<u>בחינה באלגברה ליניארית (2) (80135)</u>

מועד א' תשס"ו

שם המורים: מר שמואל ברגר   **משך הבחינה: 3 שעות**

פרופ' אהוד פרידגוט

המבחן בנוי משלושה חלקים.

בחלק I עליכם לענות על שתיים משלוש השאלות, שווי כל שאלה 25 נקודות.

בחלק II עליכם לענות על שתי השאלות, שווי כל שאלה 10 נקודות.

בחלק III עליכם לענות על כל שבע השאלות, שווי כל שאלה 5 נקודות.

אין להעזר בחומר עזר כתוב או במחשבונים.

<u>חלק I</u> ענו על <u>שתיים</u> משלוש השאלות הבאות.

צטטו במדוייק את הטענות עליהן אתם מסתמכים.

1. א. יהי $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V, ויהיו נתונים n וקטורים

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_j .$$

אם Δ היא פונקצית נפח על V אזי הוכיחו כי $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=t\Delta(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$

כאשר t תלויה רק ב n^2 הסקלרים a_{ij} $1\le i,j,\le n$, אבל לא ב Δ.

ב. <u>הוכיחו</u>: אם Δ פונקצית נפח המתאפסת על בסיס כלשהו אז Δ היא זהותית אפס.

ג. הראו שאם Δ פונקצית נפח שאינה זהותית אפס ו $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ב V

אז $0\neq\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ אם ורק אם $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ בלתי תלויים ליניארית.

2. <u>הוכיחו</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית נורמלית. אזי קיים ל V בסיס אורתונורמלי המורכב מוקטורים עצמיים של T.

3. <u>הוכיחו</u>: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ותהי T טרנספורמציה ליניארית מ V ל V. אזי T לכסינה אם ורק אם הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניארים מעל F, ולכל ערך עצמי של T הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי.

חלק II ענו על שתי השאלות הבאות.

✓ 4. תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

מצאו $P \in M_2(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.

הסבירו את תהליך הפתרון.

✓ 5. ב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מצאו את הוקטור הקרוב ביותר ל $(1,1,1)$

ב- U, כאשר

$U = \mathrm{Span}\left((1,1,0),(1,-1,0)\right)$.

הסבירו את פתרונכם.

חלק III ענו על כל שבע השאלות.

תהי $B \in M_3(\mathbb{R})$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

✓ 6. האם B לכסינה? נמקו בקצרה.

✓ 7. מהו הפולינום המינימלי של B^{100}? נמקו בקצרה.

✓ 8. תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 0 & 17 & 15 \\ 2 & i & i & i \end{pmatrix}$

ו $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ הערכים העצמיים של A (כולל רבוי). (לאו דווקא שונים)

מצאו את $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$ ואת $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4$.

רמז: חישבו לפני שתחשבו, ניתן לפתור את השאלה בעל פה.

9. האם המטריצה
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
דומה למטריצה אלכסונית ב $M_5(\mathbb{R})$? נמקו! רמז: עיינו היטב במטריצה.

10. יהי $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ בסיס למרחב וקטורי V מעל שדה F, ותהי $f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית.

הוכיחו או הפריכו:

אם $f(\alpha_j,\alpha_i)=f(\alpha_i,\alpha_j)$ לכל i,j

אזי $f(\beta,\alpha)=f(\alpha,\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in V$.

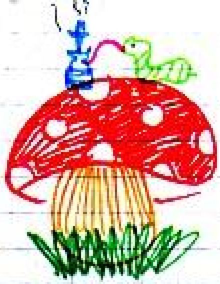
11. יהי V מרחב מכפלה פנימית $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית <u>צמודה לעצמה</u>.

האם $\langle T\alpha,\alpha\rangle=0$ לכל α גורר $T=0$? הוכיחו את תשובתכם.

12. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ טרנספורמציה ליניארית אורתוגונלית.

A היא מטריצה <u>אלכסונית</u> המייצגת את T ביחס לבסיס מסוים. מהן המטריצות A האפשריות? נמקו!

בהצלחה!!



בהצלחה!

☺ מבחן בלינארית ☺

חלק II

4) תהי $A\in M_2(\mathbb{R})$ $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

נמצא P ב $M_2(\mathbb{R})$ כך ש $P^{-1}AP$ אלכסונית.

ראשית נציין שמאחר ש- A סימטרית נובע שניתן ללכסן אותה ע"י מטריצה אורתוגונלית.

נמצא את הע"ע של A.

$$p_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-2&-1\\-1&x-2\end{pmatrix}=$$
$$=(x-2)^2-(-1)^2=x^2-4x+4-1=$$
$$=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$\Leftarrow$ הערכים העצמיים הם $\lambda_1=1$ ו- $\lambda_2=3$.

נמצא את המרחבים העצמיים המתאימים:

$$V_1=\ker(A-I)=\ker\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$
$$V_3=\ker(A-3I)=\ker\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נרצה שהבסיסים יהיו אורתונורמליים לכן ננרמל:

$$V_1=Sp\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\},\quad V_3=Sp\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$

בתהליך הוכחת המשפט שמטריצה נורמלית היא לכסינה ע"י מטריצה אורתוגונלית מראים

שהמטריצה המלכסנת היא $P = \begin{pmatrix} | & | \\ \alpha_1 & \alpha_3 \\ | & | \end{pmatrix}$

כאשר α_1 בסיס אורתונורמלי של λ_1

α_3 בסיס אורתונורמלי של λ_3.

ואכן: נגדיר $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ברור שזו מטריצה אורתוגונלית כי העמודות שלה הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$.

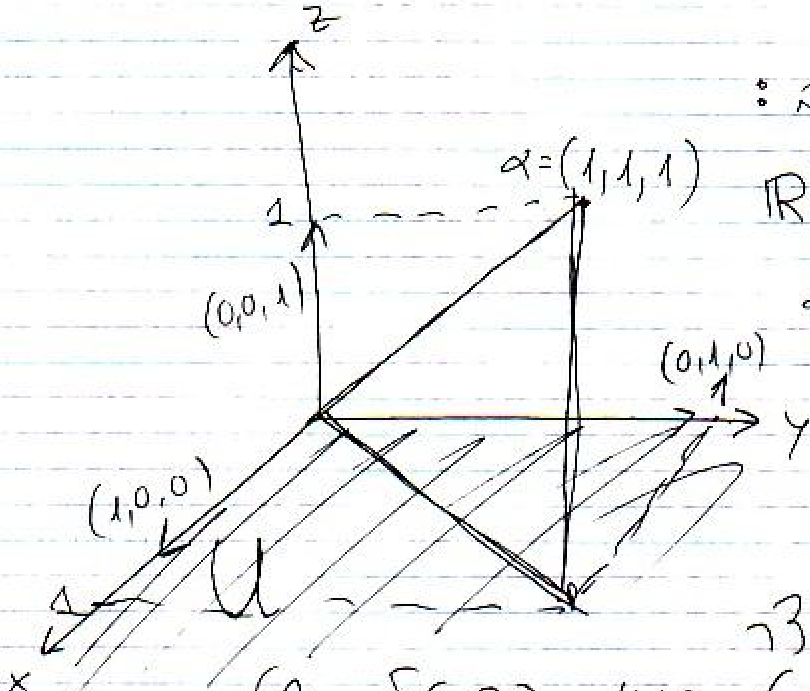
ומתקיים $P^tP = I$ כלומר $P^{-1} = P^t$!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



(5) נצייר את המצב:

U הוא בעצם $\mathbb{R}^2$

שהרי $\{(1,1,0),(1,-1,0)\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^2$.

זה לא מדויק U הוא מישור xy.

הוכחנו בתרגול שהווקטור הכי קרוב (זה שאני מחפש) הוא ההיטל של α על U. ההיטל הזה הוא כמובן הווקטור $(1,1,0)$:

$\varepsilon_1=(1,0,0)$, $(0,1,0)=\varepsilon_2$,

מאיפה?

בסיס אורתונורמלי של U. ההיטל של α על U הוא $\langle\alpha,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1+\langle\alpha,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2=$

$$=\langle(1,1,1),(1,0,0)\rangle(1,0,0)+\langle(1,1,1),(0,1,0)\rangle(0,1,0)=$$

$$=1(1,0,0)+1(0,1,0)=(1,1,0)=\beta$$

זה הווקטור שמקיים $\overset{(0,0,1)}{\alpha-\beta}\perp U$ כלומר

$(0,0,1)=\alpha-\beta\perp(1,0,0)$

וגם $(0,0,1)=\alpha-\beta\perp(0,1,0)$.

10

חלק III

(6) תהי $B\in M_3(\mathbb{R})$ $B=\begin{pmatrix}1&5&7\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$

ברור שהפולינום האופייני של B הוא

$$\det(xI-B)=\det\begin{pmatrix}x-1&-5&-7\\0&x-2&-6\\0&0&x-3\end{pmatrix}=$$

5

$$=(x-1)(x-2)(x-3)$$

כי זו מטריצה משולשית

⇐ ל-B יש 3 ע"ע ~~שונים~~ **שונים**

⇐ B לכסינה.

(7) ~~הפולינום המינימלי של B הוא~~ $m(x)=\cancel{(x-1)(x-2)(x-3)}$

~~משום שחייבים להופיע בו כל הערכים העצמיים.~~

B דומה ל $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$ ⇐ קיימת P הפיכה כך ש- $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}=P^{-1}BP$.

ניתן להראות באינדוקציה (והראנו בתרגול) שלכל n

$$\begin{pmatrix}1^n&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}^n=\underbrace{(P^{-1}BP)\cdots(P^{-1}BP)}_{n\ \text{פעמים}}=$$

5

$$=P^{-1}B^{n}P$$

כלומר B^{100} דומה ל $\begin{pmatrix}100&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&3^{100}\end{pmatrix}$ ⇐ הפולינום המינימלי שלה הוא $(x-100)(x-2^{100})(x-3^{100})$

(8) תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 0 & 17 & 15 \\ 2 & i & i & i \end{pmatrix}$$

ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ הערכים העצמיים שלה (כולל ריבוי).

ראשית, נשים לב שב-A שתי שורות שוות $\Rightarrow$ היא אינה הפיכה $\Leftarrow$ 0 הוא ע"ע שלה $\Leftarrow$ $\prod_{i=1}^{4} \lambda_i = 0$.

משפט שלמדנו בתרגול אומר שאם הפולינום האופייני מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים (מה שקורה במקרה שלנו) אז המטריצה דומה למטריצה משולשית

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

כמו כן ידוע שהעקבה נשמרת תחת דמיון.

$$\Leftarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 + 2 + 17 + i =$$
$$= 20 + i$$

(10) $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בסיס למ"ו V מעל F.

$f:V\times V\to F$ תבנית בילינארית.

אם $f(\alpha_j,\alpha_i)=f(\alpha_i,\alpha_j)$ לכל i,j אז $f(\beta,\alpha)=f(\alpha,\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in V$.

(*) ראה עוד אחרי שאלה 9 (עוד 3 עמודים)

~~הוכחה~~ הוכחה:

ההגדרה של מטריצה של תב"ל בהינתן בסיס היא $B=(b_{ij})$ כאשר $b_{ij}=f(\alpha_i,\alpha_j)$.

משפט שלמדנו בכיתה: תהי $f:V\times V\to F$ תב"ל. אזי f סימטרית אמ"מ המטריצה שלה ~~בכל~~ בכל בסיס היא סימטרית. 8

הוכחנו גם שאם המטריצה סימטרית באיזשהו בסיס, אז היא סימטרית בכל בסיס.

נתון ש- $f(\alpha_j,\alpha_i)=f(\alpha_i,\alpha_j)$ $\Rightarrow$ $b_{ij}=b_{ji}$ כלומר המטריצה סימטרית ולכן התבנית סימטרית, כלומר $f(\beta,\alpha)=f(\alpha,\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in V$ (11)

(11) V מרחב מכפלה פנימית ו- $T:V\to V$ ט"ל צמודה לעצמה. נתון ש- $\langle T\alpha,\alpha\rangle=0$ לכל α. אזי $T=0$.

הוכחה: מהנתון נובע שלכל α,β

$$0=\langle \overbrace{T(\alpha+\beta)}^{T\alpha+T\beta},\ \alpha+\beta\rangle =$$

$$=\cancel{\langle T\alpha,\alpha\rangle}+\langle T\alpha,\beta\rangle+\langle T\beta,\alpha\rangle+\cancel{\langle T\beta,\beta\rangle}=$$

$$\underset{T=T^*\ \text{כי}}{=}\langle T\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,T\alpha\rangle$$

כעת, נחלק את ההוכחה למקרים:

- $F = \mathbb{R}$. אז בגלל הסימטריות

$$0 = \langle T\alpha, \beta\rangle + \langle T\alpha, \beta\rangle =$$
$$= 2\langle T\alpha, \beta\rangle$$

$\Leftarrow$ $\langle T\alpha, \beta\rangle = 0$ לכל $\alpha, \beta \in V$.

הוכחנו בכיתה למה שאם זה נכון, אז

$T = 0$ $\Leftarrow$ $T = 0$.

- $F = \mathbb{C}$. אז מהנתון לכל $\alpha, \beta \in V$

$$0 = \langle \overbrace{T(i\alpha+\beta)}^{iT\alpha + T\beta}, i\alpha + \beta\rangle =$$
$$= \cancel{\langle iT\alpha, i\alpha\rangle} + \langle iT\alpha, \beta\rangle + \langle T\beta, i\alpha\rangle + \cancel{\langle T\beta, \beta\rangle} =$$
$$= i\langle T\alpha, \beta\rangle - i\langle T\beta, \alpha\rangle =$$
$$= i\left(\langle T\alpha, \beta\rangle - \langle T\beta, \alpha\rangle\right)$$

$\Leftarrow$ $\langle T\alpha, \beta\rangle - \langle T\beta, \alpha\rangle = 0$

ומקודם $\langle T\alpha, \beta\rangle + \langle T\beta, \alpha\rangle = 0$

$\Leftarrow$ $2\langle T\alpha, \beta\rangle = 0$

$\Leftarrow$ כמו במקרה של $F = \mathbb{R}$ נקבל $T = 0$.

(12) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ט"ל אורתוגונלית.

A היא מטריצה אלכסונית המייצגת את

T ביחס לבסיס מסוים. מהן המטריצות

A האפשריות?

T אורתוגונלית ובפרט היא נורמלית. לכן

היא לכסינה ע"י בסיס אורתונורמלי ולכן

A מייצגת את T ביחס לבסיס אורתונורמלי -1

ולכן A ~~אורתוגונלית~~ אורתוגונלית.

הייצוג לפי בסיס משתנה!

נניח $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b\end{pmatrix}$. אז $A^t=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$

וצריך ש $|a|=1$ ו- $|b|=1$.

לכן המטריצות הן:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

חוץ מזה יש משפט שאומר שאם T נורמלית (והיא אכן נורמלית מהגדרה זה) אז היא אורתוגונלית אמ"מ $|a|=1$ לכל הע"ע שלה והעובדה מה שרתמתי למעלה כי ההוכחה לכך.

(9) הגם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דומה למטריצה אלכסונית ב- $M_5(\mathbb{R})$?

נשים ♡ שהמטריצה סימטרית. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ לפי משפט שלמדנו מכיתה

מטריצה סימטרית מעל $\mathbb{R}$ היא לכסינה (אפילו ע"י מטריצה אורתונורמלית)

$\Leftarrow$ היא דומה למטריצה אלכסונית.

המשך - 10: נניח ש- $\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$

$\beta=\sum_{j=1}^{n}b_j\alpha_j$

$$f(\alpha,\beta)=f\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i,\ \sum_{j=1}^{n}b_j\alpha_j\right)=$$

בלינאריות והומוגניות בשני משתנים של f

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j f(\alpha_i,\alpha_j) \underset{\text{נתון}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j f(\alpha_j,\alpha_i)=$$

$$=f\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\alpha_j,\ \sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\right)=f(\beta,\alpha)$$

בלינאריות והומוגניות

מש"ל ☺

חלק I

(3) יהי V מ"ו ממימד סופי n מעל שדה F ותהי T ט"ל $T: V \to V$. אזי T לכסינה אמ"מ הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל F ולכל ע"ע a של T $\mathrm{Geo}\, a = \mathrm{Alg}\, a$.

<u>הוכחה:</u> T לכסינה אמ"מ המטריצה לפי בסיס כלשהו, A, לכסינה. אז נעשה את ההוכחה על A. בכל אופן, זה לא ממש משנה.

($\Leftarrow$) נניח A לכסינה. אזי היא דומה למטריצה

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

כי לפי תכונות פולינומים $\deg \prod f_i(x) = \sum_{i=1} \deg f_i(x)$ וידוע שדרגת הפולינום האופייני היא n

כמו כן, ידוע שהפולינום האופייני נשמר תחת דמיון $\Leftarrow$ $p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$

כלומר הוא מתפרק לגמרי לגורמים לינאריים.

נניח ש $a_1, \dots, a_k$ הם הע"ע השונים..!

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^{n_i}$$

כאשר $n_i = \mathrm{Alg}\, a_i$. וברור ש- $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Alg}\, a_i = n$

הוכחנו משפט שאומר שאם A לכסינה אזי $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Geo}\, a_i = n$ $(*)$. כמו כן הוכחנו שלכל a_i

$$\mathrm{Geo}\, a_i \leq \mathrm{Alg}\, a_i .$$

נניח שקיים i כך ש $\mathrm{Geo}\, a_i \lneq \mathrm{Alg}\, a_i$

אז נקבל $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Geo}\, a_i \lneq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Alg}\, a_i = n$ - בסתירה ל-$(*)$. $\Leftarrow$ לכל i: $\mathrm{Geo}\, a_i = \mathrm{Alg}\, a_i$.

(⇐) נניח שהפולינום האופייני מתפרק לגמרי

$p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{n_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i = n$

כאשר $\{a_i\}$ הע"ע השונים של A ו- $n_i = Alg_{a_i}$.

וכן נניח ש-לכל i $Alg_{a_i} = Geo_{a_i}$.

אז נקבל ש- $\sum_{i=1}^{k} Geo_{a_i} = \sum_{i=1}^{k} Alg_{a_i} = n$

כלומר סכום הריבויים הגאומטריים שווה למימד המרחב. וזה גורר ש- A לכסינה.

למה A לכסינה אמ"מ $\sum_{i=1}^{n} Geo_{a_i} = n$?

הוכחנו ש- A לכסינה אמ"מ קיים ל- F^n בסיס של ו"ע.

כמו כן הוכחנו ש $\sum_{i=1}^{k} V_{a_i} = \bigoplus V_{a_i}$ ושאם $U = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$ ו- A_i בסיס ל- U_i אז $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ בסיס של U. וכן $\dim U = \sum_{i=1}^{k} \dim U_i$

(⇒) ~~אם A לכסינה קיים~~ אם $\sum_k Geo_{a_i} = n$ אז ברור ש $\bigoplus_{i=1}^{k} V_{a_i} = \sum_{i=1}^{k} V_{a_i} \subseteq V$ אבל משוויון המימדים $\bigoplus_{i=1}^{k} V_{a_i} = V$ ולכן אם ניקח בסיס לכל אחד מה- V_{a_i}, נקבל בסיס ל- V וקיבלנו בסיס של ו"ע ⇐ היא לכסינה.

(⇐) אם היא לכסינה, אז יש בסיס של ו"ע $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. נניח ש $\alpha_1,\dots,\alpha_{l_1} \in V_{a_1}$ וכן הלאה. ברור שהם בת"ל (כי הם איברי בסיס). נראה שהם פורשים את V_{a_1}. יהי $\alpha \in V_{a_1}$.

אז $\alpha = \sum_{i=1}^{l_1} a_i\alpha_i + \sum_{i=l_1+1}^{n} a_i\alpha_i$. ⇐ $V_{a_1} \ni \alpha - \sum_{i=1}^{l_1} a_i\alpha_i = \sum_{i=l_1+1}^{n} a_i\alpha_i \in \sum_{i=2}^{k} V_{a_i}$

אבל $V_{a_1} \cap \sum_{i=2}^{k} V_{a_i} = \{0\}$ ⇐ $\alpha = \sum_{i=1}^{l_1} a_i\alpha_i$. לכן הם פורשים. ולכן בסיס ל- V_{a_1}. באותו אופן מראים שהו"ע השייכים למרחב עצמי כלשהו הם בסיס לו ולכן $\sum Geo_{a_i} = n$.

(1) (א) יהי $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V ויהיו נתונים n וקטורים $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j$.

אם Δ היא פונק' נפח על V אזי

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = t\,\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$$

כאשר t תלויה רק ב-n^2 סקלרים a_{ij} ולא ב-Δ.

הוכחה: ~~נגדיר מטריצה $A=(a_{ij})$ ונטען ש- $t=|A|$. אז כמובן t תלוי אך ורק ב- $\{a_{ij}\}$ ולא ב- Δ.~~

ראשית נרשום כמה תכונות של פונקציות נפח:

לפי הגדרה

$$\Delta(\alpha_1,\dots,c\alpha_k,\dots,\alpha_n) = c\,\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n) = 0$$

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k+\alpha_k',\dots,\alpha_n) = \Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n) + \Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_k',\dots,\alpha_n)$$

והוכחנו בכיתה ש-

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_i^j,\dots,\alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_i^j,\dots,\alpha_n)$$

וזה כמובן נכון לכל $1 \le i \le n$.

וכן $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n) = -\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)$

נשתמש משוויון זה בשביל לפתח את הביטוי

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \Delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\varepsilon_{j_1},\dots,\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}\varepsilon_{j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\Delta\left(\varepsilon_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2}\varepsilon_{j_2},\dots,\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}\varepsilon_{j_n}\right) =$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n}\dots\sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1}\dots a_{nj_n}\Delta(\varepsilon_{j_1},\dots,\varepsilon_{j_n})$$

ישנן פה n^2 איברים מהצורה $\Delta(\varepsilon_{j_1},\dots,\varepsilon_{j_n})$.

נראה שכולן תלות ב- Δ כי אלו כפולה של $\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$.

לפי התכונות של פונקציה שציינתי בעמוד הקודם זה בעצם ברור, שהרי ~~...~~ בכל אחד מהסכומים

$$\{\varepsilon_{j_1},\dots,\varepsilon_{j_n}\} = \{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$$

יכול להיות שהם מופיעים בסדר אחר ואז ההבדל בין $\Delta(\varepsilon_{j_1},\dots,\varepsilon_{j_n})$ ל- $\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ הוא רק בסימן (אם בכלל) ואם הם חוזרים על עצמם אז $\Delta(\varepsilon_{j_1},\dots,\varepsilon_{j_n}) = 0$.

בכל אופן, מה שמתאפס מתאפס ואת השאר אפשר להציג כ- $\pm\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$

ובסה"כ קיבלנו

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\sum_{j_1=1}^{n}\dots\sum_{j_n=1}^{n}a_{1j_1}\dots a_{nj_n}\,d\,\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=$$

$$d=\pm 1,0$$

בזמן המגוי ב Δ

תלוי הסימון של t בערכי ה a_{ij}-ים

$$=\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\cdot t$$

הוא שלך אבל צריך להוכיח זאת.

V -5

$$t=\sum_{j_1=1}^{n}\dots\sum_{j_n=1}^{n}a_{ij_1}\dots a_{ij_n}\,d$$

(ב) הוכיחו: אם Δ פונק' נפח המתאפסת על בסיס כלשהו אזי Δ היא זהותית אפס.

הוכחה: Δ היא זהותית אפס אם לכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in V$ $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$.

יהי $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ בסיס כך ש- $\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=0$.
לפי סעיף א' לכל $V\ni\alpha_1,\dots,\alpha_n$
מתקיים $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=t\,\Delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$.
ו- t אינו תלוי ב- Δ. לכן
$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=t\cdot 0=0$$
$\Leftarrow$ Δ היא זהותית אפס.

V

(3) אם Δ פונ' נפח שאינה זהותית אפס ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in V$ אז $0\neq\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
אמ"מ $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ בת"ל.

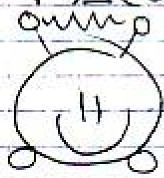
<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) נניח $0\neq\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ובכל זאת $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ תלויים לינארית. אזי בה"כ*
$\alpha_n=\sum_{i=1}^{n-1} a_i\alpha_i$ ואז

$$\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\Delta\left(\alpha_1,\dots,\sum_{i=1}^{n-1}a_i\alpha_i\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\,\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_i)=0$$

כי בכל i יוצא שיש בסדרת הוקטורים שניים זהים.
בסתירה להנחה. $\Leftarrow$ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ בת"ל.

($\Rightarrow$) נניח שהוקטורים הם בת"ל. אזי הם בסיס של V. אם היה $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$
אזי לפי הסעיף הקודם $\Delta\equiv0$.
בניגוד להנחה. $\Leftarrow$ $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq0$.


מש"ל

* אחרת נחליף את הסדר שלהם ורק הסימן של $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ישתנה ובכל אופן "ישמר" $\Delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq0$