1 אם $i=j$ ואפס אחרת.

1. המכפלה הפנימית הסטנדרטית על R^n נתונה ע"י $(x,y)=\sum_{i=1}^n x_i y_i$. הוכח שלכל מטריצה $A \in M_n(R)$ מתקיים שלכל $x,y \in R^n$ $(Ax,y)=(x,A^t y)$. כאשר A^t זו המטריצה המשוכלפת, כלומר $A^t_{i,j}=A_{j,i}$.

2. בסיס $x_1,x_2,\ldots,x_n$ של R^n נקרא בסיס אורתוגונלי אם $(x_i,x_j)=\delta_{i,j}$. כאן הכוונה למכפלה ההפנימית הסטנדרטית. הראה שרשימת וקטורים כנ"ל מהווה בסיס אורתוגונלי אם"ם המטריצה A שמתקבלת מלקיחת הוקטורים הללו אחד ליד השני מקיימת $A^t A=id$.

3. המכפלה ההרמיטית הסטנדרטית על C^n נתונה ע"י $(x,y)=\sum_{i=1}^n x_i \bar{y_j}$.

טענה: לכל מטריצה $A \in M_n(C)$ קיימת מטריצה אחת ויחידה $A^* \in M_n(C)$ כך שלכל $x,y \in C^n$ $(Ax,y)=(x,A^* y)$.

הוכח את הטענה הנ"ל ותן נוסחה מפורשת ל-A^*.

4. בסיס $x_1, x_2, \ldots, x_n$ של C^n נקרא בסיס יוניטרי אם $(x_i, x_j) = \delta_{i,j}$. כאן הכוונה למכפלה ההרמיטית הסטנדרטית. הראה שרשימת ווקטורים כנ"ל מהווה בסיס יוניטרי אם"ם המטריצה A שמתקבלת מלקיחת הוקטורים הללו אחד ליד השני מקיימת $A^*A = id$.

שאלה 6

1. בסעיף זה נוכיח בעזרת המכפלה הפנימית הסטנדרטית על R^n טענה קומבינטור-ית לא טריויאלית: אם $A_1, \ldots, A_m$ הן תתי קבוצות שונות זו מזו של $\{1, 2, \ldots, n\}$ ואם לכל $i \neq j$ $|A_i \cap A_j| = 1$ אז $m \leq n$.

   הוכחה: אפשר להניח שלכל i $|A_i| \geq 2$ (למה ?). לקבוצה A_i נתאים את הוקטור $v^i = (v_1^i, \ldots, v_n^i) \in R^n$ ע"י הכלל ש- $v_j^i = 1$ אם $j \in A_i$ ואפס אחרת. נוכיח את הטענה ע"י שנראה ש- $v^1, v^2, \ldots, v^m$ הם בת"ל. נניח ש- $\sum_{j=1}^m a_j v^j = 0$. אז בפרט $(\sum_{j=1}^m a_j v^j, \sum_{j=1}^m a_j v^j) = 0$. השתמש בתכונות המכפלה הפנימית ובעובדה שלכל $a \in R$ $a^2 \geq 0$ בכדי לקבל שלכל j $a_j = 0$.

2. השתמש בטענה הקומבינטורית של הסעיף הקודם בכדי לקבל את התוצאה הבאה: בהינתן n נקודות במישור שאינן על ישר אחד, מתקיים שהן פורשות לפחות n ישרים. כאן אנו אומרים שישר הוא נפרש ע"י הנקודות הנתונות אם הוא עובר לפחות בשתיים מתוכן.

1 נספח: חוג הפולינומים מעל שדה

בנספח זה F הוא שדה ו- $F[X]$ הוא חוג הפולינומים מעליו. אנו נחזור כאן על מספר דברים שלמדנו ונוכיח עוד מספר עובדות חדשות. הנספח רלוונטי לפתרון שאלה 2. שים לב לאנלוגיה בין $F[X]$ ל- Z. אחרי קריאת הנספח, מומלץ לכתוב לעצמך את הכל עבור Z במקום $F[X]$.

1. הגדרה: $p \in F[X]$ נקרא פריק אם ניתן לכתוב $p = p_1 p_2$ $p_1, p_2 \in F[X]$ $deg(p_1), deg(p_2) > 0$. פולינום נקרא אי-פריק אם הוא מדרגה חיובית ואיננו פריק.

2. יהיו $p_1, \ldots, p_n \in F[X]$ $n \geq 2$ פולינומים שונים מאפס. נאמר ש- p הוא מחלק משותף שלהם אם הוא מחלק כל אחד מהם (למשל 1 מחלק משותף שלהם). נאמר ש- p הוא מחלק משותף מקסימלי (ממ"מ) שלהם אם הוא מחלק משותף שלהם וכל מחלק משותף אחר שלהם מחלק אותו. נדגיש - זה בכלל לא ברור שקיים ממ"מ ל- $p_1, \ldots, p_n$. נניח ש- p, p' הם שני ממ"מ. אז הם חייבים לחלק האחד את השני ולכן קיים סקלר c כך ש- $p' = cp$. כלומר - אם קיים ממ"מ אז הוא יחיד עד כדי כפל בסקלר. אם קיים ל- $p_1, \ldots, p_n$ ממ"מ אז נחליט שלוקחים אותו מתוקן ונסמן אותו ע"י $gcd(p_1, \ldots, p_n)$.

   משפט: קיים ממ"מ וקיימים $a_i \in F[X]$ כך ש-

   $$gcd(p_1, \ldots, p_n) = a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$$

   הוכחה: נסתכל על הקבוצה $\Omega = \{a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n \mid a_i \in F[X]\}$. ניקח את p להיות פולינום שונה מאפס ב- Ω מן הדרגה הנמוכה ביותר האפשרית. אם q מחלק את כל ה- p_i -ים אז הוא בהכרח מחלק את p כי $p = a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$.

נשאר להראות ש- p הוא מחלק משותף של $p_1, \dots, p_n$. נראה ש- p מחלק את p_1. ע"פי המשפט על חלוקה עם שארית, קיימים $b, c \in F[X]$ כך ש- $p_1 = bp + c$ וכך ש- $c = 0$ או ש- $deg(c) < deg(p)$. מכאן נקבל $p_1 = b(a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n) + c$ ולכן $c = (1 - ba_1)p_1 + (-ba_2)p_2 + \cdots + (-ba_n)p_n$ ולכן $c \in \Omega$ ולכן ממינימליות הדרגה של p נובע $c = 0$. כלומר p מחלק את p_1. באותו אופן נקבל ש- p מחלק את p_i לכל i. מש"ל

3. נניח $p, a, b \in F[X]$ ו- $gcd(p,a) = gcd(p,b) = 1$. אז גם $gcd(p, ab) = 1$.
הוכחה: ניתן לרשום $u'p + v'b = 1$, $up + va = 1$. נכפול ונקבל $1 = p(uu'p + uv'b + u'va) + vv'ab$. מכאן ברור שכל מחלק משותף של ab ו- p חייב לחלק את 1. מש"ל

יהא p פולינום אי-פריק. לכל פולינום q מתקיים ש- p מחלק את q או ש- $gcd(p,q) = 1$. לכן אם p מחלק מכפלה ab אז כבר בהכרח p מחלק את a או ש- p מחלק את b. ומכאן באינדוקציה - אם p מחלק מכפלה $a_1 \cdots a_n$ אז כבר בהכרח p מחלק כבר את אחד מבין ה- a_i -ים.

4. יהיו $p_1, \dots, p_n$ פולינומים אי-פריקים מתוקנים שונים זה מזה ויהיו $f = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ ו- $g = p_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n}$ כאשר לכל i α_i, β_i הם שלמים אי-שליליים.

טענה: f מחלק את g אם"ם לכל i $\alpha_i \leq \beta_i$. הוכחה: כוון אחד ברור מאליו. אז נניח ש- $fh = g$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $\sum_i \alpha_i$. אם הסכום הזה שווה אפס אז לכל i $0 = \alpha_i \leq \beta_i$. אז נניח שיש i כך ש- $\alpha_i > 0$ ולשם פשטות הסימון נניח $i = 1$. אז p_1 מחלק את f ולכן את g. אז ע"ס 3 נקבל ש- $\beta_1 > 0$. אז יש לנו - $0 = fh - g = p_1 \left(p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_n^{\alpha_n} h - p_1^{\beta_1 - 1} \cdots p_n^{\beta_n}\right)$. ב- $F[X]$ אין מחלקי אפס ולכן - $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_n^{\alpha_n} h = p_1^{\beta_1 - 1} \cdots p_n^{\beta_n}$. כלומר $p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ מחלק את $p_1^{\beta_1 - 1} \cdots p_n^{\beta_n}$. וסיימנו ע"ס הנחת האינדוקציה. מש"ל

5. יהיו $p_1, \dots, p_n$ פולינומים אי-פריקים מתוקנים שונים זה מזה ויהיו $i = 1..m$ $f_i = p_1^{\alpha_1^i} \cdots p_n^{\alpha_n^i}$. מתוך 4 לעיל נובע מייד ש-
$gcd(f_1, \dots, f_m) = p_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n}$ כאשר לכל j $\beta_j = \min\{\alpha_j^1, \dots, \alpha_j^m\}$.

כמו כן אם ניקח $f = p_1^{\gamma_1} \cdots p_n^{\gamma_n}$ כאשר לכל j $\gamma_j = \max\{\gamma_j^1, \dots, \gamma_j^m\}$. אז נובע שכל f_i מחלק את f, כלומר ש- f הוא מכפלה משותפת של $f_1, \dots, f_m$, ושאם גם g מכפלה משותפת שלהם, אז f מחלק את g. פולינום זה נקרא המכ-פלה המשותפת המינימלית של ה- $f_1, \dots, f_m$, והוא יחיד עד כדי סקלר. מסמנים אותו $lcm(f_1, \dots, f_m)$.

6. בהינתן פולינום שונה מאפס p ניתן לכתוב אותו בצורה $p = cp_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ כאשר c סקלר ולכל i p_i פולינום אי-פריק מתוקן ולכל $i \neq j$ $p_i \neq p_j$ ולכל i n_i שלם חיובי. ($r = 0$ אם p סקלר). זו טענה טריויאלית, פשוט נפרק ונפרק את p עד שאי אפשר יותר (והתהליך חייב להסתיים כי הדרגה של מכפלה היא סכום הדרגות). מתוך 4 לעיל נובעת מייד הטענה הלא טריויאלית - שהפירוק הזה לגורמים אי-פריקים הוא יחיד עד כדי שינוי סדר הגורמים.

שאלה 1 סעיף 1

S חח"ע ולכן מהגדר' איזו' הגרעין שלה הוא $\{0\}$
כלומר $(0,\dots,0)\in V_1\times\dots\times V_n$ הוא הוקטור היחיד
$(x_1,\dots,x_n)\in V_1\times\dots\times V_n$ שמקיים $x_1+\dots+x_n=0$.
אבל זו בדיוק ההגדרה של המושג "$V_1,\dots,V_n$ הם תתי מרחב בת"ל" הטענה האחרונה
בשאלה נובעת מכך ש-S על אטטט $V=V_1+\dots+V_n$.

שאלה 1, סעיף 2

נניח $x_1+x_2=0$ ו- $x_i\in V_i$ ולא שניהם אפסים. אז
$x_1=-x_2\neq 0 \in V_1\cap V_2$. הכיוון $\{V_1,V_2\}$ לא בת"ל גורר
ש $V_1\cap V_2\neq\{0\}$. ולהפך, יהא $0\neq y\in V_1\cap V_2$
אז $y+(-y)=0$ מראה ש V_1,V_2 לא בת"ל.

שאלה 1, סעיף 3

ניקח $V=\mathbb{R}^2$ $V_1=\mathrm{Span}\{(1,0)\}$ $V_2=\mathrm{Span}\{(0,1)\}$
$V_3=\mathrm{Span}\{(1,1)\}$. כבר לא מתקיימת מסקנה של זוגות בסעיף הקודם.

שאלה 1, סעיף 4

$$V_1\times\dots\times V_n \xrightarrow{S} V$$

נשתמש באיזומורפיזם
יש לנו עפ"י סעיף 1. נגדיר לכל $1\le i\le n$
את $P_i'\in End(V_1\times\dots\times V_n)$ עפ"י הנוסחה

$$P_i'((x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)) = (0,0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)$$

כלומר x_i נמצא במקום ה-i.
בבירור $P_i'=(P_i')^2$ ולכל i,j $P_i'\circ P_j'=0$
לכל i image P_i' הוא תת המרחב $\{0\}\times\dots\times\{0\}\times V_i\times\{0\}\times\dots\times\{0\}$ (↑ המקום ה-i)
ולכל i; $P_1'+\dots+P_n'=id_{V_1\times\dots\times V_n}$.
וכמו כן $P_i=S\circ P_i'\circ S^{-1}$
עכשיו ~~נגדיר~~ נגדיר לכל i
ובדיקה קלה מראה ש $P_1,\dots,P_n$ מקיימים את הדרוש. למשל:

$$P_i^2=SP_i'S^{-1}SP_i'S^{-1}=SP_i'^2S^{-1}=SP_i'S^{-1}=P_i$$

$$P_iP_j=SP_i'S^{-1}SP_j'S^{-1}=S\underbrace{P_i'P_j'}_{\text{אפס}}S^{-1}=0$$

וכו' הלאה.

שאלה 1, סעיף 5

לכל $x\in V$ $\quad x=id_V(x)=P_1x+P_2x+\dots+P_nx\in V_1+\dots+V_n$

ולכן $V=V_1+\dots+V_n$. נניח שלכל i ו- $x_i\in V_i$ ו- $0=x_1+\dots+x_n$. צריך להראות שלכל i $x_i=0$. מהגדרת V_i, יש $y_i\in V$ כך ש- $x_i=P_iy_i$.

נפעיל את P_j על השוויון שלעיל ונקבל

$$0=P_j0=P_j(x_1+\dots+x_n)=P_j(P_1y_1+\dots+P_jy_j+\dots+P_ny_n)=$$

$$=\underbrace{P_jP_1}_{0}y_1+\dots+\underbrace{P_j^2}_{P_j}y_j+\dots+\underbrace{P_jP_n}_{0}y_n=P_jy_j=x_j$$

j היה שרירותי, וסיימנו.

שאלה 2

2.1 אם $S\circ T=T\circ S$ ב- $End\,V$ אז $Ker\,S$ ו- $im\,S$ הם T-אינו'.
<u>הוכחה:</u> עבור $x\in Ker\,S$ $\quad STx=T\underbrace{Sx}_{0}=0$ ולכן $Tx\in Ker\,S$. עבור $x=Sy\in Im\,S$ מתקיים $Tx=TSy=S(Ty)$ ולכן גם $Tx\in Im\,S$. מש"ל.

2.2 אחזור רגע על נתוני השאלה: V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ו- $T\in End(V)$. $M_T\in F[X]$ הוא הפולינום המינימלי של T ו- $M_T=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$ הוא הפירוק של M_T לגורמים אי-פריקים. כלומר, לכל i $p_i\in F[X]$ הוא פולינום אי-פריק, ו- n_i טבעי חיובי, ולכל $i\neq j$ $g.c.d.(p_i,p_j)=1$.

2.3 נגדיר לכל $i\in\{1\dots r\}$ $\quad Q_i=\prod_{j\neq i}p_j^{n_j}$.
לפי סעיף 5 של הנספח $g.c.d.(Q_1,\dots,Q_r)=1$ ולכן,
לפי המשפט בסעיף 2 של הנספח יש $g_i\in F[X]$ $\quad i=1\dots r$
כך ש: $1=g_1Q_1+g_2Q_2+\dots+g_rQ_r$ ב- $F[X]$.

2.4 נגדיר פונקציה $J_T:F[X]\longrightarrow End(V)$

$$J_T(a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n)=a_0\cdot id_V+a_1T+a_2T^2+\dots+a_nT^n$$

כאשר $a_i\in F$ לכל i, ו- $id_V\in End(V)$ זו העתקת הזהות, כלומר לכל $v\in V$ $\quad id_V(v)=v$.

כפי שהראנו בעבר בכיתה, מתקיים:

לכל $f,g \in F[X]$ (i) $J_T(f+g) = J_T(f) + J_T(g)$

(ii) $J_T(f\cdot g) = J_T(f)\cdot J_T(g)$

<u>הערה:</u> החיבור והכפל משמאל ימין הם ב-$End(V)$. בפרט - הכפל משמאל ימין הוא הרכבה של העתקות.

(iii) $J_T(1) = id_V$.

כמו כן מתקיים

2.5 לכל $f,g \in F[X]$, $J_T(f)$ ו-$J_T(g)$ מתחלפים בכפל ב-$End(V)$: $J_T(f)J_T(g) = J_T(f\cdot g) = J_T(g\cdot f) = J_T(g)J_T(f)$.

($f\cdot g = g\cdot f$ ב-$F[X]$).

בפרט, $T = J_T(X)$ ו-$J_T(P_i^{n_i})$ מתחלפים ב-$End(V)$.

לכן, עפ"י **2.1** $\operatorname{Ker} J_T(P_i^{n_i})$ הוא T אינווריאנטי.

והרי עפ"י ההגדרה, $V_i = \operatorname{Ker} J_T(P_i^{n_i})$. אז סעיף ① הוכח.

2.6 עפ"י 2.3, 2.4 נקבל

$id_V = J_T(Q_1)J_T(g_1) + \dots + J_T(Q_r)J_T(g_r)$.

נפעיל את שני האגפים על וקטור כלשהו $x \in V$ ונקבל $x = J_T(Q_1)J_T(g_1)x + \dots + J_T(Q_r)J_T(g_r)x$

אבל $Q_i \cdot P_i^{n_i} = M_T$ ולכן $0 = J_T(M_T) = J_T(P_i^{n_i})J_T(Q_i)$

ולכן $\operatorname{image} J_T(Q_i) \subseteq \operatorname{Ker} J_T(P_i^{n_i}) = V_i$.

אז הראנו ש- $V = V_1 + \dots + V_r$.

2.7 נניח ש- $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 0$ עם $x_j \in V_j$, $j=1..r$. נקבע $i \in \{1..r\}$. נפעיל את $J_T(Q_i)$ על שני האגפים ונקבל $J_T(Q_i)x_1 + \dots + J_T(Q_i)x_r = 0$.

עבור $j \neq i$ $J_T(Q_i)x_j = 0$ כי הרי $J_T(P_j^{n_j})x_j = 0$ כי $x_j \in V_j$, ו- $P_j^{n_j}$ מחלק את Q_i.

לכן $J_T(Q_i)x_i = 0$. עפ"י סעיף 5 בנוסף $g.c.d.(Q_i, P_i^{n_i}) = 1$ ולכן יש $a,b \in F[X]$ עם $1 = a\cdot Q_i + b\cdot P_i^{n_i}$

ולכן $id_V = J_T(a)J_T(Q_i)+J_T(b)J_T(P_i^{n_i})$ {הפעלנו את J_T על השוויון האחרון}. נפעיל את שני האגפים על x_i ונקבל:

$$x_i = id_V(x_i) = J_T(a)\underbrace{J_T(Q_i)x_i}_{\text{אפס כפי שראינו}} + J_T(b)\underbrace{J_T(P_i^{n_i})x_i}_{\text{אפס כי } x_i\in V_i} = 0 .$$

קבענו $i\in\{1,\dots,r\}$ והראנו שמתקיים $x_i=0$. כלומר, הראינו שהמרחבים $V_1,\dots,V_r$ הם בת"ל. כיוון שגם ... קיבלנו $V=\bigoplus_{i=1}^{r} V_i$. כלומר סעיף ② הוכח.

2.6

2.8 **תזכורת קלה:** אם $W\subseteq V$ הוא תת-מרחב T-אינווריאנטי ואם $f\in F[X]$, אז W הוא גם $J_T(f)$-אינווריאנטי! ו- $J_T(f)|_W = J_{T|_W}(f)$.

כאשר $J_{T|_W}$ הוא ההעתקה $F[X]\longrightarrow End(W)$ שמוגדרת ע"י $J_{T|_W}(a_0+a_1X+\dots+a_nX^n)=a_0\cdot id_W+a_1\cdot T|_W+\dots+a_n(T|_W)^n$.

2.9 נשתמש ב-2.8 עבור $W=V_i$ ו- $f=p_i^{n_i}$ ונקבל

$$J_{T|_{V_i}}(p_i^{n_i}) = J_T(p_i^{n_i})|_{V_i} = 0$$

(מהגדרת V_i) ההעתקה שווה 0 ב- $End(V_i)$.

2.10 נסמן ב- M_i את הפולינום המינימלי של $T|_{V_i}$. לפי הגדרה, זהו הפולינום המתוקן מן המעלה המינימלית שמקיים $J_{T|_{V_i}}(M_i)=0$. לפי משפט, אם $f\in F[X]$ מקיים $0=J_{T|_{V_i}}(f)$ אז M_i מחלק את f. לכן M_i מחלק את $p_i^{n_i}$ (לפי 2.9). לפי סעיף 4 של הנספח נובע שיש $0\le n_i'\le n_i$ כך ש- $M_i=p_i^{n_i'}$.

בפרק ה' של שאלה 5 בתרגיל 6:

2.11 נזכיר: A (פירוק) הוא מן הצורה $A=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_s\end{pmatrix}$ כאשר A_i הן מטריצות ריבועיות יותר קטנות, ואם M_{A_i} הם הפולינומים המינימליים של A_i, אז $l.c.m.(M_{A_1},\dots,M_{A_s})$ הוא הפולינום המינימלי של A. נתרגם את הטענה הזו לשפה הנ"ל במונחים מטריצות: אם V מ"ו ממימד סופי ואם $T\in End\,V$ כאשר $V=\bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ כאשר לכל i, V_i הוא T-אינווריאנטי, ואם M_i הם הפולינומים המינימליים של $T|_{V_i}$, אז $l.c.m.(M_1,\dots,M_r)$ הוא הפולינום המינימלי של T.

2.12 עפ"י **2.11** ו- **2.10** הפולינום המינימלי M_T של T הוא הכפולה המשותפת המינימלית (l.c.m.) של $p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_r^{m_r}$. ולכן, עפ"י סעיף 5 בהוכחה $M_T = p_1^{n_1'} \cdot p_2^{n_2'} \cdots p_r^{n_r'}$.
מאידך כנתון, $M_T = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$. לכן $n_i' = n_i$ לכל $i \in \{1..r\}$.
אז סעיף ③ הוכח: $M_i = p_i^{n_i}$.

2.13 נסמן ב- U_i את הפולינום האופייני של $T|_{V_i}$. עפ"י משפט קיילי-המילטון M_i מחלק את U_i, ועפ"י משפט שהוכח בשאלת התרגיל, U_i מחלק חזקה של M_i. בפרט $M_i = p_i^{n_i}$ ו- p_i אי-פריק, נובע שיש $n_i \le m_i$ כך ש $U_i = p_i^{m_i}$. דרגת הפולינום האופייני שווה למימד המרחב:
$$\dim V_i = \deg(U_i) = m_i \cdot \deg(p_i).$$
ולכן:
עכשיו, עפ"י סעיף ז' של שאלה 5 בתרגיל 6, בתרגום לגבי המקרים מטריצות, הפולינום האופייני של T הוא המכפלה $U_1 \cdots U_r$. סעיף ④ הוכח.

סעיף ⑤ מיידי עכשיו.

2.14 אם $p_i = X - \lambda_i$ ו- $n_i = 1$ אז $V_i = \ker(T-\lambda_i)$ הוא פשוט המרחב העצמי שמתאים לערך העצמי λ_i. במקרה כזה, המטריצה שמייצגת את $T|_{V_i}$ ביחס לכל בסיס נתון של V_i היא המטריצה הסקלרית $\lambda_i \cdot I_k$ כאשר $k = \dim V_i$.
לכן, אם הפולינום המינימלי של T הוא מכפלה של גורמים לינאריים שונים זה מזה, אזי T לכסינה.
הכוון ההפוך קל לבדוק: הפולינום המינימלי של מטריצה אלכסונית הוא מכפלת גורמים לינאריים שונים זה מזה.

שאלה 3

לכל $f \in Hom(V_1, V_2)$ ~~[illegible]~~ תהי $D_f \in M_n(F)$ המטריצה שמייצגת את f ביחס לבסיסים B_1, B_2. ההעתקה $f \mapsto D_f$ היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים $Hom(V_1, V_2) \to M_n(F)$. כמו כן f היא איזומורפיזם אמ"מ D_f הפיכה (כלומר $0 \neq \det(D_f)$).
כמו כן לכל f:
$$D_{f \circ T_1} = D_f \cdot A_1 \qquad D_{T_2 \circ f} = A_2 \cdot D_f$$

- נניח שקיים איזומורפיזם f כך ש $T_2 \circ f = f \circ T_1$. אז $D_f \cdot A_1 = A_2 \cdot D_f$ ו- D_f הפיכה ולכן $A_1 = D_f^{-1} A_2 D_f$ ולכן A_1 ו- A_2 דומות.
- נניח ש A_1, A_2 דומות. אז קיימת $P \in M_n(F)$ הפיכה כך ש $A_1 = P^{-1} A_2 P$ ולכן $PA_1 = A_2 P$. יש $f \in Hom(V_1, V_2)$ (אחת ויחידה) כך ש $D_f = P$. f הוא איזומורפיזם כי $P = D_f$ הפיכה. $D_{f \circ T_1} = D_{T_2 \circ f}$. לכן, בגלל ש $g \mapsto D_g$ חח"ע נובע ש $f \circ T_1 = T_2 \circ f$. מש"ל.

פתרון שאלה 4

לכל i נכתוב $Tv_i=\sum_{s=1}^{n} B_{si} v_s$. אז המטריצה B מייצגת את T ביחס לבסיס הנתון ולכן $\det T=\det B$.

$$A(T)_{i,j} = (Tv_i, v_j) = \sum_{s=1}^{n} B_{si}\cdot(v_s, v_j) = \sum_{s=1}^{n} B^t_{i,s}\cdot A_{s,j}$$

כלומר $A(T) = B^t A$ כאשר B^t זו המטריצה המשוחלפת.

ולכן $\det A(T)=\det(B^t)\det(A)=\det(T)\cdot\det(A)$

שאלה 5 סעיף 1

$$(Ax,y) = \sum_{i=1}^{n}(Ax)_i\cdot y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j\right)\cdot y_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}A_{ij}y_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\cdot(A^t y)_j = (x, A^t y)$$

שאלה 5 סעיף 2

בהינתן רשימת וקטורים $x_1,\dots,x_n$ ב-$\mathbb{R}^n$ נייצר את המטריצה המתאימה בשאלה - A, ואז מתקיים $Ae_i=x_i$ כאשר e_i הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי.

$$(x_i, x_j) = (Ae_i, Ae_j) = (e_i, A^tAe_j)$$

ולכן $x_1\dots x_n$ בסיס אורתונורמלי אמ"ם $\delta_{ij}=(e_i,A^tAe_j)$ לכל i,j. מאחר ובאופן כללי, לכל מטריצה B מתקיים $B_{ij}=(e_i,Be_j)$ הטענה שרצינו להוכיח נובעת.

הערה: יש לציין שבהינתן רשימת וקטורים $x_1\dots x_n$ שמקיימים $\delta_{ij}=(x_i,x_j)$, נובע שהם בת"ל, ואכן, אם $0=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ נקבל

$$0=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)=\sum_{i,j}a_ia_j(x_i,x_j)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

ומכיוון שמספרים ממשיים $a_1\dots a_n$, $0=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ גוררת שלכל i $a_i=0$.

שאלה 5 סעיף 3

נתחיל עם הנתונות: לכל $B \in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים

$$(Be_i, e_j) = B_{ji} \qquad (e_i, Be_j) = \overline{(Be_j, e_i)} = \overline{B_{ij}}$$

$$A_{ji} = (Ae_i, e_j) = (e_i, A^*e_j) = \overline{(A^*)_{ij}}$$

ולכן: הגדרנו את הנ"ל

מסקנה: אם A^* מקיימת את ההגדרה אז $A^*_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

המכפלה נתונה ע"י

נשאר לוודא שהמטריצה A^* שמוגדרת כך, אמנם מקיימת את ההגדרה:

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i \cdot \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right) \cdot \overline{y_i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ij} \cdot \overline{y_i} \right) \underset{\downarrow}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{(A^* y)_j} = (x, A^* y)$$

$$A_{ij} \overline{y_i} = \overline{(\overline{A_{ij}} \cdot y_i)} = \overline{(A^*_{ji} y_i)}$$

שאלה 5 סעיף 4

A מטריצה $Ae_i = x_i$

כמו בסעיף 2, עפ"י הגדרה

$$(x_i, x_j) = (Ae_i, Ae_j) = (e_i, A^*Ae_j) = \overline{(A^*A)_{ij}}$$

ולכן $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$ אמ"מ $\overline{(A^*A)_{ij}} = \delta_{ij}$

אמ"מ (לקחת צמוד של שני האגפים) $(A^*A)_{ij} = \delta_{ij}$.

אמ"מ $A^*A = I$.

כמו בהגדרה לסעיף 2: אם $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$ אז הם

ניקח: אם $0 = \sum_i^n a_i x_i$ לכל $a_i \in \mathbb{C}$ אז

$$0 = \left(\sum_i^n a_i x_i, \sum_j^n a_j x_j \right) = \sum_{i,j} a_i \overline{a_j} (x_i, x_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

ולכן לכל i: $a_i = 0$.

פתרון לשאלה 6

למשל $A_m=\{n\}$ אז $A_1\setminus A_m, A_2\setminus A_m, \dots, A_{m-1}\setminus A_m$

הן $m-1$ תתי קבוצות לא ריקות ושונות בזוגות של $\{1,2,\dots,n-1\}$ ולכן $m-1\le n-1$ וסיימנו.

לכן אפשר להניח שלכל i, $2\le|A_i|$.

מתוך הגדרת הווקטורים v_i, רואים מיד שלכל i,j $|A_i\cap A_j|=(v_i,v_j)$. לכן עבור $i\neq j$ $(v_i,v_j)=1$ וכמו כן $2\le(v_i,v_i)$.

$$0=\left(\sum_1^m a_iv_i,\sum_1^m a_jv_j\right)=\sum_{i=1}^m a_i^2(v_i,v_i)+\sum_{i\neq j}a_ia_j(v_i,v_j)=$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^m \underset{\geq 0}{a_i^2}\underset{\geq 1}{[(v_i,v_i)-1]}}+\underbrace{\sum_{i=1}^m a_i^2+\sum_{i\neq j}a_ia_j}_{=\left(\sum_1^m a_i\right)^2\geq 0}$$

ונובע ש $a_i^2=0$ לכל i. סעיף 1 הוכח.

סעיף 2: יהיו $x_1,\dots,x_m$ הנקודות הנתונות. ויהיו $L_1,\dots,L_n$ הישרים הנקבעים על ידן.

לכל $1\le j\le m$ נגדיר $A_j=\{i\ ;\ x_j$ נמצאת על $L_i\}$

אז $A_1,\dots,A_m$ הן תת' של $\{1,2,\dots,n\}$

ולכל $i\neq j$ $|A_i\cap A_j|=1$ כי יש רק (ובדיוק) ישר אחד שבו x_i עם x_j נמצאות עליו. אז עפ"י סעיף 1 $m\le n$.

כלומר - m נק' שאינן על ישר אחד פורשות לפחות m ישרים.

איפה השתמשנו בכך שהנק' אינן על ישר אחד?

היינו צריכים להראות גם שלכל $i\neq j$ $A_i\neq A_j$.

בוודאי זאת: נניח נק' שלישית x_k שאיננה נמצאת על הישר הנפרש ע"י x_i ו x_j. אז הישר $\overline{x_jx_k}$ "נמצא" ב A_j ולא ב A_i.

תרגיל 9 – אלגברה ליניארית 2

1. יהא המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. עבור הוקטורים $\{(1,1,1),(1,-2,1),(1,2,3)\}$ השתמשו בתהליך גרם-שמידט וקבלו בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{R}^3$.

2. יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל שדה כלשהוא ויהא U תת מרחב של V. נגדיר את התת מרחב הניצב ל U להיות $U^{\perp}=\{v\in V:(v,u)=0\,\forall u\in U\}$ קרי אוסף כל הווקטורים הניצבים ל U. הוכיחו:

   a. $U^{\perp}\oplus U=V$

   b. $\dim U+\dim U^{\perp}=\dim V$

   c. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$

3. נתון בסיס $v_1=(2,1),v_2=(1,3)$ ל $V=\mathbb{R}^2$.

   a. מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{v_1,v_2\}$ ב V^*. קרי מצאו φ_1,φ_2 כך ש $\varphi_i\left(v_j\right)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$. כלומר מצאו במפורש את $\varphi_i\left(x,y\right)$.

   b. ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$ מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ב V. קרי מצאו שני וקטורים u_1,u_2 שמקיימים $\varphi_i\left(v\right)=\left(u_i,v\right)\ \forall v\in V,\forall i$.

4. V מרחב מכ"פ מעל $\mathbb{C}$. נתונה ט"ל $T\neq 0$ נורמלית מ V לעצמו (כלומר $TT^*=T^*T$). הוכיחו ש T לא נילפוטנטית (כזכור T נקראת נילפוטנטית אם קיים n כך ש $T^n=0$).

5. נתונה ט"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $T\left(x,y\right)=\left(5x+8y,-3x+4y\right)$ ונתונה המכ"פ הסנדרטית על $\mathbb{R}^2$. יהא הבסיס $A=\{(1,1),(0,2)\}$ ל $\mathbb{R}^2$.

   a. חשבו את T^*.

   b. חשבו את $[T]_A^A$.

   c. חשבו את $\left[T^*\right]_A^A$.

   d. חזרו על שני הסעיפים הקודמים עבור $A'=\{(1,1),(1,-1)\}$.

   e. הסבירו מדוע $\left([T]_{A'}^{A'}\right)^*=\left[T^*\right]_{A'}^{A'}$ אבל $\left([T]_A^A\right)^*\neq\left[T^*\right]_A^A$.

   f. אם קיים בסיס A שעבורו $[T]_A^A$ אוניטרית האם בהכרח לכל בסיס A' מתקיים ש $[T]_{A'}^{A'}$ אוניטרית?

תרגיל 9 – אלגברה ליניארית 2

פתרון

1. יהא המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. עבור הוקטורים $\{(1,1,1),(1,-2,1),(1,2,3)\}$ השתמשו בתהליך גרם-שמידט וקבלו בסיס אורתונורמלי ל $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

נבצע גרם שמידט על הווקטורים משמאל לימין ונקבל $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$.

2. יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל שדה כלשהוא ויהא U תת מרחב של V. נגדיר את התת מרחב הניצב ל U להיות $U^{\perp}=\{v\in V:(v,u)=0\,\forall u\in U\}$ קרי אוסף כל הווקטורים הניצבים ל U. הוכיחו:

a. $U^{\perp}\oplus U=V$

פתרון:

אם $v\in U\cap U^{\perp}$ אז $(v,v)=0$ ולכן $v=0$. יהא $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{k}$ בסיס א"נ ל U ונשלים אותו לבסיס א"נ $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}$ לכל המרחב V. אזי כל איבר $v\in V$ הוא מהצורה $\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i=\sum_{i=1}^{k}a_i\varepsilon_i+\sum_{i=k+1}^{n}a_i\varepsilon_i$ כשהסכום עד k הוא ב U והסכום מ $k+1$ הוא ב $U^{\perp}$.

מש"ל.

b. $\dim U+\dim U^{\perp}=\dim V$.

פתרון:

באופן כללי $W\oplus U=V$ גורר ש $\dim U+\dim W=\dim V$ כיוון ש איחוד הבסיסים הוא בסיס למרחב כולו.

c. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$

פתרון:

לפי הגדרה $U\subseteq\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ ומצד שני מסעיף קודם נובע שהם שווי מימד ולכן יש שוויון.

3. נתון בסיס $v_1=(2,1),v_2=(1,3)$ ל $V=\mathbb{R}^2$.

a. מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{v_1,v_2\}$ ב V^*. קרי מצאו φ_1,φ_2 כך ש $\varphi_i(v_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$. כלומר מצאו במפורש את $\varphi_i(x,y)$.

פתרון:

לפי הבסיס $\{v_1,v_2\}$ ב V ו $\{1\}$ ב $\mathbb{R}$ נקבל $[\varphi_1]=(1,0),[\varphi_2]=(0,1)$ מטריצת המעבר מ $\{v_1,v_2\}$ לבסיס הסטנטרטי $\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$ ולהיפך $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ ולכן אם נתרגם

את ייצוג הפונקציונאלים לבסיס הסנדרטי נקבל באופן מפורש

$$\varphi_1(x,y)=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}y,\varphi_2(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y$$

b. ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$ מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ב V.

קרי מצאו שני וקטורים u_1,u_2 שמקיימים $\varphi_i(v)=(u_i,v)\ \forall v\in V,\forall i$.

פתרון: $u_1=\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right),u_2=\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

4. V מרחב מכ"פ מעל $\mathbb{C}$. נתונה ט"ל $T\neq 0$ נורמלית מ V לעצמו (כלומר $TT^*=T^*T$). הוכיחו ש T לא נילפוטנטית (כזכור T נקראת נילפוטנטית אם קיים n כך ש $T^n=0$).

פתרון:

אם בשלילה הט"ל נילפוטנטית אז כל הע"ע שלה שווים אפס וכיוון שהיא נורמלית מעל $\mathbb{C}$ היא לכסינה כלומר היא יש בסיס שלפיו היא מיוצגת כמטריצת האפס כלומר זו הט"ל אפס זהותית-סתירה.

5. נתונה ט"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $T(x,y)=(5x+8y,-3x+4y)$ ונתונה המכ"פ הסנדרטית על $\mathbb{R}^2$. יהא הבסיס $A=\{(1,1),(0,2)\}$ ל $\mathbb{R}^2$.

a. חשבו את T^*.

פתרון: $T^*(x,y)=(5x-3y,8x+4y)$

b. חשבו את $[T]_A^A$.

פתרון:

$$[T]_A^A=\begin{pmatrix}13 & 16\\ -6 & -4\end{pmatrix}$$

c. חשבו את $[T^*]_A^A$.

פתרון:

$$[T^*]_A^A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

d. חזרו על שני הסעיפים הקודמים עבור $A'=\{(1,1),(1,-1)\}$.

$$[T]_{A'}^{A'}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 6 & 2\end{pmatrix}$$

$$[T^*]_{A'}^{A'}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

e. הסבירו מדוע $\left([T]_{A'}^{A'}\right)^*=[T^*]_{A'}^{A'}$ אבל $\left([T]_A^A\right)^*\neq[T^*]_A^A$.

פתרון: A אינו בסיס א"נ ואילו A' ווקטורים ניצבים שווי אורך -הייצוג לפי בסיס כזה הוא כמו ייצוג לפי בסיס א"נ והכפלת המטריצה המייצגת בסקלר שונה מאפס ואותו כנ"ל לצמודה(עם בדיוק אותו סקלר).

f. אם קיים בסיס A שעבורו $\left[T\right]_{A}^{A}$ אוניטרית האם בהכרח לכל בסיס A' מתקיים ש $\left[T\right]_{A'}^{A'}$ אוניטרית?

<u>**פתרון:**</u>

לא, דוגמה הט"ל המיוצגת לפי הבסיס הסטנדרטי $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ולפי הבסיס

$\left\{(1,1),(0,2)\right\}$ נקבל $\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

אלגברה לינארית 2 - תרגיל 10

6 במאי 2005

בתאריך 22/23.5 יתקיים בוחן בזמן התרגול. החומר לבוחן הוא מרחבי מ"פ וט"ל במרחבי מ"פ.

1. נביט ב-$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ עם המ"פ $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
נגדיר ט"ל מהמרחב לעצמו על ידי $T(ax^2+bx+c) = 2ax+b$.
חשבו את T^*.

2. ראינו בכיתה כי כל ט"ל נורמלית היא מכפלה של ט"ל הרמיטית ואוניטרית מתחלפות.
בדקו שהמטריצה הבאה היא נורמלית $A = \begin{pmatrix} 2i & 4i & 0 \\ 4i & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ והציגו אותה בתור מכפלה של של מטריצה אוניטרית ומטריצה הרמיטית מתחלפות. כלומר מצאו U אוניטרית ו-H הרמיטית כך ש-$A = HU = UH$.

3. יהי V מ"ו ו-$A = \{v_1 ... v_n\}$ בסיס ל-V. נניח כי לכל ט"ל $T \in Hom(V,V)$ מתקיים $([T]_A^A)^* = [(T*)]_A^A$. הראו כי וקטורי הבסיס הם אורתוגונליים ושווי אורך (לא בהכרח אורתונורמליים). רמז: הביטו בט"ל $T_{ij}(v_k) = \delta_{ik} \cdot v_j$.

4. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ הינה סימטרית ולכן ניתן להציגה בתור $A = UDU^{-1}$ כך ש-D אלכסונית ממשית ו-U אורתוגונלית. מצאו D ו-U כנ"ל. האם D ו-U יחידות?

הגדרה: יהי V מ"ו ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא T-אינווריאנטי, או אינווריאנטי תחת T, אם $T(U) \subseteq U$.
במקרה זה ניתן להגדיר את הט"ל $T\mid_U$ שהינה ט"ל מ-U לעצמו המקיימת לכל $u \in U$ את השיוויון $T\mid_U (u) = T(u)$, ונקראת הצמצום של T ל-U.

5. א) יהי V מ"ו ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית. נניח כי U הינו תת מרחב T-אינווריאנטי. הראו כי תתי המרחבים הבאים הינם T-אינווריאנטים:
i) $T(U) = \{T(x) \mid x \in U\}$.
ii) $T^{-1}(U) = \{x \in V \mid T(x) \in U\}$.

ב) הראו כי אם $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ ו-V_i הינם T-אינווריאנטים אז ניתן להציג את T בתור מטריצת בלוקים.

אלגברה לינארית 2 - פתרון תרגיל 10

6 במאי 2005

1. על מנת לחשב את T^* יש למצוא בסיס א"נ ל-$\mathbb{R}_2[x]$. ניקח את הבסיס $\{1,x,x^2\}$ ונבצע עליו תהליך גרהם-שמידט. התוצאה שנקבל:
$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$. $\varepsilon_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)$.
כעת נחשב את T לפי בסיס זה:
$T(\varepsilon_1) = 0$, $T(\varepsilon_2) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}\varepsilon_1$, $T(\varepsilon_3) = \sqrt{\frac{45}{2}}x = \sqrt{15}\sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{15}\varepsilon_2$
לכן T מיוצגת בבסיס זה על ידי המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ובאותו הבסיס T^* מיוצגת על ידי $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$. על מנת לסיים את התשובה יש לעבור לבסיס $\{1,x,x^2\}$

2. ראינו בכיתה כי כל ט"ל נורמלית היא מכפלה של ט"ל הרמיטית ואוניטרית מתחלפות.
המטריצה הבאה היא אנטי-הרמיטית ($A^* = -A$) ולכן נורמלית ($AA^* = A^*A = -A^2$).
ניקח $U = i \cdot Id$ ו-$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. אז U היא אוניטרית ו-H הרמיטית וכן $A = HU = UH$.

3. נסמן ב-T_{ij} את הט"ל הבאה - $T_{ij}(v_k) = \delta_{ik} \cdot v_j$ אז בבסיס זה T_{ij} מיוצגת על ידי המטריצה E_{ij} המקיימת $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$. על פי הנתון נובע כי T_{ij}^* מיוצגת על ידי $E_{ij}^* = E_{ji}$ כלומר $T_{ij}^* = T_{ji}$. מכאן נקבל כי
$$\|v_j\|^2 = (v_j,v_j) = (T_{ij}(v_i),v_j) = (v_i,T_{ij}^*(v_j)) = (v_i,T_{ji}(v_j)) = (v_i,v_i) = \|v_i\|^2$$
כמו כן $0 = (v_i,0) = (v_i,T_{ii}(v_j)) = (v_i,T_{ii}^*(v_j)) = (T_{ii}(v_i),v_j) = (v_i,v_j)$.

4. המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ הינה סימטרית ולכן ניתן להציגה בתור $A = UDU^{-1}$ כך ש-D אלכסונית ממשית ו-U אורתוגונלית.
ראשית נמצא את פולינום האופייני של A - $P_A(x) = (x-4)(x-1)^2$.
אח"כ נמצא את הערכים העצמיים - $x_1 = 4, x_2 = 1$.

כעת נמצא את המרחבים העצמיים - $V_1 = Ker(A-4I) = sp\{(1,1,1)\}$.
$V_2 = Ker(A-I) = sp\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$.
נבצע תהליך גרהם-שמידט על כל אחד מהבסיסים בנפרד ונקבל:
$V_1 = sp\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\right\}$, $V_2 = sp\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0), \frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)\right\}$.

כעת ניקח $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ אז U היא מטריצה אוניטרית ולכן $U^{-1} = U^* = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ נסמן $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אז נקבל: $A = UDU^{-1}$. (שימו לב כי בד"כ הראנו כי $U^{-1}AU = D$). D היא יחידה עד כדי שינוי סדר אברי האלכסון. U אינה יחידה ותלויה בבחירת הבסיסים הא"נ למרחבים העצמיים. ישנם בסיסים רבים כאלו.

5. i) $T(U) \subseteq U$ ולכן $T(T(U)) \subseteq T(U)$ ומכאן ש-$T(U)$ הינו T-אינווריאנטי.
ii) $T(x) \in T^{-1}(U) \Leftarrow T(T(x)) = y \in U \Leftarrow T(x) \in U \Leftarrow x \in T^{-1}(U)$ ומכאן ש-$T^{-1}(U)$ הינו T-אינווריאנטי.

ב) נניח כי $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ ו-V_i הינם T-אינווריאנטים ויהיו $A_i = \left\{v_1^i..v_{n_i}^i\right\}$ בסיסים ל-V_i אז $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ בסיס ל-V. T מיוצגת לפי בסיס זה על ידי מטריצת בלוקים.

אלגברה לינארית 2 – תרגיל 11

תזכורת: בשבוע הבא בזמן התרגול יערך הבוחן השני. הבוחן ימשך כ – 45 דקות ויהיה על החומר שהוצג בהרצאות, בתירגולים ובתרגילים בנושא מרחבי מ"פ וט"ל מעל מרחבי מ"פ.

הגדרות: **1.** נתונה ט"ל $T:V\to V$. $Z(\alpha,T)$ הוא המרחב הציקלי ביחס ל- T הנפרש ע"י $\alpha\in V$ והוא מוגדר להיות הקבוצה $\{p(T)\alpha : p\in F[t]\}$.

2. בהנתן V,T,α כנ"ל ותת מרחב $W\subset V$ נגדיר את $S(\alpha,W)$ להיות $\{p\in F[t] : p(T)\alpha\in W\}$.

3. תת קבוצה $I\subset F[t]$ תקרא אידיאל אם מתקיים:

א. I סגורה לחיבור פולינומים.

ב. לכל $p(t)\in I$ ו $q(t)\in F[t]$ מתקיים כי $p(t)\cdot q(t)\in I$.

4. $p(t)\in I$ יקרא היוצר של אידיאל $I\subset F[t]$ אם $p(t)$ פולינום מתוקן המחלק כל פולינום ב - I.
(במילים אחרות, האידיאל המינימלי $F[t]$ המכיל את $p(t)$ הוא I).

1. הוכיחו כי $Z(\alpha,T)$ הינו התת מרחב ה-T אינווריאנטי המינימלי המכיל את α.

2. הוכיחו כי אם $W\subset V$ תת מרחב אינווריאנטי אזי $S(\alpha,W)$ אידיאל.

עובדה: ידוע כי לכל אידיאל ב $F[t]$ קיים יוצר.

הגדרה: היוצר של האידיאל $S(\alpha,\{0\})$ מסומן ב- $p_\alpha(t)\in F[t]$ ונקרא ה T-מאפס של α.

3. א. הראו כי אם $p_\alpha(t)$ פולינום מדרגה r, אזי $\{\alpha,T\alpha,...,T^{r-1}\alpha\}$ בסיס של $Z(\alpha,T)$. הסיקו כי $\deg(p_\alpha(t))=\dim(Z(\alpha,T))$.

ב. הראו כי $p_\alpha(t)$ הוא הפולינום המינימלי של $T_{|Z(\alpha,T)}$.

הגדרה: $\alpha\in V$ יקרא וקטור ציקלי של $T:V\to V$ אם מתקיים כי $V=Z(\alpha,T)$.

4. **א.** הראו כי אם ל-T קיים וקטור ציקלי אז הפולינום המינימלי והפולינום האופייני של T שווים.

ב. עבור הט"ל הבאות מצאו וקטור ציקלי או הוכיחו כי לא קיים כזה:

.1 $T=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ .2 $T=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ .3 $T=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5. נתונה המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}01&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\ddots&1\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$ (כלומר כל הערכים הם '0' מלבד '1' מעל האלכסון הראשי)

המייצגת ט"ל T ביחס לבסיס נתון $\{e_1,...,e_n\}$. מצאו את ה T-מאפסים של ה- e_i.

הנחייה: מצאו את הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית ב $Z(e_i,T)$ לכל i.

אלגברה לינארית 2 – תרגיל 11

1. הוכיחו כי $Z(\alpha,T)$ הינו התת מרחב ה-T אינווריאנטי המינימלי המכיל את α.

פתרון:

נוכיח ארבע טענות:

א. $Z(\alpha,T)$ הינו תת מרחב:

סגירות לחיבור: אם $v,w\in Z(\alpha,T)$ אז ע"פ הגדרת קיימים פולינומים $p(t),q(t)$ כך ש- $v=p(T)\alpha$ ו- $w=q(T)\alpha$.

מכך נובע – $v+w=p(T)\alpha+q(T)\alpha=(p(T)+q(T))\alpha=(p+q)T(\alpha)$

ולכן, $v+w$ הוא תמונה של α ביחס לפולנום של T ולכן $v+w\in Z(\alpha,T)$.

הוכחת הסגירות לכפל בסקלאר נעשית בדיוק באותו אופן.

ב. $Z(\alpha,T)$ הוא T אינווריאנטי:

נניח כי $v\in Z(\alpha,T)$ אז קיים פולינום $p(t)$ כך ש- $v=p(T)\alpha$.

אז מתקיים: $T(v)=T(p(T)\alpha)=id_{F[x]}(T)(p(T)\alpha)=(id_{F[x]}(t)\cdot p(t))(T)\alpha$

(כאשר $id_{F[x]}(t)=t$ הוא פולינום הזהות ב-$F[x]$ המקיים $id_{F[x]}(T)=T$)

לכן $T(v)$ הוא תמונה של α ע"י איזשהו פולינום ב-T ולכן $T(v)\in Z(\alpha,T)$.

ג. $Z(\alpha,T)$ מכיל את α:

ניקח את הפולינום הקבוע $1(t)=1$ אז $1(T)=id$ ו- $1(T)\alpha=id(\alpha)=\alpha$ ולכן $\alpha\in Z(\alpha,T)$.

ד. אם W הינו תת מרחב T אינווריאנטי המכיל את α אזי הוא מכיל (אינווריאנטיות) את $T(\alpha)$ ובאינדוקציה גם את $T^i(\alpha)$ לכל i וכן כל צירוף לינארי $\sum_{i=1}^{n}a_iT^i(\alpha)$ כלומר כל תמונה של α ע"י פולינום ב-T. לכן W מכיל את $Z(\alpha,T)$ ולכן $Z(\alpha,T)$ הינו המרחב המינימלי (ביחס להכלה) ה-T אינווריאנטי המכיל את α.

2. הוכיחו כי אם $W\subset V$ תת מרחב אינווריאנטי אזי $S(\alpha,W)$ אידיאל.

פתרון:

נניח כי $p(t),q(t)\in S(\alpha,W)$ כלומר $p(T)\alpha\in W, q(T)\alpha\in W$. אזי מסגירות לחיבור ב- W נקבל כי גם $(p+q)(T)\alpha=(p(T)+q(T))\alpha=p(T)\alpha+q(T)\alpha\in W$. לכן $S(\alpha,W)$ סגור לחיבור.

נניח כי $\sum_{i=1}^{n}a_it^i=s(T)\in F[t]$ פולינום כלשהו. צריך להראות כי $s(t)\cdot p(t)\in S(\alpha,W)$, כלומר צריך להראות $(s\cdot p)(T)\alpha\in W$.

נשתמש בעובדה ש W תת מרחב אינווריאנטי. נתון כי $p(T)\alpha\in W$, לכן גם $(t\cdot p(t))(T)\alpha=T(p(T)\alpha)\in W$ ובאינדוקציה נקבל לכל i: $(t^i\cdot p(t))(T)\alpha=T^i(p(T)\alpha)\in W$.

כעת נוכל לכתוב:

$$(\sum_{i=1}^{n}a_it^i\cdot p(t))(T)\alpha=\sum_{i=1}^{n}(a_it^i\cdot p(t))(T)\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i((t^i\cdot p(t))(T)\alpha)$$

כלומר $(s(t)\cdot p(t))T\alpha$ סכום לינארי של איברים ב- W ומאחר ש- W תת מרחב נקבל $(s\cdot p)(T)\alpha\in W$.

3. א. הראו כי אם $p_\alpha(t)$ פולינום מדרגה r, אזי $\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$ בסיס של $Z(\alpha,T)$. הסיקו כי $\deg(p_\alpha(t)) = \dim(Z(\alpha,T))$.

ב. הראו כי $p_\alpha(t)$ הוא הפולינום המינימלי של $T_{|Z(\alpha,T)}$.

פתרון:

א. נראה כי $\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$ קבוצה בת"ל: נניח בשלילה ש $c_1\alpha + c_2T\alpha + ... + c_{r-1}T^{r-1}\alpha = 0$, וכי לא כל המקדמים הם 0, אז מתקיים: $(c_1 + c_2t + ... + c_{r-1}t^{r-1})(T)\alpha = 0$. כלומר קיים פולינום שונה מאפס מדרגה קטנה מ- r ב- $S(\alpha,\{0\})$ בסתירה לכך שה T-מאפס של α הוא מדרגה r. סתירה.

נראה ש $\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$ קבוצה פורשת:

נסמן $p_\alpha(t) = c_1 + c_2t + ... + c_{r-1}t^{r-1} + t^r$

אז $c_1\alpha + c_2T\alpha + ... + c_{r-1}T^{r-1}\alpha + T^r\alpha = 0$

לכן $T^r\alpha = -c_1\alpha - c_2T\alpha - ... - c_{r-1}T^{r-1}\alpha$

לכן $T^r\alpha \in span\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$.

כעת, $T^{r+1}\alpha = -c_1T\alpha - c_2T^2\alpha - ... - c_{r-1}T^r\alpha$

לכן $T^{r+1}\alpha \in span\{\alpha, T\alpha, ..., T^r\alpha\} = span\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$.

באינדוקציה מראים כי לכל $k \geq r$ $T^k\alpha \in span\{\alpha, T\alpha, ..., T^{k-1}\alpha\} = span\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$

לכן גם כל צרוף לינארי - $b_1\alpha + b_2T\alpha + ... + b_kT^k\alpha$ נמצא ב-$span\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$.

סה"כ נקבל $\{\alpha, T\alpha, ..., T^{r-1}\alpha\}$ פורשת את $Z(\alpha,T)$, כנדרש.

ב. מספיק הראות שפולינום כלשהו $p(t)$ מאפס את $T_{|Z(\alpha,T)}$ אם"ם רק $p(t) \in S(\alpha,\{0\})$. כיוון ש $p_\alpha(t)$ הפולינום המתוקן בעל הדרגה המינימלית ב- $S(\alpha,\{0\})$ תנבע מיד הטענה.

נניח כי $p(t)$ מאפס את $T_{|Z(\alpha,T)}$, כלומר לכל $x \in Z(\alpha,T)$ מתקיים $p(T)x = 0$.

בפרט $p(T)\alpha = 0$ ולכן ע"פ ההגדרה נקבל $p(t) \in S(\alpha,\{0\})$.

נניח מאידך כי $p(t) \in S(\alpha,\{0\})$ אז על פי השאלה הקודמת (שהרי $\{0\}$ תמיד T-אינווריאנטי ולכן $S(\alpha,\{0\})$ אידיאל) לכל פולינום $s(t)$ מתקיים: $(p(t)\cdot s(t))(T)\alpha = 0$.

לכן $p(T)(s(T)\alpha) = 0$ ולכן $p(T)(x) = 0$ לכל $x \in Z(\alpha,T)$ כלומר $p(t)$ מאפס את $T_{|Z(\alpha,T)}$.

4. א. הראו כי אם ל-T קיים וקטור ציקלי אז הפולינום המינימלי והפולינום האופייני של T שווים.

ב. עבור הט"ל הבאות מצאו וקטור ציקלי או הוכיחו כי לא קיים כזה:

1. $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

פתרון:

א. נניח כי $V = Z(\alpha,T)$, אז ע"פ סעיף א' בשאלה הקודמת

$\deg(p_\alpha(t)) = \dim(Z(\alpha,T)) = \dim(V) = \deg(p_T(t))$ כאשר $p_T(t)$ הפולינום האופייני של T.

ע"פ סעיף ב' באותה שאלה $p_\alpha(t)$ הוא הפולינום המינמלי של T ולכן לפולינום המינימלי והאופייני של T אותה דרגה ולכן הם שווים.

ב. 1. קל לוודא שפולינום האופייני של T הוא $(t-2)^3$ בעוד הפולינום המינימלי של T הוא $(t-2)^2$ לכן ע"פ סעיף א' אין ל- T וקטור ציקלי.

2. נבחר $\alpha = e_3$. אז $T^2(\alpha) = T\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\12\\4\end{pmatrix}$. בדיקה מהירה מראה שהדטרמיננטה של $\begin{pmatrix}9&0&0\\12&3&0\\4&2&1\end{pmatrix}$ שונה מאפס לכן $\{\alpha, T(\alpha), T^2(\alpha)\}$ קבוצה בת"ל, כלומר $\alpha = e_3$ וקטור ציקלי.

3. קיים וקטור ציקלי, לדוגמא: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

5. נתונה המטריצה הבאה: $A = \begin{pmatrix}0 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ (כלומר כל הערכים הם '0' מלבד '1' מעל האלכסון הראשי)

המייצגת ט"ל T ביחס לבסיס נתון $\{e_1,...,e_n\}$. מצאו את ה T-מאפסים של ה- e_i .

הנחייה: מצאו את הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית ב $Z(e_i,T)$ לכל i.

פתרון:

$T(e_1)=0$.

לכל $n \ge i > j \ge 1$ מתקיים $T^j(e_i) = T^{j-1}(e_{i-1}) = ... = e_{i-j}$.

אם $i \le j$ אזי $T^j(e_i) = T^{j-1}(e_{i-1}) = ... = T^{j-i+1}(e_1) = 0$.

סה"כ נובע ש - $Z(e_i,T) = \{p(T)\alpha : p \in F[t]\} = span\{e_i, T(e_i), T^2(e_i), ...\} =$

$= span\{e_i, T(e_i), ..., T^{i-1}(e_i)\} = span\{e_i, e_{i-1}, ..., e_1\}$

לכן ע"פ שאלה 3 סעיף ב', ה T-מאפס של e_i שווה לפולנום המינימלי של $T_{|span\{e_i,e_{i-1},...,e_1\}}$. כל שנותר הוא למצוא את הפולינום המינימלי הנ"ל. מאחר שהמרחב הוא ציקלי הפולניום המינמלי שווה לפולינום האופייני (שאלה 4 סעיף א') וקל לבדוק שזהו הפולינום $p(t) = t^i$.

תרגיל 12 באלגברה ליניארית 2

19 במאי 2005

1. נתונה המטריצה הנילפוטנטית $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   מצא מטריצה הפיכה P ומטריצה בצורת ג'ורדן J כך ש- $P^{-1}AP = J$.

2. נתונות מטריצות $A_i \in M_7(F)$ $i = 1, \ldots, 12$ כך שלכל i $A_i^4 = 0$. הוכח שיש שתיים מבינהן שהן דומות זו לזו.

3. נתון שדה סופי F עם q איברים. כמה מטריצות נילפוטנטיות יש ב- $M_2(F)$?

4. בהינתן מטריצה נילפוטנטית A מעל שדה ממציין אפס נגדיר $e^A \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ (זהו רק סכום סופי). הוכח את הטענות הבאות:

(א) אם $A, B \in M_n(F)$ נלפוטנטיות וגם $AB = BA$ אז $A + B$ גם נלפוטנטית ו $e^{A+B} = e^A e^B$.

(ב) אם A נלפוטנטית אז e^A הפיכה והערך העצמי היחיד שלה הוא 1.

(ג) תן דוגמה של $A, B \in M_2(F)$ נלפוטנטיות וכך ש $A + B$ לא נלפוטנטית.

(ד) אם $B \in M_n(F)$ נלפוטנטית ו P הפיכה אז גם $A = P^{-1}BP$ נלפוטנטית ומתקיים $e^A = P^{-1}e^B P$.

פתרון תרגיל 12 באלגברה ליניארית 2

19 במאי 2005

פתרון שאלה 1: נחשב $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = 0$. נבצע תהליך גאוס ל A.
נגלה שהיא מדרגה 3 וכמו כן $Ker(A) = Span\left\{u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. בכוונה בחרתי כאן את הווקטור הראשון להיות בתמונה של A^2. נבחר מקור תחת A^2 ל u, למשל $w = e_3 + e_5$, ואז $u = A^2w, Aw, w$ יהיו בסיס לבלוק הראשון שלנו.
משיקולי מימד מתחייב ש $Ker(A) \subseteq Im(A)$. נפתור את המשוואה $Ax = v$ ונבחר פתרון ספציפי, למשל $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. אז v, x הם בסיס לבלוק השני שלנו.

אנחנו יכולים לבנות עכשיו את $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. חישוב קצר נותן ש-
$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ובאמת $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון שאלה 2: נשתמש בסימון $[a,b,c,d,e,f] = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. המשפט על קיום ויחידות צורת ג'ורדן אומר לנו שכל מטריצה מסדר שבע על שבע שמקיימת $A^4 = 0$ היא דומה לאחת ורק לאחת מבין נמטריצות הבאות:

$[0,0,0,0,0,0]$
$[1,0,1,0,1,0]$ $[1,0,1,0,0,0]$ $[1,0,0,0,0,0]$
$[1,1,0,1,1,0]$ $[1,1,0,1,0,1]$ $[1,1,0,1,0,0]$ $[1,1,0,0,0,0]$
$[1,1,1,0,1,1]$ $[1,1,1,0,1,0]$ $[1,1,1,0,0,0]$

פתרון שאלה 3: הפולינום האופייני של $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ הוא $x^2-(a+d)x+(ad-bc)$.
ולכן היא נלפוטנטית אם"ם $d = -a$ וגם $det(A) = 0$. נתבונן במשוואה $-a^2 - bc = 0$.
לכל $b \neq 0$ (ויש $q-1$ כאלו) מתקיים שלכל a יש c אחד ויחיד שפותר. עד עכשיו ספרנו סה"כ $q(q-1)$ פתרונות. אם $b = 0$ אז יש פתרון אם"ם $a = 0$ ואז כל c פותר. כלומר מצאנו q פתרונות נוספים. סה"כ יש $q(q-1) + q = q^2$ פתרונות, ולכן q^2 מטר-יצות נלפוטנטיות.

פתרון שאלה 4:

אם $AB = BA$ אז אפשר להשתמש בנוסחת הבינום $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.
לכן אם $A^r = B^s = 0$ אז כבר $(A+B)^{r+s+1} = 0$ כי כל המחוברים הם כבר אפס.
עכשיו נפתח את הנוסחה, בדיוק כמו באינפי :

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} A^k B^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} A^k B^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k}\right) =$$

הביטוי בסוגריים לא תלוי ב- k ולכן

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n\right) = e^A e^B$$

נציין שכל הסכומים שמופיעים לעיל הם סופיים.
רואים ש- e^A רגולרית עבור A נלפוטנטית מייד מן הנוסחה $I = e^0 = e^A e^{-A}$.
דרך נוספת: מן ההגדרה של e^A ומהעובדה שסכום של נלפוטנטיות מתחלפות הוא נלפוטנטי נובע מייד ש- $e^A - I$ היא נלפוטנטית. לכן אפשר לכתוב $e^A = I - U$ עם U נלפוטנטית. אבל $(I-U)(I+U+U^2+\ldots+U^n) = I - U^{n+1}$, ולכן $I-U$ הפיכה. לגבי הערכים העצמיים: אנחנו יודעים שיש P רגולרית כך ש $P^{-1}UP$ היא בצורת ג'ורדן, ולכן משולשית עליונה עם אפס על האלכסון הראשי. לכן
$P^{-1}e^A P = P^{-1}(I-U)P = I - P^{-1}UP$ היא משולשית עליונה עם אחד על האלכסון הראשי, ולכן אחד הוא הערך העצמי היחיד שלה.
המטריצות $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ הן נלפוטנטיות וסכומן לא. החישוב שמראה את סעיף ד הוא:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(P^{-1}BP)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{-1}B^n P = P^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n\right)P = P^{-1}e^B P$$

אלגברה ליניארית (2) - תרגיל 13

שאלה 1:

א. תהי A מטריצה נילפוטנטית מסדר $n\times n$, ונניח כי A דומה למטריצה בצורת ז'ורדן נילפוטנטית J, המורכבת מ-k בלוקים, כך שהבלוק הגדול ביותר הוא מסדר n_1, הוכיחו כי:

- n_1 שווה לאינדקס הנילפוטנטיות של A (כלומר $A^{n_1}=0$ אך $A^{n_1-1}\neq 0$).
- מספר הבלוקים k שווה ל- $n-r(A)$, כאשר $r(A)$ הוא הדרגה של A.

ב. תהי A מטריצה כלשהי מסדר $n\times n$ בעלת פולינום אופייני $(t-\lambda)^n$ ובעלת פולינום מינימלי $(t-\lambda)^s$, הוכיחו כי:

- הבלוק הגדול ביותר במטריצת ז'ורדן הדומה ל-A הוא מסדר s.
- מספר הבלוקים במטריצת ז'ורדן הדומה ל-A שווה ל- $n-r(A-\lambda I)$.

שאלה 2:

נתונות המטריצות הבאות ב- $M_{3\times 3}(\mathbf{C})$:

$$D=\begin{pmatrix}3&0&0\\-1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\quad,\quad C=\begin{pmatrix}3&0&0\\-2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\quad,\quad A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

א. עבור כל אחת מהמטריצות, מצאו את צורת ז'ורדן שלה ואת המטריצה המז'רדנת.

ב. הסיקו כי A ו- B דומות, ומצאו מטריצה P כך ש- $P^{-1}AP=B$.

ג. האם המטריצות C ו- D דומות?

שאלה 3:

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות עבור טרנספורמציות ליניאריות $T:\mathbf{C}^5\rightarrow\mathbf{C}^5$ שיש להן שני ערכים עצמיים שונים a ו-b.

(רמז: מה יכולים להיות הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של T?).

שאלה 4:

תהי $A\in M_{3\times 3}(\mathbf{C})$ ונסמן ב- a,b,c את הערכים העצמיים של A (שימו לב שהם לא בהכרח שונים!).

א. מיינו את צורות ז'ורדן האפשריות של המטריצה A.

ב. מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי המתאים לכל-אחת מהצורות ב- א'.

ג. הסיקו – אם $A,B\in M_{3\times 3}(\mathbf{C})$ שתי מטריצות עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז A ו- B דומות.

ד. האם טענה ג' נכונה גם ב- $M_{4\times 4}(\mathbf{C})$? הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית.

שאלה 5:

א. הראו כי הבלוקים $\begin{pmatrix}\lambda&1&&0\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}\lambda&&&0\\1&\lambda&&\\&\ddots&\ddots&\\0&&1&\lambda\end{pmatrix}$ דומים.

ב. הסיקו כי כל מטריצה A דומה למטריצה המשוחלפת שלה A^t.

אלגברה ליניארית (2) – פתרון לתרגיל 13

שאלה 1:

סעיף א':

נתונה מטריצה נילפוטנטית A מסדר $n\times n$, ונניח כי A דומה למטריצה בצורת ז'ורדן נילפוטנטית J, המורכבת מ-k בלוקים, כך שהבלוק הגדול ביותר הוא מסדר n_1.

נסמן ב- J_i את בלוק ז'ורדן ה-i של J ונניח שהוא מסדר n_i. נשים לב ש- $J_i^{n_i}=0$ לכל i. בפרט מהמקסימליות של n_1, $J_i^{n_1}=0$ לכל i, ולכן $J^{n_1}=0$. לא ייתכן ש- $J^{n_1-1}=0$ משום ש- $J_1^{n_1-1}\neq 0$.

לכן, J היא מאינדקס נילפוטנטיות n_1. משום ש-A דומה ל-J, גם A היא מאינדקס נילפוטנטיות J_1.

הדרגה של J שווה למספר העמודות הבלתי תלויות ב- J. נשים לב שכל בלוק J_i תורם n_i-1 עמודות בלתי-תלויות, כמספר ה-1-ים המופיעים בו. העמודות הנתרמות ע"י בלוקים שונים הן כמובן בלתי-תלויות זו בזו, לכן מספר העמודות הבלתי-תלויות ב- J הוא:

$$r(J) = (n_1-1) + (n_2-1) + \dots (n_k-1) = (n_1+n_2+\dots+n_k) - k = n - k \rightarrow k = n-r(J)$$

A דומה ל-J, לכן $r(A) = r(J)$ ולכן $k = n-r(A)$.

סעיף ב':

על-פי הנתון, $A-\lambda I$ היא מטריצה נילפוטנטית מאינדקס s. לכן, לפי סעיף א', הבלוק הגדול ביותר בצורת ז'ורדן של $A-\lambda I$ הוא מסדר s. לכן הבלוק הגדול ביותר בצורת ז'ורדן של A הוא מסדר s.

לפי סעיף א', מספר הבלוקים בצורת ז'ורדן של $A-\lambda I$ הוא $k = n-r(A-\lambda I)$, וזהו בדיוק מספר הבלוקים בצורת הז'ורדן של A.

שאלה 2:

סעיף א': לכל-אחת מהמטריצות נמצא את צורת ז'ורדן ואת המטריצה המז'רדנת.

קל לראות שהע"ע היחיד של A הוא 2, וש- $A-2I$ היא מטריצה נילפוטנטית מסדר 2 ומדרגה 1.

ניקח בתור בסיס ל- $Ker(A-2I)$ את שני הוקטורים $\{u=(0,0,1)^t\ ,\ w=(1,-1,0)^t\}$, ונמצא ש- $v=(1,0,0)^t$ מקיים ש- $(A-2I)v=u$.

ניקח $P=\{u,v,w\}$, כלומר $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$, ואז צורת ז'ורדן של A היא: $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

קל לראות שהע"ע היחיד של B הוא 2, וש- $B-2I$ היא מטריצה נילפוטנטית מסדר 2 ומדרגה 1.

ניקח בתור בסיס ל- $Ker(B-2I)$ את שני הוקטורים $\{u=(0,1,-2)^t,\ w=(0,1,0)^t\}$, ונמצא ש- $v=(1,0,0)^t$ מקיים ש- $(B-2I)v=u$.

ניקח $P=\{u,v,w\}$, כלומר $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-2&0&0\end{pmatrix}$, ואז צורת ז'ורדן של B היא: $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

קל לראות שהע״ע של C הם 2 ו-3. בנוסף, קל לוודא ש-C לכסינה. ניקח את P בתור מטריצה של ו״ע המתאימים לע״ע 2 ו-3, אז $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$ ואז צורת ז׳ורדן של C היא $P^{-1}CP=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$.

קל לראות שהע״ע של D הם 2 ו-3. ניקח את $w=(1,-1,0)^t$ בתור הו״ע המתאים לע״ע 3 ואת $u=(0,0,1)^t$ בתור הו״ע המתאים לע״ע 2. נמצא ש- $v=(0,1,0)^t$ מקיים ש- $(D-2I)v=u$.

ניקח $P=\{w,u,v\}$, כלומר $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, ואז צורת ז׳ורדן של D היא: $P^{-1}DP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

<u>סעיף ב׳:</u>

המטריצות A ו-B דומות משום שיש להן את אותה צורת ז׳ורדן. ניקח את המטריצה:

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-2&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1/2\\1&0&0\\0&1&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1/2\\0&-1&-1/2\\0&0&-1/2\end{pmatrix}$$

ניתן לוודא ש- $Q^{-1}AQ=B$.

<u>סעיף ג׳:</u>

המטריצות C ו-D אינן דומות, משום שאין להן את אותה צורת ז׳ורדן. בפרט, C לכסינה ו-D אינה לכסינה.

<u>שאלה 3:</u>

נסמן ב- $J_n(\lambda)$ את בלוק ז׳ורדן בגודל $n\times n$ שמתאים לע״ע λ.

בה״כ נניח שגודל בלוק ז׳ורדן המתאים לע״ע a קטן מגודל הבלוק המתאים לע״ע b. לכן, הפולינומים האופייניים האפשריים של T הם $(t-a)(t-b)^4$ ו- $(t-a)^2(t-b)^3$. נבדוק מהם הפולינומים המינימליים האפשריים.

צורות ז׳ורדן	פולינום מינימלי	פולינום אופייני
$J_1(a)J_1(b)J_1(b)J_1(b)J_1(b)$	$(t-a)(t-b)$	$(t-a)(t-b)^4$
$J_1(a)J_2(b)J_1(b)J_1(b)$ $J_1(a)J_2(b)J_2(b)$	$(t-a)(t-b)^2$	
$J_1(a)J_3(b)J_1(b)$	$(t-a)(t-b)^3$	
$J_1(a)J_4(b)$	$(t-a)(t-b)^4$	
$J_1(a)J_1(a)J_1(b)J_1(b)J_1(b)$	$(t-a)(t-b)$	$(t-a)^2(t-b)^3$
$J_1(a)J_1(a)J_2(b)J_1(b)$	$(t-a)(t-b)^2$	
$J_1(a)J_1(a)J_3(b)$	$(t-a)(t-b)^3$	
$J_2(a)J_1(b)J_1(b)J_1(b)$	$(t-a)^2(t-b)$	
$J_2(a)J_2(b)J_1(b)$	$(t-a)^3(t-b)^2$	
$J_2(a)J_3(b)$	$(t-a)^4(t-b)^3$	

<u>שאלה 4:</u>

<u>סעיפים א' ו-ב':</u>

a,b,c	**הפולינום האופייני**	**הפולינום המינימלי**	**צורת ז'ורדן**
a,b,c שונים זה מזה	(t-a)(t-b)(t-c)	(t-a)(t-b)(t-c)	$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$
רק 2 מתוך הע"ע שונים a≠b , b=c	$(t-a)(t-b)^2$	(t-a)(t-b)	$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & b \end{pmatrix}$
		$(t-a)(t-b)^2$	$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & 1 \\ & & b \end{pmatrix}$
שלושת הע"ע שווים a = b = c	$(t-a)^3$	(t-a)	$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$
		$(t-a)^2$	$\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$
		$(t-a)^3$	$\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$

<u>סעיף ג':</u>

מהטבלה לעיל קל לראות שלכל פולינום אופייני ופולינום מינימלי קיימת צורת ז'ורדן יחידה, ולכן כל שתי מטריצות מסדר 3 עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי הן דומות.

<u>סעיף ד':</u>

הטענה בסעיף ג' אינה נכונה למטריצות מסדר 4. למשל, לשתי המטריצות הבאות יש אותו פולינום אופייני $(t-a)^4$ ופולינום מינימלי $(t-a)^2$ אך צורת ז'ורדן שלהן שונה (ראו גם שאלה 4 בתרגיל 6).

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

שאלה 5:

סעיף א':

ניתן לוודא כי המטריצה $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ היא מטריצת הדמיון בין הבלוקים $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

ו- $\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

סעיף ב':

נסמן ב-J את המטריצה בצורת ז'ורדן של A, אז קיימת מטריצה P כך ש- $P^{-1}AP = J$, לכן: $J^t = P^tA^t(P^{-1})^t = P^tA^t(P^t)^{-1}$. A ו- A^t דומות אס"ם יש להן אותה צורת ז'ורדן, כלומר אס"ם J ו-J^t דומות. אך ניתן לבנות במפורש את מטריצת הדמיון בין J ל- J^t בתור מטריצת בלוקים מהצורה שמצאנו ב-א'.

<u>אלגברה ליניארית 2 – תרגיל סיכום</u>

זהו אוסף שאלות (רובן קלות) שנלקחו ממבחנים משנים קודמות. עומדים לרשותכם כל משפטי הקורס (ובמיוחד צורת Jordan) וזאת בתנאי שאינכם משתמשים במשפט אשר שקול לטענה אשר אותה אתם רוצים להוכיח.
תלמידים המעוניינים להגיש תרגיל נוסף מוזמנים לפתור 5 שאלות מהחלק הראשון ולהגישם ישירות לתאי הבודקים עד ה-15/6.

חלק 1: בכל השאלות הבאות V מ"ו ממימד סופי n ו- $T:V\to V$ ט"ל.

כזכור, ט"ל נקראת "לכסינה" אם קיים לה ייצוג ע"י מטריצה אלכסונית (כלומר קיים בסיס של וקטורים עצמיים).
ט"ל תקרא "ניתנת לשילוש" אם קיים לה ייצוג ע"י מטריצה משולשית.

1. אם ל- T קיימים n ערכים עצמיים שונים אזי T ניתנת ללכסון.

2. T ניתנת לשילוש אם"ם הפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים.

3. T ניתנת ללכסון אם"ם הפולינום המינימלי שלה מתפרק לגורמים ליניאריים זרים.

4. מבלי להשתמש במשפט לכסון ט"ל נורמליות, הוכיחו כי אם T אוניטרית וניתנת לשילוש אזי T לכסינה.
הנחייה: הראו שאם B בסיס אשר ביחס אליו T מיוצגת ע"י מטריצה משולשית ו-E בסיס המתקבל מ-B ע"י תהליך גרהם-שמידט אזי המטריצה המייצגת את T ביחס ל-E גם משולשית. כעת השתמשו בכך ש E בסיס אורתונורמלי ו- T אוניטרית.

5. הראו כי אם T אידמפוטנטית (כלומר $T^2=T$) אזי קיים לה ייצוג ע"י $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (כאשר I_r מטריצת הזהות מסדר r).

6.הוכיחו כי מטריצות נילפוטנטיות מסדר 6×6 הן דומות אם"ם הן מאותה דרגה ובעלי אותו פולינום מינימלי.

7. תארו עד צמידות את כל המטריצות $A\in M_{5\times 5}(\mathrm{F})$ כך ש- $A^2=0$.

8.הראו שאם קיים למרחב V וקטור ציקלי ביחס ל-T אזי הפולינום המינימלי של T שווה לפולינום האופייני של T.

9. הראו כי אם כל וקטור ב-V הוא ו"ע אזי קיים ע"ע עצמי יחיד כלומר $Tv=\lambda v$ לכל $v\in V$.

10. תהי $S:R^2\to R^2$ העתקת הסיבוב במישור סביב הראשית בזוית θ (בכיוון מתמטי חיובי, כלומר נגד כיוון השעון). מצאו את ההעתקה הצמודה ל- S ואת המשמעות הגיאומטרית שלה.

חלק 2: שאלות/טענות אלו נלקחו מהתרגולים (יתכן שהן לא ניתנו בכל הקבוצות):

1. הראו את תכונת הכפליות של סימן תמורות, כלומר אם σ,τ תמורות אזי $sign(\sigma*\tau)=sign(\sigma)*sign(\tau)$.

2.א. הוכיחו כי הפולינום המינימלי של T מחלק חזקה (כלשהי) של הפולינום האופייני של T.
ב. הראו דוגמא ש-n (כלומר מימד המרחב) מהווה את החזקה המינימלית המקיימת את א.

3. א. הראו דוגמא למטריצות B,A בעלות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי כך ש A ו B אינן דומות.
ב. האם קיימת דוגמא כזו כאשר ל-A ו-B אותה דרגה? האם קיימת דוגמא כזו כאשר A ו-B לכסינות?
הערה: אתם יכולים להשתמש בקשר בין צורת Jordan של מטריצה ובין תכונות שונות של המטריצה.

4. תהי T ט"ל אוניטרית על V, ויהי W תת-מרחב אינווריאנטי תחת T, הוכיחו כי $T(W^{\perp})=W^{\perp}$.
5. הוכיחו כי הע"ע של ט"ל הרמיטית הם ממשיים, של ט"ל אנטי-הרמיטית הם מדומים,של ט"ל אוניטרית הם מערך מוחלט 1.

6. א. הראו $\mathrm{Im}(T^{*})=(\ker T)^{\perp}$.
ב. הראו כי אם T נורמלית אזי $\ker T=\ker T^{*}, \mathrm{Im}\,T=\mathrm{Im}\,T^{*}$.

7. הוכיחו כי $A=B^{*}B$ אם"ם A נורמלית והע"ע העצמיים שלה ממשיים אי-שליליים.

8. מטריצה שאלכסונה מורכב כולו אחדות ומחוץ לאלכסון יש רק אפסים מלבד $\lambda\neq 0$ בקורדינטה יחידה כלשהי נקראת transvection. הוכיחו כי כל מטריצות ה-transvection דומות.
רמז: הראו שלכולן אותה צורת Jordan.

9. תהי $A\in M_{n}(R)$ מטריצה סימטרית אזי A דומה אורתוגולית למטריצה אלכסונית מעל R.

10.א. הראו כי ריבוי הגיאומטרי של ע"ע קטן/שווה לריבוי האלגברי שלו.
ב. הראו שאם T לכסינה אזי קיים שוויון, כלומר לכל ערך עצמי הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי.
ג. הראו שאם הפולינום האופייני של T מתפרק למכפלה של גורמים ליניאריים אז ההפך גם נכון, כלומר אם קיים שוויון בין הריבוי הגיאומטרי והריבוי האלגברי של כל ע"ע אזי T לכסינה.

11. נניח כי T נורמלית. הראו: א. T הרמיטית אם"ם כל הערכים העצמיים של T ממשיים.
ב. T אנטי-הרמיטית אם"ם כל הערכים העצמיים של T מדומים.
ג. T אוניטרית אם"ם כל הערכים העצמיים של T הם בעלי ערך מוחלט 1.

<u>פתרון תרגיל 15 – תבניות בילינאריות</u>

1 .א. המטריצה המייצגת תהייה מטריצה 2×3 כאשר במקום ה i,j יהיה המספר $f(e^2{}_i,e^3{}_j)$ לכן $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$. (למשל $a_{23}=f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})=6$).

ב. באותו אופן לפי הבסיסים הנתונים נקבל $B=\begin{pmatrix}21&12&30\\12&7&18\end{pmatrix}$.

(למשל $b_{12}=f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})=2+10=12$).

מטריצות החפיפה Q,P יהיו פשוט מטריצות המעבר מהבסיסים של B לבסיסים הסטנדרטיים (הבסיסים לפיהם A מיוצגת) כלומר $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. ואכן $P^tAQ=B$.

ג. נעבוד לפי האלגוריתם הנתון בהוכחת משפט 5, עמיצור עמ' 316-317:

ראשית נמצא α_1,β_1 כך ש $f(\alpha_1,\beta_1)=1$. ניקח למשל $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. נסמן $V_1=sp\{\alpha_1\},W_1=sp\{\beta_1\}$. יהיו $V_2\subseteq\mathbb{R}^2,W_2\subseteq\mathbb{R}^3$ המאפסים של β_1,α_1 בהתאמה כלומר $V_2=\{v\in\mathbb{R}^2\mid f(v,\beta_1)=0\},W_2=\{w\in\mathbb{R}^3\mid f(\alpha_1,w)=0\}$. במקרה שלנו קל לראות

$V_2=\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\mid a+4b=0\}=sp\{\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\},W_2=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x+2y+3z=0\}=sp\{\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\}$.

אנו יודעים לפי המשפט (וגם אפשר לראות ישירות) כי $\mathbb{R}^2=V_1\oplus V_2,\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_2$. נתבונן בצמצום של f על $V_2\times W_2$ ונפעל באותו אופן על הצמצום הנ"ל: המטריצה המייצגת את הצמצום לגבי הבסיסים שבחרנו ל V_2,W_2 היא: $C=\begin{pmatrix}-6&-3\end{pmatrix}$. נבחר $\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ אז $f(\alpha_2,\beta_2)=1$. נסמן $V_3\subseteq V_2,W_3\subseteq W_2$ להיות המאפסים של β_2,α_2 בתוך V_2,W_2. ברור $V_3\subset V_2$ כי $\alpha_2\notin V_3$ ולכן $V_3=\{0\}$. מחישוב (אפשר בקלות למצוא בעזרת המטריצה C) יוצא

$W_3=sp\{\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\}=sp\{\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}\}$, נסמן $\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}$.

ניקח את הבסיסים: α_1,α_2 ל $\mathbb{R}^2$ ו β_1,β_2,β_3 ל $\mathbb{R}^3$. לפי הבסיסם הנ"ל אם כן המטריצה המייצגת את f נראית כך: $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. כלומר f דומה למטריצת D_2. בדקו שאכן:

$$D_2=\begin{pmatrix}1&\frac{-1}{2}&3\\0&0&-6\\0&\frac{1}{6}&3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&0\\4&-1\end{pmatrix}$$

. (שימו לב $\begin{pmatrix}1&0\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&-1\end{pmatrix}^t$).

2. עתה נשתמש באלגוריתם הנתון בהוכחת משפט 10 המוצג בעמיצור עמ' 319 ומשפט 14 עמ' 322-323:

נמצא $\alpha_1\in\mathbb{R}^2$ עבורו $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$. ניקח למשל $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ אז אנו יודעים מ- A כי $f(\alpha_1,\alpha_1)=4$.

נסמן $V_1=sp\{\alpha_1\}$ ו $V_2=\{v\in\mathbb{R}^2 \mid f(\alpha_1,v)=0\}$ המאפס של α_1. במקרה שלנו $V_2=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\}=\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid 2x+4y=0\}=sp\{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\}$. נסמן $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. נשים לב כי $f(\alpha_1,\alpha_1)=4,\ f(\alpha_1,\alpha_2)=f(\alpha_2,\alpha_1)=0,\ f(\alpha_2,\alpha_2)=0$ ולכן לפי בסיס זה המטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$. ניקח בסיס $v_1=\frac{\alpha_1}{2},v_2=\alpha_2$ וברור כי לפי בסיס זה המטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

בדיקה: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\2&-1\end{pmatrix}$.

ב. לפי הבסיס $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת תהיה $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

ג. לפי הבסיס $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ המטריצה המייצגת תהיה $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

.3

א. נקח את A עצמה בתור מטריצת החפיפה ונשתמש בעובדה כי A סימטרית ונקבל: $A^tAA=AAA=A^3$.

ב. נקח את A^{-1} כמטריצת החפיפה ונזכור שגם היא סימטרית (כי A סימטרית) ונקבל $(A^{-1})^tAA^{-1}=A^{-1}AA^{-1}=A^{-1}$.

ג. כן אלו מטריצות חופפות, נתבונן במטריצה A: יהי u ו"ע של הע"ע 1 ו v ו"ע של הע"ע -3. נשים לב כי אם f מוגדרת ע"י $f(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ אזי:

$f(u,u)=u^t(Au)=u^tu=\|u\|>0,\ f(v,v)=v^t(-3)v=-3\|v\|<0$.

בנוסף $f(u,v)=u^t(Av)=-3u^tv=-3(u,v)=0$ משום שו"ע המתאימים לע"ע שונים של מטריצה נורמלית הם אורתוגונליים ובשוויון האחרון זו בסה"כ מכפלה פנימית סטנדרטית ו A סימטרית לכן ודאי

נורמלית. לכן לפי בסיס זה המטריצה המייצגת נראית $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ כאשר $p > 0, q < 0$ וברור כי מטריצה זו חופפת (ע"י נירמול) למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. באופן דומה ניתן להראות B חופפת לאותה מטריצה ולכן A ו B חופפות.