

תרגיל 1 בלינאריות 2

שאלה 1 – הפיכת מטריצה 2×2 ושימושים:

בשאלה זו נוכיח כי מטריצה $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ היא הפיכה אם $ad - bc \neq 0$ ונחשב באופן מפורש את המטריצה ההופכית שלה, שתסומן ב- A^{-1} . בנוסף, נדגים מספר שימושים לתוצאה זו.

א. תהי $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, מצאו מטריצה המקיימת $AB = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$.

- ב. הסיקו כי אם $ad - bc \neq 0$ אז A הפיכה. חשבו את המטריצה ההופכית של A במקרה זה.
ג. הראו כי אם $ad - bc = 0$ אז העמודות של A תלויות ליניארית והסיקו (מדוע?) ש- A אינה הפיכה.
ד. השתמשו בסעיף (ב) על-מנת לתאר את כל המטריצות A (בגודל 2×2) המקיימות $A^2 = I$.

ה. השתמשו בסעיף (ב) כדי להראות שאם $C = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ מטריצה סקלרית אז גם ACA^{-1} מטריצה סקלרית.

ו. אם $C = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ מטריצה אלכסונית, האם גם ACA^{-1} מטריצה אלכסונית? הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית. (מטריצה אלכסונית היא מטריצה שכל איבריה מחוץ לאלכסון שווים ל-0).

ז. אם $C = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ מטריצה משולשית עליונה, האם גם ACA^{-1} מטריצה משולשית עליונה? הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית.

הערה: למטריצה בגודל 2×2 כ"כ, הערך $ad - bc$ הוא הטרמיננטה של A . בשיעור תוכיחו את המקרה הכללי: לכל מטריצה ריבועית B מתקיים: B הפיכה אם $\det(B) \neq 0$ (הגדרת הטרמיננטה למטריצה $n \times n$ תיעשה בשיעור).

שאלה 2 – תמורות

עבור תמורה $\sigma \in S_n$ נגדיר את קבוצת ההימוכים של σ ע"י קבוצת הזוגות

$$T_\sigma = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

ונגדיר את הסימן של σ ע"י $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{|T_\sigma|}$.

א. מצאו את הסימן של התמורות הבאות ב- S_5 :

$$\pi = (1\ 3\ 4\ 2\ 5), \sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 5), \tau = (1\ 4\ 5\ 2\ 3)$$

ב. חשבו את $\sigma \cdot \tau$, σ^{-1} , $\pi \cdot \sigma$, τ^{-1} , וכן חשבו את סימנם.

ג. כתבו את התמורות הבאות כמכפלת מחזורים זרים i . $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, ii . $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

ד. חשבו את המכפלות הבאות:

$$i. (1\ 3\ 2)(3\ 2\ 4\ 5\ 6)(3\ 1\ 2) \quad ii. (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4) \dots (n-1\ n) \quad iii. (5\ 4\ 3\ 2\ 1)^5 \quad iv. (3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4)(2\ 1\ 5)$$

ה. תהי $\pi \in S_n$. הוכיחו כי $\text{sign}(\pi) = \text{sign}(\pi^{-1})$.

ו. תהי $\tau \in S_n$, הראו כי $\tau \cdot \sigma$ עוברת על S_n כאשר σ עוברת על S_n . כלומר: $S_n = \{\tau \cdot \sigma : \sigma \in S_n\}$.

הדרכה: הראו כי לכל תמורה $\pi \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש- $\tau \cdot \sigma = \pi$.

תחילת 4 האותיות 2

$$AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I \Rightarrow B \text{ Invertible } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow (C)$$
$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ cx_1 + dx_3 & cx_2 + dx_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax_2 + bx_4 = cx_1 + dx_3 \\ ax_1 + bx_3 = cx_2 + dx_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = d & x_2 = -b \\ x_3 = -c & x_4 = a \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad |OK|$$

$$\text{slc1} \cdot \frac{1}{ad-bc} \therefore \text{or } ad-bc \neq 0 \text{ or } \textcircled{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{iff} \quad ad = bc \quad \text{sic} \quad ad - bc = 0 \quad \text{p.c.} \quad \textcircled{c}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{Sk}$$

ראן קונחתי e b,d ≠ 0 אר שנייה אפס בברור

על A ניתן הפיכה אם $b \neq 0$ - rank n (כלומר $d \neq 0$)

→ 1000: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ s.t. $a=0$ s.t. $ad-bc=0$

מלוח ז'ש השורה תלויה אין פתחן יח'ז אלמלא

$$Ax = c \quad A \text{ אינה הפיכה} \quad \text{חוקי מלכה} \quad \text{הבטוי} \quad A^{-1}$$

אין מאגד נאט $ad - bc = 0$, אדער האטריצ: $\det A = 0$
היא יחידה

(3) אנוני מחפשים מו"מ. 380 מ"מ. : דומה

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\det A)^3 = da - bc = \det A$$

$$\Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

$$\det^2 A = 1 \quad \sim N^T N \quad A^2 = I \quad \sim N^T P N \quad \text{בצורה של}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\det A = 1$ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

⑥ (הצגה) רחב מטריצה :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx \\ cx & dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx \\ cx & dx \end{pmatrix} \left[\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} axd-bxc & axb-bxa \\ cxd-dxc & -bxc+dxa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} axd-bxc & 0 \\ 0 & axd-bxc \end{pmatrix}$$

✓ וזה מטריצה סקלרית

⑦ (הצגה) רחב מטריצה :

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} adx-bcy & -axb+aby \\ cdx-cdy & -cbx+ady \end{pmatrix}$$

✓ עבור $x \neq y$ המטריצה המתקבלת אינה

אזרסונית. למשל עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

מתקבל: $ACA^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -1.5 & 1.5 \end{pmatrix}$

⑧ הנוסחה הקובעת מראה שיש במקרה $C = I$

משוואה עליונה ACA^{-1} אינה בהכרח משוואה

עליונה

✓

(c)

$$\star \pi = (13425) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_\pi = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (4,5)\}$$

$$\Rightarrow \text{sign } \pi = 1$$

$$\star \sigma = (124)(35) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_\sigma = \{(1,2), (1,4), (1,5), (3,4), (3,5)\}$$

$$\Rightarrow \text{sign } \sigma = -1$$

$$\star \tau = (14523) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_\tau = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4)\}$$

$$\Rightarrow \text{sign } \tau = 1$$

$$\star \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T_{\tau^{-1}} = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

$$\Rightarrow \text{sign } \tau^{-1} = 1$$

$$\star \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_{\sigma^{-1}} = \{(1,4), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$$

$$\Rightarrow \text{sign } \sigma^{-1} = -1$$

$$\star \pi \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T_{\pi\sigma} = \{(1,2), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5)\}$$

$$\Rightarrow \text{sign}(\pi\sigma) = -1$$

$$\star \sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{\sigma\pi} = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}$$

$$\Rightarrow \text{sign}(\sigma\pi) = -1$$

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1543)(2) \quad (2)$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (123)(45)$$

$$(i) (132)(32456)(312) = (14562) \quad \checkmark \quad (3)$$

$$(ii) (12)(23) \dots (n-1 \ n) = (123 \dots n) \quad \checkmark$$

הוכחה: באינדוקציה על n

$$n=2 \text{ ברור } (12) = (12)$$

$$n \text{ (י"ח) } n+1 \text{ (י"ח) } n+1$$

$$(12) \dots (n-1 \ n)(n \ n+1) \stackrel{(\text{ii})}{=} (1 \dots n)(n \ n+1) = (1 \dots n \ n+1)$$

לפי עקרון האינדוקציה יהיה שגוי $2 \leq n$

$$(iii) (54321)^5 = \varepsilon \quad \text{תוצאה נכונה} \quad \checkmark$$

$$(iv) (34)(125)(34)(215) = \varepsilon \quad \text{יש חלופה כי המעגלים זרים}$$

$$= (125)(215) = (1)(2)(5) = \varepsilon \quad \checkmark$$

$$(v) \text{ תהי } \pi \in S_n \text{ אזי } \text{sign} \pi = \text{sign} \pi^{-1}$$

הוכחה: נראה ש- $|\pi| = |\pi^{-1}|$ ומכאן תבנה הטענה

(יזכר העתקה f בין π ל- π^{-1}): $\pi^{-1}(i, j) \in T_\pi$ אזי:

$$f(i, j) \in T_{\pi^{-1}} \text{ אזי } f(i, j) = (\pi(j), \pi(i))$$

$$\text{אז } \pi(i) > \pi(j) \text{ אז } \pi^{-1}(\pi(j)) = j \text{ ו- } \pi^{-1}(\pi(i)) = i$$

$$\text{אם } i < j \text{ אז } (\pi(j), \pi(i)) \in T_{\pi^{-1}} \text{ ברור שזה עתקה כל}$$

$$\text{חנה (מספר של } \pi \text{ חתום) נגד } |\pi| = |\pi^{-1}|$$

$$\text{sign} \pi = \text{sign} \pi^{-1} \quad \checkmark \quad \text{☺}$$

$$(1) \text{ תהי } \tau \in S_n \text{ אזי } S_n = \{\tau \sigma : \sigma \in S_n\}$$

הוכחה: ברור ש- $S_n = \{\tau \sigma : \sigma \in S_n\}$ נראה את ההפך. תהי

$$\pi \in S_n \text{ יש להראות לקבוע } \sigma \in S_n \text{ ש- } \pi = \tau \sigma$$

$$\text{אם } \sigma = \tau^{-1} \pi \text{ נגזר ואכן } \sigma = \tau^{-1} \pi \text{ ואכן } \tau \sigma = \tau(\tau^{-1} \pi) = (\tau \tau^{-1}) \pi = \pi$$

☺

אני צריך! צריך! צריך!

תרגיל 1 בלינארית 2

שאלה 1 – הפיכת מטריצה 2×2 ושימושים:

בשאלה זו נוכיח כי מטריצה $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ היא הפיכה אם $ad-bc \neq 0$ ונחשב באופן מפורש את המטריצה ההופכית שלה, שתסומן ב- A^{-1} . בנוסף, נדגים מספר שימושים לתוצאה זו.

א. תהי $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ניקח $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ואז $AB = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$.

ב. אם $ad-bc \neq 0$ אז A הפיכה: כי קיימת $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

ג. אם $ad-bc=0$ אז $d = \frac{b}{a} \cdot c$ ולכן $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \frac{b}{a} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, כלומר העמודות של A תלויות לינארית. לכן יש שני

וקטורים שעוברים ע"י A לאפס, ולכן A אינה העתקה חח"ע. מכך נובע ש- A אינה הפיכה.

ד. המטריצות A (בגודל 2×2) המקיימות $A^2 = I$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A \Leftrightarrow A^{-1} = A \Leftrightarrow A^2 = I$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ או } A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \text{ עבור } a^2 + bc = 1$$

ה. השתמשו בסעיף (ב) כדי להראות שאם $C = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ מטריצה סקלרית אז גם ACA^{-1} מטריצה סקלרית.

נשתמש בביטוי למטריצה ההופכית כדי לחשב את המכפלה:

$$ACA^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} (ad-bc)x & (-ba+ab)x \\ (cd-dc)x & (-bc+ad)x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

הוכחה חלופית: הוכחנו בסמסטר שעבר שמטריצה סקלרית היא מרכזית. לכן, במקרה שלנו בו C

$$ACA^{-1} = (AC)A^{-1} = (CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CI = C$$

ו. אם $C = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ מטריצה אלכסונית, האם גם ACA^{-1} מטריצה אלכסונית? לא! ניקח

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ובעת, ע"י כפל}$$

$$ACA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ מטריצות, נקבל:}$$

ז. אם $C = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ מטריצה משולשית עליונה, האם גם ACA^{-1} מטריצה משולשית עליונה? לא! ניקח

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ובעת, ע"י כפל}$$

$$ACA^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ מטריצות, נקבל:}$$

משולשית עליונה.

שאלה 2 – תמורות

עבור תמורה $\sigma \in S_n$ נגדיר את קבוצת ההיפוכים של σ ע"י קבוצת הזוגות
 $T_\sigma = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$, ונגדיר את הסימן של σ ע"י $sign(\sigma) = (-1)^{|T_\sigma|}$.

א. מצאו את הסימן של התמורות הבאות ב- S_5 . נציג כל תמורה כמכפלת חילופים:

$$sign(\pi) = (-1)^4 = 1 \Leftarrow \pi = (1\ 3\ 4\ 2\ 5) = (13)(34)(42)(25)$$

$$sign(\sigma) = (-1)^3 = -1 \Leftarrow \sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 5) = (12)(24)(35)$$

$$sign(\tau) = (-1)^4 = 1 \Leftarrow \tau = (1\ 4\ 5\ 2\ 3) = (1\ 4)(4\ 5)(5\ 2)(2\ 3)$$

ב. חשבו את $\tau^{-1}, \sigma^{-1}, \pi \cdot \sigma, \tau \cdot \sigma$, וכן חשבו את סימנם.

$$sign(\tau\sigma) = (-1)^3 = -1 \Leftarrow \tau\sigma = (1325)(4) = (13)(32)(25)$$

$$sign(\pi\sigma) = (-1)^3 = -1 \Leftarrow \pi\sigma = (1543)(2) = (15)(54)(43)$$

$$sign(\sigma^{-1}) = (-1)^3 = -1 \Leftarrow \sigma^{-1} = (214)(35) = (21)(14)(35)$$

$$sign(\tau^{-1}) = (-1)^4 = 1 \Leftarrow \tau^{-1} = (32541) = (32)(25)(5\ 4)(41)$$

ג. כתבו את התמורות הבאות כמכפלת מחזורים זרים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4\ 5).ii \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4\ 3)(2).i$$

ד. חשבו את המכפלות הבאות:

$$(1\ 3\ 2)(3\ 2\ 4\ 5\ 6)(3\ 1\ 2) = (1\ 4\ 5\ 6\ 2\ 3).i$$

$$(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)\dots(n-1\ n) = (1\ 2\ 3\ 4\dots n-1\ n).ii$$

$$(5\ 4\ 3\ 2\ 1)^5 = Id.iii \quad (\text{תמורת הזהות})$$

$$(3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4)(2\ 1\ 5) = Id.iv$$

ה. תהי $\pi \in S_n$. הוכיחו כי $sign(\pi) = sign(\pi^{-1})$.

שימו לב שקיימת התאמה חח"ע ועל בין קבוצת ההיפוכים של π לקבוצת ההיפוכים של π^{-1} . שכן:

$$\Leftrightarrow (i, j) \in T_\pi$$

$$\Leftrightarrow i < j, \pi(i) > \pi(j)$$

$$\Leftrightarrow \pi^{-1}(\pi(i)) = i < j = \pi^{-1}(\pi(j)), \pi(i) > \pi(j)$$

$$\Leftrightarrow (\pi(j), \pi(i)) \in T_{\pi^{-1}}$$

$$sign(\pi) = (-1)^{|T_\pi|} = (-1)^{|T_{\pi^{-1}}|} = sign(\pi^{-1}) \quad \text{ולכן } |T_\pi| = |T_{\pi^{-1}}|$$

ו. תהי $\tau \in S_n$, הראו כי $\tau \cdot \sigma$ עוברת על S_n כאשר σ עוברת על S_n . כלומר: $S_n = \{\tau \cdot \sigma : \sigma \in S_n\}$.

$\tau \in S_n$ חח"ע ועל ולכן קיימת התמורה ההופכית, τ^{-1} . נגדיר $\sigma = \tau^{-1}\pi \in S_n$, ואז כמובן $\tau \cdot \sigma = \pi$.

לכן $S_n \subseteq \{\tau \cdot \sigma : \sigma \in S_n\}$ (כי כאמור לכל תמורה $\pi \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש- $\tau \cdot \sigma = \pi$).

מצד שני, $\{\tau \cdot \sigma : \sigma \in S_n\} \subseteq S_n$, כי S_n סגורה לכפל. ובסה"כ שיוויון: $S_n = \{\tau \cdot \sigma : \sigma \in S_n\}$.

אלגברה לינארית 2 – תרגיל 2-3 (להגשה בעוד שבועיים)

12.03.06

תמורות

1. הציגו את התמורות הבאות כמכפלה של חילופים:

א. $(1,2,3,4,5)$

ב. $(1,4,6)(2,5,3)$

ג. $(2,4,1)(2,3,5)$

ד. $(1,2,3)(1,2)(3,4,5)$

2. נציג חידה על משחק פופולארי.

נתבונן במטריצה מסדר 4×4 כך שערכיה הם

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

אנו נתייחס לתא עם הערך 16

כתא ריק.

הצעדים המותרים הם חילוף של התא הריק עם תא שכן.

שאלה: הוכיחו שלא ניתן להגיע מהמצב ההתחלתי למצב הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

3. הוכיחו שב- S_n הצי מהתמורות עם סימן חיובי וחצי עם סימן שלילי.

4. הוכיחו כי לכל תמורה $\alpha \in S_n$ מתקיים $\alpha(j_1, j_2, \dots, j_k) \alpha^{-1} = (\alpha(j_1), \alpha(j_2), \dots, \alpha(j_k))$.

5. הגדרה: מטריצה $A \in M_n(F)$ נקראת מטריצת פרמוטציה אם בכל שורה ובכל עמודה יש קורדינטה אחת כלכל השונה מאפס והשווה ל-1.

יהא F שדה, ותהא $\alpha \in S_n$. נגדיר מטריצת פרמוטציה $A \in M_n(F)$ בצורה הבאה: $Ae_i = e_{\alpha(i)}$ כאשר $e_1, \dots, e_n$ הם איברי הבסיס הסטנדרטי (כעמודות). הוכיחו כי $\det(A) = \text{sign}(\alpha)$.

חלוקת פולינומים

6. בצעו חילוק פולינומים עם שארית של $3x^3 + x^2 - 2$ ב- $x - 2$ מעל הממשיים.

דטרמיננטות

1. חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות ע"י שימוש ישיר בהגדרה:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. המטריצה הבאה נקראת מטריצת ונדרמונדה:

$$x_1, \dots, x_n \in F$$

$$\det(W_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \quad W_n := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. תהא:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

מתי המטריצה הפיכה.

אזכרה ענאית 2 - תוצא 2-3

$$(12345) = (12)(23)(34)(45) \quad (א) \quad (1)$$

$$(146)(253) = (14)(46)(25)(53) \quad (ב)$$

$$(241)(235) = (14235) = \quad (ג)$$

$$= (14)(42)(23)(35)$$

$$(123)(12)(345) = (1345) = \quad (ד)$$

$$= (13)(34)(45)$$

$$\alpha(j_1, \dots, j_k) \alpha^{-1} = (\alpha(j_1) \dots \alpha(j_k)) \quad \alpha \in S_n \quad (5)$$

הוכחה: צריך להראות שלא $\ell \in [n]$ מתקיים

$$(\alpha(j_1, \dots, j_k) \alpha^{-1})(\ell) = (\alpha(j_1) \dots \alpha(j_k))$$

ראשית נראה שלא $\alpha(j_i)$ $B(\alpha(j_i)) = A(\alpha(j_i))$

$$\alpha(j_{i+1}) = A(\alpha(j_i)) \stackrel{?}{=} B(\alpha(j_i))$$

נתבונן ישירות ונקבל

$$B(\alpha(j_i)) = (\alpha(j_1, \dots, j_k) \alpha^{-1})(\alpha(j_i)) =$$

$$= (\alpha(j_1 \dots j_k))(\alpha(j_i)) = \alpha(j_{i+1}) = A(\alpha(j_i))$$

כעת נראה שלא $\ell \notin \{\alpha(j_1), \dots, \alpha(j_k)\}$ מתקיים $A(\ell) = B(\ell)$

אם כן הוכחנו: מאחר ש $\ell \notin \{\alpha(j_1), \dots, \alpha(j_k)\}$ $A(\ell) = \ell$

$$B(\ell) = (\alpha(j_1 \dots j_k) \alpha^{-1})(\ell) = \ell$$

משום ש α תמורה $\alpha^{-1}(\ell) \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ ולכן

$$B(\ell) = (\alpha \cdot \alpha^{-1})(\ell) = \ell$$

אם ראינו ש $A = B$ B שולטת באופן זהה על ℓ

$$\ell \in [n] \quad A = B \quad (6)$$

(5) תבוא A מטריצה סימטרית, למתקבלת α α^{-1}

$$\det A = \text{sign } \alpha$$

הוכחה: לפי ההצבה $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} N_\sigma \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$

ה- A בא שורה ובמל α תמורה יש בדיוק איבר יחיד 1

וב השאר אפס. בסכום של הדטרמיננטה הם

משפט לאני α אחד המורכבים יהיה אפס.
 רק עבור α ב המורכבים יהיו 1 נוסף (קדם)

$$\det A = N_2 \prod a_{i,\alpha(i)} = \text{sign } \alpha$$

נסביר יותר לעומק: נבחר $a_{i,\alpha(i)} = 1$: כיצד? -
 $Ae_i = e_{\alpha(i)}$ מכאן

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{מקום } \alpha(1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{מקום } \alpha(n)$$

$\Leftarrow$ המטריצה A היא כלשהי שבמחזורי α היא α

יש 1 משורה $\alpha(i)$ וכל השאר אפסים.

בהצבה של צטרמינוס (טבה בסכימה נעזר על שורות אלו)

מאחר ש $\det A = \det A^t$ נוכל לחשוב על הסכימה כאל

סכימה של עמודות. מכאן בק הפסקציה α שלוקחה

מהטור i יאלץ האבר השורה $\alpha(i)$ תתרום לסכום. (ii)

(6) נחלק את הפולינומים

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 7x + 14 \\ 3x^3 + x^2 + 0x - 2 \quad | \quad x-2 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 \\ \hline 7x^2 + 0x \\ 7x^2 - 14x \\ \hline 14x - 2 \\ 14x - 28 \\ \hline -26 \end{array}$$

$$\Rightarrow (3x^2 + 7x + 14)(x-2) + 26 = 3x^3 + x^2 - 2$$

5C

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

אם (10) (7)

$$\det A = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + \\ + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 \\ + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = 1$$

6) אם $B \in M_n(F)$ השתמשו לחשב את הדטרמיננטה
צריך לספור 24 פירמוטציות!

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

(שימו לב! $\sigma \in S_n$ אם $\sigma \neq \epsilon$ אז קיים

$1 \leq k \leq n$ כך ש- $\sigma(k) \neq k$ ולכן $a_{k, \sigma(k)}$ לא

הוא 0 ולכן $a_{k, \sigma(k)} = 0$ ולכן σ לא תורם

הצורה הנכונה לדטרמיננטה:

$$\Rightarrow \det B = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 15$$

7) הדטרמיננטה של מטריצה (דטרמיננטה):

אנו מחפשים את השורה הראשונה מכאן שכל השורות

הדטרמיננטה לא תשתנה (אם נחסר מהשורה הראשונה)

$$\det W_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

לדורו נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה:

$$\det W_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \dots & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

ידוע ש- $a^k - b^k = (a-b) \sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-i-1}$ אז כל שורה נוכל לכתוב

מכאן נקבל $x_i - x_1$ כגורם משותף לכל השורות.

$$\det W_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \dots & x_2^{n-2} + x_2^{n-3} x_1 + \dots + x_1^{n-2} \\ 1 & x_3 + x_1 & \dots & x_3^{n-1} + x_3^{n-3} x_1 + \dots + x_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \dots & x_n^{n-1} + x_n^{n-3} x_1 + \dots + x_1^{n-2} \end{vmatrix}$$

אנחנו רוצים להראות ש $\det W_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1)$ (נכין את המטריצה הנכונה ב- x_1)
 אנחנו רוצים להראות שהמטריצה הנכונה היא $(x_i - x_1)$ (נכין את המטריצה הנכונה)
 זה לא משנה אם הפדסטרמיננטה היא $(x_i - x_1)$ או $(x_i - x_1)^2$

$$\det W_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} + \dots + x_2 x_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} + \dots + x_n x_1^{n-3} \end{vmatrix}$$

(חשוב על אותו הדבר עבור x_2 וכו' עד x_n)

$$\det W_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \det W_{n-1}$$

המשפט הנכון הוא $\det W_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1)$

זה נכון גם אם $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

$$\begin{aligned} \det W_n &= \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \det W_{n-1} \\ &= \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \left[\prod_{i=3}^n (x_i - x_2) \det W_{n-2} \right] = \dots = \prod_{i=2}^n (x_i - x_j) \end{aligned}$$

(11)

$$M_n(F) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ידוע } V \text{ חבור של } S_n \text{ שבור}$$

משוואות אחידות לא משנה אם הפדסטרמיננטה היא $(x_i - x_1)$ או $(x_i - x_1)^2$
 חבור עמודות עמודות אחידות לא משנה אם הפדסטרמיננטה היא $(x_i - x_1)$ או $(x_i - x_1)^2$
 נחבר לשורה הראשונה את השורה האחרונה

$$\begin{pmatrix} \frac{a+nb-b}{a+(n-1)b} & \frac{a+nb-b}{b+a+(n-2)b} & \dots & \frac{a+nb-b}{b+a+(n-2)b} \\ b & a & & b \\ b & b & & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & & a \end{pmatrix}$$

דרגתו נחסי אולי זה נכון: ההשלמה היא שם הסימנים

$$\begin{pmatrix} a+nb-b & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & & \\ b & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & & a-b \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשת עליונה שהצטרףנוסטה שלה
שווה ליצטרףנוסטה של המטריצה המקורית
לפיטעם מההצגה הצטרףנוסטה של המטריצה
משולשת היא אפוא האלכסון, אז
 $\det A = (a-b+nb)(a-b)^{n-1}$

כאן, לפי טענה מהכיתה $\det A = 0$ אולי המטריצה
אינה הפיכה.

אז המטריצה אינה הפיכה של $a=b$ או
של $a = (1-n)b$

③ ב-5 אולי זה נכון: בואו ונחזק אישית

הנחה: נראה שהאמה חתום מבואותם אישית: יאדעם

(נניח ש תחורה בואו. אז נותן עדיין אותה כחומר

בואו של הידועים $\triangleleft =$ (12) אישית ברור ^{2 חלק?}

שם שם שונות אז (12), (12) שם שונות

באותו אופן עדיין תחורה אישית ש מתאימה

תמונה זו היא (12) ו'א' 15 (התאמה חתך)
 עכ, מספר התמונה הזוגית שלו מספר התמונה
 האיזומורפית (ש) ✓

(2) 3 : מספר שמתחל מהמזב

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

אנו נותן לפיתרון
 הורחב נסתב על המשחק כוקטור באורך 16
 והמזב ההתחלתי הוא

(16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

המספר 16 מ"צג את הריבוע הריבועי והעברה של ריבוע
 למקום הריבוע הוא בעצם הפעולת הפרמוטציה (חילוף)
 (16, 1) על הוקטור א"א מהפך הוא ביצוע חילוף
 המזב ההתחלתי הנפתח הוא תמונה איזומורפית ההפוך
 היחיד הוא (14, 15)

א מהפך הוא חילוף מהצורה (16, 1) א"א י"ש רצף
 מהלכים ככה שמכא אחריו תמונה הלבנה אז מספר
 המהלכים הוא איזומורפי. א"א זה לא יתכן אפילו,
 רק מספר זוגי : על מהלכים יתכן לשמור על 16 בסוף
 הרשימה

~~המספר הזוגי הוא 16~~

~~המספר הזוגי הוא 16~~

~~2 - המספר הזוגי הוא 16~~
~~המספר הזוגי הוא 16~~

אלגברה לינארית 2 – פתרון תרגיל 2 (הגשה בעוד שבועים)
12.03.06

תמורות

1. הציגו את התמורות הבאות כמכפלה של חילופים:

א. $(1,2,3,4,5)$.

ב. פתרון: $(12)(23)(34)(45)$ (או בצורה קצרה יותר $(12)(13)(14)$).

ג. $(1,4,6)(2,5,3)$.

פתרון: $(14)(46)(25)(53)$.

ד. $(2,4,1)(2,3,5)$.

פתרון: $(24)(41)(23)(35)$.

ה. $(1,2,3)(1,2)(3,4,5)$.

פתרון: $(1,2,3)(1,2)(3,4,5) = (5134) = (51)(13)(34)$.

2. נציג חידה על משחק פופולארי.

נתבונן במטריצה מסדר 4×4 כך שערכיה הם

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

אנו נתייחס לתא עם הערך 16

כתא ריק.

הצעדים המותרים הם חילוף של התא הריק עם תא שכן.

שאלה: הוכיחו שלא ניתן להגיע מהמצב ההתחלתי למצב הבא :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix}$$

פתרון: כללי המשחק זה בעצם חילופים של האיבר 16 עם איברים השכנים לו. כדי להגיע מהמצב ההתחלתי למצב הסיום ביצענו בעצם חילוף מהצורה $\tau = (14,15)$, שסימנו הוא (-1) .

נניח שביצענו סידרה של חילופים לפי כללי המשחק (כלומר האיבר 16 מופיע בהם) ונסמנם $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$ כך שלבסוף קיבלנו את המטריצה המבוקשת. שזה בעצם $\tau = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$, בפרט $Sign(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k) = -1$.

אנו נוכיח כעת שעבור כל סידרה של חילופים לפי כלל המשחק כך שהמספר 16 מופיע בתא ה- $(4,4)$ של המטריצה ובסוף הוא חוזר לתא זה דורש מספר זוגי של חילופים וכך נקבל סתירה. מכיוון שכל הזזה של המספר 16 ימינה או למעלה, דורש לבסוף בהתאמה הזזה של המספר 16 למטה או שמאלה לכן נקבל שמספר החילופים כאשר מתחילים מ $(4,4)$ בתא ה- 16 בתא ה- $(4,4)$ וחוזרים לתא זה הוא זוגי.

3. הוכיחו שב- S_n חצי מהתמורות עם סימן חיובי וחצי עם סימן שלילי.
 פתרון: ראינו בתרגיל 1 שלכל $\sigma \in S_n$ ההעתקה $f_\sigma(\tau) = \sigma \cdot \tau$ היא חח"ע ועל מ- S_n לעצמה. עבור σ חילוף נקבל העתקה שהיא חח"ע ועל שמשנה את הסימן של τ . לכן אם נצמצם את f_σ לאוסף התמורות עם סימן חיובי (נסמנם A_n) נקבל ההעתקה חח"ע ועל מ- A_n ל- $S_n \setminus A_n$ כלומר $|A_n| = |S_n \setminus A_n|$.

4. הוכיחו כי לכל תמורה $\alpha \in S_n$ מתקיים $\alpha(j_1, j_2, \dots, j_k)\alpha^{-1} = (\alpha(j_1), \alpha(j_2), \dots, \alpha(j_k))$.

פתרון: ע"י בדיקה ישירה. אגף ימין מעביר את $\alpha(i_1)$ ל- $\alpha(i_2)$. אגף שמאל מעביר את $\alpha(i_1)$ ל- $\alpha^{-1}\alpha(i_1) = i_1$ ואז ל- i_2 ואז ל- $\alpha(i_2)$. באותו אופן ל- $\alpha(i_2)$ עד ל- $\alpha(i_k)$. ואילו לאיבר j שאינו מצורה זו אגף ימין לא עושה כלום ואילו אגף שמאל קודם מעביר אותו ל- $\alpha^{-1}(j)$ שאינו $i_1, \dots, i_k$ ולכן המחזור אינו עושה לו כלום, ולבסוף α מחזיר אותו ל- $\alpha\alpha^{-1}(j) = j$ כלומר גם כן לא עושה ל- j כלום.

5. הגדרה: מטריצה $A \in M_n(F)$ נקראת מטריצת פרמוטציה אם בכל שורה ובכל עמודה יש קורדינטה אחת בלבד השונה מאפס והשווה ל-1.

יהא F שדה, ותהא $\alpha \in S_n$. נגדיר מטריצת פרמוטציה $A \in M_n(F)$ בצורה הבאה: $Ae_i = e_{\alpha(i)}$ כאשר $e_1, \dots, e_n$ הם איברי הבסיס הסטנדרטי (כעמודות).
 הוכיח כי $\det(A) = \text{sign}(\alpha)$.

פתרון: תהי $\alpha \in S_n$ תמורה, ו- A מטריצת פרמוטציה המתאימה לה. נרשום את $\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$ כמכפלה של חילופים ובהתאמה $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k$. כעת נתבונן בדטרמיננטה $|A| = |A_1 \cdot \dots \cdot A_k \cdot I|$, כל A_i זה בעצם פעולת שורה אלמטרית מטיפוס החלפת שתי שורות במטריצה, והרי פעולה כזו משנה את סימן הדטרמיננטה, ומכיוון שסימן של פרמוטציה הוא 1 אם ניתן לכתוב את התמורה במספר זוגי של חילופים, ו-1 (-1) הוא אי-זוגי, לכן $\det(A) = \text{sign}(\alpha)$.
 פתרון שני: פשוט מהדגרת הדטרמיננטה הרכיב היחיד השונה מאפס הוא זה 1 כפול הסימן של הפרמוטציה α .

חלוקת פולינומים

6. בצעו חילוק פולינומים עם שארית של $3x^3 + x^2 - 2$ ב- $x - 2$ מעל הממשיים.

פתרון:

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 7x + 14 \leftarrow \text{מנה} \\
 \hline
 3x^3 + x^2 \quad -2 \mid x-2 \\
 3x^3 - 6x^2 \\
 \hline
 7x^2 + 0x \\
 7x^2 - 14x \\
 \hline
 14x - 2 \\
 14x - 28 \\
 \hline
 26 \leftarrow \text{שארית}
 \end{array}$$

קבלנו: $3x^3 + x^2 - 2 = (x-2)(3x^2 + 7x + 14) + 26$

דטרמיננטות

1. חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות ע"י שימוש ישיר בהגדרה:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: עבור שתי המטריצות - הגורם היחיד בהגדרת הדטרמיננטה השונה מאפס הוא הגורם עם תמורות הזוהות ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.
2. המטריצה הבאה נקראת מטריצת ונדרמונדה:

$$x_1 \dots x_n \in F$$

$$\det(W_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \quad \text{כאשר } W_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

פתרון: עבור $n=1$ נקבל $|W_1|=1$.

נוכיח באינדוקציה כי עבור $n \geq 2$ מתקיים $|W_n| = \prod_{j>i} (x_j - x_i)$.

נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח ל- n .

$$|W_n| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & . & . & . & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & . & . & . & x_3^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & . & . & . & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & . & . & . & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & . & . & . & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & . & . & . & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

הסבר: החסרנו מכל שורה $i \neq 1$ את השורה הראשונה.

נשתמש בעובדה הבאה: $a^k - b^k = (a-b)(\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-j})$ לכן נוכל להוציא מכל שורה גורם משותף

מהצורה $x_j - x_1$ ונקבל:

$$= \prod_{1 < j} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1^2 & x_1^3 & . & . & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & . & . & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^j x_1^{n-1-j} \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & . & . & \sum_{j=0}^{n-2} x_3^j x_1^{n-1-j} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & x_{n-1} + x_1 & x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_1 + x_1^2 & . & . & \sum_{j=0}^{n-2} x_{n-1}^j x_1^{n-1-j} \\ 0 & 1 & x_n + x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & . & . & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^j x_1^{n-1-j} \end{vmatrix}$$

מכיוון ש- $a^k = \sum_{j=0}^k a^j b^{k-j} - b \sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j}$ נחסיר מהעמודה ה- n ית- n (אחרונה) את העמודה ה- $n-1$

כפול x_1 ונקבל

$$= \prod_{1 < j} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 + x_2 x_1 & . & . & x_2^{n-1} \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 + x_3 x_1 & . & . & x_3^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 + x_n x_1 & . & . & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

נמשיך באותו אופן ונחסיר מהעמודה ה- $n-1$ ית- n את העמודה ה- $n-2$ כפול x_1 , וכך הלאה עד

העמודה הראשונה ונקבל

$$= \prod_{1 \leq j} (x_j - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & x_2^{n-2} \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & \cdot & \cdot & x_3^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j} (x_j - x_1) |W_{n-1}|$$

הסבר: פיתחנו לפי עמודה ראשונה כדי לקבל את השוויון האחרון, ומהנחת האינדוקציה נקבל

$$= \prod_{1 \leq j} (x_n - x_j) \prod_{1 \leq j < i} (x_j - x_i) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

3. תהא :

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

מתי המטריצה הפיכה .

פתרון: נחסיר את השורה הראשונה משאר השורות ונקבל

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdot & \cdot & \cdot & b \\ b-a & a-b & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ b-a & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

נוציא $(a-b)$ משורה השנייה עד האחרונה ונקבל

$$= (a-b)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b & \cdot & \cdot & \cdot & b \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

נוסיף כעת את העמודה האחרונה לראשונה ונקבל

$$= (a-b)^{n-1} \begin{vmatrix} a+b & b & . & . & . & b \\ -1 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

באותו אופן נוסיף את שאר העמודות $1 < i < n$ לעמודה הראשונה ונקבל

$$= (a-b)^{n-1} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & . & . & . & b \\ 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} (a+(n-1)b)$$

לכן הדטרמיננטה שונה מאפס כאשר $a \neq b$ וגם $a \neq (1-n)b$.

תרגיל 4 אלגברה לינארית 2

29 במרץ 2006

בתרגיל זה נסמן $\det(A) = |A|$, $\text{adj}(A)$ = המטריצה המצורפת ל A . מותר להשתמש בכלל המכפלה האומר כי $|AB| = |A||B|$.

1. חשבו את הדטרמיננטה של $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ תחילה ע"י ביצוע פעולות אלמנטריות על השורות והעמודות ואח"כ ע"י פיתוח לפי העמודה האמצעית.

2. עבור n אי זוגי חשבו את הדטרמיננטה של

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

3. הוכיחו כי הדטרמיננטה של מטריצה $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ שעבורה $|a_{ij}| = 1$ היא מספר שלם המתחלק ב 2^{n-1} .

4. תהא $A = (a_{ij})$ מטריצה ריבועית מסדר n . נניח כי $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 6\}$. אם נסמן ב $\mathbb{F}_7$ את השדה עם 7 איברים אז ניתן לראות את A כאיבר של $M_n(\mathbb{F}_7)$ וגם כאיבר של $M_n(\mathbb{Q})$. הראו כי אם A איבר הפיך ב $M_n(\mathbb{F}_7)$ אז A הפיך ב $M_n(\mathbb{Q})$. האם ההיפך נכון?

5. חשבו את המטריצה המצורפת של $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. (א) הוכיחו כי אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה אז $\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2}A$.
(ב) הראו כי גם אם A לא הפיכה, אז השיויון הנ"ל מתקיים. הדרכה חלקו למקרים הבאים: $n = 2$ (תניחו ש $0^0 = 1$), $\text{rank}(A) = n - 1$ ו $\text{rank}(A) < n - 1$. במקרה הראשון טפלו ישירות ובשני המקרים הבאים שימו לב מה תוכלו לאמר על דרגת המטריצה המצורפת למטריצה מדרגה קטנה מ $n - 1$.

7. תהא $A \in M_n(\mathbb{Z})$. נניח כי A הפיכה בחוג $M_n(\mathbb{Q})$. מצאו תנאי הכרחי ומספיק בשביל ש A תהיה הפיכה בחוג $M_n(\mathbb{Z})$.

אמצעית 2 - תרגיל 4

שאלה 1

נתנה את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ ו"יציגו בעזרת

אמצעים של השורות:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - 4R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-10) = 27 = \det A$$

$$\begin{aligned} R_2 &= R_2 - 4R_1 \\ R_3 &= R_3 - 2R_1 \end{aligned}$$

נתנה את המטריצה A ו"יציגו בעזרת האמצעים:

$$\det A = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+2} a_{i2} m_{i2} = \sum_{i=1}^3 (-1)^i a_{i2} m_{i2} =$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-28) + 5 \cdot (-7) - 8 \cdot (-6) = 27$$

שאלה 2

נתונה: עבור $n \in \mathbb{N}$ אנוני:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

הוכחה: ידוע ש- $\det B = \det B^t$ ~~הוכחה!~~

נסמן: $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (אנחנו באנופוקציה של n)

עבור $n=1$ הטענה נכונה - $\det(B_1) = 0$

נניח שהטענה נכונה למטריות B_{n-2} ונראה עבור B_n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_i = R_i - R_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -2 & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{הכנסת שורות}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -2 & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

↑
2, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -2 & -2 & -1 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & \dots & -2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 1 & 1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & -1 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & -1 & -1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 1 & 1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B_{n-2}} \det B_{n-2} = 0
 \end{aligned}$$

פיתוח לפי שורה 1
 B_{n-2}

(ii) $\Leftarrow$ לפי עקרון האינדוקציה הסתנה כינור אס n איננו

ערה 3

טענה: תהי $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ כך שלכל $n \geq 1, i, j$ $a_{ij} = 1$.
 אז $2^{n-1} \mid \det A$

הוכחה: משום של האברים a_{ij} הם ± 1 ע"י חבור/חסר (לפי הצורך) של השורה הראשונה משאר השורות נוכל לזכור את האברים הטור הראשון מלבד השורה הראשונה. מאחר שאם פערות גאומטריות הצטרמיונטה של המטריצה להתקבל שונה ל- $\det A$. נפתח את הצטרמיונטה לפי העמודה הראשונה. משום של הטור מלבד השורה הראשונה הוא אפסים יש לחשב את המינוס M_{11} . המטריצה בול האברים הם $1, 0, 2, -1$ למה?

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ Z \\ -2, 0, 2 \end{pmatrix}$$

את המינוס ניתן להציג גם כך: $2 \begin{pmatrix} Z \\ -1, 0, 1 \end{pmatrix}$ ע"י הוצאת 2 מתחת אל השורות.

ע"פ $\det D = 2^{n-1} \det Z$ מאחר שבאברים ה- Z הם $1, 0, -1, -1$. $\det Z$ היא מספר שלם. אבל מהפיתוח לפי טור

$$\det A = \det D \Leftarrow 2^{n-1} \mid \det A \quad (ii)$$

5 סעיף

נתון מטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ של

דרגה 3. נרצה למצוא את $\text{adj } A = (b_{ij})$ כאשר $b_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ji}$ ו- m_{ji} הוא המינור של A הנוצק מ- A על ידי מחיקת שורה j ו-עמודה i .

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & -12 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{כך}$$

4 סעיף

תהי $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ הפיכה. נניח $\det A \neq 0$.

אם $\det A \in \{1, \dots, p-1\}$, אז $\det A$ הוא איבר הפיך ב- $\mathbb{F}_p$. לכן, $\det A$ הוא איבר הפיך ב- $\mathbb{F}_p$.

אם $\det A = 0$, אז A אינה הפיכה. לכן, $\det A \neq 0$ הוא תנאי הכרחי להפיכות A .

אם $\det A \neq 0$, אז A הפיכה. לכן, $\det A \neq 0$ הוא תנאי הכרחי להפיכות A .

אם $\det A \neq 0$, אז A הפיכה. לכן, $\det A \neq 0$ הוא תנאי הכרחי להפיכות A .

אם $\det A \neq 0$, אז A הפיכה. לכן, $\det A \neq 0$ הוא תנאי הכרחי להפיכות A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}), M_2(\mathbb{F}_7)$$

אם $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ הפיכה, אז $\det A \neq 0$. לכן, $\det A \neq 0$ הוא תנאי הכרחי להפיכות A .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 7 \neq 0$$

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2} \cdot A \quad A \in M_n(F) \quad \text{כל } n$$

$$(*) A \cdot \text{adj} A = |A| I_n \quad \text{בכתיב ימין ושמאל}$$

$$(**) |A| \neq 0 \Leftrightarrow |A| |\text{adj} A| = |A|^n \Leftrightarrow$$

$$A \text{ אינברס} \cdot |\text{adj} A| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow$$

1. $\text{adj} A$ אינברס ורק אינברס יהיה.

(תרגיל ב-*) A ו $\text{adj} A$ (הקרה)

$$(\text{adj} A)(\text{adj}(\text{adj} A)) = |\text{adj} A| I_n$$

אם $|A| \neq 0$ אז $|A|^{-1} \text{adj} A = I_n$ ונניח $|A| \neq 0$

$$(\text{adj} A)^{-1} = |A|^{-1} \cdot \text{adj}(\text{adj} A)$$

$$\text{אם } |A| \neq 0 \quad (*) \text{adj} A = |A|^{-1} \cdot A$$

$$|A|^{-1} \cdot A = |A|^{-1} \cdot \text{adj}(\text{adj} A)$$

$$\text{adj}(\text{adj} A) = \frac{|\text{adj} A|}{|A|} \cdot A = |A|^{n-2} \cdot A \quad \text{אינברס}$$

עבור המקרה $|A| = 0$ נבדוק בנפרד.

$$\text{adj}(\text{adj} A) = A \quad \text{אם } n=2 \text{ ואם } \text{adj}(\text{adj} A) = 0$$

נבדוק ראשית עבור המקרה $n=2$ אז

$$\text{adj}(\text{adj} A) = \text{adj} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \quad \text{אם } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

במקרה $n > 2$ נניח $|A| = 0$.

$$(***) \text{rank}(\text{adj} A) = \begin{cases} 1 & \text{rank} A = n-1 \\ 0 & \text{rank} A \leq n-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{rank}(\text{adj} A) = 1 \leq n-2 \quad \text{אם } \text{rank} A = n-1$$

$$\tilde{0} = \text{adj}(\text{adj} A) \Leftrightarrow \text{rank}(\text{adj}(\text{adj} A)) = 0$$

ואם $\text{rank} A \leq n-2$ אז $\text{adj} A = \tilde{0}$ ונניח

$$\text{adj}(\text{adj} A) = |A|^{n-2} \cdot A = \tilde{0} \quad \text{אם } \text{rank} A \leq n-2$$

נבדוק את (***) ראו הכיתה על $\text{rank} A$ היא נכונה

המניין המקסימלי שאינו אפס של A אם $\text{rank} A \leq n-2$ אז

המניין מסדר $n-1$ (כלומר $\det A$ זנו) צריך להיות אפס

אם $\text{adj} A = \tilde{0}$ שיהיה $m_{ij} = 0$

$\text{rank } A = n-1$ אם קיים מנור אחד אפסות $\text{rank } A = n-1$
 שאינו אפס. נומר אפסות $\text{adj } A \neq 0 \iff m_{ij} \neq 0$
 דפ $\text{rank}(\text{adj } A) \geq 1$. מנצב שני, נשם $\text{rank } A = n-1$
 $\det A = 0$ דפ $A \cdot \text{adj } A = 0$ (*)
 $\dim \text{Im}(\text{adj } A) \leq \dim \text{Ker } A \iff \text{Im}(\text{adj } A) \subseteq \text{Ker } A$
 $\text{rank}(\text{adj } A) = 1 \iff \text{rank}(\text{adj } A) \leq n - \text{rank } A = 1$ דפ
 וקפנו את מה שרצנו (☺)

ידוע
 מראש

עמדה 7

תבא $A \in M_n(\mathbb{Z})$. כמו שהצגנו בטרמנוס של מטריצה
 נחל שזה אפשר להצגיר באותו אופן בטרמנוס של מטריצה
 נחל תקי: $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma(i)}$
 וזה אם מוצא ביטוי משום שבתחילת יום של ותיאר והם קבוצים
 (שם) שאתם תכנית הצגמונה הורחמו לכל שימוש
 באיורים הפכים למה שלזה. כמו כן הטענה של-

(*) $A \cdot \text{adj } A = \det A \cdot I_n$ הורחמו לכל שימוש בטענה
 כי (ובע אופן) $A \in M_n(R)$ הפיכה אכן $\det A$
 הפיך ב- R לרי אם A הפיכה, אז ק"מ B
 כך ש $AB = I_n \iff 1 = \det A \cdot \det B \iff (\det A)^{-1} = \det B$
 מנצב שני, אם $(\det A)^{-1}$ ק"מ
 כי $A \cdot (\det A)^{-1} \text{adj } A = I_n$ (*)
 $A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{adj } A$
 האיורים ההפכים היתפים ב- $\mathbb{Z}$ הם ± 1 . דפ

$A \in M_n(\mathbb{Z})$ הפיכה אכן $|\det A| = 1$ כמובן אם
 נחל אר $\det A \in \mathbb{Q}$, A הפיכה הפיכה אכן
 $\det A \neq 0$ ב- $\mathbb{Z}$, זה לא מופק.

פנין הסיווג $\det A = \pm 1$

פתרון תרגיל 4 אלגברה לינארית 2

11 באפריל 2006

1. נסמן $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. נבצע פעולות אלמנטריות על השורות\עמודות

ונביא את המטריצה לצורה מדורגת (משולשית עליונה): נחסיר מהשורה השנייה ארבע פעמים השורה הראשונה ומהשורה השלישית שבע פעמים השורה הראשונה:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

כעת נחסיר מהשורה השלישית פעמים את השורה השנייה:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

בפעולות שבצענו לא שינינו את הדטרמיננטה ולכן $|A| = 1 \cdot (-3) \cdot (-9) = 27$.
כעת נחשב את הדטרמיננטה לפי נוסחת הפיתוח לפי העמודה האמצעית:

$$|A| = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+2} a_{i2} m_{i2} = (-2)m_{12} + 5m_{22} + (-8)m_{32}$$

כאשר כמובן m_{ij} הוא המינור ה i, j נחשב:

$$m_{12} = \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -42, m_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = -21, m_{32} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = -6$$

ולכן

$$|A| = 84 - 105 + 48 = 27$$

2. נשים לב ש $B = -B^t$ ולכן

$$|B| = |-B^t| = (-1)^n |B^t| = (-1)^n |B| = -|B|$$

כאשר השיויון האחרון נובע מההנחה ש n אי זוגי. לכן מתחייב כי $|B| = 0$. יהיו מביניכם שיקפצו ויאמרו שאם A ו B עובדים מעל שדה ממציין 2 אז המסקנה לא תקיפה אבל גם כאשר מדובר בשדה ממציין 2, את חשבון הדטרמיננטה של B אנו מבצעים ב $\mathbb{Z}$ ואז לוקחים שארית מודולו 2. אם מהחשבון יוצא אפס ב $\mathbb{Z}$ אז גם השארית מודולו 2 יוצאת אפס.

3. תהא $A = (\epsilon_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $\epsilon_{ij} = \pm 1$. בעזרת הוספת או הפחתת השורה הראשונה מיתר השורות נביא את A (מבלי לשנות את הדטרמיננטה שלה) לצורה

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \pm 1 & * \\ 0 & b_{ij} \end{pmatrix}$$

כאשר ה 0 הוא עמודת אפסים בגובה $n-1$, ה * היא שורה באורך $n-1$ (שלא תעניין אותנו) והמטריצה $(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ מקיימת $b_{ij} = 0$ או $b_{ij} = \pm 2$. מתקיים כמובן ש $|A| = |\tilde{A}| = (\pm 1) \det(b_{ij})$ אבל כל שורה ב (b_{ij}) היא 2 כפול וקטור של אפסים ו ± 1 ולכן $\det(b_{ij}) = 2^{n-1}m$ כאשר m הוא מספר שלם כלשהוא.

4. לשם ההבחנה נסמן $A \in M_n(\mathbb{F}_7)$ ו $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{Z})$. מתקיים ש A הפיכה אם $\det(A) \neq 0$ (כאשר החישוב של הדטרמיננטה נעשה ב $\mathbb{F}_7$, כלומר בשלמים מודולו 7). כלומר A הפיכה ב $M_n(\mathbb{F}_7)$ אם $\det(A) \neq 0$ ב $\mathbb{F}_7$ כלומר $\det(\tilde{A}) \not\equiv 0 \pmod{7}$ (כאשר כאן החישוב נעשה כמובן מעל $\mathbb{Z}$). בפרט אם A הפיכה אז $\det(\tilde{A}) \neq 0$ ולכן $\tilde{A}$ איבר הפיך של $M_n(\mathbb{Q})$. מצד שני אנו רואים מכאן שאם נבחר את $\tilde{A}$ כך ש $\det(\tilde{A}) = 7$ אז $\det(A) = 0$ ב $\mathbb{F}_7$ ולכן $\tilde{A}$ הפיכה בעוד ש A לא.

5. נסמן את המינור ה ij ב m_{ij} . אז עבור $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ מתקיים

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6, m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, m_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, m_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6, m_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12, m_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

אם כן המטריצה המצורפת היא

$$\text{adj}(A) = ((-1)^{i+j} m_{ji}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & -12 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

6. עבור $n = 2$ מתקיים ישירות מההגדרה $adj(adj\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = adj\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ולכן תחת ההנחה ש $x^0 = 1$ הזוהות מתקיימת לכל מטריצה 2×2 בין אם רגולרית ובין אם לאו.
 בהמשך נניח כי $n > 2$ ונחלק את ההוכחה לשני מקרים:
 מקרה א': A רגולרית. במקרה זה אנו יודעים כי $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A)$ ולכן $adj(A)$ הפיכה ומתקיים לפי אותה נוסחה

$$(adj(A))^{-1} = \frac{1}{|adj(A)|}adj(adj(A))$$

אבל מהשיויון הראשון נקבל $(adj(A))^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ וכן $|adj(A)| = |A|^{n-1}$ וסה"כ נקבל

$$adj(adj(A)) = |A|^{n-2}A$$

מקרה ב': A סינגולרית. אם דרגת A קטנה מ $n - 1$ אז כל המינורים בחישוב המטריצה המצורפת מתאפסים ונקבל $adj(adj(A)) = adj(0) = 0$ כנדרש.

אם דרגת A היא בדיוק $n - 1$ אז מהשיויון $adj(A)A = |A|I = 0$ נקבל שדרגת המטריצה המצורפת היא לכל היותר 1. לפי הנחתנו $1 < n - 1$ ולכן כל המינורים בחישוב המטריצה המצורפת ל $adj(A)$ מתאפסים ושוב $adj(adj(A)) = 0$ כנדרש.

7. עבור $A \in M_n(\mathbb{Z})$, אם A הפיכה שם, כלומר קיימות $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ אז מתחייב ש $|A|, |A|^{-1} \in \mathbb{Z}$ ולכן מתחייב ש $|A| = \pm 1$. מצד שני אם $|A| = \pm 1$ אז A הפיכה ב $M_n(\mathbb{Q})$ אבל אנו מכירים את הנוסחה להופכי: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A)$ ומהנחתנו לגבי הדטרמיננטה נקבל ש $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

תרגיל 5 אלגברה לינארית 2

30 במרץ 2006

1. הראו כי $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}$ מתחלק ב-

2. עבור A, B מטריצות רגולריות הראו כי

א. $\text{adj}(AB) = (\text{adj} B)(\text{adj} A)$

ב. $\text{adj}(A^t) = (\text{adj} A)^t$

3. נתון שלמערכת המשוואות $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ יש פתרון יחיד והוא $(-2, 1, 0)$.

לכל אחת מהמערכות הבאות, בדקו האם יש לה פתרון יחיד (ומה הוא?) אם יש לה אין סוף פתרונות, או אם אין לה פתרון.

$$\begin{array}{ll} a_1x + b_1y + d_1z = c_1 & d_1x + b_1y + c_1z = a_1 \\ a_2x + b_2y + d_2z = c_2 & d_2x + b_2y + c_2z = a_2 \\ a_3x + b_3y + d_3z = c_3 & d_3x + b_3y + c_3z = a_3 \end{array}$$

רמז: חשבו על נוסחת קרמר.

4. תהי $A \in M_2(F)$. נגדיר פולינום באופן הבא; $p(x) = |xI - A|$, כאשר I מטריצת היחידה, ומסתכלים על הדטרמיננטה של המטריצה $xI - A$ כפולינום ב- x .

הראו כי $p(x) = x^2 - \text{tr} A \cdot x + |A| \cdot I$. (כאזור $\text{tr} A$ הוא סכום איברי האלכסון של A).

5. בתרגיל זה נראה כי לכל פונקציה $G : M_n(F) \rightarrow F$, המקיימת;

א. $G(A \cdot B) = G(A) \cdot G(B)$

ב. $G(I) = 1$

מתקיים: $G(A) = g(\det A)$ כאשר $g : F \rightarrow F$ פונקציה על השדה המקיימת $\forall a, b \in F \quad g(a \cdot b) = g(a)g(b)$.

הדרכה: א. תהיינה T_i^λ המטריצות האלכסוניות שכל איברי האלכסון שלהן הם 1 חוץ מהמקום ה- i, i שבו יש λ . הראו כי $G(T_i^\lambda)$ אינו תלוי ב- i . (רמז למתקשים - חישבו כיצד לעבור בעזרת פעולות שורה ועמודה אלמנטריות מ- T_i^λ ל- T_j^λ . היזכרו בקשר בין פעולות שורה ועמודה וכפל במטריצות

מימין ומשמאל)

ב. תהייה S_{ij}^λ ($i \neq j$) המטריצות בהן כל איברי האלכסון הם 1, במקום i, j ישנו λ , ובכל שאר המקומות 0. הראו כי $G(S_{ij}^\lambda) = 1$. (רמז: הראו תחילה כי $S_{ij}^\lambda = S_{ij}^1$, אח"כ חשבו את $(S_{ij}^1)^2$)

ג. הסיקו עתה את המסקנה למטריצות הפיכות תחילה. (חישבו כיצד ניתן לעבור בעזרת פעולות שורה ועמודה אלמנטריות למטריצת הזהות).

ד. הראו כי $G(0) = 0$ או $G(0) = 1$, ושבמקרה השני $G(A) = 1$ לכל A .

ה. נניח ש $G(0) = 0$, הראו כי לכל המטריצות האלכסוניות D שלפחות אחד מאיבריהם הוא 0 מתקיים $G(D) = 0$. (למשל באינדוקציה על מספר האחדות על האלכסון)

ו. הסיקו את המשפט הכללי (באופן דומה לסעיף ג').

(2) יפיו A, B רגולריות

(c) $\text{adj}(AB) = \text{adj} B \text{adj} A$:

בורחפו: A, B רגולריות $\Leftrightarrow A^{-1}, B^{-1}$ קיימות

$D \in M_n(F)$ אותקים $D \text{adj} D = |D| \cdot I_n$ או D רגולרית

(*) $\text{adj} D = |D| \cdot D^{-1}$

ידוע שגם A, B רגולריות אז AB רגולרית

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (קראו את AB ב-*)

$\text{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1} = |A||B| \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

כיון ש $|AB| = |A||B|$ לפי חוק המכפלה

$\text{adj}(AB) = |B| \cdot B^{-1} \cdot |A| \cdot A^{-1}$ אותקים $|A|, |B| \in F$

(ii) $\text{adj}(AB) = \text{adj} B \cdot \text{adj} A$ בוחן

(c) $\text{adj} A^t = (\text{adj} A)^t$:

בורחפו:

$(AB)^t = B^t \cdot A^t$ למד I

בורחפו: נניח $M_{n,m}(F) \ni A = (a_{ij})$ ו- $M_{m,p}(F) \ni B = (b_{ij})$

אז $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \Rightarrow [(AB)^t]_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{kj} b_{ki}$

מכאן נניח $[A^t]_{ij} = a_{ji}$, $[B^t]_{ij} = b_{ji}$ ולכן

$[B^t \cdot A^t]_{ij} = \sum_{k=1}^m [B^t]_{ik} [A^t]_{kj} = \sum_{k=1}^m b_{ki} \cdot a_{jk}$

(ii) $(AB)^t \Leftarrow B^t A^t$ מכפלה בלב אסטריות

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ למד II

בורחפו: לפי למד I על B , בפרט עבור $B = A^{-1}$

אותקים $(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t \cdot A^t$

(ii) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \Leftarrow (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I$

כעת אם A רגולרית אז $|A| \neq 0$ ומכאן $|A^t| = |A|$

אם $|A^t| \neq 0 \Leftarrow A^t$ רגולרית. מכאן $(A^t)^{-1} = \frac{1}{|A^t|} \text{adj} A^t$

לפי למד II $\text{adj} A^t = |A| \cdot (A^{-1})^t = (|A| A^{-1})^t$ בוחן

(ii) $\text{adj} A^t = (\text{adj} A)^t$

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ - מתחלק ב- } \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det A \quad (1)$$

בזירה: נוסף לשורה הראשונה כל אחת מהשורות האחרות
לפי הכללות $\sum_{i=1}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ (קבל אהמטריצה)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

לפי התכונות של דטרמיננטה הפעולה הזאת לא שונה את
הדטרמיננטה של המקורית - $\det A = \det B$
(ניתח את הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה ונקבל)

$$\det A = \det B = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} m_{1j} =$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \frac{n(n+1)}{2} m_{1j} = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} m_{1j}$$

מאחר של כל המספרים במטריצה שלמים, גם $m_{1j} \in \mathbb{Z}$
 $\frac{n(n+1)}{2} \mid \det A \quad \Leftarrow$


③ נתון שלמע' המשואות $(a \ b \ c) x = d$ יש פיתרון יחיד והוא $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ארצן (ובס' ע $A = (a \ b \ c)$ הפירא ולפי משפט קרמר אם $1 \leq i \leq 3$ מתקיים

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

כאשר A_i מתקבלת מהחלפת הסורה ה- i ב- A בסורה d . כלומר:

$$(*) \quad -2 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$(**) \quad 1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$(***) \quad 0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

לפי משפט קרמר, ולפי המשואות $(a \ b \ c) y = d$ פיתרון יחיד, ולפי משפט קרמר מתקיים

לפי משפט קרמר, ולפי המשואות $(a \ b \ c) y = d$ פיתרון יחיד, ולפי משפט קרמר מתקיים

לפי משפט קרמר, ולפי המשואות $(a \ b \ c) y = d$ פיתרון יחיד, ולפי משפט קרמר מתקיים

לפי משפט קרמר, ולפי המשואות $(a \ b \ c) y = d$ פיתרון יחיד, ולפי משפט קרמר מתקיים

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{|A|}{(*) - 2 \cdot |A|} = -\frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{(**) - |A|}{(*) - 2 \cdot |A|} = \frac{1}{2}$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & a_1 \\ d_2 & b_2 & a_2 \\ d_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{(***) - 0 \cdot |A|}{-2 \cdot |A|} = 0$$

כעת (נסת' ע) משואות $(a \ b \ d) x = c$

נ- (***) (ובס' ע $\det(a \ b \ d) = 0$ $\Rightarrow$ אין פיתרון יחיד

משואות $(a \ b \ c) x = d$ פיתרון יחיד, ולפי משפט קרמר מתקיים

משואות $(a \ b \ c) x = d$ פיתרון יחיד, ולפי משפט קרמר מתקיים

יחיד והוא $(-2, 1, 0)$, המטריצה $(a \ b \ c \ d)$ קולר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

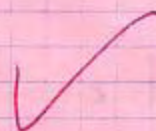
המשק המרובע

נחזיק את שני הטורים האחרונים במטריצה כמו ואז
 המטריצה $(a \ b \ d \ c)$ שקולה שורות למטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

למע' המשוואה שמוצאת ע' המטריצה בללא כמובן אין
 פתרון $\Leftrightarrow$ למע' המשוואה $(a \ b \ d) \underline{x} = \underline{c}$
 אין אל פתרון

י' ע' ה



ד"ר $p(x) = |xI - A|$ (4) תהי $A \in M_2(F)$ יחיד

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כן חיסוב ישר אומר כי:

$$|xI - A| = \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)(x-d) - bc = x^2 + x(-d-a) + ad - bc =$$

$$= x^2 - x \operatorname{tr} A + \det A$$

$$p(x) = x^2 - x \operatorname{tr} A + \det A$$

৩৯৬

- 2) $G: M_n(F) \rightarrow F$ 'הן (5)

$$G(A \cdot B) = G(A)G(B) \quad (i)$$

$$G(I) = 1 \quad (ii)$$

© תפנית ²ד המטריות האכסוניות של אברי האכסון

לכל x ו- y מתקיים $x \cdot y = y \cdot x$. נראה ש- $x \cdot y = y \cdot x$.

$G(T_i^*)$ אנו תלוי ב- i . סומך בהצמח $i \neq 0$ (מלבד

$$G(T_i^*) = G(T_j^*) - Q$$

הוכחה: נשים A ו- B (1) ונבדוק $G(AB) = G(BA)$ A, B נבדוק

დავად ობიექტ $G(AB) = G(A)G(B) = G(B)G(A) = G(BA)$.

השדה הוא חלופי. אם A יאלות מתק"ס

$$(*) G(A, T_1^* A^{-1}) = G(T_1^* A^{-1} A) = G(T_1^* I) = G(T_1^*)$$

(ג) $P_{ij} \in M_n(F)$ מטריצה בייחוד ובה התחלפו השורות i, j .

על מנת להפוך את המטריצה $(P_{ij})^{-1} = P_{ji}$ נקראת המטריצה

אם $\mathcal{C}$ הוא קולומב, אז P_{ij} היא המטריצה

ג. A מתחפזת ואילו, אם כופלים אינן אף הטורים j, i מתחלפים.

$$P_{ij} T_i^\lambda P_{ij} = T_j^\lambda \quad \text{... סדרת פונקציות}$$

۲۰۰

$$P_{ij} T_i x = \sum_j \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & x & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & i & j & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (P_{ij} T_{ij}^{\lambda}) P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

דבר, $1 - (*)$ ו- $(**)$ (קבל)

$$G(T_j^\lambda) = G(P_{ij} T_i^\lambda P_{ij}) = G(T_i^\lambda)$$

כאשר $G(T_i^\lambda)$ אנו תלוי ב- i (י)

(ב) תהיה S_{ij}^λ המטריצה בהן S אברי האלכסון הם 1 ,

המקום ה- j ו- i הם λ ו- λ שאר המקומות 0 (ראה ש-

$$G(S_{ij}^\lambda) = 1$$

הורחה: עבור $\lambda = 0$ הטענה נובעת מההצבה (i, j) אם $\lambda \neq 0$

ש- $\lambda \neq 0$. (ראה ראשית ש- $G(S_{ij}^\lambda) = G(S_{ij}^\lambda)$).

ושם $T_i^\lambda S_{ij}^\lambda T_i^{\lambda^{-1}} = S_{ij}^\lambda$ שם

$$T_i^\lambda S_{ij}^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (T_i^\lambda S_{ij}^\lambda) T_i^{\lambda^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = S_{ij}^\lambda$$

כמו כן ברור ש- $(T_i^\lambda)^{-1} = T_i^{\lambda^{-1}}$ כמו בסעיף הקודם

$$G(S_{ij}^\lambda) = G(T_i^\lambda S_{ij}^\lambda T_i^{\lambda^{-1}}) = G(T_i^\lambda T_i^{\lambda^{-1}} S_{ij}^\lambda) = G(S_{ij}^\lambda)$$

ברור ש- $G(S_{ij}^\lambda)^{-1} = S_{ij}^{\lambda^{-1}}$ נלכך $G(S_{ij}^\lambda) G(S_{ij}^{\lambda^{-1}}) = 1$

אם קודם ראנו שלא $\lambda \neq 0$ $G(S_{ij}^\lambda) = G(S_{ij}^\lambda)$ ברור

$\lambda = -1$ דבר $1 = G(S_{ij}^\lambda) G(S_{ij}^{\lambda^{-1}}) \cdot [G(S_{ij}^\lambda)]^2$ אחר

שעבור האיברי λ חיה אחרים $G(S_{ij}^\lambda) = 1$

$\Leftarrow$ אם $\lambda \in F$ $G(S_{ij}^\lambda) = 1$ (י) $(*)$ הנה אחר אחר

(ג) נראה ש- $G(\tilde{0}) = 0$ או $G(\tilde{0}) = 1$ ובמקרה השני $G(A) = 1$

$A \in \tilde{0}$ ברור ש- $\tilde{0} = \tilde{0} \tilde{0}$ $\Leftarrow G(\tilde{0}) = G(\tilde{0}) G(\tilde{0})$

האברים היחידים כשזה שלמקיים 0 ו- 1 .

כאשר או $G(\tilde{0}) = 0$ או $G(\tilde{0}) = 1$ ניה ש- $G(\tilde{0}) = 1$

אם A מתקיים $\tilde{0} A = \tilde{0}$ אזי מתקיים

(י) $G(A) = 1$ $G(A) = G(\tilde{0}) G(A) = G(\tilde{0} A) = G(\tilde{0}) = 1$

$$G(s_{ij}^*)^2 = 1 \quad - \text{על המרחב } \mathbb{R}^n (*)$$

$$G(s_{ij}) = \pm 1 \quad - \text{על } \mathbb{R}^n$$

$$(s_{ij}^*)^2 = s_{ij}^* \cdot s_{ij}^* = s_{ij}^2 = s_{ij}^* \quad \text{על } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow G((s_{ij}^*)^2) = G(s_{ij}^*)$$

$$\Rightarrow G(s_{ij}^*)^2 = G(s_{ij}^*)$$

$$G(s_{ij}^*) = -1 \quad - \text{אם לא יהיו מכפילים}$$



(ה) נניח ש- $G(0) = 0$ (ראה שיש מטריצות האלכסוניות D

שלמות אחת מאפשרת הוא 0 מתקיים $G(D) = 0$

ראשית נוכיח למטריצות T_i^0

קל לראות שמתקיים T_i^0

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

עם מהטעף הקודם $G(Z) = 0$ $G(T_i^0) = 0$ מכך קיים

חזיון רק ש- $G(Z) = 0$ אבל אף סעיף אינו נעזר

$G(T_i^0) = 0$ אינו תלוי ב- i ולכן לכל חזיון $G(T_i^0) = 0$

נראה שהי מטריצה אלכסונית כלשהי ומה 0 במקום 0 :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \left(\prod_{j=1}^n T_j^{d_j} \right) T_i^0, \quad d_j \in F$$

(ii) $G(D) = G\left(\prod_{j=1}^n T_j^{d_j} \cdot T_i^0\right) = \prod_{j=1}^n G(T_j^{d_j}) \cdot G(T_i^0) = 0$ מכך

(ג) תהי $F \rightarrow G$ הפונקציה G המתקיימת את (i) ו-(ii) אז קיימת

$G(A) = g(\det A)$ שמתקיים $G(A) = g(\det A)$

בוכחה: תהי A הפיכה אז מתקיים

$$A = \prod_{i=1}^p L_i \cdot I \cdot \prod_{j=1}^q R_j$$

ראשית L_i, R_j מהצורה $T_i^{\pm 1}$ או $S_{ij}^{\pm 1}$ לא מופיעות

בה מטריצות החלפת שורה משנים שיתן להצג החלפת

שורה i מטריצות מהצורה הנ"ל רק: $P_{ij} = T_i^{-1} S_{ij}^1 S_{ij}^{-1} T_i^1 I$

אם תכונות G מתקיימים $G(A) = \prod_{i=1}^p G(L_i) G(I) \prod_{j=1}^q G(R_j)$

אבל $G(I) = 1$ וראינו ש- $G(S_{ij}^1) = 1$ ולכן נשאר רק עם

מטריצות מהצורה $T_i^{\pm 1}$ כלומר $G(A) = \prod_{i=1}^n G(T_i^{\pm 1})$ $\therefore G(A) = \prod_{i=1}^n G(T_i^{\pm 1})$ קבוצה

סופית כלשהי ב- F נסביר $g(x) = G(T_i^{\pm 1})$ אבל $x = |T_i^{\pm 1}|$

אז $g(|T_i^{\pm 1}|) = G(T_i^{\pm 1})$ יהיו $a, b \in F$ אז

$$g(ab) = G(T_i^{\pm 1}) = G(T_i^0 \cdot T_i^{\pm 1}) = G(T_i^0) G(T_i^{\pm 1}) = g(a)g(b)$$

אם הפונקציה g אינה רגילה (צ"ח) שהיא מוגדרת היטב

משום שראינו ש- $G(T_i^{\pm 1})$ אינו תלוי ב- i

(חזור למטריצה A אחתו E)

$$G(A) = G(T_1^{x_1}) \dots G(T_k^{x_k})$$

וגרסי ראשוני של A זה A עצמו

$$G(T_1^{x_1}) \dots G(T_k^{x_k}) = g(x_1) \dots g(x_k) = \prod_{j=1}^k g(x_j)$$

לכן $E = \prod_{j=1}^k \det T_j^{x_j} \det A = \prod_{j=1}^k \det T_j^{x_j}$ אבל זה סתם מוכח

$\det I = 1$ ו- $\det S_j = 1$ ע- E שיהי ידוע

ואתה להצטרף E ופא

$$\det A = \prod_{i=1}^p \det L_i \det I \prod_{j=1}^q \det R_j = \prod_{j=1}^q \det T_j^{x_j}$$

אם E , E (קח)

$$(ii) \quad G(A) = \prod_{j=1}^k g(x_j) = \prod_{j=1}^k g(\det T_j^{x_j}) = g\left(\prod_{j=1}^k \det T_j^{x_j}\right) = g(\det A)$$

(i) תהי $G: M_n(F) \rightarrow F$ פונקציה G ו- (i) ו- (ii) אז

ק"מ $G(A) = g(\det A)$ ע- $G: F \rightarrow F$ פונקציה G

הוכחה: ראשון נראה ש- G פונקציה פולינומלית

עם A אז הפירוק $A = \prod_{i=1}^p L_i \cdot D \cdot \prod_{j=1}^q R_j$ אז

$$A = \prod_{i=1}^p L_i \cdot D \cdot \prod_{j=1}^q R_j$$

כאשר D אטרסונלית עם 0 כאחד מאיברי האטרסון

ו- L_i, R_j כמו קודם

$$G(A) = \prod_{i=1}^p G(L_i) \cdot G(D) \cdot \prod_{j=1}^q G(R_j)$$

ראינו קודם ש- $G(D) = 0$ כלומר $G(D) = 0$ מתקיים

אכן $G(A) = 0$ כמו G $\det A = 0$ כי ה- A

סגוריות: $G(0) = 0$ (פא) ע- $G(0) = 0$ (פא) ופא

$$G(a) = G(0) \cdot G(a) = G(0) = 0 \quad \text{או} \quad G(a) = 1 \quad \text{או} \quad G(a) = 0$$

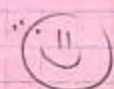
$$G(a) = G(0) \cdot G(a) = G(0) = 1 \quad a \in F \quad G(a) = 1 \quad \text{אז} \quad G(a) = 1 \quad \text{אז} \quad G(a) = 1$$

ואנחנו מניחים ש- G לא פא

אז אכן קיבלנו ש- $G: F \rightarrow F$ פונקציה G שיהי $G(x) = G(T_1^{x_1})$

מקיימת את הדחל בן למטריצה ולמטריצה וכן למטריצה

סגוריות



פתרון תרגיל 5 - אלגברה לינארית 2

25 באפריל 2006

1. נוסף לעמודה האחרונה את כל העמודות הקודמות (כל אחת פעם אחת) ונקבל;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & & \dots & n-1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 2 & 3 & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \sum_{i=1}^n i \\ n & 1 & & \dots & \sum_{i=1}^n i \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 2 & 3 & & & \sum_{i=1}^n i \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1 \\ n & 1 & & \dots & 1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 2 & 3 & & & 1 \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה משמאל היא מספר שלם (כי כל איברי המטריצה שלמים) ו- $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ומכאן התוצאה.

2. א. עבור A, B כלשהן מתקיים
 $A \cdot \text{adj}(A) = I \cdot |A|, B \cdot \text{adj}(B) = I \cdot |B|, A B \text{adj}(AB) = I \cdot |AB|$
 מכאן, אם A, B הפיכות (זיכרו שאם A, B הפיכות גם AB הפיכה ו- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ אז $\text{adj}(AB) = |AB|B^{-1}A^{-1} = |B|B^{-1}|A|A^{-1} = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$ - ומכאן בנוסחת המכפלה לדטרמיננטה ובשוויונות שכתבנו למעלה)

- ב. טענה: אם A הפיכה גם A^t (ברור, כי הדטרמיננטה שונה מ-0), ו- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
 נבדוק: $(A^{-1})^t \cdot A^t = (AA^{-1})^t = I^t = I$, כאשר השוויון מימין נובע מהשוויון $(AB)^t = B^t A^t$.
 לכן $A^t \cdot \text{adj}(A^t) = |A^t| \cdot I \Rightarrow \text{adj}(A^t) = |A| \cdot (A^{-1})^t = (|A| \cdot A^{-1})^t$, אבל $\text{adj} A = |A| \cdot A^{-1}$ ולכן $(\text{adj} A)^t = (|A| \cdot A^{-1})^t$ ומכאן $(\text{adj} A)^t = \text{adj}(A^t)$.

3. הפתרון למערכת נתון ע"י נוסחת קרמר.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$-2 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \text{מכיוון שהפתרון הוא } (-2, 1, 0) \text{ מקבלים}$$

$$\begin{aligned}d_1x + b_1y + c_1z &= a_1 \\d_2x + b_2y + c_2z &= a_2 \\d_3x + b_3y + c_3z &= a_3\end{aligned}$$

בפרט, הדרגה של מטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת היא מקסימלית, ולכן קיים פתרון יחיד. נמצא את פתרון המערכת שוב בעזרת נוסחת קרמר. כדי לקצר בסימונים

$$\text{נכתוב במקום } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ את הסימן } |a, b, c|.$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{|a, b, c|}{|d, b, c|} = -\frac{1}{2} \text{ נקבל} \\x_2 &= \frac{|d, a, c|}{|d, b, c|} = -\frac{|a, d, c|}{|d, b, c|} = -\frac{|a, d, c|}{|a, b, c|} \cdot \frac{|a, b, c|}{|d, b, c|} = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\x_3 &= \frac{|d, b, a|}{|d, b, c|} = -\frac{|a, b, d|}{|d, b, c|} = -\frac{|a, b, d|}{|a, b, c|} \cdot \frac{|a, b, c|}{|d, b, c|} = 0 \cdot \frac{|a, b, c|}{|d, b, c|} = 0\end{aligned}$$

ולכן הפתרון הוא $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

$$\text{לעומת זאת מתקיים } 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \text{ (מנוסחת קרמר עבור המערכת}$$

הראשונה)

$$\text{כלומר } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + d_1z &= c_1 \\a_2x + b_2y + d_2z &= c_2 \\a_3x + b_3y + d_3z &= c_3\end{aligned}$$

לכן דרגת מטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת אינה מקסימלית (כלומר - קטנה מ-3). לכן, אם דרגת מטריצת המקדמים המורחבת גדולה מדרגת המערכת המצומצמת אין פתרון, ואם הדרגות שוות יש אינסוף פתרונות.

אבל ברור שדרגת המטריצה המורחבת היא 3, כי העמודות a, b, c הן בת"ל לפי ההנחה.

לכן למערכת הזאת אין פתרון.

$$4. \text{ אם } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}|xI - A| &= \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} \\&= (x - a_{11})(x - a_{22}) - a_{12}a_{21} = x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\&= x^2 - \text{tr}A + \det A.\end{aligned}$$

כנדרש.

$$5. \text{ א. נסמן } P_i = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

עבור $p_{kk} = 1, k \neq i, i+1, p_{ii} = p_{i+1,i+1} = 0, p_{i,i+1} = p_{i+1,i} = 1$ ובכל מקום אחר יש אפסים)

כפל משמאל ב- P_i מחליף את השורה ה- i והשורה ה- $i+1$. וכפל מימין מחליף את העמודה ה- i וה- $i+1$. נשים לב גם ש- $(P_i)^{-1} = P_i$ (חישוב ישיר).

נקבל $(P_i)^{-1} T_i^\lambda P_i = P_i T_i^\lambda P_i = T_{i+1}^\lambda$ והעמודות המתאימות ב- (T_i^λ) נשים לב שעבור מטריצה הפיכה A מתקיים:

$G(A^{-1}) = G(A)^{-1}$ לכן $1 = G(I) = G(AA^{-1}) = G(A)G(A^{-1})$ (וכמו כן $G(A) \neq 0$ - נשתמש בכך בהמשך)

נובע: $G(T_{i+1}) = G((P_i)^{-1} T_i P_i) = G(P_i)^{-1} G(T_i) G(P_i) = G(T_i)$ - ולכן $G(T_i^\lambda)$ לא תלוי ב- i .

ב. נפלה טעות ברמז, היה צריך להיות; הראו תחילה כי $G(S_{ij}^\lambda) = G(S_{ij}^1)$ אח"כ חשבו את $G((S_{ij}^\lambda)^2)$.

נמשיך בהוכחה. נניח בה"כ $\lambda \neq 0$ (אחרת נקבל את מטריצת היחידה ואז התוצאה ברורה). חישוב ישיר מראה כי $(T_i^\lambda)^{-1} S_{ij}^\lambda T_i^\lambda = S_{ij}^1$ (כאשר T_i^λ מוגדר כמו בסעיף א'. שימו לב ש- $(T_i^\lambda)^{-1} = T_i^{(\lambda^{-1})}$). לכן נובע מאותו שיקול בו השתמשנו בסעיף א' ש-

$$G(S_{ij}^1) = G((T_i^\lambda)^{-1} S_{ij}^\lambda T_i^\lambda) = G(T_i^\lambda)^{-1} G(S_{ij}^\lambda) G(T_i^\lambda) = G(S_{ij}^\lambda)$$

מאידך $(S_{ij}^1)^2 = S_{ij}^2$ (גם זה נובע מחישוב ישיר), לכן

$(G(S_{ij}^1))^2 = G((S_{ij}^1)^2) = G(S_{ij}^2) = G(S_{ij}^1)$ (השוויון האחרון נובע ממה שהוכחנו זה עתה). לכן $G(S_{ij}^1)$ שווה 0 או 1. אבל S_{ij}^1 הפיכה לכן (כפי שהזכרנו בסעיף א') $G(S_{ij}^1) \neq 0$. נובע שלכל λ , $G(S_{ij}^\lambda) = 1$ כנדרש.

ג. נשתמש עתה בעובדה שבעזרת פעולות שורה ועמודה אלמנטריות ניתן לעבור מכל מטריצה A למטריצה אלכסונית, שבאלכסונה רק אחדות ואפסים. אמנם אנו לא נשתמש בפעולה של החלפת שורות או עמודות, אך לא קשה להיווכח שזה לא פוגע בטענה (בהנחה שלא אכפת לנו איפה על האלכסון יופיעו האחדות ואיפה האפסים). לא נוכיח את הטענה בפירוט אבל ניתן כיוון כללי: בהנתן $A = (a_{ij})$, אם $a_{ij} \neq 0$, נוכל לחלק את השורה הראשונה ב- a_{11} . אח"כ נוכל להוסיף כפולה מתאימה של השורה הראשונה לכל השורות הבאות על מנת לאפס את a_{k1} לכל $k > 1$, ולהוסיף כפולה מתאימה של העמודה הראשונה לעמודות הבאות על מנת לאפס את האיברים a_{1k} לכל $k > 1$. אם $a_{11} = 0$, וישנו איבר בשורה הראשונה או בעמודה הראשונה השונה מאפס, נוכל להוסיף לשורה/עמודה הראשונה את השורה/עמודה המתאימה כדי לקבל מטריצה בה האיבר במקום ה- $(1,1)$ שונה מאפס, ונמשיך כמו שתיארנו קודם. אם כל איברי השורה הראשונה והעמודה הראשונה הם אפס - אז אין כלל בעיה. בשלב הבא נעבור לאיבר במקום ה- $(2,2)$ ונמשיך באופן דומה לאפס את השורה והעמודה השניים, וכן

הלאה.

נחזור לענייננו. עבור מטריצה הפיכה נגיע בעזרת פעולות השורה והעמודה הנ"ל למטריצת היחידה. מכיוון שפעולות שורה ועמודה כאלו מתאימות לכפל מימין ומשמאל במטריצות $T_i^\lambda, S_{ij}^\lambda$ מסעיפים א', ב', נוכל לכתוב

$$\Pi_{j=1}^m L_j \cdot A \cdot \Pi_{k=1}^l R_k = I$$

כאשר L_j, R_k מטריצות מהצורה $T_i^\lambda, S_{ij}^\lambda$ עבור $i, j, \lambda \neq 0$ כלשהם. כלומר $A = (\Pi L_j)^{-1} (\Pi R_k)^{-1}$. מכפלות נקבל:

$$G(A) = \Pi G(L_j) \Pi G(R_k)$$

(נסמן R', L' במקום R^{-1}, L^{-1} גם אלה מטריצות אלמנטריות).

נשים לב כי המטריצות היחידות שישנו את המכפלה יהיו אלה מהצורה T_i^λ (כפי שהוכח בסעיף ב').

נגדיר עתה פונקציה $g : F \rightarrow F$ באופן הבא; $g(\lambda) = G(T_i^\lambda)$. מכיוון שאגף ימין תלוי רק ב- λ , הפונקציה מוגדרת היטב. בנוסף $g(\lambda\mu) = G(T_i^{\lambda\mu}) = G(T_i^\lambda \cdot T_i^\mu) = G(T_i^\lambda)G(T_i^\mu) = g(\lambda)g(\mu)$ קל לראות ש- $g(1) = 1$.

נרצה להראות ש- $G(A) = g(\det A)$.

נשים לב כי $G(T_i^\lambda) = g(\lambda) = g(\det(T_i^\lambda))$ וכן

$$g(\det(S_{ij}^\lambda)) = g(1) = 1 = G(S_{ij}^\lambda)$$

עתה - $G(A) = \Pi G(L_j) \Pi G(R_k) = \Pi G(S_{ij}^\lambda) \Pi G(T_i^\lambda)$ (כאשר המטריצות מימין הן כל המטריצות (L_j', R_k') וזה שווה:

$$= \Pi g(\det(S_{ij}^\lambda)) \Pi g(\det(T_i^\lambda)) = \Pi g(\det(L_j')) \Pi g(\det(R_k'))$$

$$= g(\Pi \det(L_j') \Pi \det(R_k')) = g(\det(\Pi L_j' \Pi R_k')) = g(\det A)$$

השתמשנו כאן בכפלות של g ובכפלות הדטרמיננטה.

כדי להשלים את הוכחת הטענה צריך להראות את נכונותה עבור מטריצות שאינן הפיכות. לאור מה שראינו בסעיף ג', מספיק לשם כך לחשב מה הערך של G על מטריצות אלכסוניות עם אפסים (ואחדות) על האלכסון;

ד. $G(0) = G(0 \cdot 0) = G(0)^2$, לכן $G(0) = 0$ או $G(0) = 1$. אם $G(0) = 1$, אז לכל A , $G(A) = G(A)G(0) = G(A \cdot 0) = G(0) = 1$. במקרה כזה הטענה הכללית שלנו ודאי נכונה, לכן נוכל להניח מעתה ש- $G(0) = 0$.

ה. נתבונן תחילה במטריצות אלכסוניות שעל האלכסון שלהם יש 1 אחד

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{והשאר אפסים. נסמן } D_i \text{ (1 במקום ה- } (i, i) \text{). אז}$$

$D_1 \cdot D_2 = 0$ לכן $G(D_1)G(D_2) = 0$. בפרט מתקיים בה"כ $G(D_1) = 0$. אבל באותו אופן כמו בסעיף א' נקבל $P_i D_i P_i = D_{i+1}$ ובאותו אופן כמו בסעיף זה נקבל ש- $G(D_i) = G(D_{i+1})$, ולכן $G(D_i) = 0$ לכל i .

נניח עתה שהוכחנו את הטענה למטריצות אלכסוניות עם פחות מ- k אחדות על האלכסון, ונתבונן במטריצות אלכסוניות עם k אחדות על האלכסון (כאשר $k < n$ סדר המטריצה).

מכפלה של שתי מטריצות שונות כאלה A, B נותנת מטריצה אלכסונית שמספר האחדות עליה קטן ממש מ- k . לכן לפי ההנחה $G(C) = 0$ ומכאן $G(A) = 0$ או $G(B) = 0$. אבל שוב בעזרת הצמדות באיברים

P_i (ייתכן שניזדקק לכמה הצמדות) ניתן לעבור ממטריצה כלשהי עם k אחדות על האלכסון לכל מטריצה אחרת מאותו סוג (הצמדה היא הפעולה $(A \rightarrow P^{-1}AP)$ (קל לראות שבעזרת ההצמדות השונות ב- P_i נוכל לקבל כל תמורה באיברי האלכסון - כי הצמדות אלה מתאימות לחילופים $(i, i+1)$). לכן הערך של G על כל המטריצות האלה הוא שווה, ולכן שווה לאפס. ו. נניח ש- G אינה הפונקציה הקבועה $G \equiv 1$, ונתבונן במטריצה A שאינה הפיכה.

נוכל כמו בסעיף ג' לכתוב $\Pi_{j=1}^m L_j \cdot A \cdot \Pi_{k=1}^l R_k = J$ כאשר L_j, R_k מטריצות מהצורה $T_i^\lambda, S_{ij}^\lambda$ עבור $i, j, \lambda \neq 0$ כלשהם, אבל הפעם J מטריצה אלכסונית עם אפסים על האלכסון. נפעיל את G על שני האגפים. לפי סעיף ה' נקבל $\Pi_{j=1}^m G(L_j) \cdot G(A) \cdot \Pi_{k=1}^l G(R_k) = G(\Pi_{j=1}^m L_j \cdot A \cdot \Pi_{k=1}^l R_k) = G(J) = 0$ אבל המטריצות L_j, R_k כולן הפיכות, לכן $G(L_j), G(R_k) \neq 0$, ומכאן ש- $G(A) = 0$. נשים לב עתה שלפי הגדרת g , $g(0) = 0$ אלא אם $G \equiv 1$. כמו כן מכיוון ש- A אינה הפיכה $\det(A) = 0$, ולכן $g(\det A) = 0 = G(A)$ ובכך השלמנו את הוכחת הטענה לכל $A \in M_n(F)$.

תרגיל בית 6 אלגברה לינארית 2

ע"ע, ו"ע ולכסינות

1. יהיו $A \in M_n(F)$ עם ע"ע λ ופולינום $p(x) \in F[x]$ כלשהו.
 - א. הוכיחו כי $p(\lambda)$ ע"ע של $p(A)$.
 - ב. האם ההיפך נכון? (הדרכה: מספיק קודם להראות זאת למקרים הפרטיים $(x^n, a \cdot x)$)
2. תהא $A \in M_n(F)$. הוכיחו כי:
 - א. 0 ע"ע של A אם"מ A לא הפיכה.
 - ב. תהא A הפיכה. הראו כי: λ ע"ע של A אם"מ λ^{-1} ע"ע של A^{-1} .
3. כזכור הגדרנו ע"ע של מטריצה $A \in M_n(F)$ ע"י כפל מימין של וקטורי עמודה קרי: $Av = \lambda v$. הראו כי בדיוק אותם ע"ע יתקבלו גם אם נפעל על וקטורי שורה משמאל, כלומר הוכיחו: יש $v \in F^n, v \neq 0$ ו $Av = \lambda v$ אם"מ יש $u \in F^n, u \neq 0$ ו $u^t A = \lambda u^t$.
4. יהיו $A, B \in M_n(F)$.
 - א. כזכור A, B נקראות דומות אם קיימת P הפיכה כך ש $A = P^{-1}BP$. כזכור A נקראת לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית.
 - א. תהא $A \in M_n(F)$ לכסינה הדומה ל $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ותהא תמורה $\sigma \in S_n$ כלשהיא. הראו כי A דומה ל $\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.
 - ב. עבור A ו B לכסינות מתקיים: יש להן אותו פ"א אם"מ הן דומות.
 - ג. מצאו שתי מטריצות ב $M_2(\mathbb{R})$ עם אותו פ"א אך שאינן דומות.
5. תהא $A \in M_n(F)$. הוכיחו כי אם יש ל A יש n ע"ע שונים אז A לכסינה.
6. יהיו $A, B \in M_n(F)$. הראו כי:
 - א. אם B מתחלפת עם $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ו $a_1, \dots, a_n$ הם n סקלרים שונים אז B אלכסונית.
 - ב. אם A לכסינה עם n ע"ע שונים ו B מתחלפת איתה אז הן לכסינות במשותף, כלומר: יש P הפיכה כך ש $P^{-1}BP, P^{-1}AP$ אלכסוניות.



תרגיל בית 6 - אלמנטרית וזוגית 2



יום שני 14:00 א"ת

① יהיו $A \in M_n(F)$ אם λ ופולינום $p(x) \in F[x]$ טלס

ⓐ $p(\lambda)$ טל $p(A)$

הוכחה: ראשית נראה את הטענה עבור $p(x) = ax$ ועבור

$q(x) = x^m$. נ"ח ש $A = (a_{ij})$ λ אם $\lambda \Leftarrow A$ ק"מ

$\forall v \in F^n, v \neq 0, Av = \lambda v$

אם $p(x) = ax$ אז $p(A) = (aa_{ij})$ ו $p(\lambda) = a\lambda$ אז

$$(p(A))v = (aA)v = a(Av) = a(\lambda v) = (a\lambda)v$$

טל $p(\lambda)$ טל $p(A)$

אם $q(x) = x^m$ אז $q(A) = A^m$ ו $q(\lambda) = \lambda^m$

נוכיח באינדוקציה של $m \in \mathbb{N}$ מתקיים $(q(A))v = \lambda^m \cdot v$

עבור $m=1$ הטענה ברורה מנתון.

נ"ח עבור m ונוכיח עבור $m+1$:

$$(q(A))v = A^{m+1}v = (A^m \cdot A)v = A^m(Av) = A^m(\lambda v) =$$

$$= \lambda(A^m v) \stackrel{(\text{I})}{=} \lambda \cdot \lambda^m v = \lambda^{m+1} v = q(\lambda)v$$

אז מתקין האינדוקציה הטענה נכונה לכל $m \in \mathbb{N}$

אנחנו נוכח ש $h(\lambda)$ טל $h(A)$ של פולינום

אנחנו $h = a \cdot x^m, a \in F, m \in \mathbb{N}$ שיהי $h = p \circ q$

האנו ש $q(\lambda)$ טל $q(A)$ ולכן $p(q(\lambda))$ טל

של $p(q(A))$ טל $h(\lambda)$ טל $h(A)$

כעת נוכיח את הנקודה הפנימית. יהיו $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ אז

$$(p(A))v = (\sum_{i=0}^m a_i A^i)v = \sum_{i=0}^m ((a_i A^i)v) = \sum_{i=0}^m (a_i \lambda^i v) = (\sum_{i=0}^m a_i \lambda^i)v =$$

$\downarrow$
טל $a_i \lambda^i$ של v

$$= p(\lambda)v$$

טל $p(\lambda)$ טל $p(A)$ ולכן יקטוף v מתחתיו

השאלה היא וקטור עצמי של $p(\lambda)$ - פ



(ב) ההפך באופן אינו נכון. (נסתב) על המטריצה $\mathbb{R}$

$A = (1)$ ופונקציה האפס $p(x) \equiv 0$. אזי $p(A) \equiv 0$ וזה

$\lambda \in F$, הפס עבור $\lambda = 2$ לחקים $p(\lambda) = 0$. אז

$p(\lambda)$ היא ע"ש של $p(A)$. אך בהרש-2 אינו ע"ש

של A . *קונפליקט בין דיווחי על פונקציה לאינן מאוס*

(2) תבא $A \in M_n(F)$

(א) 0 ע"ש של A אם A לא הפיכה.

הוכחה: נתייחס A -לסמוך A כהצתקה לנארת.

$(\Leftarrow)$ 0 ע"ש של A . אם קיים $v \in F^n$ $v \neq 0$ כך $Av = 0$.

בואר $v \in \text{Ker } A$ ו- $\text{Ker } A \neq \{0\}$. לפי טענה

מהטמטר הקודם זה שקל לומר A אינה הפיכה

(אנשים של $\text{Ker } A$ אמ"ה A חתום).

$(\Rightarrow)$ נניח A לא הפיכה. נניח שיש 0 אינו ע"ש

של A . אזי לא קיים $v \neq 0$ כך $Av = 0$. אם

$\text{Ker } A = \{0\}$. אם A חתום, כאן מהטמטר הקודם

יבוא שכל צורה באותם נורמים סופית הצתקה לנארת

היא חתום אמ"ה היא $A \Leftarrow 0 \Leftarrow A$ הפיכה.

בטחיה לנתון. (ii)

(ב) יחי A הפיכה λ ע"ש של A אם λ^{-1} ע"ש של A^{-1}

הוכחה: ראשית נציין ש- $\lambda \neq 0$ ולכן λ^{-1} קיים.

אספיק להוכיח שאם λ ע"ש של A אז λ^{-1} ע"ש של A^{-1} .

בכיוון השני נסמן $D = A^{-1}$, $z = \lambda^{-1}$ ואז $D^{-1} = A$, $z^{-1} = \lambda$.

ומאחר z ע"ש של D (קרא) ל- z^{-1} ע"ש של D^{-1} .

נניח λ ע"ש של A . אזי קיים $v \in F^n$ $v \neq 0$ כך $Av = \lambda v$.

(נפח) משמאל A^{-1} (נקרא) $v = \lambda^{-1} A^{-1} v$. (נפח) λ^{-1}

(נקרא) $\lambda^{-1} v = A^{-1} v$ בואר v וזה בהחלט ע"ש λ^{-1} במטריצה

A^{-1} . (ii)

③ קיימים $0 \neq v \in F^n$ ו- $Av = \lambda v$ אם ורק אם קיימים $0 \neq u \in F^n$ ו- $u^t A = \lambda u^t$!

הוכחה: $v^t A^t = \lambda v^t \iff Av = \lambda v$

אם נראה של A ו- A^t יש אותם ע"ש (קס) זה בטבעי. שרשי A של λ ע"ש A^t הוא λ אם

$\iff A^t u = \lambda u$ קיים $u \in F^n$ $\iff A^t u = \lambda u$
 $u^t A = u^t A^t = \lambda u^t$

נראה אם כן, של A ו- A^t יש אותם ע"ש. סוד

ש- $(A^t - \lambda I)^t = (A - \lambda I)$. דק $|A^t - \lambda I| = |A - \lambda I|$

סומר הפולינומים האופייניים של A ושל A^t זהים.

דק יש להם אותם שורשים והעצמים של A ושל A^t (אותה צורה)
 (י)

⑥ יהיו $A, B \in M_n(F)$

(א) אם B מתחבר עם $D = (a_1 \dots a_n)$ ו- $\{a_i\}$ סדורים שונים אז B ארכסיונית.

הוכחה: (נייה) ש- $B = (b_{ij})$. (תלסב באופן ישיר את

BD ואת DB ונראה אז, (נשווה את $\{a_i\}$ האגורים

$$BD = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & \dots & a_n b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 b_{n1} & \dots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & \dots & a_1 b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_{n1} & \dots & a_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

סומר $\{a_i\}$ ו- $\{b_{ij}\}$. אז $a_i b_{ij} = a_j b_{ij}$ אם $i \neq j$ ו- $a_i \neq a_j$ נובע ש- $b_{ij} = 0$ (אחרת (קס) $a_i b_{ij} \neq a_j b_{ij}$ בסתירה).

סומר B ארכסיונית (י)

(ב) A פרינג'ר ע"מ ח ע"מ שני B-1 מתחלפת איתו. אולי
הן פרינג'רות המשולגות.

הוכחה: A פרינג'ר ע"מ ח ע"מ שני $\Leftrightarrow$ קיימת
P הפיכה רק, ש- $A = P^T D P$ כאשר D ארטוגונלית

ואיברי הליכסון שלה שונים B מתחלפת ע"מ A

$$\Leftrightarrow P^T D P B = A B = B A = B P^T D P$$

(כפול אצ"ע ימין ב- P^{-1} ואצ"ע שמאל ב- P ונקרא D $P B P^{-1} = P B P^T D$

נסמן $Z = P B P^{-1}$ ונקרא $D Z = Z D$ (לכר ש- D

ארטוגונלית ע"מ איברי הליכסון שונים $\Leftrightarrow$ לפי הטעם הקודם ✓

Z ארטוגונלית בואר $P B P^{-1}$ ארטוגונלית

אצ"ע שני הנחנו $A = P^T D P \Leftrightarrow D = P A P^{-1}$

ארטוגונלית בואר A, B ארטוגונליות המשולגות (ט)

קריטי

④ יהיו $A, B \in M_n(F)$

$A = P^{-1}BP$ - P הפיכה רק $\Leftrightarrow$

A וקראת לכנסה אם היא דומה למטריצה אלכסונית
 (ע) תהא $A \in M_n(F)$ לכנסה (דומה ל-) $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ונראה

$\sigma \in S_n$ תחנה בלבד: אזי A דומה ל- $\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

הוכחה: נסמן $B = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ו- $B_\sigma = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

נתון $\Leftrightarrow A$ דומה ל- B בומר ק"מ P הפיכה רק $\Leftrightarrow$

$B = P^{-1}AP$ צריך להראות $\Leftrightarrow A$ דומה ל- B_σ מאחר

לצמון הוא יחס שקילות משקי, להראות $\Leftrightarrow B$ דומה ל- B_σ

בומר לק"מ Q הפיכה רק $\Leftrightarrow B_\sigma = Q^{-1}BQ$

משקי להוכיח את הטענה עבור $\sigma = (i, j)$ עבור i, j

בלבד. להרי אז (קה):

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & a_i & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

השמות את כל i כ"צ מדויק, אבל הכוונה היא שכל i

מתחלף את a_i ב- $a_{\sigma(i)}$ והמטריצה נשארת שקולה עד

למסלול מזהים B_σ .

נכונה גם, עבור $\sigma = (i, j)$ צריך להראות $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_j & \\ & & a_i & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{pmatrix}$$

ולכור $\Leftrightarrow P_{ij} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ מטריצה הפיכה רק $\Leftrightarrow P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

מפעילים אותה על מטריצה מאין $\Leftrightarrow$ היא מתחלפת את a_i ו- a_j

ואם מפעילים אותה על מטריצה משמאל $\Leftrightarrow$ היא מתחלפת את

השורות i, j ברור $\Leftrightarrow$

$$P_{ij} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} P_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

נסמן $Q = P_{ij}$ $B_\sigma = Q^{-1}BQ$ עבור $\sigma = (i, j)$ ולכן אם σ

②

כ) יהיו A, B לכנסות $n \times n$ על פולינום אופייני $p_A(x)$

הן צומות

הוכחה:

($\Rightarrow$) נניח $A \sim B$ צומות. אזי קיימת P הפיכה כך

$$A = P^{-1}BP$$

$$p_A(x) = |xI - A| = |xI - P^{-1}BP| = |P^{-1}xIP - P^{-1}BP| =$$

$$= |P^{-1}(xI - B)P| = |P^{-1}| |xI - B| |P| =$$

משפט המעלה נכון גם אם n הוא הפולינום

$$= |P^{-1}| |xI - B| |P| = |xI - B| = p_B(x)$$

($\Leftarrow$) נניח $p_A(x) = |xI - A| = |xI - B| = p_B(x)$. לכנסות A, B

אין יש להן n ע"ם שונים שהם שורשי הפולינומים האופייניים.

הפולינומים שונים ולכן עבור איזו $\sigma \in \Sigma_n$

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_{\sigma(i)}) = p_B(x)$$

שהכי שווים בין פולינומים אלו זה שוויון הסדר השורשים

אז A צומת ל- B דומה ל- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ ו- B צומת ל- $\begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$

לפי סעיף א' $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ צומת ל- $\begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ מאחר

שציון הוא יחס שקילות נקרא ל- A דומה ל- B . (י)

ג) אם במטריצות אין לכנסות $n \times n$ פולינום אופייני זהה

אין זה ציון ביניהן. לדוגמה (סתם) $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו-

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ברור שהן אינן צומות משום ל- B מייצגת את

הזתקה האפסית ואילו A - לא. אבל,

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & -\pi \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

$$p_B(x) = |xI - B| = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

(5) תבוא $A \in M_n(F)$. אם יש ל- A n ע"ש שונים אז A לכנסה.
 הוכחה: הוכח בהצגה $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ע"ש שונים!
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הן הו"ע הממלאים את $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ בתל.
 רק אם יש ל- A n ע"ש שונים אז יש n ו"ע בתל. לומר
 קיים בסיס ל- F^n אשר מורכב מו"ע. תהי T העתקה
 ליניארית שמעצבת ע"י A לפי בסיס מסוים. יהיו $v_1, \dots, v_n$
 הווקטורים ה- v_i אשר $\alpha_i, \dots, \alpha_n$ הם הקואורדינטות
 שלהם לפי אותו בסיס. לפי העצרת בהתאמה בין סקספורמציות
 למטריצות, המטריצה של T ביחס לבסיס $\{v_i\}$ היא
 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ שהיא רק $v_i = \lambda_i v_i$. לומר אצאנו "צ"ח
 ל- T לפי בסיס אחר שבו המטריצה אלכסונית. לומר
 קיימת מטריצה מעבר בבסיסים P רק ל- $A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$
 לומר A לכנסה.



תרגיל בית 6 אלגברה לינארית 2 (כולל פתרון)

ע"ע, ו"ע ולכסינות

1. יהיו $A \in M_n(F)$ עם ע"ע λ ופולינום $p(x) \in F[x]$ כלשהו.
 א. הוכיחו כי $p(\lambda)$ ע"ע של $p(A)$.
 (הדרכה: מספיק קודם להראות זאת למקרים הפרטיים $(x^n, a \cdot x)$)
 ב. האם ההיפך נכון?

פתרון:

א. נראה שאם v ו"ע של A עם ע"ע λ אז v ו"ע של $p(A)$ עם ע"ע $p(\lambda)$.

באינדוקציה על דרגת $p(x)$. בסיס האנדוקציה:

אם $p(x) \equiv c$ לאיזה קבוע אז ברור ש $p(A)v = cv = cIv = p(A)v$.

צעד האנדוקציה: $\deg p(x) > 0$ ולכן $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n+1}x^{n+1}$ ולכן

$$p(A)v = (a_0I + a_1A + \dots + a_{n+1}A^{n+1})v =$$

$$(a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n)v + a_{n+1}A(A^n v) = (a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n)v + a_{n+1}A(\lambda^n v) =$$

$$(a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n)v + a_{n+1}\lambda^{n+1}v = p(\lambda)v$$

(*) ע"פ הנחת האנדוקציה.

ב.ל.א, יהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו $p(x) = x^2 - 1$ אז $p(-1)$ ע"ע של $p(A)$ אבל -1 אינו ע"ע של A .

2. תהא $A \in M_n(F)$. הוכיחו כי:

א. 0 ע"ע של A א"מ"מ A לא הפיכה.

ב. תהא A הפיכה. הראו כי: λ ע"ע של A אם"מ λ^{-1} ע"ע של A^{-1} .

פתרון:

א. מהגדרת ע"ע λ אמ"מ $A - \lambda I$ לא הפיכה.

ב. ברור שהטענה סימטרית ולכן מספיק להראות כוון אחד.

$$A^{-1}v = (\lambda^{-1}\lambda)A^{-1}v = \lambda^{-1}A^{-1}Av = \lambda^{-1}v \quad \text{if } 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda v) = V_\lambda \quad \text{iff } [\Leftarrow]$$

3. כזכור הגדרנו ע"ע של מטריצה $A \in M_n(F)$ ע"י כפל מימין של וקטורי עמודה קרי: $Av = \lambda v$.

הראו כי בדיוק אותם ע"ע יתקבלו גם אם נפעל על וקטורי שורה משמאל,

כלומר הוכיחו: יש $Av = \lambda v$ ו- $0 \neq v \in F^n$ אם ורק אם יש $u^t A = \lambda u^t$ ו- $0 \neq u \in F^n$.

פתרון:

נשים לב ש A פועלת של וקטורי שורה בדיוק כמו ש A^t פועלת על וקטורי עמודה.

כלומר למצוא את הע"ע של A על שורות זה למצוא את הע"ע במובן הרגיל של A^t .

אבל ל' A ו' A' יש אותו פ"א קל וחומר שאותם ע"ע.

תזכורת: ההוכחה ש $\det A^t = \det A$ עובדת למטריצות מעל חוגים קומוט' ובפרט ל

$\det(A^t - xI) = \det(A - xI)^t$ למטריצות מעל חוג הפולינומים.

4. יהיו $A, B \in M_n(F)$.

כזכור A, B נקראות דומות אם קיימת P הפיכה כך ש $A = P^{-1}BP$.

כזכור A נקראת לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית.

א. תהא $A \in M_n(F)$ לכסינה הדומה ל $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ותהא תמורה $\sigma \in S_n$ כלשהיא.

הראו כי A דומה ל $\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$

ב. עבור A ו B לכסינות מתקיים: יש להן אותו פ"א אמ"מ הן דומות.
ג. מצאו שתי מטריצות ב $M_2(\mathbb{R})$ עם אותו פ"א אך שאינן דומות.

פתרון:

א. יהא $B = (v_1, \dots, v_n)$ המקיימים $[A]_B = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

אז עבור $B' = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$ נקבל $[A]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$

ב. $\Rightarrow$ ברור.

$\Leftarrow$ B, A לכסינות עם אותו פ"א ובפרט הפ"א שלהן מתפרק לגורמים לינאריים ויש להם בדיוק

אותם ע"ע עם אותם ריבויים ולכן אם $[A]_C = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ לאיזה בסיס מלכסן של A ו

$[B]_{C'} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ לאיזה בסיס מלכסן של B אז מסעיף קודם יש בסיס "C עם

$[A]_{C''} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ ולכן B, A דומות לאותה מטריצה ולכן הן דומות.

ג. בתירגול ראינו שהמטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אינן דומות.

5. תהא $A \in M_n(F)$. הוכיחו כי אם יש ל A יש n ע"ע שונים אז A לכסינה.

פתרון: ישירות מהמשפט שראיתם שו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל. נקבל n ו"ע (אחד לכל ע"ע) הם בת"ל לכן בסיס ולכן מהאפיון של לכסינות אמ"מ יש בסיס של ו"ע נסיים.

6. יהיו $A, B \in M_n(F)$. הראו כי:

א. אם B מתחלפת עם $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ ו $a_1, \dots, a_n$ הם n סקלרים שונים אז B אלכסונית.

ב. אם A לכסינה עם n ע"ע שונים ו B מתחלפת איתה אז הן לכסינות במשותף, כלומר: יש P הפיכה כך ש $P^{-1}BP, P^{-1}AP$ אלכסוניות.

פתרון:

א. תהא B שמתחלפת עם A הנ"ל. אז $(AB)_{i,j} = a_i B_{i,j} = (BA)_{i,j} = a_j B_{i,j}$ לכן $(a_i - a_j)B_{i,j} = 0$ מההנחה לכל $i \neq j$ נקבל $a_i - a_j \neq 0$ ולכן $B_{i,j} = 0$.
 ב. יהא C הבסיס המלכסן של A . אז $[A]_C$ ו $[B]_C$ מתחלפות וע"פ סעיף קודם $[B]_C$ כבר אלכסונית. כלומר כל בסיס שמלכסן את A מלכסן גם את B .

תרגיל 7 באלגברה לינארית 2

1. הראו כי למטריצה סימטרית ב- $M_2(R)$ יש ע"ע ממשיים בלבד.

2. מצאו אינסוף מטריצות מעל הממשיים שהפולינום האופייני שלהן שווה ל $(x-1)(x-2)(x-3)$

3. יהי $n \in \mathbb{N}$. מטריצה $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ נקראת **מטריצה סטוכסטית** אם

• לכל $1 \leq i, j \leq n$ מתקיים $0 \leq a_{ij} \leq 1$

• לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$

הראו כי 1 הינו ע"ע של כל מטריצה סטוכסטית.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 4. \text{ נתונות שתי מטריצות:}$$

א. לכל אחת מהמטריצות חשבו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי.

ב. לכל אחת מהמטריצות מצאו את הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים המתאימים, את הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי, וקבעו האם היא לכסינה.

ג. האם A ו-B דומות? הוכיחו את תשובתכם.

5. יהיו $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, ויהי $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ שורש היחידה מסדר n. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \quad v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

א. הוכיחו כי $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ הם ו"ע של A, וחשבו את הע"ע שלהם.

ב. הוכיחו כי $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ הם בסיס של $\mathbb{C}^n$, והסיקו כי A לכסינה.

ג. קבלו נוסחא ל $\det A$.

תרגיל 7 האלמנטריות 2

- (1) סעיף: אם מטריצה $M_2(\mathbb{R})$ יש ע"מ אנשים כלבד.
 הוכחה: תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ מטריצה A מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$
 כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$ ותהי A הפולינום האופייני של A :

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -b & x-c \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)(x-c) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$$

- (ii) נניח כי $p_A(x)$ אינו פולינום של x ונניח כי $p_A(x) = 0$ לכל x .
 אז $(a+c)x + (ac - b^2) = 0$ לכל x .
 נקבל $a+c=0$ ו- $ac-b^2=0$.
 נניח $a+c=0$ אז $c=-a$.
 נציב ב- $ac-b^2=0$ נקבל $-a^2-b^2=0$ כלומר $a^2+b^2=0$.
 מכאן $a=0$ ו- $b=0$.
 אז $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ וזהו המטריצה האפסית.

- (2) נתון מטריצה A שהפולינום האופייני שלה הוא $(x-1)(x-2)(x-3)$.
 כלומר $|xI - A| = (x-1)(x-2)(x-3)$

ידוע שצורת הירדן של מטריצה איננה משתנה תחת שינוי בסיס.
 נניח $C \in \mathbb{R}$ מטריצה A מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & C & C \\ 0 & 2 & C \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
 הפולינום האופייני שלה הוא:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & C \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -C \\ 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

אז $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & 2 \end{pmatrix} : C \in \mathbb{R} \right\}$ קבוצת המטריצות.
 אינסופית כל $A \in \mathcal{D}$ מתקיים $p_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

- (3) סעיף: 1. הנינו ע"מ של מטריצה סטוכסטית.

הוכחה: נניח $A = (a_{ij})$ סטוכסטית כל $i \leq n$.
 מתקיים $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ (סכום שורה)

$$A \cdot \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \alpha$$

אז $A \cdot \alpha = \alpha$ כלומר α הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 1.
 נניח $\alpha \neq 0$ אז α הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 1.
 נניח $\alpha = 0$ אז α הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 1.

(ii) נניח $\alpha \neq 0$ אז α הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 1.

(4) חביתה שלי מטריצות $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) הפולינומים הראשוניים:

$$p_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)^2 (x-3)^2$$

$$p_B(x) = |xI - B| = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{משולש}} (x-2)^2 (x-3)^2$$

הפולינומים המינימליים:

נזכור שהדמיון הכיתה של הפולינומים הראשוניים והפולינומים המינימליים.

יש בדיוק אותה שורשים ולכן הפולינומים שלם בדיוק הם

$$p_1(x) = (x-2)(x-3), \quad p_2(x) = (x-2)^2(x-3), \quad p_3(x) = (x-2)(x-3)^2$$

$$p_1(A) = (A-2I)(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1(B) = (B-2I)(B-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2(A) = (A-2I)^2(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2(B) = (B-2I)^2(B-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3(B) = (B-2I)(B-3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_A(x) = (x-2)^2(x-3)$$

$$m_B(x) = p_B(x) = (x-2)^2(x-3)^2$$

←



⑥ (10) $Alg_A(\lambda)$ - הרבוי האלגברי של λ ב- A

$Geo_A(\lambda)$ - הרבוי הגאומטרי של λ ב- A

ידיים של A לרנסנה אתה בד ע"ש λ $Alg_A(\lambda) = Geo_A(\lambda)$
לפיה צורה הרבוי האלגברי

$$Alg_A(3) = Alg_A(2) = 2 = Alg_B(2) = Alg_B(3)$$

הנסת למצוא את הרבויים הגאומטריים (חפץ את
אנא במרחבים העצמיים

$$Geo_A(2) = \dim V_2^A = \dim \text{Ker}(A - 2I) = 4 - \text{rank}(A - 2I)$$

$$= 4 - \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq Alg_A(2)$$

$$Geo_A(3) = 4 - \text{rank}(A - 3I) = 4 - \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$Geo_B(2) = 4 - \text{rank}(B - 2I) = 4 - \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq Alg_B(2)$$

$$Geo_B(3) = 4 - \text{rank}(B - 3I) = 4 - \text{rank} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq Alg_B(3)$$

$\Leftarrow$ אכן A וכן B לבסנות

⑦ A ו- B אינן צורות שלק למטריות צורות יש אותו

פולנים מניאלי ואילו ראנו ב(ט) $m_A(x) \neq m_B(x)$

חול מלה $Geo_B(3) \neq Geo_A(3)$ והרי למטריות צורות אינן

שהן מייצגות את אותה הטריטוריה תיכף. אהרן

שלם הע"ה הרבויים הגאומטריים שונים.

$$\omega = \text{cis } \frac{2\pi}{n}$$

$$\{a_i\}_{i=0}^{n-1} \in \mathbb{C} \quad \text{וראו (5)}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}, \quad k=0, \dots, n-1$$

$$A \text{ על } \delta \text{ ו-} \{V_i\}_{i=0}^{n-1} \quad (c)$$

בזכרון: $0 \leq k \leq n-1$ לכל k

$$A \cdot V_k = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \omega^k + \dots + a_{n-1} \omega^{(n-1)k} \\ a_{n-1} + a_0 \omega^k + \dots + a_{n-2} \omega^{(n-1)k} \\ \vdots \\ a_1 + a_2 \omega^k + \dots + a_0 \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n^k \\ d_1^k \\ \vdots \\ d_{n-1}^k \end{pmatrix}$$

$$d_j^k = d_n^k \cdot \omega^{jk} \quad 0 \leq j \leq n-1 \text{ לכל } k$$

$$d_n^k \cdot \omega^{jk} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ik} \right) \omega^{jk} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\omega^{(i+j)k})$$

$$= a_0 \omega^{jk} + a_1 \omega^{(j+1)k} + a_2 \omega^{(j+2)k} + \dots + a_{n-2} \omega^{(j+n-2)k} + a_{n-1} \omega^{(j+n-1)k} = d_j^k$$

$$A V_k = d_n^k V_k \quad \text{למחרת כל } 0 \leq k \leq n-1 \text{ מתקיים}$$

(ii)

$$\{d_n^k\} \text{ הם שמותיים. כל } \{V_k\} \leftarrow$$

(b) A מכנסה

בזכרון: נראה ש- $\{V_k\}$ בתל ורשים את כל V_k

$$\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & (\omega^2)^1 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\omega^{n-1})^1 & (\omega^{n-1})^2 & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} = D$$

אם $x_i = \omega^i$ כל $n \geq 1$ בעצם (קס) ל- D היא

$$\det D = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i) \text{ ונדרמוןציה: יצא } \omega^2$$

$$\det D \neq 0 \Leftrightarrow x_j \neq x_i \text{ כל } j \neq i \text{ ברור ש-}$$

$$\Leftrightarrow \text{שומר } D \text{ בתל} \Leftrightarrow \text{הקטורים } \{V_k\} \text{ בתל}$$

מצאנו n וקטורים בתל במרחב $\mathbb{C}^n$

$$\Leftrightarrow \text{וקטורים אלה הם בסיס ל- } \mathbb{C}^n \text{ כמו כן, אלה הם}$$

וקטורים עצמיים. שומר מצאנו בסיס של וקטורים עצמיים

$$\Leftrightarrow \text{כל מילט מכיתה } A \text{ מכנסה. (ii)}$$

Ⓔ) נמצא נוסחה ל- $\det A$

האופן בלתי א-ב- $B \in M_n(F)$ ו- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F^n$ ש-

$$B \cdot [\alpha_1 \dots \alpha_n] = (B\alpha_1 \dots B\alpha_n)$$

המקרה שלנו ידוע שלב ו- $0 \leq k \leq n-1$ $A \cdot v_k = d_n^k v_k$
ראש d_n^k פה שמוצגו בסעיף (א).

$$Z = (v_0 \dots v_{n-1}) \quad (\text{סמן})$$

$$\Rightarrow A \cdot Z = A \cdot (v_0 \dots v_{n-1}) = (Av_0 \dots Av_{n-1}) = \\ = (d_n^0 v_0 \dots d_n^{n-1} v_{n-1})$$

לפי תכונות הדטרמיננטה (קס) ל-

$$\det A \cdot \det Z = \prod_{k=0}^{n-1} d_n^k (\det Z)$$

אבל פה שכתבתי בסעיף הקודם המטריצה Z היא

$$\det Z = \det D \neq 0 \quad \Leftarrow Z = D^t$$

$\Leftarrow$ ניתן לצמצם משני האיברים את $\det Z$ ונקבל

$$\det A = \prod_{k=0}^{n-1} d_n^k$$

זהו רשמי חולבה על זה, התוצאה היא טריוויאלית

שהרי למטריצה צומת יש אותה דטרמיננטה אם A

לכנסה אז היא צומת למטריצה אלכסונית של איברי

האלכסון שלה הם ה- d_n^k . דטרמיננטה של מטריצה

אלכסונית היא מכפלת איברי האלכסון. במקרה זה מכפלת

האיברים העצמיים, וזה בדיוק מה שקיבלנו.

אז אפוא אנחנו קונסיסטנטים 😊 היצ

פתרון תרגיל 7 באלגברה לינארית 2

1. הראו כי למטריצה סימטרית ב- $M_2(R)$ יש ע"ע ממשיים בלבד.

תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. נחשב פולינום אופייני:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$$

נראה שהדיסקרימיננטה של הפולינום האופייני אי שלילית, ומכך ינבע שהשורשים ממשיים: ואכן, $\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$ כנדרש.

2. מצאו אינסוף מטריצות ב- $M_n(R)$ שהפולינום האופייני שלהן שווה ל

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

ברור שמדובר במטריצות מסדר 3, כי מעלת הפולינום האופייני שווה לסדר המטריצה. כעת, כל מטריצה מהצורה הבאה מקיימת את הדרוש:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in R$$

3. יהי $n \in \mathbb{N}$. מטריצה $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ נקראת **מטריצה סטוכסטית** אם

• לכל $1 \leq i, j \leq n$ מתקיים $0 \leq a_{ij} \leq 1$

• לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$

הראו כי 1 הינו ע"ע של כל מטריצה סטוכסטית.

$$\text{יהי } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in R^n. \text{ נראה } v \text{ ו"ע של } A \text{ המתאים לע"ע } 1:$$

$$Av = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} v_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot 1 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot 1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1v$$

4. נתונות שתי מטריצות:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	
$(x-2)^2(x-3)^2$	$(x-2)^2(x-3)^2$	פולינום אופייני
$(x-2)^2(x-3)$	$(x-2)^2(x-3)^2$	פולינום מינימלי
2,3	2,3	ערכים עצמיים
$V_2 = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, V_3 = sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$	$V_2 = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, V_3 = sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$	מרחבים עצמיים
ר"א של הע"ע 2 הוא 2 ר"א של הע"ע 3 הוא 2	ר"א של הע"ע 2 הוא 2 ר"א של הע"ע 3 הוא 2	ריבוי אלגברי
ר"א של הע"ע 2 הוא 1 ר"א של הע"ע 3 הוא 2	ר"ג של הע"ע 2 הוא 1 ר"א של הע"ע 3 הוא 1	ריבוי גאומטרי
לא	לא	לכסינה?

ג. A ו-B אינן דומות. שכן נניח בשלילה שהן דומות. כלומר, קיימת P הפיכה כך ש-
 $P^{-1}AP = B$. אז גם $A-3I$, $B-3I$ דומות. כי: $P^{-1}(A-3I)P = P^{-1}AP - P^{-1}(3I)P = B - 3I$.

$$A-3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ואילו} \quad B-3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{אולם}$$

לכן, לא ייתכן שהן מייצגות את אותה הטרנספורמציה. לכן אינן דומות, סתירה.

5. יהיו $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C$, ויהי $w = e^{\frac{2\pi k}{n}}$ שורש היחידה מסדר n . נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \quad v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

א. הוכיחו כי $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ הם ו"ע של A , וחשבו את הע"ע שלהם.

נחשב Av_k :

$$Av_k = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k} \\ a_{n-1} + a_0 w^k + \dots + a_{n-2} w^{(n-1)k} \\ a_{n-2} + a_{n-1} w^k + \dots + a_{n-3} w^{(n-1)k} \\ \vdots \\ a_1 + a_2 w^k + \dots + a_0 w^{(n-1)k} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k} \\ w^k (a_0 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k}) \\ w^{2k} (a_0 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k}) \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} (a_0 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k}) \end{pmatrix} = (a_0 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k}) \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik} \right) v_k$$

(השתמשנו בכך ש $w = e^{\frac{2\pi k}{n}}$ שורש היחידה מסדר n , כלומר, ש- $w^n = 1$).

לכן v_k ו"ע של A עם ע"ע $\lambda_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik}$.

ב. הוכיחו כי $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ הם בסיס של C^n , והסיקו כי A לכסינה.

נשים לב, שלכל $0 \leq i \neq j \leq n$, $w^i \neq w^j$. לכן המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים

$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ היא מטריצת ון-דר-מונדה, שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס. לכן, העמודות

$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ בת"ל. מאחר ומדובר ב- n וקטורים בת"ל במרחב מממד n , נסיק שזהו בסיס.

ראינו שיש בסיס של C^n המורכב מו"ע של A . לכן A לכסינה.

ג. קבלו נוסחא ל $\det A$: מאחר ו- A לכסינה, הדטרמיננטה שלה שווה לכפלת הע"ע שלה. ולכן:

$$\det A = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik} \right)$$

אלגברה לינארית 2 - תרגיל 8

14.05.06

1. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה $\begin{pmatrix} 2a+3 & 0 & 0 \\ -a-3 & a & a+3 \\ a & a & a+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה והסבר מדוע המטריצה לכסינה עבור שאר ערכי a .

2. (שאלה ממבחן) תהי $A \in M_2(\mathbf{R})$ (מטריצה מעל הממשיים) המקיימת לכל וקטור α :
 $A(A\alpha) = A\alpha + c\alpha$ (c מספר ממשי)
מהם הערכים האפשריים של c אם ידוע שיש ל- A שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית?

3. נתון מרחב מכפלה פנימית V מעל המרוכבים יחד עם מכפלה פנימית $(\cdot, \cdot)$. עבור $v \in V$ נתון (קבוע), נגדיר העתקות $f_v: V \rightarrow F$ ו- $g_v: V \rightarrow F$ ע"י $f_v(w) = (w, v)$ ו- $g_v(w) = \overline{(v, w)}$. הוכיחו כי f_v ו- g_v הן ט"ל.

הגדרה: פונקציית נורמה על מ"ו V הינה פונקציה $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ המקיימת:

$$1. \text{ חיוביות: } v = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0$$

$$2. \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$3. \text{ אי שוויון המשולש: } \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

מרחב וקטורי יחד עם נורמה יקרא מרחב נורמי.

4. נתון מרחב מכפלה פנימית V יחד עם מ"פ $(\cdot, \cdot)$. נגדיר העתקה: $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. הראו ש- $\| \cdot \|$ מוגדרת היטב וכי היא אכן נורמה. (שימו לב לדרישה שנורמה היא פונקציה אי שלילית. עבור אי שוויון המשולש כדאי אולי להשתמש בזהות הבאה במרוכבים: $\operatorname{Re}(z) < |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ובאי-שוויון קושי-שוורץ.

5. עבור V ו- $\| \cdot \|$ כבשאלה 3, השתמשו בתכונות המ"פ להוכחת שוויון המקבילית:

$$(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2))$$

6. נתונים V מרחב מכפלה סקלארית ממימד n ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס. נגדיר מטריצה ריבועית

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ע"י } a_{i,j} = (v_i, v_j) \text{ (כאשר } (\cdot, \cdot) \text{ היא המכפלה הסקלארית הנתונה).}$$

א. הוכיחו כי בהינתן וקטורים $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ו- $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ מתקיים: $(v, w) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) A (\beta_1 \dots \beta_n)^T$

כלומר:

$$(v, w) = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ב. הגדרה: שתי מטריצות ריבועיות $A, B \in M_n(F)$ נקראות חופפות אם קיימת מטריצה רגולרית

$$B = P^T A P \quad \text{כך ש-} P \in M_n(F)$$

הסיקו כי אם מחליפים את הבסיס, המטריצה A עוברת למטריצה חופפת (כלומר בהנתן בסיס שונה $w_1, \dots, w_n$ של

$$V \text{ נגדיר את } P \text{ להיות מטריצת מעבר הבסיסים המתאימה. אם } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ מוגדרת ע"י}$$

$$b_{i,j} = (w_i, w_j) \text{ אז מתקיים ש-} B = P^T A P.$$













(2) תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ מתקיימת לכל $\alpha \in \mathbb{R}^2$ -

$$c \in \mathbb{R} \text{ לכל } (*) A(A\alpha) = A\alpha + c\alpha$$

(נ"ה של A - שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים. אזי A

פריסה בפרט קיים זה לפחות עקב עצמו אחד.

$$A^2\alpha - A\alpha - cI\alpha = 0 \quad (*) \text{ (קהל) } -$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^2 \text{ לכל } (A^2 - A - cI)\alpha = 0 \quad \text{בזמן}$$

$$\Leftarrow B = A^2 - A - cI = 0 \quad (\text{משום שיש וקטור עצמי לאפס})$$

(וניתן עקב 0 כל וקטור).

$$p(x) = x^2 - x - c \quad \text{ישו ע"פ תוצאה 6 של } \lambda$$

$$(*) \text{ אז } A \text{ של } p(A) \text{ על } p(\lambda) \text{ אז } p(A) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - c = p(\lambda) = 0 \quad \Leftarrow p(A) = 0$$

A פריסה אחת הפאקטור הרייט'ס של A מתפרק למכרי לעצמם

$$\text{למכריים שונים } \Leftarrow \text{או } m_A(x) = x - \lambda_1 \text{ או } m_A(x) = x - \lambda_2$$

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Leftarrow \text{למשוואה } x^2 - x - c = 0 \quad \text{תימים אלו פתרונות}$$

$$\text{לפי קורס אחר } 1 + 4c \geq 0, \text{ בזמן } c \geq -1/4.$$

(3) יבי מרחב מכפלה פנימי V ופאקטור המכפלה $\langle \cdot, \cdot \rangle$ עבור $v \in V$ נבחר

$$f_v: V \rightarrow F, \quad g_v: V \rightarrow F \quad \text{ע"י } f_v(\omega) = (\omega, v) \quad \text{ו} \quad g_v(\omega) = \overline{(v, \omega)}$$

$$\text{(ראה של } f_v, g_v \text{ הם ליניאריים)}$$

$$\text{"כיון" } \exists \omega_1, \omega_2 \quad \text{אם } a, b \in F$$

$$f_v(a\omega_1 + b\omega_2) = (a\omega_1 + b\omega_2, v) =$$

$$= (a\omega_1, v) + (b\omega_2, v) \stackrel{\text{ליניאריות}}{=} a(\omega_1, v) + b(\omega_2, v) = af_v(\omega_1) + bg_v(\omega_2)$$

$$g_v(a\omega_1 + b\omega_2) = \overline{(v, a\omega_1 + b\omega_2)} = \overline{(a\omega_1 + b\omega_2, v)} = (a\omega_1 + b\omega_2, v) =$$

$$\stackrel{\text{ליניאריות}}{=} a(\omega_1, v) + b(\omega_2, v) = a\overline{(v, \omega_1)} + b\overline{(v, \omega_2)} = ag_v(\omega_1) + bg_v(\omega_2)$$

$$(*) \quad f_v, g_v \text{ הם ליניאריים}$$

$$(4) \text{ ידוע } V \text{ מרחב מרחב פנימי (גזיר) } \|v\| = \sqrt{(v,v)}$$

(נראה ש- $\| \cdot \|$ נורמה):

ראשית נראה כי היא גוזרת היטב. לפי חוקיות של מרחב פנימי לכל $v \in V$ $(v,v) \geq 0 \iff \sqrt{(v,v)}$ מוגדר.

- חוקיות: לפי חוקיות של מרחב פנימי $(v,v) = 0$ אם ורק אם $v=0$.

$$v=0 \iff \sqrt{x}=0 \iff x=0$$

$$\|v\|=0 \iff v=0$$

- לפי הגדרת מרחב פנימי לכל $a \in F$ מקיים:

$$(av, av) = a(v, av) = a(\overline{av}, v) = a \cdot \overline{a} (v, v) = |a|^2 (v, v)$$

$$\|av\| = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{|a|^2 (v, v)} = |a| \sqrt{(v, v)} = |a| \|v\| \iff$$

- אי שוויון המשולש:

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\| \quad v, w \in V$$

זהו מאגר של כל הדיאלוגים של $\| \cdot \|$ מספיק להראות:

$$\|v+w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\|v+w\|^2 = (v+w, v+w) = (v, v+w) + (w, v+w) =$$

$$= (\overline{v+w}, v) + (\overline{v+w}, w) = (\overline{v}, v) + (\overline{w}, v) + (\overline{v}, w) + (\overline{w}, w) =$$

$$= (v, v) + (v, w) + (w, v) + (w, w) \stackrel{\text{הצגה}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 =$$

$$= (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\| \cdot \| \text{ אכן נורמה } \textcircled{u}$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad : \text{§3 (5)}$$

הוכחה

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) + \overbrace{(x,-y)}^{-(x,y)} + \overbrace{(-y,x)}^{-(y,x)} + \overbrace{(-y,-y)}^{(y,y)} = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

☺

(6) יהיו $v_1, \dots, v_n$ בסיס n ממדים $n \times n$ מרחב פנימי

תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה $a_{ij} = (v_i, v_j)$

(7) §3: עבור $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ו- $w = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$ מחקיים

$$(v, w) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) A (\beta_1 \dots \beta_n)^T$$

הוכחה: (העזר במטריצה)

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \beta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \beta_j \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i a_{ij} \beta_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i (v_i, v_j) \beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n (v_i, v_j) \beta_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j) = (v, w)$$

☺

(8) §3: בהינתן בסיס שונה $w_1, \dots, w_n$ של V תהי P מטריצה

מעבר הבסיסים $B = (b_{ij})$ כאשר $b_{ij} = (w_i, w_j)$ אז

$$B = P^T A P$$

הוכחה: P מטריצת מעבר הבסיסים סומה $P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור

המקדמים של $w_1, \dots, w_n$ הם בסיס חדש $w_1, \dots, w_n$ אז

$$(0 \dots 1 \dots 0) P^T A P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (w_i, w_j) = b_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ik} p_{jk} =$$

לפי הסעיף הקודם ומתקבל

$$(0 \dots 1 \dots 0) P^T A P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (P(0 \dots 1 \dots 0)^T)^T A (P(0 \dots 1 \dots 0)^T)^T = (w_i, w_j) = b_{ij}$$

$$P^T A P = B \quad \Leftarrow$$

☺

אלגברה לינארית 2 – פתרון תרגיל 8

14.05.06

1. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה $\begin{pmatrix} 2a+3 & 0 & 0 \\ -a-3 & a & a+3 \\ a & a & a+3 \end{pmatrix}$ אינה לכסינה והסבר מדוע המטריצה לכסינה עבור שאר ערכי a .

פתרון: נחשב קודם את הפולינום האופייני של A .

$$\begin{aligned} p(t) = |tI - A| &= \begin{vmatrix} t-2a-3 & 0 & 0 \\ a+3 & t-a & -a-3 \\ -a & -a & t-a-3 \end{vmatrix} = (t-2a-3) \begin{vmatrix} t-a & -a-3 \\ -a & t-a-3 \end{vmatrix} \\ &= (t-2a-3)[(t-a)(t-a-3) - (-a)(-a-3)] = (t-2a-3)[t^2 - (2a+3)t] \\ &= t(t-2a-3)^2 \end{aligned}$$

כדי שנוכל לקבוע את הריבוב האלגברי של שורשי הפולינום נבחין בשני המקרים הבאים:
(א) $2a+3=0$ (כלומר $a=-1.5$) במקרה זה הפולינום האופייני הוא $p(t)=t^3$ לכן קיים ערך עצמי אחד, $\lambda=0$, עם ריבוי אלגברי 3.

נציב $a=-1.5$ במטריצה A ונקבל $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 \end{pmatrix}$, לכן מימד מרחב הפתרונות של המערכת

ההומוגנית $(\lambda I - A)x = 0$ הוא אחד. לכן הריבוי הגיאומטרי של הע"ע הוא 2. קיבלנו שבמקרה זה המטריצה A אינה לכסינה.

(ב) $2a+3 \neq 0$ במקרה זה לפולינום האופייני יש שני שורשים: $\lambda_1 = 0$ עם ריבוי אלגברי 1, ו- $\lambda_2 = 2a+3$ עם ריבוי אלגברי 2.

נבדוק מהו הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_2 = 2a+3$, כלומר את מימד מרחב הפתרונות של המערכת $[(2a+3)I - A]x = 0$. מטריצת המערכת היא:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+3 & a+3 & a-3 \\ -a & -a & a \end{pmatrix}$$

נמצא את דרגתה ע"י ביצוע פעולות שורה אלמנטריות:

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ -a & -a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \frac{a}{3}R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפיכך הדרגה של מטריצת המערכת היא 1, ולכן הריבוי הגיאומטרי עבור $\lambda_2 = 2a+3$ הוא 2.

סיכום: כאשר $2a+3 \neq 0$ הריבוי הגיאומטרי של כול אחד מהערכים העצמיים של A שווה לריבוי האלגברי שלו ולכן A לכסינה.
מכאן שהערך היחיד של a שעבורו A אינה לכסינה הוא $a=-1.5$.

2. (שאלה ממבחן) תהי $A \in M_2(\mathbf{R})$ (מטריצה מעל הממשיים) המקיימת לכל וקטור α :

$$A(A\alpha) = A\alpha + c\alpha \quad (c \text{ מספר ממשי})$$

מהם הערכים האפשריים של c אם ידוע שיש ל- A שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית?

פתרון 5: לכל α וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ , מתקיים

$$A(A\alpha) = A\alpha + c\alpha \Rightarrow c = \lambda^2 - \lambda \quad \lambda^2\alpha = \lambda\alpha + c\alpha$$

ז.א. כל ע"ע λ של A מקיים: $c = \lambda^2 - \lambda$

שימו לב ש- $A \in M_2(\mathbf{R})$ ולכן λ ממשי.

למשוואה $\lambda^2 - \lambda - c = 0$ יש פתרונות ממשיים עבור $c \geq -\frac{1}{4}$.

לכן $c \geq -\frac{1}{4}$ הוא תנאי הכרחי לכך שיש ל- A ערך עצמי/וקטור עצמי.

מצד שני, $c \geq -\frac{1}{4}$ הוא גם תנאי מספיק לקיום A המקיימת את הנדרש בשאלה:

אם λ_1, λ_2 פתרונות של המשוואה $\lambda^2 - \lambda - c = 0$ אז הטרינספורמציה הלינארית שמיוצגת

ע"י: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ביחס לבסיס כלשהו מקיימת את הנדרש בשאלה.

הערה:

אם יש ל- A שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית שמתאימים לערכים עצמיים

שונים אז $C > -\frac{1}{4}$.

אם יש ל- A שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית שמתאימים לאותו ערך עצמי

אז $C = -\frac{1}{4}$. לכן $\lambda = \frac{1}{2}$ ולכן $A = \frac{1}{2}I$.

3. נתון מרחב מכפלה פנימית V מעל המרוכבים יחד עם מכפלה פנימית $(\cdot, \cdot)$. עבור $v \in V$

נתון (קבוע), נגדיר העתקות $f_v: V \rightarrow F$ ו- $g_v: V \rightarrow F$ ע"י $f_v(w) = (w, v)$ ו-

$$g_v(w) = \overline{(v, w)} \quad \text{הוכיחו כי } f_v \text{ ו- } g_v \text{ הן ט"ל.}$$

פתרון:

לינאריות f_v נובעת מיד מהלינאריות וההומוגניות של המכפלה הפנימית בקורדינטה הראשונה.

הביטויים המפורשים דומים לביטויים במקרה של g_v ונסתפק בהם:

$$g_v(w_1 + w_2) = \overline{(v, w_1 + w_2)} = \overline{(v, w_1) + (v, w_2)} = \overline{(v, w_1)} + \overline{(v, w_2)} = g_v(w_1) + g_v(w_2)$$

$$g_v(\alpha w) = \overline{(v, \alpha w)} = \overline{\alpha(v, w)} = \alpha \overline{(v, w)} = \alpha g_v(w)$$

הגדרה: פונקציית נורמה על מ"ו V הינה פונקציה $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ המקיימת:

$$1. \text{ חיוביות: } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$2. \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

3. אי שוויון המשולש: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

מרחב וקטורי יחד עם נורמה יקרא מרחב נורמי.

4. נתון מרחב מכפלה פנימית V יחד עם מ"פ $(\cdot, \cdot)$. נגדיר העתקה: $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. הראו ש- $\|\cdot\|$ מוגדרת היטב וכי היא אכן נורמה. (שימו לב לדרישה שנורמה היא פונקציה אי שלילית. עבור אי שוויון המשולש כדאי אולי להשתמש בזהות הבאה במרוכבים: $\operatorname{Re}(z) < |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ובאי-שוויון קושי-שוורץ.

פתרון:

$\|\cdot\|$ מוגדרת היטב ע"פ חיוביות המ"פ. $\|\cdot\|$ אי שלילית כיוון שפעולת לקיחת שורש היא אי-

שלילית ו- $\|v\| = 0$ שווה לאפס אם $(v, v) = 0$ (וע"פ חיוביות המ"פ) אם $v = 0$.

נראה הומוגניות:

$$\|\alpha v\| = \sqrt{(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} (v, v)} = \sqrt{|\alpha|^2 (v, v)} = |\alpha| \sqrt{(v, v)} = |\alpha| \|v\|$$

אי שוויון המשולש:

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(v, w) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|(v, w)| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + \|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

האי-שוויון הראשון נובע מהזהות $\operatorname{Re}(z) < |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

האי שוויון השני נובע מא"ש שוורץ.

כעת נוכל לקחת שורש על שני האגפים ולקבל את אי שוויון המשולש, כנדרש.

5. עבור V ו- $\|\cdot\|$ כבשאלה 3, השתמשו בתכונות המ"פ להוכחת שוויון המקבילית:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

פתרון:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) =$$

$$= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) + (-y, x) + (x, -y) + (-y, -y) =$$

$$= 2(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) - (y, x) - (x, y) + (-1)^2 (y, y) = 2((x, x) + (y, y)) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

6. נתונים V מרחב מכפלה סקלארית ממימד n ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס. נגדיר מטריצה ריבועית

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ע"י } a_{i,j} = (v_i, v_j) \text{ (כאשר } (\cdot, \cdot) \text{ היא המכפלה הסקלארית הנתונה).}$$

א. הוכיחו כי בהינתן וקטורים $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ו- $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ מתקיים: $(v, w) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) A (\beta_1 \dots \beta_n)^T$

כלומר:

$$(v, w) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

ב. הגדרה: שתי מטריצות ריבועיות $A, B \in M_n(F)$ נקראות חופפות אם קיימת מטריצה רגולרית

$$B = P^t A P \text{ כך ש- } P \in M_n(F)$$

הסיקו כי אם מחליפים את הבסיס, המטריצה A עוברת למטריצה חופפת (כלומר בהנתן בסיס שונה $w_1, \dots, w_n$ של

$$V \text{ נגדיר את } P \text{ להיות מטריצת מעבר הבסיסים המתאימה. אם } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ מוגדרת ע"י}$$

$$b_{i,j} = (w_i, w_j) \text{ אז מתקיים ש- } (B = P^T A P).$$

פתרון:

א.

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \sum a_{1j} \beta_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj} \beta_j \end{pmatrix} = \sum_i \sum_j \alpha_i a_{ij} \beta_j =$$

$$\sum_i \sum_j \alpha_i (v_i, v_j) \beta_j = \sum_i \alpha_i \sum_j (v_i, v_j) \beta_j = \sum_i \alpha_i \left(v_i, \sum_j \beta_j v_j \right) = \left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_j \right) = (v, w)$$

=

ב. נתונים בסיס $w_1, \dots, w_n$ של V , ומטריצת מעבר הבסיסים P כך ש- $P \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ זהו וקטור

המקדמים המבטא את w_i ביחס ל- $v_1, \dots, v_n$. כלומר $w_j = \sum_i p_{ij} v_i$. די להוכיח כי:

$$b_{i,j} = (w_i, w_j) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T P^T A P \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T = \left(P \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T \right)^T A \left(P \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T \right) = (w_i, w_j) = b_{i,j}$$

לכן $P^T A P = B$, כנדרש.

תרגיל 9 אלגברה לינארית 2.

20 במאי 2006

1. תזכורת: עבור מ"ו V , ישרייה $A \subset V$, זו קב' מהצורה: $v_0 + U$ כאשר U ת"מ של V ו $v_0 \in V$. מימד הישרייה מוגדר להיות המימד של U . יהי $(V, \langle, \rangle)$ מרחב מכפלה סקלרית ממימד n . תהא A ישרייה $n-1$ מימדית ב V . הוכיחו כי קיים $w_0 \in V$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש $A = \{v \in V \mid \langle v, w_0 \rangle = \alpha\}$.
הדרכה: יהא U ת"מ ממימד $n-1$. בחרו לו בסיס $v_1 \dots v_{n-1}$. מצאו וקטור $w_0 \neq 0$ שעבורו $f_{v_i}(w_0) = 0$ f_v מוגדר בתרגיל 8 שאלה 3. כעת כל שנותר לעשות הוא להזיז את $U = \ker f_{w_0}$ בוקטור הנכון.
2. יהא $(V, \langle, \rangle)$ כבשאלה הקודמת. תזכורת: מסמנים ב $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$ את מרחב ההעתקות הלינאריות מ V ל $\mathbb{R}$. איבר $f \in \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ נקרא פונקציונל לינארי.
בתרגיל 8 שאלה 3 הראיתם כי כל $v \in V$ מגדיר פונקציונל $f_v \in \text{Hom}(V, \mathbb{R})$. הראו כי ההעתקה $v \mapsto f_v$ הינה איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים בין V לבין $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$.
הדרכה: הלינאריות והחח"ע צריכים ללכת לכם בקלות. בכדי להראות כי ההעתקה הנ"ל היא על, בחרו פונקציונל לינארי $f \neq 0$ ומצאו לפי שאלה 1, $w_0 \in V$, שעבורו $\ker(f_{w_0}) = \ker(f)$. כעת הוכיחו כי ישנו סקלר $x \in \mathbb{R}$ שעבורו $x \cdot f = f_{w_0}$.
3. סימונים: נחשוב על וקטורים ב $V = \mathbb{R}^n$ בתור וקטורי עמודה. עבור $v \in V$ נסמן ב v^t את וקטור השורה המתאים לו. עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ נגדיר $f_A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י $f_A(v, w) = v^t \cdot A \cdot w$ (זה ממש כפל של 3 מטריצות) f_A נקראת התבנית הבי-לינארית ש A מגדירה. הוכיחו:
(א) $\forall v_i, w \in V, \alpha \in \mathbb{R} f_A(v_1 + \alpha v_2, w) = f_A(v_1, w) + \alpha \cdot f_A(v_2, w)$ (כלומר, התבנית באמת לינארית ברכיב הראשון). כמובן שהוכחה דומה תראה שהתבנית לינארית גם ברכיב השני.
(ב) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על A בכדי שהתבנית תהיה סמטרית, כלומר $\forall v, w \in V f_A(v, w) = f_A(w, v)$
(ג) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על A בכדי שהתבנית לא תהיה מנוונת, כלומר בכדי שלא יהיה $v \in V$ שעבורו $f_A(v, w) = 0 \forall w \in V$.
(ד) הסיקו שאם A סימטרית ומוגדרת חיובית, כלומר $\forall v \neq 0 f_A(v, v) > 0$, אז $f_A(v, w) = \langle v, w \rangle$ היא מכפלה סקלרית על V . בכתה תלמדו שכך מתקבלות כל המכפלות הסקלריות על $V = \mathbb{R}^n$.

יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מרחב סקלרי מממד n ישרי A ישרי מממד $n-1$ ב- V . קיימים $v_0 \in V$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש- $A = \{v \in V : \langle v, w_0 \rangle = \alpha\}$.
 הוכחה: נניח ש- $A = v_0 + U$ כאשר $U \in V$ ו- $\dim U = n-1$.
 U נוצר ספירט ולכן קיים לו בסיס אורתונורמלי $v_1, \dots, v_{n-1}$.
 (שליש אורתונורמלי בסיס אורתונורמלי ב- V ו- v_n זה אפשרי ע"י התהליך של צ'ורנובסקי). נניח ש- $v_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.
 אזי נסמן $w_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. נניח ש- $v \in A$ אזי $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$.

$$\langle v, w_0 \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i = \alpha$$

$$A \subseteq \{v \in V : \langle v, w_0 \rangle = \alpha\} \quad \Leftarrow$$

למחרת: יהי ישרי $v+U$ אם $w \in v+U$ אז $w+U = v+U$.
 הוכחה: נניח ש- $w = v+u_0$ כאשר $u_0 \in U$.

יהי $\alpha \in w+U$, כלומר $\alpha = w+u$ כאשר $u \in U$. אז
 $\alpha = v+u_0+u$ אבל $u_0+u \in U$ כי זה תת מרחב. לכן
 $\alpha \in v+U \quad \Leftarrow \quad w+U \subseteq v+U$

יהי $\alpha \in v+U$, כלומר $\alpha = v+u$ כאשר $u \in U$. אז
 $\alpha = w-u_0+u$ אבל $-u_0+u \in U$ כי זה תת מרחב. לכן
 $\alpha \in w+U \quad \Leftarrow \quad v+U \subseteq w+U \quad \Leftarrow \quad w+U = v+U$ (ii)

נניח ש- $\langle v, w_0 \rangle = \alpha$ ונניח ש- $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$.

$$\alpha = \langle v, w_0 \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i = \alpha_n$$

כלומר $\alpha v_n \in v_0 + U$ אבל $\alpha v_n + U = v_0 + U$.
 $\alpha v_n = v_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \in v_0 + U$

כעת אם הלאה $\alpha v_n + U = v_0 + U \quad \Leftarrow \quad v = \sum_{i=1}^n a_i v_i + \alpha v_n \in v_0 + U$

$$\{v \in V : \langle v, w_0 \rangle = \alpha\} \subseteq A \quad \Leftarrow$$

$$A = \{v \in V : \langle v, w_0 \rangle = \alpha\} \quad \Leftarrow$$



י"ו $(v, \cdot, \cdot)$ אחת ארבע פניויות. ההתקף $D: V \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbb{R})$
 המוגדרת ע"י $v \mapsto f_v$ היא איזומורפיזם של אחריות וקטוריים.

הוכחה: יש להראות ש- D ההתקף אינארית, חתום ורץ.

י"ו $u, w \in V$! $a, b \in \mathbb{R}$ כ"י

$$D(au + bw) = f_{au+bw}$$

י"ו $v \in V$ כ"י

$$f_{au+bw}(v) = \langle v, au + bw \rangle = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{כ"י אחריות} \\ \mathbb{R}}}{=} a \langle v, u \rangle + b \langle v, w \rangle =$$

$$= a f_u(v) + b f_w(v)$$

כ"י $D(au + bw) = aD(u) + bD(w)$ כ"י D ההתקף אינארית.

כ"י $u, w \in V$ כ"י $D(u) = D(w)$ כ"י D חתום.

כ"י $f_u(v) = f_w(v)$ כ"י $v \in V$, כ"י $f_u - f_w = 0$, כ"י $f_{u-w} = 0$ (א"י)

האינאריות (ההתקף חתום) אכן ש- $f_{u-w}(u-w) = 0$.

כ"י $\langle u-w, u-w \rangle = 0$. אכן א"י תכונות ארבע פניויות.

כ"י $u-w=0 \Leftrightarrow u=w \Leftrightarrow D \text{ חתום}$.

כ"י $\dim W = m$, $\dim U = n$. כ"י $\dim \text{Hom}(U, W) = m \cdot n$.

כ"י $\dim V = n$. (ת"י) $\dim \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = n \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$.

כ"י $\dim \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = n \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$.

כ"י $T: U \rightarrow W$ (ההתקף חתום) כ"י T כ"י $\dim V = \dim W$.

כ"י T כ"י $\dim V = \dim W$.

כ"י $\dim V \cdot n = \dim \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ (ההתקף חתום) D חתום.



כ"י $D \Leftrightarrow D$.

נתון מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ ופונקציה $f_A: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (כאן $V = \mathbb{R}^n$)
 $f_A(v, w) = v^T A w$

(ג) בפרט $\alpha \in \mathbb{R}$ ו $v_1, v_2, w \in V$ מתקיים

$$f_A(v_1 + \alpha v_2, w) = f_A(v_1, w) + \alpha f_A(v_2, w)$$

הוכחה: נשתמש בהגדרת $f_A(v, w)$ ובחוק הפילוף (לפי מטריצה)

$$\begin{aligned} f_A(v_1 + \alpha v_2, w) &= (v_1 + \alpha v_2)^T \cdot A \cdot w = (v_1^T + \alpha v_2^T) A \cdot w = \\ &= v_1^T A w + \alpha v_2^T A w = f_A(v_1, w) + \alpha f_A(v_2, w) \end{aligned}$$

כלומר התכונת אנטי-סימטריות מתקיימת.

(ד) $f_A(v, w) = f_A(w, v)$ לכל $v, w \in V$ אם ורק אם A סימטרית.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- $f_A(v, w) = f_A(w, v)$ לכל $v, w \in \mathbb{R}^n$. בפרט זה נכון

לעבור וקטורי הבסיס הסטנדרטי $\{e_1, \dots, e_n\}$. כל $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (קרה)

$$f_A(e_i, e_j) = f_A(e_j, e_i)$$

$$(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{nj} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}_i = a_{ji}$$

"

$$(0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{ij}$$

כלומר לכל $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} = a_{ji}$, כלומר A סימטרית.

($\Rightarrow$) נניח ש- A סימטרית. כלומר $a_{ij} = a_{ji}$ לכל $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

אז כמו בחישוב הסטנדרטי עבור e_i, e_j (קרה)

$$(*) \quad f_A(e_i, e_j) = a_{ij} = a_{ji} = f_A(e_j, e_i)$$

נניח $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ו- $w = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$. אז לפי ההינציות (קרה)

$$f_A(v, w) = f_A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_A\left(e_i, \sum_{j=1}^n \beta_j e_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_j f_A(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j f_A(e_i, e_j) \quad (*)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_j \alpha_i f_A(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \alpha_i f_A(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j f_A\left(e_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) =$$

$$= f_A\left(\sum_{j=1}^n \beta_j e_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = f_A(w, v)$$

($\Rightarrow$)

כלומר התכונת סימטריות מתקיימת.

(c) התכנית אינה מנוגת אמ"א A רגולרית.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- f_A אינה מנוגת. כוונת לא קיים $v \neq 0$ שזכורו $f_A(v, w) = 0$ עבור $w \in V$.

נניח בשלילה ש- A סגולרית. אזי קיים $v \neq 0$ יק, $v^t A = 0$. אז עבור $w \in V$ נקבל $f_A(v, w) = v^t A w = \tilde{0} \cdot w = 0$.

הסתירה לנחתה. $\Leftarrow A$ רגולרית.

($\Rightarrow$) נניח ש- A רגולרית. נניח בשלילה ש- f_A אינה מנוגת, קיים $v \neq 0$ יק, $f_A(v, w) = 0$ עבור $w \in V$. ז"א עבור $w \in V$

$f_A(v, w) = v^t A w = 0$. הפרט זה נכון עבור w שהם איברי

הבסיס של $\mathbb{R}^n$. $\Leftarrow v^t A = \tilde{0}$ (אם $v \neq 0$) $\Leftarrow$ הגדרה

של A שונה מאפס. $\Leftarrow A$ סגולרית. הסתירה לנחתה.

(ii)

$\Leftarrow f_A$ לא מנוגת

(3) אם A סימטרית ומגדלת תזכיר אז $\langle v, w \rangle = f_A(v, w)$

היא מרחב סקלרית.

הוכחה: יש להראות שמתקיימות תכונות המרחב הסקלרית.

סימטריות: A סימטרית $\Leftarrow f_A$ סימטרית $\Leftarrow \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ עבור $v, w \in \mathbb{R}^n$.

לנאיות: הוכחנו לנאיות במשפט הראשון של f_A עבור

$\langle v+v', w \rangle = f_A(v+v', w) = f_A(v, w) + f_A(v', w) = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$

הומוגניות: הוכחנו הומוגניות במשפט הראשון של f_A עבור

$\langle av, w \rangle = f_A(av, w) = a f_A(v, w) = a \langle v, w \rangle$

תזכיר: A מגדלת תזכיר, אם $\langle v, v \rangle = f_A(v, v) > 0$ עבור $v \neq 0$

$\Leftarrow f_A$ מרחב סקלרית

(ii)

מרחב

פתרון תרגיל 9 אלגברה לינארית 2.

12 ביוני 2006

1. תהא $A = v_0 + U$ ישרייה $n-1$ מימדית ב V . נפעל לפי ההדרכה שבתרגיל. נבחר בסיס ל U , $v_1 \dots v_{n-1}$. נטען כי ישנו וקטור w_0 שונה מ 0 , שעבורו מתקיים $\langle v_i, w_0 \rangle = 0$ לכל $1 \leq i \leq n-1$. ניתן לנמק זאת בכמה דרכים. אפשרות אחת היא לומר שהמרחב הניצב ל U הוא חד-מימדי ולכן מכיל וקטורים שונים מ 0 ואפשרות שנייה (שאני מפרט אותה כאן כי היא אינה משתמשת במבנה המכפלה הסקלרית) היא לומר שלכל $1 \leq i \leq n-1$ הגרעין של הפונקציונל הלינארי $f_{v_i}(w) = \langle w, v_i \rangle$ הוא ת"מ $n-1$ מימדי ולכן

$$\dim \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker f_{v_i} \geq 1$$

כאשר אי השיויון האחרון נובע מכך שכאשר חותכים ת"מ כלשהו W_1 עם ת"מ $n-1$ מימדי W_2 מקבלים ת"מ שמימדו גדול שווה ממימדו של W_1 פחות 1.

כך או כך יש לנו $w_0 \neq 0$ כנ"ל. אם כן, הגרעין של f_{w_0} מכיל בסיס של U ולכן מכיל את U אך משיויון מימדיהם מתחייב ש $U = \ker f_{w_0}$. כעת נזכר בישריה שלנו $A = v_0 + U$. נסמן $\alpha = f_{w_0}(v_0) = \langle v_0, w_0 \rangle$ ונטען כי

$$(*) A = \{v \in V \mid \langle v, w_0 \rangle = \alpha\}$$

הוכחה: איבר כללי ב A הוא מהצורה $v = v_0 + u$ עבור איזה $u \in U$. לכן לפי הגדרת α נקבל ש $\langle v, w_0 \rangle = \alpha$. מכאן ההכלה $\subset$ ב (*). לגבי ההכלה ההפוכה, נבחר $v \in V$ המקיים $\langle v, w_0 \rangle = \alpha$ ונגדיר $u = v - v_0$. אז ברור ש $v = v_0 + u$ וכן ש $\langle u, w_0 \rangle = \langle v - v_0, w_0 \rangle = \alpha - \alpha = 0$ ולכן $u \in U$ או לחילופין $v \in v_0 + U$. כנדרש.

2. נסמן כמקובל $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$. נסמן ב $\psi : V \rightarrow V^*$ את ההעתקה השולחת את הוקטור $v \in V$ לפונקציונל f_v . צ"ל כי ψ היא איזומורפיזם של מרחבים לינארים. בכדי להראות לינאריות צריך להראות שלכל מתקיים $v, w \in V, a \in \mathbb{R}$

$$f_{av+w} = af_v + f_w$$

כאשר השיויון כאן הוא בין פונקציונלים. כלומר צ"ל שלכל $u \in V$ מתקיים

$$f_{av+w}(u) = af_v(u) + f_w(u)$$

נשתמש בהגדרה ונקבל

$$f_{av+w}(u) = \langle u, av + w \rangle = a \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = af_v(u) + f_w(u)$$

כנדרש. כעת צריך להשתכנע ש ψ חח"ע ועל. מאחר והראנו לינאריות החח"ע תנבע מכך שהגרעין יהיה טריויאלי. נניח כי $v \in \ker \psi$, כלומר לכל $u \in V$ מתקיים ש $\langle u, v \rangle = 0$ אז בפרט $\langle v, v \rangle = 0$ ולכן $v = 0$, אם כן $\ker \psi = \{0\}$ ו ψ חח"ע. כעת ניתן להסיק ש ψ היא על מתוך העובדה ש $\dim V^* = \dim \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R}) = n \cdot 1 = n$. אני אוכיח זאת ישירות משום שלדעתי ההוכחה תורמת להבנה.

בהנתן פונקציונל לינארי $f \in V^*$ $0 \neq f$ נסמן $U = \ker f$. U הוא ת"מ $n-1$ מימדי (זה כמובן נובע מכך ש $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$). ישנו וקטור $w_0 \neq 0$ הניצב ל U (כמו בשאלה 1). לפונקציונלים f, f_{w_0} יש אותו גרעין. נטען כי הם נבדלים ע"י כפל בסקלר. נבחר בסיס $u_1 \dots u_{n-1}$ ל U . מתקיים ש $w_0, u_1 \dots u_{n-1}$ בסיס ל V ולכן פונקציונל לינארי נקבע ביחידות ע"י ערכיו על איברי בסיס זה. נבחר סקלר $a \in \mathbb{R}$ שעבורו מתקיים $a||w_0||^2 = f(w_0)$ או לחילופין $af_{w_0}(w_0) = f(w_0)$ ונקבל שהפונקציונל $af_{w_0} = f_{aw_0}$ מתאפס על ה u_i כמו f ומקבל את אותו ערך כמו f על w_0 ולכן מאחר ואלו שני פונקציונלים לינאריים המזהים על בסיס, הם שווים. כלומר

$$\psi(aw_0) = f$$

ו ψ על כנדרש.

3.

(א) השיויון נובע מדסטריביוטיביות של כפל מטריצות.
(ב) טענה: התבנית f_A סימטרית אם"ם המטריצה A סימטרית.
הוכחה: נניח ש $A = (a_{ij})$ מטריצה סימטרית. נחשב

$$f_A(v, w) = v^t A w = \sum_{i,j} a_{ij} v_i w_j = \sum_{i,j} a_{ij} w_i v_j = w^t A v = f_A(w, v)$$

כאשר השיויון האמצעי נובע מסמטריות A והאחרים מההגדרה. בכיוון השני, נניח כי f_A תבנית סימטרית. אז לכל בחירה של v, w נקבל ש $f_A(v, w) = f_A(w, v)$. נסמן את הבסיס הסטנדרטי ב $\{e_i\}$ ונבחר מתקיים $v = e_k, w = e_\ell$

$$f_A(v, w) = v^t A w = \sum_{i,j} a_{ij} v_i w_j = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{k\ell} = a_{k\ell}$$

$$f_A(w, v) = w^t A v = \sum_{i,j} a_{ij} w_i v_j = \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{\ell k} = a_{\ell k}$$

כאשר $\delta_{k\ell}$ (הדלטא של קרונקר) מסמנת 1 אם $k = \ell$ ו 0 אחרת. קבלנו אם כן ש $a_{k\ell} = a_{\ell k}$ לכל זוג אנדקסים k, ℓ ולכן A סימטרית.

(ג) טענה: f_A אינה מנוונת אם"ם A רגולרית.
הוכחה: אם A סינגולרית אז קיים וקטור $v \in \ker A^t$ $0 \neq v$. לכל w מתקיים $f_A(v, w) = v^t A w = (A^t v)^t w = \vec{0}^t w = 0$ לכל w .
לכל $v \in V$ מתקיים $v^t A \neq 0$ ולכן קיים אפילו w מתוך הבסיס הסטנדרטי

שלקיים $v^t A w \neq 0$ ולכן f_A אינה מנוונת.
 (ד) אם נתונה לנו A סימטרית ומוגדרת חיובית אז f_A מקיימת את כל
 אקסיומות המכפלה הסקלרית: בי-לינאריות (סעיף א'), סימטריות (סעיף
 ב') ואי שליליות (כלומר $f_A(v, v) \geq 0$ ושיוון אם $v = 0$) שזו בדיוק
 ההגדרה של מוגדרות חיובית.

תרגיל 10 - אלגברה לינארית 2

28 במאי 2006

1. א. נסמן $l^2(\mathbb{R}) = \{(a_i)_{i=1}^\infty | a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^\infty a_i^2 < \infty\}$ - מרחב הסדרות הממשיות שסכום הריבועים של איבריהם מתכנס.
הראו כי עבור $(a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \in l^2(\mathbb{R})$ הטור $\sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ מתכנס בהחלט (רמז - אי שוויון קושי - שוורץ). הראו כי $l^2(\mathbb{R})$ הינו מרחב וקטורי, וכן שהתבנית $\langle (a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ מגדירה מכפלה פנימית על $l^2(\mathbb{R})$.
ב. על $M_n(\mathbb{C})$ נגדיר $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ כאשר $B^* = \overline{B}^t$, כלומר, אם $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ אז $B^* = (\overline{b_{ji}})_{i,j=1}^n$.
הראו כי זו מכפלה פנימית על $M_n(\mathbb{C})$. כמו כן הראו כי הבסיס הסטנדרטי $\{E_{ij}\}$ הינו בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה זו.
ג. יהי V מרחב מ"פ מעל $\mathbb{C}$, עם המכפלה $\langle x, y \rangle$. כזכור ל- V גם מבנה של מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. הראו כי $\text{Re} \langle x, y \rangle$ מגדיר מכפלה פנימית על V כמרחב מעל $\mathbb{R}$.
2. יהי $V = C[-1, 1]$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[-1, 1]$, עם המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, ויהי W תת המרחב של כל הפונקציות הרציפות הזוגיות $(f(x) = f(-x))$ על הקטע. מהו $W^\perp$?
האם מתקיים $V = W \oplus W^\perp$? (נמקו)
3. יהי $W \subset V$ תת מרחב במרחב מ"פ, ויהי $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ בסיס אורתונורמלי ל- W . יהי $\alpha \in V$.
א. הראו כי $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i < \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i$ (כלומר הניצב ל- W מהוקטור α), הוא הוקטור הקצר ביותר המחבר את α עם W . (עצה - צירו ציור ב- $\mathbb{R}^2$, ושימו לב ליחס בין הניצב לישר מנקודה ובין כל ישר אחר המחבר את הישר והנקודה)
ii. מצאו את הפולינום ממעלה $2 \leq$ הקרוב ביותר ל- x^3 במרחב $C[-1, 1]$ (ראו שאלה 2). כיצד אפשר לדעת ללא חישוב מפורש שיתקבל פולינום מהצורה c, cx $c \in \mathbb{R}$? (כלומר ללא גורם קבוע וללא גורם ריבועי). רמז - שאלה 2.
ב. הראו שהזוית בין α ו- γ $\langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i$ (כלומר ההיטל של α על W) היא המינימלית מהזויות בין α וכל וקטור אחר ב- W .
4. א. מצאו בסיס אורתונורמלי המתאים למכפלה הפנימית הבאה על $\mathbb{R}^3$:
$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_3 + \frac{1}{2} x_3 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$$

(שכנעו את עצמכם שזו אכן מכפלה פנימית!)
ב. יהי P^2 המרחב הוקטורי של הפולינומים מדרגה $2 \leq$ מעל $\mathbb{R}$, עם המכפלה הפנימית המוגדרת ע"י
$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

 $f, g \in \mathbb{R}[x]$ פולינומים מדרגה לכל היותר 2. מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב מ"פ זה.
ג. מצאו בסיס אורתונורמלי לתת המרחב של $\mathbb{R}^4$ הנפרש ע"י הוקטורים -
(ביחס למכפלה הסקלרית הרגילה - מצומצמת לתת המרחב) $(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 1)$
5. א. התבוננו בהוכחת המשפט על תהליך האורתוגונליזציה של גרס-שמידט. אילו וקטורים היינו מקבלים אם היינו מתחילים את התהליך עם קבוצה של וקטורים תלויים לינארית?
ב. הראו שאם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס, $\{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס שהתקבל ממנו ע"י תהליך גרס-שמידט, ו- $\{f_1, \dots, f_n\}$ בסיס אחר המקיים את כל תנאי המשפט אז $f_i = a_i \cdot e_i$ כאשר a_i סקלרים ו- $\forall i, |a_i| = 1$.

תרגיל 10 – אלגברה לינארית 2

שאלה 1

א. נסמן $l^2(\mathbb{R}) = \left\{ (a_i) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$.

טענה: יהיו $(a_n), (b_n) \in l^2(\mathbb{R})$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס בהחלט.

הוכחה: לפי אי שוויון הממוצעים ידוע ש- $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$ לכל $0 \leq x, y \in \mathbb{R}$. לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|a_n \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 \cdot b_n^2} \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \quad \text{אם } (a_n), (b_n) \in l^2(\mathbb{R}) \text{ אז בוודאי גם } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \text{ מתכנס. לכן לפי מבחן}$$

ההשוואה עבור טורים חיוביים גם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot b_n|$ מתכנס, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס בהחלט. ☺

טענה: $l^2(\mathbb{R}) = \left\{ (a_i) \subset \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$ מרחב וקטורי מעל הממשיים.

הוכחה: יש להראות שמתקיימות כל אקסיומות המרחב הוקטורי. ראשית נגדיר את החיבור והכפל בסקלר ע"י החיבור והכפל הרגילים של סדרות. כעת נראה שמתקיימות האקסיומות.

אקסיומות החיבור: יהיו $(a_n), (b_n), (c_n) \in l^2(\mathbb{R})$.

סגירות: יש להראות ש- $(a_n) + (b_n) \in l^2(\mathbb{R})$. $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$. לכן יש להראות ש- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$.

אבל $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2$. נתון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ מתכנסים. כמו כן הוכחנו למעלה ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס בהחלט ומכאן נובע שמתכנס. לכן לפי אריתמטיקה של התכנסות טורים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$,

כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ מתכנס. ולכן $(a_n) + (b_n) \in l^2(\mathbb{R})$.

חילופיות: החילופיות נובעת מהחילופיות בשדה הממשיים. ברור ש- $(a_n) + (b_n) = (b_n) + (a_n)$.

קבוציות: כמו החילופיות, זה נובע מהקיבוציות בשדה הממשיים. ברור ש-

$$((a_n) + (b_n)) + (c_n) = (a_n) + ((b_n) + (c_n))$$

קיום איבר נטרלי: סדרת האפס שמוגדרת ע"י $z_n \equiv 0$ היא איבר נטרלי לחיבור. ברור ש-

$$(a_n) + (z_n) = (a_n + 0) = (a_n) \quad \text{וכן ברור ש- } \sum_{n=1}^{\infty} z_n = 0 \text{ מתכנס. ולכן } (z_n) \in l^2(\mathbb{R}) \text{ וכן נטרלי לחיבור.}$$

קיום איבר נגדי: לכל (a_n) נגדיר $-(a_n)$ ע"י $-(a_n) = (-a_n)$. ברור שאם $(a_n) \in l^2(\mathbb{R})$ אזי

$$-(a_n) \in l^2(\mathbb{R}) \quad \text{כמו כן ברור ש- } \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

אקסיומות הכפל בסקלר: יהיו $(a_n), (b_n) \in l^2(\mathbb{R})$ ו- $c, d \in \mathbb{R}$.

סגירות: יש להראות ש- $c(a_n) \in l^2(\mathbb{R})$. אבל $c(a_n) = (ca_n)$. נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = S$. אזי לפי אריתמטיקה של

$$\text{טורים מתכנסים נקבל ש-} \sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 a_n^2 = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = c^2 S$$

$$. c(a_n) \in l^2(\mathbb{R})$$

קיבוציות: הקיבוציות נובעת מהקיבוציות של הכפל בשדה הממשיים. שהרי $(c \cdot d) \cdot a_n = c \cdot (d \cdot a_n)$ ולכן

$$. (c \cdot d) \cdot (a_n) = c \cdot (d \cdot (a_n))$$

חוקי הפילוג: גם אלה נובעים מחוקי הפילוג בשדה הממשיים. ברור ש- $(c+d)a_n = c \cdot a_n + d \cdot a_n$ וכן

$$c(a_n + b_n) = c \cdot a_n + c \cdot b_n$$

ולכן $(c+d)(a_n) = (c \cdot a_n + d \cdot a_n) = (c \cdot a_n) + (d \cdot a_n) = c \cdot (a_n) + d \cdot (a_n)$ ובאופן דומה

$$. c((a_n) + (b_n)) = c \cdot (a_n + b_n) = (c \cdot (a_n + b_n)) = (c \cdot a_n + c \cdot b_n) = (c \cdot a_n) + (c \cdot b_n) = c \cdot (a_n) + c \cdot (b_n)$$

איבר ניטרלי לכפל: $1 \in \mathbb{R}$ הוא אכן ניטרלי לכפל בסקלר. שהרי $1 \cdot (a_n) = (1 \cdot a_n) = (a_n)$

הראנו שמתקיימות כל אקסיומות המרחב הוקטורי. לכן $l^2(\mathbb{R})$ מרחב וקטורי מעל הממשיים. ☺

טענה: התבנית $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מגדירה מכפלה פנימית על $l^2(\mathbb{R})$.

הוכחה: ראשית נציין שהתבנית אכן מוגדרת היטב משום שלפי הטענה הראשונה בהינתן $(a_n), (b_n) \in l^2(\mathbb{R})$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס. כעת נראה שמתקיימות תכונות המכפלה הפנימית.

סימטריות: יהיו $(a_n), (b_n) \in l^2(\mathbb{R})$. ברור שלפי הקומוטטיביות בממשיים $a_n b_n = b_n a_n$ ולכן

$$. \langle (a_n), (b_n) \rangle = \langle (b_n), (a_n) \rangle \quad \text{כלומר} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$$

לינאריות: יהיו $(a_n), (b_n), (c_n) \in l^2(\mathbb{R})$. אזי

$$\begin{aligned} \langle (a_n) + (b_n), (c_n) \rangle &= \langle (a_n + b_n), (c_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n c_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n = \langle (a_n), (c_n) \rangle + \langle (b_n), (c_n) \rangle \end{aligned}$$

כאשר מעבר (*) נכון משום שהראינו בטענה הראשונה שטור מכפלת האיברים מתכנס ולכן ניתן להשתמש באריתמטיקה של טורים.

הומוגניות: יהיו $(a_n), (b_n) \in l^2(\mathbb{R})$ ו- $c \in \mathbb{R}$. אזי

$$\langle c(a_n), (b_n) \rangle = \langle (ca_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c(a_n b_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = c \langle (a_n), (b_n) \rangle$$

חיוביות: יהי $(a_n) \in l^2(\mathbb{R})$. ברור ש- $0 \leq a_n^2$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכן $\langle (a_n), (a_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \geq 0$.

ראינו שמתקיימות כל תכונות המכפלה הפנימית ולכן התבנית $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ אכן מגדירה מכפלה

פנימית על $l^2(\mathbb{R})$. ☺

ב. על $M_n(\mathbb{C})$ נגדיר $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ כאשר $B^* = \overline{B^t}$.

טענה: התבנית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ מגדירה מכפלה פנימית על $M_n(\mathbb{C})$.

הוכחה: יש להראות שמתקיימות תכונות המכפלה הפנימית.

הרמיטיות: נרצה להראות ש- $\langle A, B \rangle = \overline{\langle B, A \rangle}$ כלומר ש- $\text{tr}(BA^*) = \overline{\text{tr}(AB^*)}$. נניח ש- $A = (a_{i,j})$ ו-

$B = (b_{i,j})$. לכן $[A^*]_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ ו- $[B^*]_{i,j} = \overline{b_{j,i}}$. כעת נחשב את $\langle B, A \rangle$ באופן מפורש:

$$\langle B, A \rangle = \text{tr}(BA^*) = \sum_{i=1}^n [BA^*]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [B]_{i,k} [A^*]_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot \overline{a_{i,k}}$$

מצד שני נחשב את $\langle A, B \rangle$ באופן מפורש ונקבל:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^n [AB^*]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [B^*]_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \overline{b_{i,k}}$$

$$\langle A, B \rangle = \overline{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \overline{b_{i,k}}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k} \cdot \overline{b_{i,k}}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}} \cdot b_{i,k} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{b_{i,k}} \cdot a_{i,k}$$

כלומר קיבלנו ש- $\langle B, A \rangle = \overline{\langle A, B \rangle}$.

לינאריות: יהיו $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$. נראה ש- $\langle A+B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$. כלומר נראה ש-

$\text{tr}((A+B)C) = \text{tr}(AC) + \text{tr}(BC)$. נניח ש- $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ ו- $C = (c_{i,j})$. אז נקבל ש-

$$\begin{aligned} \langle A+B, C \rangle &= \text{tr}((A+B)C^*) = \sum_{i=1}^n [(A+B)C^*]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [A+B]_{i,k} [C^*]_{k,i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{i,k} + b_{i,k}) c_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{i,k} \cdot c_{k,i} + b_{i,k} \cdot c_{k,i}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot c_{k,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot c_{k,i} = \\ &= \sum_{i=1}^n [AC^*]_{i,i} + \sum_{i=1}^n [BC^*]_{i,i} = \text{tr}(AC^*) + \text{tr}(BC^*) = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

הומוגניות: יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ו- $c \in \mathbb{C}$. נראה ש- $\langle cA, B \rangle = c \langle A, B \rangle$. כלומר נראה ש-

$\text{tr}((cA)B^*) = c \cdot \text{tr}(AB^*)$. נניח ש- $A = (a_{i,j})$ ו- $B = (b_{i,j})$. נחשב באופן מפורש:

$$\begin{aligned} \langle cA, B \rangle &= \text{tr}((cA)B^*) = \sum_{i=1}^n [(cA)B^*]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [cA]_{i,k} [B^*]_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c [A]_{i,k} [B^*]_{k,i} = \\ &= c \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [B^*]_{k,i} = c \sum_{i=1}^n [AB^*]_{i,i} = c \cdot \text{tr}(AB^*) = c \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

חיוביות: תהי $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. אזי $[A^*]_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$.

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [A^*]_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \overline{a_{i,k}}$$

ידוע שלכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}^+$. לכן $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \overline{a_{i,k}} \geq 0$ כלומר $\langle A, A \rangle \geq 0$.

הראנו שמתקיימות כל התכונות של מכפלה פנימית. לכן התבנית $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ מגדירה מכפלה

פנימית על $M_n(\mathbb{C})$. ☺

טענה: הבסיס הסטנדרטי $\{E_{i,j}\}$ הינו בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה הפנימית המוגדרת למעלה.

הוכחה: יש להראות שאיברי הבסיס מאונכים זה לזה וכן שהנורמה שלהם היא 1. נניח ש-

$$E_{i,j} = (a_{t,s}) = (\delta_{i,t} \cdot \delta_{j,s})$$

$$\|E_{i,j}\|^2 = \langle E_{i,j}, E_{i,j} \rangle = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{t,k}|^2 = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^n a_{t,k} \cdot \overline{a_{t,k}} = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{i,t} \cdot \delta_{j,k} = \sum_{t=1}^n \delta_{i,t} \cdot \delta_{j,j} = \delta_{i,i} \cdot \delta_{j,j} = 1$$

כלומר $\|E_{i,j}\| = 1$.

מצד שני יהיו $i' \neq i$ אזי

$$\begin{aligned} \langle E_{i,j}, E_{i',j} \rangle &= \sum_{q=1}^n \sum_{k=1}^n [E_{i,j}]_{q,k} \cdot \overline{[E_{i',j}]_{q,k}} = \sum_{q=1}^n \sum_{k=1}^n [E_{i,j}]_{q,k} \cdot [E_{i',j}]_{q,k} = \\ &= \sum_{q=1}^n \sum_{k=1}^n (\delta_{i,q} \cdot \delta_{j,k}) \cdot (\delta_{i',q} \cdot \delta_{j,k}) = \sum_{q=1}^n (\delta_{i,q} \cdot \delta_{j,j}) \cdot (\delta_{i',q} \cdot \delta_{j,j}) = \sum_{q=1}^n (\delta_{i,q} \cdot \delta_{i',q}) = 0 \end{aligned}$$

באותו אופן עבור $j \neq j'$ נקבל ש- $\langle E_{i,j}, E_{i,j'} \rangle = 0$. כלומר אם $A, B \in \{E_{i,j}\}$ ו- $A \neq B$ אז $\langle A, B \rangle = 0$, כלומר כל איברי הבסיס מאונכים זה לזה.
 בסה"כ קיבלנו שאיברי הבסיס בעלי נורמה 1 ומאונכים זה לזה. כלומר הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס אורתונומלי. ☺

ג. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ עם המכפלה $\langle x, y \rangle$. V הוא גם מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

טענה: $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle$ מגדיר מכפלה פנימית על V כמרחב מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה: מאחר ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה פנימית על V מעל $\mathbb{C}$ מתקיימות התכונות הבאות:

$$\text{הרמיטיות: } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\text{לינאריות: } \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$\text{הומוגניות: } \langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$$

$$\text{חיוביות: } 0 \leq \langle x, x \rangle$$

נראה שמתקיימות התכונות הדרושות עבור $\operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$:

סימטריות: מההרמיטיות של $\langle \cdot, \cdot \rangle$ נקבל ש- $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \overline{\langle y, x \rangle} = \operatorname{Re} \langle y, x \rangle$. אבל ידוע ש- $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$. לכן

$$\operatorname{Re} \langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \langle y, x \rangle, \text{ כלומר } \operatorname{Re} \langle y, x \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

לינאריות: בגלל הלינאריות של $\langle \cdot, \cdot \rangle$ נקבל ש- $\operatorname{Re} \langle x + x', y \rangle = \operatorname{Re} (\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle)$ אבל ידוע ש-

$$\operatorname{Re} \langle x + x', y \rangle = \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \operatorname{Re} \langle x', y \rangle \text{ ולכן } \operatorname{Re} (z + z') = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z'$$

הומוגניות: מההומוגניות של $\langle \cdot, \cdot \rangle$ נקבל ש- $\operatorname{Re} \langle cx, y \rangle = \operatorname{Re} (c \langle x, y \rangle)$ אבל ידוע שאם $c \in \mathbb{R}$ אז

$$\operatorname{Re} \langle cz \rangle = \operatorname{Re} (cz) = c \operatorname{Re} z \text{ לכן } \operatorname{Re} (c \langle x, y \rangle) = c \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \text{ כלומר } \operatorname{Re} \langle cx, y \rangle = c \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$$

חיוביות: מהחיוביות ש- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ נובע ש- $0 < \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$. לכן $0 \leq \operatorname{Re} \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$.

הראנו שמתקיימות כל התכונות של מכפלה פנימית על מרחב מעל שדה הממשיים. לכן $\operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה פנימית. ☺

שאלה 2

טענה: יהי $V = \mathcal{C}[-1,1]$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[-1,1]$, עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

יהי $W = \{f \in V : f(x) = f(-x)\}$ אזי $W^\perp = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$ ומתקיים $W \oplus W^\perp = V$.

הוכחה: נסמן $D = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$ ונראה ש- $D \subset W^\perp$ וגם $W^\perp \subset D$.

תהי $g \in D$, כלומר $-g(x) = g(-x)$ ותהי $f \in W$, כלומר $f(x) = f(-x)$. נחשב את המכפלה הפנימית שלהן:

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \stackrel{t=-x}{dt=-dx} = \int_1^{-1} (-f(-t))g(-t)dt = \int_{-1}^1 f(-t)g(-t)dt = -\int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$$

כלומר $\langle f, g \rangle = -\langle f, g \rangle$. מאחר שאנחנו במרחב מעל הממשיים נובע מכאן ש- $\langle f, g \rangle = 0$ כלומר $f \in W^\perp$, ולכן $D \subset W^\perp$.

כעת תהי $g \in W^\perp$. כלומר לכל $f \in W$ מתקיים $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$. מצד שני, כמו קודם ניתן לרשום גם

$$0 = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \stackrel{t=-x}{dt=-dx} = \int_1^{-1} (-f(-t))g(-t)dt = \int_{-1}^1 f(-t)g(-t)dt = \int_{-1}^1 f(t)g(-t)dt$$

גם $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx + \int_{-1}^1 f(t)g(-t)dt = \int_{-1}^1 f(x)(g(x) + g(-x))dx = 0$ אך נשים לב ש- $h(x) = g(x) + g(-x) \in W$ שכן $h(-x) = g(-x) + g(-(-x)) = g(-x) + g(x) = h(x)$. לכן מאחר ש- $(*)$ נכון לכל $f \in W$ הוא נכון בפרט גם ל- $f = h$. כלומר $\langle h, h \rangle = 0$. אבל לפי תכונות המכפלה הפנימית נובע מכאן ש- $h = 0$ כלומר $-g(x) = g(-x)$. כלומר $g \in D$ ולכן $W^\perp \subset D$.

הראינו הכלה לשני הכיוונים ולכן באמת מתקיים $W^\perp = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$.

כעת, ברור ש- $W \cap W^\perp = \{0\}$ שהרי אם $f(x) = f(-x)$ וכן $f(-x) = -f(x)$ אזי $f(x) = -f(x)$ ומאחר שאנחנו במרחב מעל $\mathbb{R}$ נקבל ש- $f(x) = 0$.

נראה ש- $W + W^\perp = V$. כלומר נראה שכל $f \in V$ ניתן להציג כ- $f = o + e$ כאשר $e \in W$ ו- $o \in W^\perp$. לכל $f \in V$ נגדיר

$$o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$o(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -o(x)$$

$$e(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = e(x)$$

כלומר $e \in W$ ו- $o \in W^\perp$. ברור ש- $f(x) = o(x) + e(x)$. לכן $W + W^\perp = V$. וכעת לפי ההגדרה $\odot$ $W \oplus W^\perp = V$.

שאלה 3

יהי $W \subset V$ תת מרחב במרחב מכפלה פנימית ויהי $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ בסיס אורתונורמלי ל- W . יהי $\alpha \in V$.

טענה: $\gamma = \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ הוא הווקטור הקצר ביותר המחבר את α עם W .

הוכחה: אנחנו רוצים בעצם להוכיח ש- $\|\gamma\| = \min_{w \in W} \|\alpha - w\|$. נסמן $p = \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$. ברור שלכל $w \in W$ מתקיים $p - w \in W$. כמו כן, לפי משפט שהוכחנו בכיתה $\gamma = \alpha - p \in W^\perp$. כלומר $(p - w) \perp (\alpha - p)$. לפי משפט פיתגורס $\|\alpha - w\|^2 = \|(\alpha - p) + (p - w)\|^2 = \|(\alpha - p)\|^2 + \|(p - w)\|^2 \geq \|\alpha - p\|^2 = \|\gamma\|^2$. לכן $\min_{w \in W} \|\alpha - w\| = \|\gamma\|$. ☺

נסתכל במרחב $V = \mathcal{C}[-1, 1]$ ובתת מרחב $W = P^2$. לפי הטענה המרחק הכי קצר בין W ל- $\alpha = x^3 \in V$

מתקבל עבור $p = \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \in W$ כאשר $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ בסיס אורתונורמלי של W . בשאלה 4 נראה

שבסיס אורתונורמלי של P^2 ביחס למכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ הוא למשל,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \varepsilon_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i &= \left\langle x^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\langle x^3, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}x + \left\langle x^3, \sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \right\rangle \cdot \left(\sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 x^3 dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 x^4 dx \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}x + \left(\int_{-1}^1 \left(\sqrt{\frac{45}{8}}x^5 - \frac{\sqrt{10}}{4}x^3 \right) dx \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 + \frac{3x}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 + \left(\sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \right) \left(\sqrt{\frac{45}{8}} \left[\frac{x^6}{6} \right]_{-1}^1 - \frac{\sqrt{10}}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 \right) = \frac{3}{5}x \end{aligned}$$

בדיעבד, ברור כי הייתה אמורה להתקבל תוצאה מהצורה cx כאשר $c \in \mathbb{R}$. אם המרחק הכי קצר מתקבל עבור $\gamma = x^3 - p$ אז $x^3 = \gamma + p$. אבל x^3 פונקציה אי זוגית ולכן כדי שיתקיים השוויון הזה חייב להתקיים שגם p וגם γ פונקציות אי זוגיות. לכן ב- p לא יכולים להיות לא גורם לינארי ולא גורם ריבועי.

טענה: הזווית בין α ו- $p = \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ היא המינימלית בין α וכל וקטור אחר ב- W .

הוכחה: מאחר שאנחנו עובדים במרחב כללי כלשהו ולא בהכרח $\mathbb{R}^n$ הזווית בין וקטורים היא לא המושג

הגיאומטרי שאנו מכירים אלה היא מוגדרת ע"י $\cos(\alpha, p) = \frac{\langle \alpha, p \rangle}{\|\alpha\| \|p\|}$. כדי שתהיה משמעות להשוואת

גדלים של הזוויות נצטרך להניח כי אנחנו עובדים במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ (אחרת $\cos \theta$ יכול להיות מספר מרוכב והרי במרוכבים אין סדר). כאשר אומרים שזווית היא מינימלית הכוונה היא שקוסינוס הזווית הוא מקסימלי.

נסמן $\alpha = p + (\alpha - p) = p + h$. יהיו $\{a_i\}_{i=1}^k \subset F$ אז:

$$\cos \left(\alpha, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right) = \frac{\left\langle \alpha, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\rangle}{\left\| \alpha \right\| \left\| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\|} = \frac{\left\langle p, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\rangle + \left\langle h, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\rangle}{\left\| \alpha \right\| \left\| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\|}$$

ראינו קודם ש- $h \in W^\perp$. לכן $\left\langle h, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\rangle = 0$ ולכן בעזרת אי שוויון קושי שזורץ נקבל ש-

$$\cos\left(\alpha, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i\right) = \frac{\left\langle \alpha, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\rangle}{\|\alpha\| \left\| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\|} = \frac{\left\langle p, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\rangle}{\|\alpha\| \left\| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\|} \leq \frac{\|p\| \left\| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\|}{\|\alpha\| \left\| \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\|} = \frac{\|p\|}{\|\alpha\|}$$

כעת נשים לב ש- $\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^k |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 = \|p\|^2$ ולכן $\langle \alpha, p \rangle = \left\langle \alpha, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle^2 = \|p\|^2$. קיבלנו $\cos(\alpha, p) = \frac{\|p\|^2}{\|\alpha\| \|p\|} = \frac{\|p\|}{\|\alpha\|}$

שכל $\{a_i\}_{i=1}^k \subset F$ $\cos\left(\alpha, \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i\right) \leq \cos(\alpha, p)$ ולכן קיבלנו את הדרוש. ☺

שאלה 4

א. נתונה המכפלה הפנימית הבאה על $\mathbb{R}^3$:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_3 + \frac{1}{2} x_3 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\text{אזי } \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_1 x_3 + 2x_2^2 + x_3^2}$$

נחפש בסיס אורתונורמלי שמתאים למכפלה פנימית זו. לצורך כל נשתמש בתהליך שמתואר במשפט גראם-שמידט:

נתחיל מהבסיס הסטדנדרטי של $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$ ונבצע עליו את תהליך גראם-שמידט:

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{(1, 0, 0)}{\sqrt{1^2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 0^2}} = (1, 0, 0)$$

$$\varepsilon_2' = \alpha_2 - \sum_{i=1}^1 \langle \alpha_2, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = (0, 1, 0) - \langle (0, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle (1, 0, 0) =$$

$$= (0, 1, 0) - \left(0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \right) (1, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon_2'\| = \sqrt{0^2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2'}{\|\varepsilon_2'\|} = \frac{(0, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\varepsilon_3' = \alpha_3 - \sum_{i=1}^2 \langle \alpha_3, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \alpha_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \alpha_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 =$$

$$= (0, 0, 1) - \langle (0, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle (1, 0, 0) - \left\langle (0, 0, 1), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\rangle \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) =$$

$$= (0, 0, 1) - \left(0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \right) (1, 0, 0) - \left(0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot 0 \right) \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) =$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon_3'\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 1 + 2 \cdot 0^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3'}{\|\varepsilon_3'\|} = \frac{2 \left(-\frac{1}{2}, 0, 1 \right)}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}, 0, 1 \right)}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

כלומר $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \varepsilon_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$ בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$ ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

ב. יהי $P^2 = \{g(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg g \leq 2\}$ עם המכפלה הפנימית המוגדרת ע"י $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(x)dx}$$

נתחיל מהבסיס הרגיל של P^2 : $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2$ ונבצע עליו את תהליך גראם שמידט:

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^1 1 \cdot dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon_2' = \alpha_2 - \sum_{i=1}^1 \langle \alpha_2, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \left(\int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon_2'\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2'}{\|\varepsilon_2'\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$\varepsilon_3' = \alpha_3 - \sum_{i=1}^2 \langle \alpha_3, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \alpha_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \alpha_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 =$$

$$= \alpha_3 - \langle \alpha_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \alpha_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \left\langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}x =$$

$$= x^2 - \left(\int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^1 x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}x dx \right) \sqrt{\frac{3}{2}}x = x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}}x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon_3'\| = \sqrt{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 x^4 dx - \frac{2}{3} \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{9} dx} = \sqrt{\left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3'}{\|\varepsilon_3'\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$$

כלומר $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \varepsilon_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}$ בסיס אורתונורמלי ל- P^2 ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

ג. נחפש בסיס אורתונורמלי של $\text{span}\{(1,0,1,0), (2,1,0,0), (0,2,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ ביחס למכפלה הסקלרית

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \quad \text{כלומר}$$

$$\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

נסמן $\alpha_1 = (1,0,1,0), \alpha_2 = (2,1,0,0), \alpha_3 = (0,2,0,1)$ ונבצע עליהם את תהליך גראם שמידט:

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{(1,0,1,0)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2}} = \frac{(1,0,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2' &= \alpha_2 - \sum_{i=1}^1 \langle \alpha_2, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = (2,1,0,0) - \left\langle (2,1,0,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \\ &= (2,1,0,0) - \left\langle 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot 0 \right\rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = (2,1,0,0) - \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \\ &= (2,1,0,0) - (1,0,1,0) = (1,1,-1,0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon_2'\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2'}{\|\varepsilon_2'\|} = \frac{(1,1,-1,0)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3' &= \alpha_3 - \sum_{i=1}^2 \langle \alpha_3, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \alpha_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle \alpha_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = \\ &= (0,2,0,1) - \left\langle (0,2,0,1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) - \left\langle (0,2,0,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) = \\ &= (0,2,0,1) - \left\langle 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot 0 \right\rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) - \left\langle 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 \cdot 0 \right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) = \\ &= (0,2,0,1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) = (0,2,0,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon_3'\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9}} = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3'}{\|\varepsilon_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \left(-\frac{2\sqrt{33}}{33}, \frac{4\sqrt{33}}{33}, \frac{2\sqrt{33}}{33}, \frac{\sqrt{33}}{11}\right)$$

$$\text{כלומר } \varepsilon_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \varepsilon_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \varepsilon_3 = \left(-\frac{2\sqrt{33}}{33}, \frac{4\sqrt{33}}{33}, \frac{2\sqrt{33}}{33}, \frac{\sqrt{33}}{11}\right)$$

אורתונורמלי ל- $\text{span}\{(1,0,1,0), (2,1,0,0), (0,2,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$ ביחס למכפלה הסקלרית הרגילה.

שאלה 5

טענה: יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ וקטורים תלויים לינארית כך ש- α_{k+1} הראשון שהינו צירוף לינארי של קודמיו. אם נחיל את תהליך גראם שמידט על וקטורים אלה נקבל (בסימוני התהליך) $\varepsilon_{k+1}' = 0$.
הוכחה: אם $\alpha_k = 0$ הטענה ברורה ולכן נניח מעתה כי $\alpha_k \neq 0$. לכן גם ניתן להניח כי $1 < k$.

נניח ש- $\alpha_{k+1} \in \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. אזי קיימים $\{t_j\}_{j=1}^k$ כך ש- $\alpha_{k+1} = \sum_{j=1}^k t_j \alpha_j$. אזי

$$\varepsilon_{k+1}' = \alpha_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle \alpha_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \sum_{j=1}^k t_j \alpha_j - \sum_{i=1}^k \left\langle \sum_{j=1}^k t_j \alpha_j, \varepsilon_i \right\rangle \varepsilon_i$$

ראינו בכיתה שאם $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית ו- $\alpha = \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i$ אזי $\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = a_i$. לכן

$$\varepsilon_{k+1}' = \sum_{j=1}^k t_j \alpha_j - \sum_{j=1}^k t_j \alpha_j = 0 \quad \text{כלומר} \quad \sum_{i=1}^k \left\langle \sum_{j=1}^k t_j \alpha_j, \varepsilon_i \right\rangle \varepsilon_i = \sum_{j=1}^k t_j \alpha_j$$

היטב משום שהנחנו ש- α_{k+1} הוא הווקטור הראשון שהוא צירוף לינארי של קודמיו ולכן עד השלב ה- k יתהליך גראם שמידט עבד כראוי. ☺

טענה: יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V מרחב מכפלה פנימית מכל F . יהי $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ הבסיס שהתקבל ממנו ע"י תהליך גראם שמידט. יהי $\{f_1, \dots, f_n\}$ בסיס אורתונורמלי אחר שמקיים ש-

$$\text{span}\{f_1, \dots, f_i\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_i\} \quad \text{לכל } 1 \leq i \leq n. \quad \text{אזי לכל } 1 \leq k \leq n \quad f_k = a_k \cdot \varepsilon_k \quad \text{כאשר } a_k \in F \quad \text{ו-} |a_k| = 1.$$

הוכחה: לכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים $\text{span}\{f_1, \dots, f_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ שהרי $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ התקבל מ- $\{v_1, \dots, v_n\}$ בתהליך גראם שמידט.

לכן $f_k \in \text{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. כלומר קיימים $\{a_i\}_{i=1}^k$ כך ש- $f_k = \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i$. מצד שני, מאחר ש-

$$\text{span}\{f_1, \dots, f_p\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_p\} = \text{span}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\} \quad \text{לכל } 1 \leq p \leq n \quad \text{אז לכל } 1 \leq i \leq k \quad \text{קיימים } \{a_j^i\}_{j=1}^i$$

$$\text{ש-} \varepsilon_i = \sum_{j=1}^i a_j^i f_j. \quad \text{לפי משפט שלמדנו בכיתה מתקיים } a_i = \langle f_k, \varepsilon_i \rangle \quad \text{ו-} f_k = \sum_{i=1}^k \langle f_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i. \quad \text{לכן בעצם}$$

$$f_k = \sum_{i=1}^k \left\langle f_k, \sum_{j=1}^i a_j^i f_j \right\rangle \varepsilon_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^i a_j^i \langle f_k, f_j \rangle \right) \varepsilon_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^i a_j^i \cdot \delta_{k,j} \right) \varepsilon_i = a_k^k \cdot \varepsilon_k$$

$$\|f_k\| = 1. \quad \text{לכן } \|f_k\| = \|a_k^k \cdot \varepsilon_k\| = |a_k^k| \cdot \|\varepsilon_k\| = |a_k^k| \cdot 1 = |a_k^k|. \quad \text{אכן קיבלנו } f_k = a_k \cdot \varepsilon_k \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{כאשר } a_k \in F \quad \text{ו-} |a_k| = 1. \quad \text{☺}$$

פתרון תרגיל 10 - אלגברה לינארית 2

6 ביוני 2006

1.א. מאי שוויון קושי-שוורץ למרחבים $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה נקבל:

$$\sum_{i=0}^n |a_i| |b_i| = (|a_1|, \dots, |a_n|) \cdot (|b_1|, \dots, |b_n|) \leq \|(|a_1|, \dots, |a_n|)\| \cdot \|(|b_1|, \dots, |b_n|)\| =$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^\infty a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^\infty b_i^2}$$
לכל $n \in \mathbb{N}$. לכן הטור שלנו הוא טור חסום עם איברים חיוביים - ולכן מתכנס. (שימו לב שבצד הימני של השוויון מופיע מספר קבוע)
נראה כי $l^2(\mathbb{R})$ הוא מרחב לינארי. זהו תת מרחב של מרחב הסדרות האינסופיות של איברים ב- $\mathbb{R}$. (ראינו שמרחב הסדרות הוא מ"ו בסמסטר א' - ההוכחה כמו ל- $\mathbb{R}^n$).
לכן מספיק להראות סגירות לכפל בסקלר וחיבור. נניח $(a_i)_{i=1}^\infty \in l^2$, ברור שגם $(\sum_{i=1}^\infty (\lambda a_i)^2 = \lambda^2 \cdot \sum_{i=1}^\infty a_i^2$ (קל לראות שמתקיים $\lambda \cdot (a_i)_{i=1}^\infty = (\lambda a_i)_{i=1}^\infty \in l^2$ נניח שגם $(b_i)_{i=1}^\infty \in l^2$ ונראה ש- $(a_i + b_i)_{i=1}^\infty \in l^2$:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2$$
כאשר $n \rightarrow \infty$ אגף שמאל מתכנס לגבול - האיבר הימני והשמאלי מהנתון, והאמצעי מההתכנסות בהחלט שהוכחנו קודם - לכן גם אגף ימין מתכנס לגבול. לכן l^2 סגור גם לחיבור.
נותר להראות כי התבנית $\langle (a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ מגדירה מכפלה פנימית על $l^2(\mathbb{R})$. המכפלה מוגדרת היטב כי הוכחנו שהטור מימין מתכנס.
א. לינאריות והומוגניות במשתנה הראשון נובעת מהמשפטים הרגילים על גבולות של סכום סדרות ומכפלה של סדרה בקבוע:

$$\begin{aligned} \langle (a_i)_{i=1}^\infty + (c_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle &= \langle (a_i + c_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle = \sum_{i=1}^\infty (a_i + c_i) b_i \\ &= \sum_{i=1}^\infty (a_i b_i + c_i b_i) = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i + \sum_{i=1}^\infty c_i b_i = \langle (a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle + \langle (c_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle > \\ &\langle \lambda \cdot (a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle = \langle (\lambda a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle = \sum_{i=1}^\infty \lambda a_i b_i = \lambda \sum_{i=1}^\infty a_i b_i \\ &= \lambda \langle (a_i)_{i=1}^\infty, (b_i)_{i=1}^\infty \rangle > \\ &\text{ב. הסימטריות ברורה. (נובע מכך ש- } \sum_{i=1}^\infty a_i b_i = \sum_{i=1}^\infty b_i a_i \text{)} \\ &\text{ג. חיוביות: אם } (a_i)_{i=1}^\infty \neq 0 \text{ אז ישנו } k \text{ כך ש- } a_k \neq 0, \text{ לכן } a_k^2 > 0 \text{ ומכאן } \sum_{i=1}^\infty a_i^2 > a_k^2 > 0. \\ &\text{ב. לינאריות והומוגניות במשתנה הראשון: אלה נובעים מלינאריות העקבה שהוכחנו בעבר:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{עבור } \lambda \in \mathbb{C}, A, A', B \in M_n(\mathbb{C}) \\ \langle A + A', B \rangle &= \text{tr}((A + A')B^*) = \text{tr}(AB^* + A'B^*) = \text{tr}(AB^*) + \text{tr}(A'B^*) \\ &= \langle A, B \rangle + \langle A', B \rangle \end{aligned}$$

$\langle \lambda A, B \rangle = tr(\lambda AB^*) = \lambda tr(AB^*) = \lambda \langle A, B \rangle$
 הרמיטיות: נחשב באופן מפורש את התבנית עבור $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$
 נסמן $C = AB^*$, אזי $c_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$ (זכרו ש- $B^* = (\overline{b_{ji}})$)
 לכן $tr(C) = tr(AB^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$
 ובאופן דומה $tr(BA^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \overline{a_{ij}}$, ולכן ברור ש- $\langle A, B \rangle = \overline{\langle B, A \rangle}$
 חיוביות: נשתמש בנוסחה שקיבלנו: $\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{a_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$
 אגף ימין הוא סכום של איברים אי שליליים, ואם אחת מהקואורדינטות של a_{ij} של המטריצה אינו 0 אז הסכום חיובי ממש.
 אנו רוצים להראות גם כי הבסיס הסטנדרטי $\{E_{ij}\}$ הוא אורתונורמלי ביחס למכפלה זו.

נזכיר כי E_{ij} היא מטריצה עם 1 במקום (i, j) ואפס בכל מקום אחר. נשים לב תחילה כי $E_{ij}^* = E_{ji}$ בנוסף מתקיים:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad \text{כאשר } E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$$

לכן $\langle E_{ij}, E_{ij} \rangle = tr(E_{ij} E_{ji}) = tr(E_{ii}) = 1$
 ומאידך $\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = tr(E_{ij} E_{lk}) = tr(\delta_{jl} E_{ik})$
 אם $j \neq l$ אז מקבלים $tr(0) = 0$, אם $j = l$ אבל $i \neq k$ אז מקבלים $tr(E_{ik}) = 0$
 כי כל האיברים על האלכסון של E_{ik} הם 0.
 ג. נראה לינאריות והומוגניות במשתנה הראשון:

נניח $\lambda \in \mathbb{R}$ ו- $x, x', y \in V$
 $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ מהנתון.
 אבל $\langle x + x', y \rangle = Re \langle x + x', y \rangle + i \cdot Im \langle x + x', y \rangle$
 $\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle = Re \langle x, y \rangle + i \cdot Im \langle x, y \rangle + Re \langle x', y \rangle + i \cdot Im \langle x', y \rangle =$
 $Re \langle x, y \rangle + Re \langle x', y \rangle + i(Im \langle x, y \rangle + Im \langle x', y \rangle)$
 מהשוואת החלקים הממשיים נקבל
 $Re \langle x + x', y \rangle = Re \langle x, y \rangle + Re \langle x', y \rangle$
 בנוסף, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda(Re \langle x, y \rangle + i \cdot Im \langle x, y \rangle)$
 $= \lambda \cdot Re \langle x, y \rangle + \lambda \cdot i \cdot Im \langle x, y \rangle$
 מכיון ש- λ ממשי נובע שהחלק הממשי של $\langle \lambda x, y \rangle$ הוא בדיוק $\lambda \cdot Re \langle x, y \rangle$
 וזה בדיוק מה שרצינו להראות.

סימטריות: מתכונות המכפלה הפנימית על V נובע שאם
 $\langle x, y \rangle = Re \langle x, y \rangle + i \cdot Im \langle x, y \rangle$
 אז $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} = Re \langle x, y \rangle - i \cdot Im \langle x, y \rangle$
 ולכן $Re \langle y, x \rangle = Re \langle x, y \rangle$, ולכן $\langle x, x \rangle = Re \langle x, x \rangle > 0$ לכל $x \neq 0$ לכן מתקיימות חיוביות.

2. אם $g \in W^\perp$, זאת אומרת ש- $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0 \quad \forall f \in W$
 תהי $g \in V$ פונקציה כלשהי, $f \in V$ פונקציה זוגית.
 $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g(x)dx$
 הראשון $x \mapsto -x$ ונקבל ש-
 $\int_{-1}^0 f(x)g(x)dx = \int_1^0 f(-x)g(-x)d(-x) = -\int_0^1 f(x)g(-x)(-1)dx = \int_0^1 f(x)g(-x)dx$
 ולכן $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(-x)dx + \int_0^1 f(x)g(x)dx$
 $= \int_0^1 f(x)[g(-x) + g(x)]dx$

כזכור אנו מחפשים את הפונקציות g עבורם האינטגרל הנ"ל שווה לאפס לכל פונקציה זוגית.

נשים לב שכדי להגדיר פונקציה זוגית על הקטע $[-1, 1]$ מספיק להגדיר פונקציה $h(x)$ על הקטע $[0, 1]$ ואז להגדיר לכל $x \in [-1, 0]$ $h(x) = h(-x)$ (צריך רק להוכיח ש- h רציפה אבל זה קל מאוד). בפרט אם נגדיר

$h(x) = g(-x) + g(x)$ על $[0, 1]$ נוכל להרחיב את h לפונקציה זוגית על $[-1, 1]$. נקבל ש- $\int_{-1}^1 h(x)g(x)dx = \int_0^1 h(x)[g(-x) + g(x)]dx = \int_0^1 (h(x))^2 dx$ אבל זה מתקיים רק אם $h(x) = 0$ כלומר $g(-x) = -g(x)$, זאת אומרת g אי זוגית. לכן $W^\perp$ מוכלת בקבוצת הפונקציות האי-זוגיות.

מאידך ברור מהחישוב לעיל שאם $g \in W^\perp$ אי זוגית אז $g \in W^\perp$ הוא בדיוק מרחב הפונקציות האי זוגיות.

נראה ש- $W \oplus W^\perp = V$ כרגיל $W \cap W^\perp = \{0\}$. נראה ש- $W + W^\perp = V$. כל פונקציה $f \in V$ אפשר לכתוב כ- $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ קל לראות שהרכיב הראשון הוא פונקציה זוגית, והשני פונקציה אי זוגית.

(שימו לב שהטענה לא נובעת מהמשפט שראיתם בכיתה ש- $W \oplus W^\perp = V$, הוכחתם את זה רק למרחבים מממד סופי, במימד אינסופי זה לא תמיד נכון). 1.3.1. הוקטורים ב- W הם מהצורה $\sum_{i=1}^k a_i \epsilon_i$, לכן הוקטורים המחוברים את α עם W הם מהצורה $\beta = \alpha - \sum_{i=1}^k a_i \epsilon_i$. נחשב:

$$\|\beta\|^2 = \left\| \alpha - \sum_{i=1}^k a_i \epsilon_i \right\|^2 = \left\| \left[\alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i \right] + \left[\sum_{i=1}^n \langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i - \sum_{i=1}^k a_i \epsilon_i \right] \right\|^2$$
 נשים לב שהרכיב הראשון ניצב ל- W , ואילו השני שייך ל- W , לכן הרכיבים ניצבים זה לזה ומתקיים משפט פיתגורס.

$$\|\beta\|^2 = \left\| \alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i - \sum_{i=1}^k a_i \epsilon_i \right\|^2 \geq \left\| \alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i \right\|^2$$

כלומר $\|\beta\| \geq \left\| \alpha - \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \epsilon_i \rangle \epsilon_i \right\|$ כנדרש. (שימו לב ששוויון מתקיים רק אם $\langle \alpha, \epsilon_i \rangle = a_i$ ולכן זה הוקטור הקצר ביותר היחיד).

11. מהסעיף הקודם נובע שצריך למצוא את ההטלה של x^3 על תת המרחב של הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

כלומר מחפשים פולינום $p(x) = ax^2 + bx + c$ כך ש- $x^3 - p(x)$ ניצב למרחב הפולינומים מדרגה ≥ 2 . לכן $\int_{-1}^1 (x^3 - p(x))x^i dx = 0$ לכל $0 \leq i \leq 2$.

נקבל: $\int_{-1}^1 x^3 \cdot x^i dx = a \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^i dx + b \int_{-1}^1 x \cdot x^i dx + c \int_{-1}^1 1 \cdot x^i dx$ ומכאן עבור $i = 0$: $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = \frac{2}{3}a + 2c = a \int_{-1}^1 x^2 dx + b \int_{-1}^1 x dx + c \int_{-1}^1 1 dx$ עבור $i = 1$: $\frac{2}{5} = \frac{2}{3}b$ ועבור $i = 2$: $0 = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c$. קבלנו מערכת של שלושה משוואות בשלושה נעלמים, ופתרונה הוא: $a = 0, b = \frac{3}{5}, c = 0$. לכן $p(x) = \frac{3}{5}x$. (הערה - אפשר גם לקחת את הבסיס האורתונורמלי משאלה 1.4. ולכתוב את $p(x)$ באופן מפורש כ- $\sum_{i=0}^2 \langle x^3, \epsilon_i \rangle \epsilon_i$).

מדוע היינו יכולים לומר מראש ש- $p(x) = cx$ עבור c מספר כלשהו? - בשאלה 2 ראינו שהפונקציות הזוגיות והאי זוגיות ניצבות זו לזו, בפרט x^3 ניצבת ל-

$$p_1(x) = x^2, p_2(x) = 1$$

לכן ריבוע המרחק בין x^3 לבין $p(x) = ax^2 + bx + c$ יהיה

$$\|p(x) - ax^2 + bx + c\|^2 = \|p(x)\|^2 + a^2 \|x^2\|^2 + b^2 \|x\|^2 + c^2 \|1\|^2 - 2b \langle p(x), x \rangle$$

ביטוי זה תמיד יקטן אם נבחר $a = c = 0$, לכן ברור שהמרחק המינימלי יתקבל

כאשר תנאי זה מתקיים.

ב. תחילה תיקון טעות. היה צריך להדגיש כי מדובר על מרחב מעל $\mathbb{R}$, אחרת קוסינוס יכול לצאת מספר מרוכב, ואין מה לדבר על גודל (פרט לגודל של הערך המוחלט).

ולשאלה - הזוית בין שני וקטורים קטנה יותר ככל שקוסינוס הזוית יותר גדול (יותר קרוב ל-1).

נסמן $\beta = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, e_i \rangle e_i$ אזי $\alpha = \beta + \gamma$. יהי $v \in W$ כלשהו. אזי

$$\cos(v, \alpha) = \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\|v\| \|\alpha\|} = \frac{\langle v, \beta + \gamma \rangle}{\|v\| \|\alpha\|} = \frac{\langle v, \beta \rangle}{\|v\| \|\alpha\|} \leq \frac{\|v\| \|\beta\|}{\|v\| \|\alpha\|} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\beta\| \|\alpha\|} = \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\beta\| \|\alpha\|}$$

 $\cos(\beta, \alpha)$, כנדרש. השתמשנו בכך ש- v ו- β ניצבים ל- γ , ובאי שוויון קושי שורץ.

4. א. בכדי למצוא בסיס אורתונורמלי נבצע תהליך גראם-שמידט על הבסיס הסטנדרטי (e_1, e_2, e_3) :

$$v_1 = e_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{לכן נסמן } \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1$$

$$(0, 1, 0) - \langle (0, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle (1, 0, 0) = (0, 1, 0) - 0 \cdot (1, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

$$\|(0, 1, 0)\| = \sqrt{2} \quad \text{ולכן } \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 2 \quad \text{כמו כן ש- } v_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \quad \text{לבסוף,}$$

$$(0, 0, 1) - \langle (0, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle (1, 0, 0) - \langle (0, 0, 1), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rangle (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 0) - 0 \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$$

$$v_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}) \quad \text{לכן } \|(-\frac{1}{2}, 0, 1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ולכן } \langle (-\frac{1}{2}, 0, 1), (-\frac{1}{2}, 0, 1) \rangle = \frac{3}{4}$$

לסיכום $((1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}))$ בסיס אורתונורמלי למכפלה פנימית זו.

ב. נבצע תהליך גראם-שמידט על הבסיס הסטנדרטי של P^2 , $(1, x, x^2)$.
 $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot dx = x|_{-1}^1 = 2$ לכן האיבר הראשון בבסיס יהיה

$$v_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x - (\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{2}} dx) \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = x - \frac{1}{4} x^2|_{-1}^1 = x$$

$$v_2 = \frac{x}{\|x\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x \quad \text{לכן } \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - \langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}} x \rangle \sqrt{\frac{3}{2}} x - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - (\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x^3 dx) \sqrt{\frac{3}{2}} x - (\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 dx) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= x^2 - \frac{3x}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = x^2 - \frac{3x}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3}) dx = \int_{-1}^1 (x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}) dx = \text{מתקיים}$$

$$\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

$$.v_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \frac{1}{3}) \quad \text{לכן}$$

לסיכום הבסיס $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \frac{1}{3}))$ הוא בסיס אורתונורמלי במרחב שלנו.

ג. מחפשים בסיס או"נ לתת המרחב $sp\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$
 נבצע את תהליך גראם-שמידט על הוקטורים הנתונים הפורשים את המרחב (קל לראות שהם בת"ל ולכן בסיס):

$$.v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \quad \text{לכן } \langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle = 2$$

$$(2, 1, 0, 0) - \langle (2, 1, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rangle (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (2, 1, 0, 0) - \frac{2}{\sqrt{2}} (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (1, 1, -1, 0)$$

$$.v_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \quad \text{ולכן } \langle (1, 1, -1, 0), (1, 1, -1, 0) \rangle = 3$$

$$(0, 2, 0, 1) - \langle (0, 2, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rangle (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$- \langle (0, 2, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \rangle (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

$$= (0, 2, 0, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1)$$

$$.v_3 = (-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}) \quad \text{ולכן } \langle (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1), (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1) \rangle = 9$$

לסיכום $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3})\}$ הוא בסיס אורתונורמלי למרחב.

5. א. נניח שיש לנו קבוצה של וקטורים $(v_1, \dots, v_n)$ ונניח שלא כל הוקטורים הם וקטור האפס (אחרת אין מה לעשות איתם), אבל יש תלות לינארית בין הוקטורים. נוכל להתחיל בתהליך כרגיל עם איזשהו $v_1 \neq 0$. נניח שהוקטור הראשון התלוי בקודמיו הוא v_k , אז $v_k \in sp\{v_1, \dots, v_{k-1}\} = sp\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ (כאשר e_i הוא הוקטור שקיבלנו מ- v_i). אבל אז $v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i \rangle e_i = 0$ ונתון שיקול בדיוק יתקיים כלומר ביצוע תהליך גראם-שמידט יאפס את הוקטור. אותו שיקול בדיוק יתקיים כשנמשיך עם התהליך עבור v_{k+1} והבאים אחריו, ויתקבל כי כל וקטור התלוי בקודמיו יוחלף בוקטור האפס, ואילו האחרים יוחלפו בוקטורים שייצרו מערכת

אורתונורמלית. בפרט אם $(v_1, \dots, v_k)$ פורשים את המרחב אז התהליך עדיין ייתן לנו בסיס אורתונורמלי. (באופן כללי נקבל בסיס אורתונורמלי ל- $\text{sp}\{v_1, \dots, v_n\}$)

ב. נניח שגם הבסיס $(f_1, \dots, f_n)$ ממלא את הדרישות של הבסיס האורתונורמלי המתקבל מתהליך גראם שמידט. זאת אומרת ש- $f_k \in \text{sp}(v_1, \dots, v_k) = \text{sp}(e_1, \dots, e_k)$ (כי אנו דורשים ש- $\text{sp}(f_1, \dots, f_k) = \text{sp}(v_1, \dots, v_k)$). אבל אנו דורשים גם ש- $f_k \perp \text{sp}(f_1, \dots, f_{k-1}) = \text{sp}(v_1, \dots, v_{k-1}) = \text{sp}(e_1, \dots, e_{k-1})$. נכתוב את f_k בפיתוח לפי הבסיס האורתונורמלי $(e_1, \dots, e_k)$ של $\text{sp}(v_1, \dots, v_k)$; $f_k = \sum_{i=1}^k \langle f_k, e_i \rangle e_i = \langle f_k, e_k \rangle e_k$ לכן $f_k = a_k e_k$ עבור סקלר כלשהו a_k . אנו דורשים גם ש- $\|f_k\| = 1$, אבל $\|f_k\| = \|a_k e_k\| = |a_k| \|e_k\| = |a_k|$, לכן $|a_k| = 1$.

תרגיל 11 – אלגברה ליניארית 2

1. נתון בסיס $v_1 = (2, 1), v_2 = (1, 3)$ ל $V = \mathbb{R}^2$.
 - a. מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{v_1, v_2\}$ ב V^* . קרי מצאו φ_1, φ_2 כך ש

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
 כלומר מצאו במפורש את $\varphi_i(x, y)$.
 - b. ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$ מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ב V . קרי מצאו שני וקטורים u_1, u_2 שמקיימים $\forall v \in V, \forall i \varphi_i(v) = (u_i, v)$.
2. יהא המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נסמן $B = (v_1, v_2, v_3) = ((1, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 2, 3))$.
 - a. השתמשו בתהליך גרם-שמידט על B וקבלו בסיס אורתונורמלי (=בא"נ) ל $\mathbb{R}^3$.
 - b. מצאו את הבסיס הדואלי B^* ל B ב $\mathbb{R}^3$.
 - c. הוכיחו כי ל V ממכ"פ, B בא"נ אמ"מ $B^* = B$.
3. נתונה ט"ל $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ע"י $T(x, y) = (5x + 8y, -3x + 4y)$ ונתונה המכ"פ הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$. יהא הבסיס $A = \{(1, 1), (0, 2)\}$ ל $\mathbb{R}^2$.
 - a. חשבו את T^* .
 - b. חשבו את $[T]_A^A$.
 - c. חשבו את $[T^*]_A^A$.
 - d. חזרו על שני הסעיפים הקודמים עבור $A' = \{(1, 1), (1, -1)\}$.
 - e. הסבירו מדוע $[T]_{A'}^{A'} = [T^*]_{A'}^{A'}$ אבל $[T]_A^A \neq [T^*]_A^A$.
 - f. אם קיים בסיס A שעבורו $[T]_A^A$ אוניטרית האם בהכרח לכל בסיס A' מתקיים ש $[T]_{A'}^{A'}$ אוניטרית?
4. יהא $V = \mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ עם המכ"פ $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.
 - a. תהא T א"ל על V המוגדרת $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$. מצאו את T^* .
 - b. יהא מ"ו V עם בסיס A . הוכיחו שאם לכל א"ל T על V מתקיים $[T]_A^* = [T^*]_A$ אז A בסיס אורתוגונלי ואברי A שווי אורך.
 - c. הוכיחו כי:

$$(U \cap W)^0 = U^0 + W^0 \text{ אם } U, W \subseteq V$$

$$(U + W)^0 = U^0 \cap W^0 \text{ אם } U, W \subseteq V$$

תרגיל 11 - אלמנטרית 2

① נתון הסט $V = \mathbb{R}^2$: $v_1 = (2, 1)$ $v_2 = (1, 3)$

(a) נחשב את ההסטים הבסיסיים $\{v_1, v_2\}$ ב- V^* :

נניח ש- $v = (x, y) = av_1 + bv_2$ (גזיר)

$\varphi_1(v) = a$ $\varphi_2(v) = b$

זה מוגדר היטב משום שהצגה $v = av_1 + bv_2$ היחידה וקלה לראות ש- $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$

רמת נוחות את φ_i המפורט.

$(x, y) = a(2, 1) + b(1, 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2a + b \\ y = a + 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a + b \\ 2y = 2a + 6b \end{cases}$$

$\Rightarrow x - 2y = -5b \Rightarrow b = \frac{2y - x}{5}$

$a = y - \frac{6y - 3x}{5} = \frac{3x - y}{5}$

הצגה
יחידה
של
הווקטור
בבסיס
החד
הוא
המקור
למשפט
הזה

$\Rightarrow \varphi_1(x, y) = \frac{3x - y}{5}$ $\varphi_2(x, y) = \frac{2y - x}{5}$

(b) נחשב את ההסטים הבסיסיים $\{u_1, u_2\}$ ב- V כחוס

למרחב ההסטים הבסיסיים $\mathbb{R}^2$.

בואו נחשב ונראה u_i רק של $v \in V$ $\varphi_i(v) = (u_i, v)$

בפרט זה אומר אלוהות (כחן) עבור v_1, v_2 : $u_i = (a_i, b_i)$: (ניח)

$\varphi_1(v_1) = 1 = 2a_1 + b_1$ $\varphi_1(v_2) = 0 = a_1 + 3b_1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3/5 \\ b_1 = -1/5 \end{cases} u_1 = \frac{1}{5}(3, -1)$

$\varphi_2(v_1) = 0 = 2a_2 + b_2$ $\varphi_2(v_2) = 1 = a_2 + 3b_2 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -1/5 \\ b_2 = 2/5 \end{cases} u_2 = \frac{1}{5}(-1, 2)$

והיינו $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מסתמך

$\varphi_1(x, y) = \frac{3x - y}{5} = \frac{3}{5} \cdot x - \frac{1}{5} \cdot y = (u_1, (x, y))$

$\varphi_2(x, y) = \frac{2y - x}{5} = -\frac{1}{5} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot y = (u_2, (x, y))$

(2) יהי $V = \mathbb{R}^3$ עם המכשור הסקלרי הרגיל. (10)

$$B = (v_1, v_2, v_3) = ((1, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 2, 3))$$

(a) נשתמש בהרמס לאנז' ונניקו בסיס אורתונורמלי V -ל.

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$e_2' = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 =$$

$$= (1, -2, 1) - \langle (1, -2, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= (1, -2, 1) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = (1, -2, 1)$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$e_3' = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 =$$

$$= (1, 2, 3) - \langle (1, 2, 3), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) -$$

$$- \langle (1, 2, 3), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \rangle \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) =$$

$$= (1, 2, 3) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{3} + 3\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) -$$

$$- \left(\frac{\sqrt{6}}{6} - 2\frac{\sqrt{6}}{3} + 3\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) =$$

$$= (1, 2, 3) - 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = (1, 2, 3) - (2, 2, 2) =$$

$$= (-1, 0, 1)$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(b) נתון את הבסיס הרגיל B^* ב- $\mathbb{R}^3$.

נזכור, ונתון: $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$ וכן w_1, w_2, w_3 נניח

$$w_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$1 = \langle v_1, w_1 \rangle = x_1 + y_1 + z_1$$

$$0 = \langle v_2, w_1 \rangle = x_1 - 2y_1 + z_1$$

$$0 = \langle v_3, w_1 \rangle = x_1 + 2y_1 + 3z_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

$$0 = \langle v_1, w_2 \rangle = x_2 + y_2 + z_2$$

$$1 = \langle v_2, w_2 \rangle = x_2 - 2y_2 + z_2$$

$$0 = \langle v_3, w_2 \rangle = x_2 + 2y_2 + 3z_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1/2 \\ y_2 = 1 \\ z_2 = -1/2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \langle v_3, w_1 \rangle = x_3 + y_3 + z_3 \\ 0 &= \langle v_3, w_2 \rangle = x_3 - 2y_3 + z_3 \\ 1 &= \langle v_3, w_3 \rangle = x_3 + 2y_3 + 3z_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{2} \\ y_3 &= 0 \\ z_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

בואר המסגרת B ב- $\mathbb{R}^3$ היא

$$B^* = \left\{ \cancel{(2, -1, 0)}, \cancel{(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})}, (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \right\}$$

(c) סגורה וזו V אחתה אחתה פנימית. אם B מסגרת
אורתוגונלית אחר $B^* = B$

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח $B = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ מסגרת אורתוגונלית.

ויהי $B^* = (v_1, \dots, v_n)$ כך ש- $\langle \epsilon_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

(ראה שלב $1 \leq i \leq n$ מתקיים $v_i = \epsilon_i$).

אם $v \in V$ מתקיים $\langle v, \epsilon_i \rangle = \langle v, v_i \rangle$ כל $\epsilon_i = v_i$.

(הוכחה בכיתה). (ראה אם כן ש- $(*)$ אכן מתקיים).

יהי $v = \sum_{j=1}^n a_j \epsilon_j$ אז

$$\langle v, \epsilon_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n a_j \epsilon_j, \epsilon_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle \epsilon_j, \epsilon_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{ji} = a_i$$

$$\langle v, v_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n a_j \epsilon_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \langle \epsilon_j, v_i \rangle = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{ji} = a_i$$

($\Rightarrow$) נניח ש- $B^* = B$ בואר אם $B^* = B = (v_1, \dots, v_n)$

אז כל v_i, v_j מתקיים $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ כל i, j .

(u)

ההוכחה של מסגרת אורתוגונלית.

(3) תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ שמוגדרת ע"י

$$T(x, y) = (5x + 8y, -3x + 4y)$$

(a) נתון את T^* (הרצף של T) $v_2 = (x_2, y_2)$, $v_1 = (x_1, y_1)$

$$\langle T v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, T^* v_2 \rangle \quad \text{יתקיים}$$

הפרטנו את התקיים עבור הבסיס $(0, 1), (1, 0)$

$$\text{לכן } T^*(0, 1) = (x_2, y_2) \text{ ו- } T^*(1, 0) = (x_1, y_1)$$

$$\langle T(0, 1), (0, 1) \rangle = \langle (8, 4), (0, 1) \rangle = 4$$

$$\langle (0, 1), T^*(0, 1) \rangle = \langle (0, 1), (x_2, y_2) \rangle = y_2$$

$$\langle T(1, 0), (0, 1) \rangle = \langle (5, -3), (0, 1) \rangle = -3$$

$$\langle (1, 0), T^*(0, 1) \rangle = \langle (1, 0), (x_2, y_2) \rangle = x_2$$

$$\Rightarrow T^*(0, 1) = (-3, 4)$$

$$\langle T(0, 1), (1, 0) \rangle = \langle (8, 4), (1, 0) \rangle = 8$$

$$\langle (0, 1), T^*(1, 0) \rangle = \langle (0, 1), (x_1, y_1) \rangle = y_1$$

$$\langle T(1, 0), (1, 0) \rangle = \langle (5, -3), (1, 0) \rangle = 5$$

$$\langle (1, 0), T^*(1, 0) \rangle = \langle (1, 0), (x_1, y_1) \rangle = x_1$$

$$\Rightarrow T^*(1, 0) = (5, 8)$$

$$\text{לכן } v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \quad \text{אז}$$

$$T^*(x, y) = x T^*(1, 0) + y T^*(0, 1) =$$

$$= (5x, 8x) + (-3y, 4y) =$$

$$= (5x - 3y, 8x + 4y)$$

(b) יהא $A = \{(1, 1), (0, 2)\}$ בסיס ב- $\mathbb{R}^2$

$[T]_A^A$ נתון את

$$T(1, 1) = (5 + 8, -3 + 4) = (13, 1) = 13(1, 1) - 6(0, 2)$$

$$T(0, 2) = (0 + 16, 0 + 8) = (16, 8) = 16(1, 1) - 4(0, 2)$$

$$\Rightarrow [T]_A^A = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) נתתם את $[T^*]_A^A$

$$T^*(1,1) = (5-3, 8+4) = (2, 12) = \underline{2}(1,1) + \underline{5}(0,2)$$

$$T^*(0,2) = (-32, 42) = (-6, 8) = \underline{-6}(1,1) + \underline{7}(0,2)$$

$$\Rightarrow [T^*]_A^A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(d) יהי $\mathbb{R}^2$ על בסיס $A' = \{(1,1), (1,-1)\}$

נתתם את $[T]_{A'}^{A'}$ ואת $[T^*]_{A'}^{A'}$

$$T(1,1) = (13, 1) = \underline{7}(1,1) + \underline{6}(1,-1)$$

$$T(1,-1) = (-3, -7) = \underline{-5}(1,1) + \underline{2}(1,-1)$$

$$\Rightarrow [T]_{A'}^{A'} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T^*(1,1) = (2, 12) = \underline{4}(1,1) - \underline{5}(1,-1)$$

$$T^*(1,-1) = (8, 4) = \underline{6}(1,1) + \underline{2}(1,-1)$$

$$\Rightarrow [T^*]_{A'}^{A'} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) קיבלנו ש- $[T]_A^A \neq [T^*]_A^A$ אבל $([T]_{A'}^{A'})^* = [T^*]_{A'}^{A'}$

אז יש ש- A' בסיס אורתוגונלי ואילו A אינו כזה.

באופן כללי, אם $v \mapsto v$ ט"ל T^* ו- T הפוכה (שהיא ש-

$f_1, \dots, f_n$ בסיס אורתוגנלי של V ו- $A = (a_{ij})$ -

$A^* = (a_{ij}^*)$ הנסרית של T ! T^* בבסיס זה הפכה אחורה.

היא הקואורדינטה ה- i בפיתוח של $T f_j$ ב-

בדיוק $a_{ij} = \langle T f_j, f_i \rangle$ לכן $a_{ij} = \langle T f_j, f_i \rangle$

שהיא אם $T f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i$

$$\langle T f_j, f_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{kj} f_k, f_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle f_k, f_i \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ki} = a_{ij}$$

באמצעות זה $\|f_i\| a_{ij}^* = \langle T^* f_j, f_i \rangle$ אבל

$$\langle T^* f_j, f_i \rangle = \langle f_j, T f_i \rangle = \langle T f_i, f_j \rangle$$

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}} \quad \leftarrow \quad \|f_i\| a_{ij}^* = \|f_i\| a_{ji}$$

האברה שלנו אותו $\mathbb{R}$ ולכן $[T]_{A'}^{A'} = ([T]_{A'}^{A'})^t$

④ נניח ש"מ A מסווג $D = [T]_A^A$ איניטרית.
 האם ההכרח לכל מס A' מתקיים ש- $Z = [T]_{A'}^{A'}$ איניטרית?
 לא! למשל ניקח את T לעיל. נסתכל על המטריצה A' הבאה.

$$T(1,0) = (0,1)$$

$$A = E \quad \text{אז"ל}$$

$$T(0,1) = (-1,0)$$

$$\Rightarrow [T]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בחר ש"מ איניטרית 8

$$A' = ((0,1), (1,1)) \quad \text{אז"ל שני ניקח}$$

$$T(0,1) = (-1,0) = 1 \cdot (0,1) - 1 \cdot (1,1)$$

$$T(1,1) = (-1,1) = 2 \cdot (0,1) - 1 \cdot (1,1)$$

$$\Rightarrow [T]_{A'}^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = Z$$

$$Z \cdot Z^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & * \\ * & * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(4) יורד $\mathbb{R}$ $\mathbb{M}$ $V = \mathbb{R}_2[X] = \{p(x) \in \mathbb{R}[X] : \deg p(x) \leq 2\}$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad \text{הפנימית}$$

נתב $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה ליניארית: $T(ax^2+bx+c) = 2ax+b$

נחשב את T^* .

בתחילת הקורס נתנו בסיס $A = \left\{ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \varepsilon_3 = \sqrt{\frac{15}{8}}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \right\}$

הוא בסיס אורתונורמלי ב- V ביחס לאינרטי הפנימית הנתונה.

נחשב את $[T]$ ביחס לבסיסים אלה:

$$T(\varepsilon_1) = 0 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_2) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3$$

$$T(\varepsilon_3) = 2\sqrt{\frac{15}{8}}x = 0 \cdot \varepsilon_1 + \sqrt{15} \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3$$

$$\Rightarrow [T]_A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T^*]_A = ([T]_A)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$$

כעת יורי $ax^2+bx+c \in V$ נרצה לרשום אותו במונחי A .

$$ax^2+bx+c = \alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_3 \Rightarrow \begin{cases} c = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \gamma \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} \\ b = \beta \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \\ a = \gamma \cdot \sqrt{\frac{15}{8}} \end{cases} \quad \text{קרה}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}(a+3c) \quad \beta = \frac{b\sqrt{6}}{3} \quad \gamma = \frac{2a\sqrt{10}}{15}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}\alpha \\ \sqrt{15}\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^*(ax^2+bx+c) = \sqrt{3}\alpha \varepsilon_2 + \sqrt{15}\beta \varepsilon_3 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}(a+3c) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{15} \cdot \frac{b\sqrt{6}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{8}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(a+3c)x + \frac{5}{2}b + \frac{15bx^2}{2}$$

נראה שיש לי פה אישור שטענת הישוב שלי נכונה... (אולי יש לי פה אישור שטענת הישוב שלי נכונה...)

(6) יהיו $u, w \subseteq V$ מרחבים סופיים

(a) $(u+w)^\circ = u^\circ \cap w^\circ$ (b) $(u \cap w)^\circ = u^\circ + w^\circ$ (c)

$f = \varphi + \psi$ בומר, $f \in u^\circ + w^\circ$ הוכחה:

ראשון $u \in u$ כל $\varphi \in u^\circ$ - $\psi \in w^\circ$ כל $\varphi(u) = 0$

אחרים $\psi(w) = 0$ כל $\psi \in w^\circ$ כל $\psi(u) = 0$

כל $v \in u \cap w$ כל $v \in u$ כל $v \in w$ כל $v \in u \cap w$

$\Leftarrow f(v) = (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) = 0 + 0 = 0$ כל

(*) $u^\circ + w^\circ \subseteq (u \cap w)^\circ \Leftarrow f \in (u \cap w)^\circ$

כל $f \in (u \cap w)^\circ$ בומר $u+w \in u+w$ כל $f(u+w) = 0$

כל $u \in u$ כל $w \in w$ כל $u \in u$ כל $w \in w$ כל $u \in u$ כל $w \in w$

כל $f(u) = 0$ כל $f(w) = 0$ כל $f(u) = 0$ כל $f(w) = 0$

(**) $(u+w)^\circ \subseteq u^\circ \cap w^\circ$

$A^{\circ\circ} = A$ כל $B^\circ \subseteq A^\circ$ כל $A \subseteq B$ כל $A \subseteq B$

(i) $u \cap w \subseteq (u^\circ + w^\circ)^\circ$ (ii) $(u^\circ \cap w^\circ) \subseteq u + w$

כל u, w כל u°, w° כל u, w כל u°, w°

(iii) $(u^\circ + w^\circ)^\circ \subseteq u \cap w$

כל u, w כל u°, w° כל u, w כל u°, w°

$u \cap w = (u^\circ + w^\circ)^\circ$ כל u, w כל u°, w°

$(u \cap w)^\circ = u^\circ + w^\circ$ כל u, w כל u°, w°

$(u^\circ \cap w^\circ)^\circ = u^{\circ\circ} + w^{\circ\circ} = u + w$

$\Rightarrow (u^\circ \cap w^\circ) = (u^\circ \cap w^\circ)^{\circ\circ} = (u + w)^\circ$

כל u, w כל u°, w° כל u, w כל u°, w°

(ii) $(u^\circ \cap w^\circ)^\circ = u^{\circ\circ} + w^{\circ\circ} = u + w$

$\Rightarrow (u^\circ \cap w^\circ) = (u^\circ \cap w^\circ)^{\circ\circ} = (u + w)^\circ$

(ii) $(u^\circ \cap w^\circ)^\circ = u^{\circ\circ} + w^{\circ\circ} = u + w$

$\Rightarrow (u^\circ \cap w^\circ) = (u^\circ \cap w^\circ)^{\circ\circ} = (u + w)^\circ$

(ii) $(u^\circ \cap w^\circ)^\circ = u^{\circ\circ} + w^{\circ\circ} = u + w$

(5) יבא ארחק קטרי V עם בסיס $\mathcal{A}$ אמיל אופרטור T על V מתקיים $[T^*]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{A}}^*$ כאשר $\mathcal{A}$ אורתונורמלי ואיברו של V אורק.
 נותרה: נניח $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ ונניח T ט"ל על V . נניח

$$[T]_{\mathcal{A}} = (a_{ji}) \quad \text{על-יחס} \quad [T^*]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{A}}^* = (\bar{a}_{ij})$$

$$T^* v_i = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} v_j \quad \text{על-יחס} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{k=1}^n \langle v_j, v_k \rangle a_{ki} = \sum_{k=1}^n a_{ki} \langle v_k, v_j \rangle = \langle T v_i, v_j \rangle = \langle v_i, T^* v_j \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{jk} \langle v_i, v_k \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{jk} \langle v_k, v_i \rangle$$

אז $D = (d_{ij}) = (\langle v_i, v_j \rangle)$ ו- $D \in M_n(F)$ (אזכור)

$$[D [T]_{\mathcal{A}}]_{ji} = \sum_{k=1}^n d_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n \langle v_j, v_k \rangle a_{ki} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{jk} \langle v_k, v_i \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{jk} d_{ki} = [[T]_{\mathcal{A}} D]_{ji}$$

$$\Rightarrow D [T]_{\mathcal{A}} = [T]_{\mathcal{A}} D$$

לפי תנאי הטענה זה נכון ל- T .

במסגרת הקורס ראנו שלם A מקיימת $AB = BA$ לכל B .

אם A סקלרית $\Leftrightarrow$ קיים λ כך $D = \lambda I$.

$$\Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \lambda & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$



כלומר λ אורתונורמלי ושלילי אורק.

תרגיל 11 – אלגברה ליניארית 2

1. נתון בסיס $v_1 = (2, 1), v_2 = (1, 3)$ ל $V = \mathbb{R}^2$.

a. מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{v_1, v_2\}$ ב V^* . קרי מצאו φ_1, φ_2 כך ש

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

b. ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^2$ מצאו את הבסיס הדואלי ל $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ב V .

קרי מצאו שני וקטורים u_1, u_2 שמקיימים $\varphi_i(v) = (u_i, v) \quad \forall v \in V, \forall i$.

פתרון:

a. לפי הבסיס $\{v_1, v_2\}$ ב V ו $\{1\}$ ב $\mathbb{R}$ נקבל $[\varphi_1] = (1, 0), [\varphi_2] = (0, 1)$ מטריצת

המעבר מ $\{v_1, v_2\}$ לבסיס הסטנדרטי $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ולהיפך $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ולכן אם נתרגם

את ייצוג הפונקציונאלים לבסיס הסטנדרטי נקבל באופן מפורש

$$\varphi_1(x, y) = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y, \varphi_2(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y$$

$$b. \quad u_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right), u_2 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \quad (\text{ראה הסבר 2.b})$$

2. יהא המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נסמן

$$B = (v_1, v_2, v_3) = ((1, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 2, 3))$$

a. השתמשו בתהליך גרם-שמידט על B וקבלו בסיס אורתונורמלי (=בא"נ) ל $\mathbb{R}^3$.

b. מצאו את הבסיס הדואלי B^* ל B ב $\mathbb{R}^3$.

c. הוכיחו כי ל V ממכ"פ, B בא"נ אמ"מ $B^* = B$.

פתרון:

a. נבצע גרם שמידט על הווקטורים משמאל לימין ונקבל

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \right\}$$

$$b. \quad \text{נכתוב את וקטורי } B^* \text{ בעמודות מטריצה } A \text{ ואז } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

c. ישירות מההגדרה שהרי B^* מוגדר היטב ולכן אם $B^* = B$ מהגדרת B^* נקבל ש בא"נ.

ואם B בא"נ אז B מקיים את דרישות B^* ולכן מיחידות B^* נקבל $B = B^*$.

3. נתונה ט"ל $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ע"י $T(x, y) = (5x + 8y, -3x + 4y)$ ונתונה המכ"פ הסטנדרטית על

$$\mathbb{R}^2. \quad \text{יהא הבסיס } A = \{(1, 1), (0, 2)\} \text{ ל } \mathbb{R}^2.$$

a. חשבו את T^* . **פתרון:** $T^*(x, y) = (5x - 3y, 8x + 4y)$ (ע"י חישוב T^* בבסיס

הסטנדרטי שהוא בא"נ)

b. חשבו את $[T]_A^A$. פתרון: $[T]_A^A = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ (ע"י שנוי בסיס מהייצוג בסעיף קודם)

c. חשבו את $[T^*]_A^A$. פתרון: $[T^*]_A^A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ (ע"י שנוי בסיס מהייצוג מסעיף a)

d. חזרו על שני הסעיפים הקודמים עבור $A' = \{(1,1), (1,-1)\}$.

פתרון: $[T]_{A'}^{A'} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $[T^*]_{A'}^{A'} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

e. הסבירו מדוע $[T]_{A'}^{A'} = [T^*]_{A'}^{A'}$ אבל $[T]_A^A \neq [T^*]_A^A$.

פתרון: A אינו בסיס א"נ ואילו A' ווקטורים ניצבים שווי אורך-הייצוג לפי בסיס כזה הוא כמו ייצוג לפי בסיס א"נ והכפלת המטריצה המייצגת בסקלר שונה מאפס ואותו כנ"ל לצמודה(עם בדיוק אותו סקלר).

f. אם קיים בסיס A שעבורו $[T]_A^A$ אוניטרית האם בהכרח לכל בסיס A' מתקיים ש $[T]_{A'}^{A'}$ אוניטרית?

פתרון: לא, דוגמה הט"ל המיוצגת לפי הבסיס הסטנדרטי $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ולפי הבסיס

$$\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} \text{ נקבל } \{(1,1), (0,2)\}$$

4. יהא $V = \mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ עם המכ"פ $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

תהא T א"ל על V המוגדרת $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$. מצאו את T^* .

פתרון: דרך א' היא לפתור שלוש מערכות משוואות לינאריות שכל אחת היא שלוש משוואות עם

$$\langle T(1), 1 \rangle = \langle 1, T^*(1) \rangle$$

שלוש נעלמים. למשל $\langle T(x), 1 \rangle = \langle x, T^*(1) \rangle$ וכך לחלץ את $T^*(1)$. ובאותו אופן לחלץ

$$\langle T(x^2), 1 \rangle = \langle x^2, T^*(1) \rangle$$

את $T^*(x)$ ואת $T^*(x^2)$.

דרך ב', ניקח את הבסיס $(1, x, x^2)$ נבצע גרם-שמידט ונקבל

$$[T]_{\{\varepsilon_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ נחשב את } \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \varepsilon_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$$

$$[T^*]_{\{\varepsilon_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix} \text{ ונותר לחזור לבסיס המקורי ע"י מטריצת המעבר}$$

$$[Id]_{\{1,x,x^2\}}^{(\varepsilon_i)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{45}{8}} \end{pmatrix}$$

5. יהא מ"ו V עם בסיס A. הוכיחו שאם לכל א"ל T על V מתקיים $[T]_A^* = [T^*]_A$ אז A בסיס אורתוגונלי ואברי A שווי אורך.

פתרון: נסמן $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. תהא T הט"ל $[T]_A = E_{ij}$ כלומר כל אברי הבסיס α_k עוברים ל-0 פרט ל α_i שעובר ל α_j . מההנחה נקבל ש $[T^*]_A = E_{ji}$. אז לכל $i \neq j$

$$1. \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, T\alpha_i \rangle = \langle T^*\alpha_i, \alpha_i \rangle = \langle 0, \alpha_i \rangle = 0$$

$$\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = \langle T\alpha_i, T\alpha_i \rangle = \langle \alpha_i, T^*T\alpha_i \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$$

מש"ל. $[T^*T]_A = E_{ii}$ (כי $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = \langle T\alpha_i, T\alpha_i \rangle = \langle \alpha_i, T^*T\alpha_i \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$)
 6. הוכיחו כי:

$$a. \text{ אם } U, W \subseteq V \text{ ת"מ אז } (U \cap W)^0 = U^0 + W^0$$

פתרון: $[\subseteq]$ אם $f + g \in U^0 + W^0$ אז $f, g \in (U \cap W)^0$ ולכן גם סכומם.

$[\supseteq]$ שני האגפים שווי מימד לכן יש שוויון.

$$b. \text{ אם } U, W \subseteq V \text{ ת"מ אז } (U + W)^0 = U^0 \cap W^0$$

פתרון: מחלק א' ע"י לקיחת מאפסים לשני האגפים והצבת U^0, W^0 במקום U, W נסיים.

אלגברה ליניארית 2 - תרגיל 12

11.6.06

1. מצאו מטריצה אורתוגונלית P כך ש- P^tAP מטריצה אלכסונית עבור

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. תכונות של מטריצה צמודה.

יהי V ממ"פ מעל המרוכבים. תהי $T: V \rightarrow V$ - ט"ל. הוכיחו:

(א) אם $T^*T = 0$, אז $T = 0$.

(ב) אם T הפיכה, אז $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(ג) אם $m_T(x) = \sum_{i=0}^d m_i x^i$ פולינום מינימלי של T ($m_i \in C$), אז

$$m_{T^*}(x) = \sum_{i=0}^d \overline{m_i} x^i = \overline{m_T}(x)$$

(ד) אם $f_T(x) = \sum_{i=0}^d f_i x^i$ פולינום אופייני של T ($f_i \in C$), אז $f_{T^*}(x) = \overline{f_T}(x)$

3. א. תהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה ליניארית במרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי.

הוכיחו ש: T נורמלית $\Leftrightarrow$ קיים פולינום f (במקדמים מרוכבים) כך ש $T^* = f(T)$.

הדרכה:

הוכיחו את הלמה הבאה: יהיו: $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ $B = \{y_1, \dots, y_k\}$ שתי קבוצות של

איברים בשדה F , כך שאיברי A שונים זה מזה, אז קיים פולינום $f \in F[X]$ שמקיים לכל

$$f(x_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq k$$

(הדרכה להדרכה: ונדמונה או האינטרפולציה של לגרנ'ג)

ב. הוכיחו שאם $T: V \rightarrow V$ נורמלית ו- $TS = ST$ (עבור $S: V \rightarrow V$ כלשהי) אזי

$$T^*S = ST^*.$$
 כלומר, T^* מתחלף עם כל האופרטורים שמתחלפים עם T .

4. הגדרה: טרנספורמציה ליניארית T נקראת אידימפוטנטית אם $T^2 = T$.

יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל שדה F (המרוכבים או הממשיים), ותהי T ט"ל נורמלית על V .

הוכיחו כי:

א. אם T אידימפוטנטית אזי T צמודה לעצמה.

ב. אם T נילפוטנטית אזי $T = 0$.

ג. אם $T^2 = T^3$ אזי T אידימפוטנטית.

אלגברה לינארית 2- פתרון תרגיל 12
11.6.06

1. תמצאו מטריצה אורתוגונלית P כך ש- P^tAP מטריצה אלכסונית עבור

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון: הפולינום האופייני של A שווה ל- $(X-6)(X-3)^2$ ולכן צורתה האלכסונית של A היא

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

הוקטור העצמי המתאים לערך עצמי 6 שווה (לאחר נרמול) ל- $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שני הוקטורים העצמיים המתאימים לערך עצמי 3 הם

ולכן

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2. תכונות אלגבריות של מטריצה צמודה.

ממ"פ מעל המרוכבים. תהי $T: V \rightarrow V$ - ט"ל. הוכיחו:

(א) אם $T^*T = 0$ אז $T = 0$.

(ב) אם T הפיכה, אז $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(ג) אם $m_T(x) = \sum_{i=0}^d m_i x^i$ פולינום מינימלי של T ($m_i \in C$), אז

$$m_{T^*}(x) = \sum_{i=0}^d \overline{m_i} x^i = \overline{m_T}(x)$$

(ד) אם $f_T(x) = \sum_{i=0}^d f_i x^i$ פולינום אופייני של T ($f_i \in C$), אז $f_{T^*}(x) = \overline{f_T}(x)$

פתרון:

(א) לכל $v \in V$ מתקיים $(T^*Tv, v) = (T^*Tv, v) = 0$, לכן $Tv = 0$.

(ב) $TT^{-1} = I$, לכן $(TT^{-1})^* = I^* = I = (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(ג) אם $m_T(T) = \sum_{i=0}^d m_i T^i = 0$, אז $\overline{m_T}(T^*) = \sum_{i=0}^d \overline{m_i} (T^*)^i = \overline{\left(\sum_{i=0}^d m_i T^i\right)^*} = \overline{0^*} = 0$.

(1) $\overline{m_T}(x) = \overline{m_T(T)}(x) = \overline{m_T}(T^*)(x) = \overline{m_T}(T^*)(x)$, לפי אותם

שיקולים $\deg m_T(x) \leq \deg \overline{m_T}(x) = \deg m_T(T^*)(x) = \deg m_T(T^*)(x)$.

$m_{T^*}(x) = \overline{m_T}(x)$ נובע מ-(1) .

(ד) כל לבדוק שההעתקה $f(x) = \sum_{i=0}^n f_i x^i \rightarrow \overline{f}(x) = \sum_{i=0}^n \overline{f_i}(x)$ שומרת כפל וחיבור של פולינומים, כלומר,

אם $f(x), g(x) \in C[x]$, אז $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$, $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$. מזה נובע, שאם

$$\det \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{a_{n1}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ אז } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(C[x])$$

שאם $[T]_E = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ - המטריצה המתאימה ל"ל" T ביחס לבסיס אורתונורמלי מסוים E , אז

$$f_{T^*}(x) = \det([T^*]_E - xI) = \det \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} - x & \dots & \overline{t_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{t_{n1}} & \dots & \overline{t_{nn}} - x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} - x & \dots & \overline{t_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{t_{n1}} & \dots & \overline{t_{nn}} - x \end{pmatrix} = \overline{f_T}(x)$$

3. א. תהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה ליניארית במרחב מכפלה פנימית מרוכב ממימד סופי.

הוכיחו ש: T נורמלית $\Leftrightarrow$ קיים פולינום f (במקדמים מרוכבים) כך ש $T^* = f(T)$.

הדרכה:

הוכיחו את הלמה הבאה: יהיו: $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ שתי קבוצות של

איברים בשדה F , כך שאיברי A שונים זה מזה, אז קיים פולינום $f \in F[X]$ שמקיים לכל

$$f(x_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq k$$

(הדרכה להדרכה: ונדמונה או האינטרפולציה של לגרנ'ג)

ב. הוכיחו שאם $T: V \rightarrow V$ נורמלית ו- $TS = ST$ (עבור $S: V \rightarrow V$ כלשהי) אזי

$$T^*S = ST^* \text{ כלומר, } T^* \text{ מתחלף עם כל האופרטורים שמתחלפים עם } T.$$

פתרון:

הוכחת הלמה: נתבונן במערכת הבאה עם הנעלמים $a_1, \dots, a_k$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

מכיוון שה x -ים שונים זה מזה, מטריצת ונדרמונדה רגולרית ולכן קיים פתרון (יחיד) $(a_1, \dots, a_k)$ למערכת.

הפולינום $f(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ הוא כנידרש.

וכעת נחזור לשאלה:

נוכיח את הכיוון $\Leftarrow$ (הכיוון השני קל):

$$T = UDU^* \quad \text{ש } D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{נורמלית } \Leftarrow \text{קיימות } U \text{ אוניטרית}$$

$$T^* = UD^*U^* \Leftarrow [\text{כי זיכרו ש } (AB)^* = B^*A^*] \Leftarrow \text{לכל פולינום } f \text{ שעבורו}$$

$$f(T) = Uf(D)U^* = UD^*U^* = T^* \quad \text{מתקיים } f(D) = D^*$$

נחפש אם כן פולינום שעבורו $f(D) = D^*$.

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & \\ & f(\alpha_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & \\ & \overline{\alpha_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(D) = D^*$$

נניח שהקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ התקבלה מהקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ע"י השמטת חזרות.

קחו את $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ להיות ה x -ים בלמה ואת $\{\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_k}\}$ להיות ה y -ים בלמה וקבלו ערבות לקיום פולינום f כנידרש.

ב. ברור מ-א.

4. הגדרה: טרנספורמציה ליניארית T נקראת אידימפוטנטית אם $T^2 = T$.

יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל שדה F (המרוכבים או הממשיים), ותהי T ט"ל נורמלית על V . הוכיחו כי:

א. אם T אידימפוטנטית אזי T צמודה לעצמה.

ב. אם T נילפוטנטית אזי $T = 0$.

ג. אם $T^2 = T^3$ אזי T אידימפוטנטית.

פתרון: בכל הסעיפים נשתמש בעובדה הבאה: אם T מקיימת איזושהו פולינום p , כלומר $p(T)=0$, אזי גם הע"ע שלה מקיימים פולינום זה.

א. T אידימפוטנטית לכן הערכים העצמיים של T הם 0 או 1, מאידך T נורמלית לכן לכסינה אורתוגונלית למטריצה אלכסונית שאברי האלכסון הם 0 או 1 ולכן צמודה לעצמה.

ב. T נילפוטנטית לכן הערכים העצמיים של T הם 0 בלבד. מאידך T ט"ל נורמלית לכן לכסינה כאשר באלכסון יש יש רק אפסים כנדרש.

ג. $T^2 = T^3$ לכן הערכים העצמיים של T הם 0 או 1, אידך T נורמלית לכן לכסינה אורתוגונלית למטריצה אלכסונית שאברי האלכסון הם 0 או 1 ולכן $T^2 = T$.

תרגיל 13 - תבניות בילינאריות:

1. $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ תבנית בילינארית המוגדרת כך:

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = ax + 4bx + 2ay + 5by + 3az + 6bz.$$

א. מצאו את המטריצה A המייצגת את התבנית הנ"ל לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

ב. מצאו את המטריצה B המייצגת את התבנית הנ"ל לפי הבסיס $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ של $\mathbb{R}^2$ והבסיס

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ של } \mathbb{R}^3. \text{ מצאו מטריצות } Q, P \text{ כך ש } P^t A Q = B. \text{ (שימו לב: } Q \in M_{3 \times 3}, P \in M_{2 \times 2} \text{).}$$

ג. מצאו בסיסים של $\mathbb{R}^2$ ו $\mathbb{R}^3$ כך שלפיהם f מיוצגת ע"י מטריצת D_r (מטריצה אלכסונית עם $r-1$ באלכסון, ושאר האלכסון אפסים). בדקו תשובתכם ע"י חפיפה בעזרת מטריצות המעבר.

2. תהי $f: V \times W \rightarrow F$ תבנית בילינארית ונניח $W=V$. באמרנו כי f מיוצגת לפי בסיס כלשהו, כוונתנו שאנו בוחרים את הבסיס הנ"ל גם ב V וגם ב W . נאמר כי $f: V \times V \rightarrow F$ סימטרית אם $\forall u, v \in V \quad f(u, v) = f(v, u)$.

א. תהי $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית המיוצגת לפי הבסיס הסטנדרטי ע"י $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. מצאו בסיס לפיו f מיוצגת ע"י מטריצת $D_{p,m}$ (מטריצה אלכסונית עם $p-1$ באלכסון, $m-1$ באלכסון, ושאר האלכסון אפסים) וכמובן בדקו תשובתכם ע"י חפיפה בעזרת מטריצת המעבר.

ב. תהי $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית המיוצגת לפי הבסיס הסטנדרטי ע"י $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. מצאו בסיס לפיו g מיוצגת ע"י מטריצת $D_{p,m}$.

ג. תהי $g: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ תבנית בילינארית סימטרית המיוצגת לפי הבסיס הסטנדרטי ע"י $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. מצא בסיס לפיו g מיוצגת ע"י מטריצת D_r (מטריצה אלכסונית עם $r-1$ באלכסון, ושאר האלכסון אפסים) וכמובן בדקו תשובתכם ע"י חפיפה בעזרת מטריצת המעבר.

3. תהי A מטריצה ממשית סימטרית.

א. הוכיחו כי A חופפת ל A^3 .

ב. הוכיחו כי אם A הפיכה אזי A חופפת ל A^{-1} .

ג. תהיינה B, A מטריצות ממשיות סימטריות שפולינומיהן האופייניים הם $t^2 - 2$, $t^2 + 2t - 3$. האם הן בהכרח חופפות?

(רמז: מהי המטריצה המייצגת את התבנית המוגדרת ע"י A לפי בסיס המורכב מהו"ע של A ? לאיזו מטריצת סילבסטר היא חופפת? כנ"ל לגבי B)

פתרון תרגיל 13 - תבניות בילינאריות

1. א. המטריצה המייצגת תהייה מטריצה 2×3 כאשר במקום ה i, j יהיה המספר $f(e_i^2, e_j^3)$ לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \text{ (למשל } a_{23} = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 6 \text{)}$$

ב. באותו אופן לפי הבסיסים הנתונים נקבל $B = \begin{pmatrix} 21 & 12 & 30 \\ 12 & 7 & 18 \end{pmatrix}$

$$\text{(למשל } b_{12} = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 + 10 = 12 \text{)}$$

מטריצות החפיפה Q, P יהיו פשוט מטריצות המעבר מהבסיסים של B לבסיסים הסטנדרטיים (הבסיסים

$$\text{לפיהם } A \text{ מיוצגת) כלומר } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ואכן } P' A Q = B.$$

ג. נעבוד לפי האלגוריתם הנתון בהוכחת משפט 5, עמ' 316-317:

ראשית נמצא α_1, β_1 כך ש $f(\alpha_1, \beta_1) = 1$. ניקח למשל $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נסמן

$V_1 = sp\{\alpha_1\}, W_1 = sp\{\beta_1\}$. יהיו $V_2 \subseteq \mathbb{R}^2, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ המאפסים של β_1, α_1 בהתאמה כלומר $V_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v, \beta_1) = 0\}, W_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid f(\alpha_1, w) = 0\}$ במקרה שלנו קל לראות

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a + 4b = 0 \right\} = sp\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y + 3z = 0 \right\} = sp\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

אנו יודעים לפי המשפט (וגם אפשר לראות ישירות) כי $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2, \mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ על f $V_2 \times W_2$ נפעל באותו אופן על הצמצום הנ"ל: המטריצה המייצגת את הצמצום לגבי הבסיסים שבחרנו

ל V_2, W_2 היא: $C = \begin{pmatrix} -6 & -3 \end{pmatrix}$. נבחר $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ אז $f(\alpha_2, \beta_2) = 1$. נסמן

$V_3 \subseteq V_2, W_3 \subseteq W_2$ להיות המאפסים של β_2, α_2 בתוך V_2, W_2 . ברור $V_3 \subset V_2$ כי $\alpha_2 \notin V_3$ ולכן $V_3 = \{0\}$. מחישוב (אפשר בקלות למצוא בעזרת המטריצה C) יוצא

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ נסמן } W_3 = sp\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = sp\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ניקח את הבסיסים: α_1, α_2 ל $\mathbb{R}^2$ ו $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ל $\mathbb{R}^3$. לפי הבסיס הנ"ל אם כן המטריצה המייצגת את f נראית כך: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. כלומר f דומה למטריצת D_2 . בדקו שאכן:

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ (שימו לב)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & \frac{1}{6} & 3 \end{pmatrix} = D_2$$

2. עתה נשתמש באלגוריתם הנתון בהוכחת משפט 10 המוצג בעמ' 319 ומשפט 14 עמ' 322-323:

נמצא $\alpha_1 \in \mathbb{R}^2$ עבורו $f(\alpha_1, \alpha_1) \neq 0$. ניקח למשל $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אז אנו יודעים מ- A כי $f(\alpha_1, \alpha_1) = 4$.

נסמן $V_1 = \text{sp}\{\alpha_1\}$ ו $V_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(\alpha_1, v) = 0\}$ המאפס של α_1 . במקרה שלנו

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ נסמן $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x + 4y = 0 \right\} = \text{sp}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ נשים

לב כי $f(\alpha_1, \alpha_1) = 4, f(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_2, \alpha_1) = 0, f(\alpha_2, \alpha_2) = 0$ ולכן לפי בסיס זה המטריצה המייצגת

היא $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ניקח בסיס $v_1 = \frac{\alpha_1}{2}, v_2 = \alpha_2$ וברור כי לפי בסיס זה המטריצה המייצגת היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ בדיקה:}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המייצגת תהיה } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ב. לפי הבסיס}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ המטריצה המייצגת תהיה } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix} \text{ ג. לפי הבסיס}$$

3.

א. **פתרון שגוי:** נקח את A עצמה בתור מטריצת החפיפה ונשתמש בעובדה כי A סימטרית ונקבל: $A^t A A = A A A = A^3$. **למה?** כי A לא דווקא הפיכה.

פתרון נכון: ממשפט ההתמדה של סילוסטר מספיק לראות שלשתיהן אותה דרגה ואותה סיגנטורה (או אותו מספר של ע"ע חיוביים ושליליים). ובאמת A לכסינה ולכן הע"ע של A^3 הם העלאה בשלישית של הע"ע של A ולכן סימנם לא משתנה ולכן המטריצות חופפות לאותה צורה קנונית ממשפט ההתמדה של סילוסטר.

ב. נקח את A^{-1} כמטריצת החפיפה ונזכור שגם היא סימטרית (כי A סימטרית) ונקבל $(A^{-1})^t A A^{-1} = A^{-1} A A^{-1} = A^{-1}$.

ג. כן אלו מטריצות חופפות, נתבונן במטריצה A : יהי u ו"ע של הע"ע 1 ו v ו"ע של הע"ע -3. נשים לב כי

$$\text{אם } f \text{ מוגדרת ע"י } f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (a \ b) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ אזי:}$$

$$f(u, u) = u^t(Au) = u^t u = \|u\|^2 > 0, f(v, v) = v^t(-3)v = -3\|v\|^2 < 0$$

בנוסף $f(u, v) = u^t(Av) = -3u^t v = -3(u, v) = 0$ משום ש"ע המתאימים לע"ע שונים של מטריצה נורמלית הם אורתוגונליים ובשוויון האחרון זו בסיס"כ מכפלה פנימית סטנדרטית ו A סימטרית לכן ודאי נורמלית. לכן לפי בסיס זה המטריצה המייצגת נראית $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ כאשר $p > 0, q < 0$ וברור כי מטריצה זו

חופפת (ע"י נירמול) למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. באופן דומה ניתן להראות B חופפת לאותה מטריצה ולכן A ו B חופפות.