

מתמטיקה דיסקרטית – גליון תרגילים מספר 1

1. הוכיחו באינדוקציה את נוסחת הטור הגיאומטרי: $\sum_{i=0}^n a^i \equiv a^0 + a^1 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.
לכל מספר ממשי $a \neq 0, 1$.
2. הוכיחו באינדוקציה: לכל n טבעי אי-זוגי, ולכל a, b טבעיים, הביטוי $a^n + b^n$ מתחלק ב- $a+b$ ללא שארית.
3. א. הוכיחו בעזרת אינדוקציה שלמה, שכל מספר טבעי $n > 1$ ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים.
ב. מספרי פרמה (Fermat numbers) הם מהצורה $F_n = 2^{2^n} + 1$, עבור $n=0, 1, 2, \dots$.
הוכיחו באינדוקציה: $\prod_{k=0}^{n-1} F_k \equiv F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_{n-1} = F_n - 2$.
- ג. העזרו בסעיף ב' כדי להראות שעבור $m \neq n$, F_m ול F_n אין מחלק משותף. הסיקו כי קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.
4. במלבן מעבירים מספר סופי של קווים ישרים, ובכך מחלקים אותו לאזורים. (כל אחד מהקווים חוצה את כל המלבן, ואינו נעצר באמצע). הוכח באינדוקציה שאפשר לצבוע כל אזור באחד משני צבעים, כך ששני אזורים שנוגעים לאורך קטע (לא נקודה) יהיו בצבעים שונים.
5. הוכח שלכל n מתקיים:
א. $11 \mid 10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1$ (לכל n טבעי אי-זוגי)
ב. $7 \mid 5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}$
ג. $9 \mid 4^{4n} - 3n - 1$

פתרון תרגיל 1 במתמטיקה דיסקרטית, 2005

1. ההוכחה מתבצעת באינדוקציה על n . עבור $n = 0$ נקבל:

$$1 = a^0 = \frac{a^1 - 1}{a - 1} = 1$$

בשלב האינדוקציה, נניח שהטענה נכונה עבור n ספציפי ונוכיח אותה עבור $n+1$.
ובכן:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} a^i &= \sum_{i=0}^n a^i + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1}}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

כמבוקש.

2. עבור $n = 1$, הטענה ברורה. נניח שהטענה נכונה עבור n ספציפי ונוכיח אותה עבור $n+2$. אם $a = b$ אז הטענה פשוטה. לכן אפשר להניח שהם שונים, נגיד (ללא הגבלת הכלליות) $b > a$. כעת:

$$\begin{aligned} a^{n+2} + b^{n+2} &= (a^n + b^n)a^2 + b^{n+2} - a^2b^n \\ &= (a^n + b^n)a^2 + b^n(b^2 - a^2) \\ &= (a^n + b^n)a^2 + b^n(b - a)(a + b) \end{aligned}$$

כעת הביטוי הראשון מתחלק ב- $a + b$ מהנחת האינדוקציה, והביטוי השני בודאי מתחלק ב- $a + b$ (והוא גם חיובי). לכן הסכום מתחלק ב- $a + b$.

3. ההוכחה באינדוקציה. נניח שלכל $m < n$, מתקיים שניתן לרשום את m כמכפלה של ראשוניים. כעת נוכיח את הטענה עבור n עצמו. אם n ראשוני אז הוא מהווה לעצמו פירוק. אחרת, מתקיים $n = m_1 m_2$ עבור $m_1, m_2 < n$. מהנחת האינדוקציה, ניתן לרשום את m_1 ואת m_2 בתור מכפלה של ראשוניים. שרשור הפירוקים של m_1 ו- m_2 מניב פירוק של n .

(ג) עבור $n = 1$ נבדוק:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3 = 2^{2^1} + 1 - 2 = F_1 - 2$$

כעת נניח את נכונות הטענה עבור n , ונוכיח אותה עבור $n+1$. ובכן:

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{n+1-1} F_i &= F_n \prod_{i=0}^{n-1} F_i \\ &= (F_n - 2)F_n = F_n^2 - 2F_n \\ &= (2^{2^n} + 1)^2 - 2 \cdot (2^{2^n} + 1) \\ &= 2^{2^n \cdot 2} + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 - 2 \cdot 2^{2^n} - 2 \\ &= 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2\end{aligned}$$

(ד) אם יש גורם אשר מחלק את F_i ואת F_j (נניח בה"כ ש" $i < j$) אזי הוא מחלק גם את $F_j - \prod_{k=0}^{j-1} F_k = 2$. אבל כל ה" F_i הם איזוגיים ולכן אין גורם כזה. מכאן שלכל F_i יש לפחות גורם ראשוני אחד (ייתכן שהוא עצמו) שאינו מופיע אצל אף F_j אחר. יש אינסוף F_i ים ולכן יש אינסוף ראשוניים.

4. עבור מלבן עם איזור אחד (ז"א 0 קוים הועברו במלבן) הטענה ברורה. נבצע אינדוקציה על מספר הקוים במלבן. לשם כך נבחר קו אחד כלשהו, נבטל אותו, ונצבע את האזורים כפי שהם בלעדיו (על סמך הנחת האינדוקציה). האזורים במלבן שלנו נופלים לאחד משלושה סוגים: אלה ש"מעל" הקו, אלה שמתחתיו, ואלה שנחצים ע"י הקו. את כל האזורים אשר מעל הקו נשאר כפי שהיו; נהפוך את הצבע של האזורים מתחת לקו—משחור ללבן ולהפך—ואת האזורים אשר נחצים ע"י הקו נצבע באופן המתבקש, בצבע המקורי בחצי שמעל הקו ובצבע ההפוך בחצי שמתחת. סתירה יכולה לקרות רק באזורים שנחצים ע"י הקו, כי כל שאר המלבן הוא תקין מהנחת האינדוקציה, ומהבנייה ברור שאכן אין שם סתירה (ז"א זוג אזורים סמוכים מאותו צבע).

5. כל ההוכחות עוקבות אחרי אותו רעיון, ולכן יש מינימום של מלל בהמשך.
(ב)

$$n = 1 : 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 121 = 11^2$$

$$:n \rightarrow n + 2$$

$$10^{2n+4} + 2 \cdot 10^{n+2} + 1 = 10^4 \cdot (10^{2n} + 2 \cdot 10^n + 1) - 18 \cdot 11 \cdot 10^n - 909 \cdot 11$$

(ג)

$$n = 0 : 5 \cdot 3^1 - 2^0 = 14 = 2 \cdot 7$$

$$:n \rightarrow n + 1$$

$$\begin{aligned}5 \cdot 3^{4n+5} - 2^{2n+2} &= 3^4 \cdot (5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}) + (81 - 4)2^{2n} \\ &= 3^4 \cdot (5 \cdot 3^{4n+1} - 2^{2n}) + 11 \cdot 7 \cdot 2^{2n}\end{aligned}$$

(7)

$$n = 0 : 4^0 - 3 \cdot 0 - 1 = 0$$

$$: n \rightarrow n + 1$$

$$\begin{aligned} 4^{4n+4} - 3(n+1) - 1 &= 4^4 \cdot (4^{4n} - 3n - 1) + 3 \cdot (4^4 - 1)n - 3 - 1 + 4^4 \\ &= 4^4 \cdot (4^{4n} - 3n - 1) + 85 \cdot 9n + 28 \cdot 9 \end{aligned}$$

תרגיל מס' 2 במתמטיקה דיסקרטית

1. הוכיחו את הזהויות הבאות, הן באמצעות ציור והן בכתיבה מפורשת:
 - א. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - ב. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - ג. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ (ראו הגדרה בשאלה 3).
 - ד. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \cap A^c)$
 - ה. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
 - ו. $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$ (ראו הגדרה בשאלה 3).
 - ז. $(A \times A) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$
2. תהיינה $A \subseteq B$, $C \subseteq D$. הוכיחו את הטענות הבאות:
 - א. $A \cup C \subseteq B \cup D$
 - ב. $A \cap C \subseteq B \cap D$
 - ג. $A \times C \subseteq B \times D$
3. יהיו A, B קבוצות. נגדיר את ההפרש הסימטרי ביניהן כך:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad \text{כאשר } (A \setminus B) = \{x: x \in A, x \notin B\}$$
 - א. הוכיחו כי $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
 - ב. הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
 - ג. הוכיחו כי לכל n טבעי $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ אם ורק אם x שייך למספר אי-זוגי של קבוצות A_i . (לאור סעיף א', אכן השמטת הסוגריים בביטוי הנ"ל מוצדקת).
4. יהיו A, B, C קבוצות סופיות, הוכיחו:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
 (רשמו הוכחה מסודרת, אל תסתפקו בציור!).
5. יחס R נקרא **יחס שקילות** על קבוצה A אם הוא מקיים את 3 התכונות הבאות:
 - (i) **רפלקסיביות**: aRa לכל $a \in A$.
 - (ii) **סימטריות**: $aRb \Leftrightarrow bRa$.
 - (iii) **טרנזיטיביות**: $aRb, bRc \Rightarrow aRc$.
 - א. יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. נגדיר את היחס הבא על קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$: aRb אם $a - b$ מתחלק ב- n . הוכיחו כי R יחס שקילות.
 - ב. נגדיר תת-קבוצה של $A \times A$ ע"י $D = \{(a, a): a \in A\}$. הוכיחו כי D יחס שקילות.
 - ג. יחס R נקרא **אנטי-סימטרי** אם $aRb \Rightarrow b \neq a$.

פתרון תרגיל מס' 2 במתמטיקה דיסקרטית

שאלה 1 (פתרונות לסעיפים נבחרים):

סעיף א': $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ or } x \in A \cap C \Leftrightarrow (x \in A \text{ and } x \in B) \text{ or } (x \in A \text{ and } x \in C) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \text{ and } (x \in B \text{ or } x \in C) \Leftrightarrow x \in A, x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

סעיף ג': $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$$x \in A \cap (B \Delta C) \Leftrightarrow x \in A \text{ and } x \in B \Delta C \Leftrightarrow x \in A \text{ and } (x \in B \text{ or } x \in C \text{ and } x \notin B \cap C) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \cap B \text{ or } x \in A \cap C \text{ and } x \notin A \cap B \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

סעיף ו': $(A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C)$

$$(x, c) \in (A \Delta B) \times C \Leftrightarrow x \in A \Delta B, c \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ or } x \in B \text{ and } x \notin A \cap B, c \in C \Leftrightarrow$$

$$(x, c) \in A \times C \text{ or } (x, c) \in B \times C \text{ and } (x, c) \notin (A \cap B) \times C \Leftrightarrow (x, c) \in (A \times C) \Delta (B \times C)$$

שאלה 2: תהייה $A \subseteq B, C \subseteq D$.

א. $A \cup C \subseteq B \cup D$ אם $A \subseteq B$ אז ודאי ש- $A \subseteq B \cup D$ ובדומה $C \subseteq B \cup D$, לכן: $A \cup C \subseteq B \cup D$.

ב. $A \cap C \subseteq B \cap D$ (ההכללה הראשונה נובעת מ- $A \subseteq B$ והשנייה מ- $C \subseteq D$).

ג. $A \times C \subseteq B \times D$ ניקח $(a, c) \in A \times C$, בגלל ההכללות ינבע ש- $a \in B$ ו- $c \in D$, לכן $(a, c) \in B \times D$.

שאלה 3:

א. $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

די להראות כי $A \setminus B = A \cap B^c$, וזה נכון כי:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ and } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \text{ and } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$$

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

נוכיח למעשה כי שני האגפים שווים ל-

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

נוכיח את השוויון בין הביטוי הנ"ל לאגף שמאל. השוויון השני יתקבל באופן דומה.

$$(A \Delta B) \Delta C = ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \Delta C = (((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c) \cup (((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c \cap C)$$

נפתח את שני הביטויים האחרונים בנפרד, ונשתמש בחוקי דה-מורגן ובסעיפי שאלה 1:

- $((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c)$

- $((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c \cap C = ((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A))^c \cap C = ((C \cap A^c) \cup (C \cap B)) \cap (B^c \cup A) =$

$$(((C \cap A^c) \cup (C \cap B)) \cap B^c) \cup (((C \cap A^c) \cup (C \cap B)) \cap A) =$$

$$(C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap B \cap B^c) \cup (C \cap A^c \cap A) \cup (C \cap B \cap A) = (C \cap A^c \cap B^c) \cup (C \cap B \cap A)$$

(כי שתי הקבוצות האחרות הן ריקות).

ג. לכל n טבעי $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ אם ורק אם x שייך למספר אי-זוגי של קבוצות A_i :

נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$, $x \in A_1$ אם x שייך לקבוצה אחת בלבד. עבור $n=2$, מההגדרה $x \in A_1 \Delta A_2$ אם $x \in A_1$ או $x \in A_2$ אך x אינו בחיתוך שלהם, לכן $x \in A_1 \Delta A_2$ אם x שייך בדיוק לקבוצה אחת. עבור $n=3$, שימו לב כי הטענה נובעת מהנוסחה שקיבלנו בסעיף הקודם.

הנחת האינדוקציה: $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1}$ אם x שייך למספר אי-זוגי של קבוצות A_i .

שלב האינדוקציה: נוכיח את הטענה עבור n קבוצות.

מצד אחד, נניח כי $x \in (A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1}) \Delta A_n$.

$x \in A_n \setminus (A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1})$ או $x \in (A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1}) / A_n$ אם $x \in (A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1}) \Delta A_n$.

במקרה הראשון, מהנחת האינדוקציה, x שייך למספר אי-זוגי של קבוצות A_i ($i=1, \dots, n-1$), ולכן למספר אי-זוגי של קבוצות A_i ($i=1, \dots, n$). במקרה השני, $x \in A_n$ ו- $x \notin (A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1})$, לכן מהנחת האינדוקציה x שייך למספר זוגי של קבוצות A_i ($i=1, \dots, n-1$), ולכן בסה"כ למספר אי-זוגי של קבוצות A_i ($i=1, \dots, n$).

מצד שני, נשים לב שאם x שייך למספר אי-זוגי של קבוצות A_i ($i=1, \dots, n$), אז או ש- $x \notin A_n$ ו- x שייך למספר אי-זוגי של קבוצות A_i ($i=1, \dots, n-1$) ולכן $x \in (A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1}) / A_n$, או ש- $x \in A_n$ ו- x שייך למספר זוגי של קבוצות A_i ($i=1, \dots, n-1$), ולכן $x \in A_n \setminus (A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_{n-1})$ לפי הנחת האינדוקציה.

שאלה 4: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

ראשית, נוכיח כי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

זאת משום ש- $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$, וזהו איחוד של שלוש קבוצות זרות. לכן:

$$|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |A \cap B|) + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

עתה, נשתמש בכלל זה ובסעיפי שאלה 1 על-מנת לחשב את $|A \cup B \cup C|$:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$$

$$|A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

שאלה 5:

א. יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. נגדיר את היחס הבא על קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$: aRb אם $n \mid (a-b)$. אזי R יחס שקילות:

(i) רפלקסיביות: $n \mid (a-a) = 0$.

(ii) סימטריות: אם $n \mid (a-b)$ אז $n \mid (b-a)$.

(iii) טרנזיטיביות: אם $n \mid (a-b)$ ו- $n \mid (b-c)$ אזי $n \mid ((a-b) + (b-c))$ לכן $n \mid (a-c)$.

ב. נגדיר תת-קבוצה של $A \times A$ ע"י $D = \{(a,a) : a \in A\}$. אז D יחס שקילות:

(i) רפלקסיביות: $(a,a) \in D$ מההגדרה.

(ii) סימטריות: אם $(a,b) \in D$ אז $a=b$ ולכן גם $(b,a) \in D$.

(iii) טרנזיטיביות: אם $(a,b) \in D$ ו- $(b,c) \in D$ אז $a=b=c$ ולכן גם $(a,c) \in D$.

ג. אם יחס $R \subseteq A \times A$ הוא גם סימטרי וגם אנטי-סימטרי, אזי $R \subseteq D$:

אם R סימטרי אז לכל $(a,b) \in R$ גם $(b,a) \in R$. משום ש- R אנטי-סימטרי, $a=b$.

תרגיל מס' 3 במתמטיקה דיסקרטית

1. נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \text{ even} \\ n+1 & \text{if } n \text{ odd} \end{cases} \quad g: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, g(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 6 \\ x+6 & \text{if } x \geq 6 \end{cases}$$

האם הפונקציות f, g חח"ע? האם הן על? הוכיחו טענתכם.

2. יהיו A, B, C קבוצות ותהייה $f: A \rightarrow B$ ו- $g: B \rightarrow C$ שתי פונקציות. הוכיחו או הפריכו (על-ידי דוגמא נגדית) כל-אחת מהטענות הבאות:

- אם f, g חח"ע אז גם $g \circ f$ חח"ע.
- אם f, g על אז גם $g \circ f$ על.
- אם $g \circ f$ על אז f על.
- אם $g \circ f$ על אז g על.
- אם $g \circ f$ חח"ע אז f חח"ע.
- אם $g \circ f$ חח"ע אז g חח"ע.

3. יהיו A ו- B קבוצות ו- $\mathbf{Z}$ קבוצת המספרים השלמים, עם חיבור רגיל. בהינתן פונקציות $f: A \rightarrow \mathbf{Z}, g: B \rightarrow \mathbf{Z}$, נגדיר פונקציות חדשות כך:

$$\begin{aligned} h_1: A \times B &\rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, & h_1((a, b)) &= (f(a), g(b)) \\ h_2: A \times B &\rightarrow \mathbf{Z}, & h_2((a, b)) &= f(a) + g(b) \\ h_3: A &\rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, & h_3(a) &= (f(a), f(a)) \end{aligned}$$

הוכיחו או הפריכו (על-ידי דוגמא נגדית) כל-אחת מהטענות הבאות:

- אם f, g חח"ע אז h_1 חח"ע.
- אם f, g על אז h_1 על.
- אם f, g חח"ע אז h_2 חח"ע.
- אם g על אז h_2 על.
- אם f חח"ע אז h_3 חח"ע.
- אם f על אז h_3 על.
- אם f חח"ע ו- g על אז h_1 על.

4. תהיינה U, V שתי קבוצות, ותהיינה $A, B \subseteq U$ ו- $C, D \subseteq V$. תהי $f: U \rightarrow V$ פונקציה. הוכיחו או הפריכו (על-ידי דוגמא נגדית) כל-אחת מהטענות הבאות. במקרה שהטענה אינה נכונה, האם קיימת הכלה באחד הכיוונים? הוכיחו טענתכם.

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

5. יהיה $R \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ היחס הבא: $aRb \Leftrightarrow |a| \leq |b|$, האם R יחס סדר?

6. תהי A קבוצה ויהי $\leq$ יחס סדר חלקי על A . לכל $a \in A$ נתאים את תת-הקבוצה הבאה של A :

$$S_a = \{x \in A: x \leq a\}$$

הוכיחו כי $a \leq b$ בסדר החלקי אם ורק אם $S_a \subseteq S_b$.

בהצלחה! ☺

פתרון תרגיל מס' 3 במתמטיקה דיסקרטית

שאלה 1:

- הפונקציה f היא על: יהי n שלם, אז $2n$ זוגי, לכן n יתקבל ע"י $n = f(2n) = 2n/2$.
- הפונקציה f אינה חח"ע: דוגמא נגדית: $4 = f(8) = f(3)$.
- הפונקציה g אינה על: דוגמא נגדית: כל המספרים האי-זוגיים עד 11 אינם מתקבלים.
- הפונקציה g חח"ע: תהי $g_1: (-\infty, 5] \rightarrow (-\infty, 10]$ ותהי $g_2: [6, \infty) \rightarrow [12, \infty)$, $g_1(x) = 2x$ ע"י המוגדרת ע"י $g_2(x) = x + 6$. שתי הפונקציות הללו חח"ע (הוכיחו!) ומשום שהטווחים שלהן זרים, הפונקציה g היא חח"ע.

שאלה 2:

- אם f, g חח"ע אז גם $g \circ f$ חח"ע – נכון:
- אם f, g על אז גם $g \circ f$ על – נכון:
- יהי $c \in C$, משום ש- g על, קיים $b \in B$ עם $g(b) = c$. משום ש- f על קיים $a \in A$ עם $f(a) = b$, לכן $g \circ f(a) = c$.
- אם $g \circ f$ על אז f על – לא נכון:
- דוגמא נגדית: הקבוצות $A = B = \mathbb{N}$, $C = \{1\}$. הפונקציות $g(x) = 1$ לכל x , $f(x) = 0$ לכל x . אז $g \circ f(x) = 1$ לכל x . לכן: $g \circ f$ היא על C , אך f אינה על $B = \mathbb{N}$.
- אם $g \circ f$ על אז g על – נכון:
- יהי $c \in C$, משום ש- $g \circ f$ על, קיים $a \in A$ עם $g \circ f(a) = c$, לכן $b = f(a)$ מקיים $g(b) = c$.
- אם $g \circ f$ חח"ע אז f חח"ע – נכון:
- נניח ש- $f(x) = f(y)$. נפעיל את g על שני האגפים ונקבל $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. $g \circ f$ חח"ע לכן $x = y$.
- אם $g \circ f$ חח"ע אז g חח"ע – לא נכון:
- דוגמא נגדית: הקבוצות $A = B = C = \mathbb{N}$. הפונקציות $f(x) = 2x$ לכל x , $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ לכל x (הערך השלם של $x/2$). אז g אינה חח"ע כי למשל: $g(4) = g(5) = 2$. אך $g \circ f(x) = x$ לכל x וזו פונקציה חח"ע.

שאלה 3:

- אם f, g חח"ע אז h_1 חח"ע – נכון:
- נניח ש- $(f(a), g(b)) = (f(a'), g(b'))$ או $f(a) = f(a')$ ו- $g(b) = g(b')$. מההנחה ש- f, g חח"ע נקבל ש- $a = a'$ ו- $b = b'$ לכן $(a, b) = (a', b')$.
- אם f, g על אז h_1 על – נכון:
- נניח ש- $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, משום ש- f, g על, קיימים a, b כך ש- $g(b) = d$, $f(a) = c$. אזי $h_1(a, b) = (c, d)$.
- אם f, g חח"ע אז h_2 חח"ע – לא נכון:
- דוגמא נגדית: $A = B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x$ לכל x , $g(y) = -y$ לכל y . אז $h_2((a, a)) = 0$ לכל a שלם.

ד. אם g על h_2 על – נכון :
 יהי x שלם. יהי y שלם כלשהו בטווח של f , אז קיים a עם $f(a)=y$. g על, לכן קיים b עם $g(b)=x-y$, אזי $h_2((a,b)) = y+(x-y) = x$.
 ה. אם f חח"ע אז h_3 חח"ע – נכון :
 נניח ש- $(f(a), f(a)) = (f(a'), f(a'))$, אז $f(a)=f(a')$. משום ש- f חח"ע נקבל ש- $a=a'$.
 ו. אם f על אז h_3 על – לא נכון :
 בטווח של h_3 לעולם לא נקבל איבר מהצורה (x,y) כאשר x,y שונים.
 ז. אם f חח"ע ו- g על אז h_1 על – לא נכון :
 דוגמא נגדית: $A=B=\mathbb{Z}$. $f(x)=2x$ לכל x ו- $g(x)=x$ לכל x . אז f חח"ע ו- g על. אך $h_1(a,b)=(2a,b)$, ולכן בטווח של h_1 לעולם לא נקבל זוגות שהאיבר הראשון בהם אי-זוגי.

שאלה 4:

א. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ – נכון :
 נניח ש- $y \in f(A \cup B)$ ואז $y=f(x)$ לאיזה $x \in A \cup B$. אם $x \in A$ אז $y=f(x) \in f(A)$, ואם $x \in B$ אז $y=f(x) \in f(B)$, לכן בכל מקרה, $y \in f(A) \cup f(B)$.
 אם $y \in f(A) \cup f(B)$, נניח בה"כ ש- $y \in f(A)$, ואז $y=f(x)$ לאיזה $x \in A$. לכן בפרט $x \in A \cup B$ ו- $y=f(x) \in f(A \cup B)$.
 ב. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ – לא נכון :
 דוגמא נגדית: $A=[0,1]$, $B=[-1,0]$, $f(x)=|x|$ לכל x . אזי $f(A \cap B) = [0,1] \neq f(A) \cap f(B) = [0,0] = \{0\}$.
 ההכלה $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ נכונה: לכן $A \cap B \subseteq A$, בדומה $f(A \cap B) \subseteq f(B)$. מכאן נסיק ש- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
 ג. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ – נכון :
 אם $x \in f^{-1}(C \cup D)$ אז $f(x) \in C \cup D$ אם"ם $f(x) \in C$ או $f(x) \in D$ אם"ם $x \in f^{-1}(C)$ או $x \in f^{-1}(D)$ אם"ם $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
 ד. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ – נכון :
 אם $x \in f^{-1}(C \cap D)$ אז $f(x) \in C \cap D$ אם"ם $f(x) \in C$ וגם $f(x) \in D$ אם"ם $x \in f^{-1}(C)$ וגם $x \in f^{-1}(D)$ אם"ם $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

שאלה 5:

R אינו יחס סדר משום שאינו אנטי-סימטרי. דוגמא נגדית: $|-2| < |-1|$ וגם $|-1| < |-2|$ אך $-2 \neq -1$.

שאלה 6:

נניח ש- $a \leq b$ אז אם $x \leq a$ גם $x \leq b$ (מהטרנזיטיביות של יחס הסדר החלקי). לכן אם $x \in S_a$ גם $x \in S_b$, ולכן $S_a \subseteq S_b$.
 נניח ש- $S_a \subseteq S_b$. $a \in S_a$ ולכן מההכלה $a \in S_b$. מהגדרת S_b נובע כי $a \leq b$.

תרגיל 4 במתמטיקה דיסקרטית

סמסטר א', תשס"ו

1. תהא A קבוצה, $R \subseteq A \times A$ יחס טרנזיטיבי ורפלקסיבי על A . נגדיר יחס $S \subseteq A \times A$ ע"י $S = \{(a, b) \mid aRb \wedge bRa\}$.

(ב) הוכיחו ש S הוא יחס שקילות.

(ג) נתבונן בקבוצה B של מחלקות השקילות של A לפי S ונגדיר עליה את היחס T כך:

$$[a]T[b] \Leftrightarrow \exists u \in [a], v \in [b] : uRv$$

הוכיחו ש T הוא יחס סדר. (T נקרא היחס סדר שמושרה מהקדם-סדר R).

2. תהא A, B קבוצות זרות, R_A יחס סדר על A , ו R_B יחס סדר על B .

(ב) נגדיר יחס $S \subseteq A \times A$ ע"י $aSa' \Leftrightarrow a'R_Aa$. הוכיחו ש S הוא יחס סדר על A , ושהוא מלא אסם R_A מלא.

(ג) נגדיר יחס $T \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$ ע"י:

$$xTy \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in A \wedge xR_Ay) \vee (x \in B \wedge y \in B \wedge xR_By)$$

הוכיחו ש T יחס סדר. מתי T מלא?

(ד) נגדיר שלושה יחסים $U, V, W \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$:

$$(a, b)W(a', b') \Leftrightarrow (a \neq a' \wedge aR_Aa') \vee (a = a' \wedge bR_Bb')$$

$$(a, b)V(a', b') \Leftrightarrow aR_Aa' \wedge bR_Bb'$$

$$(a, b)U(a', b') \Leftrightarrow aR_Aa' \vee bR_Bb'$$

אילו מהם תמיד יחס סדר? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

3. תהא A קבוצה סופית, $R \subseteq A \times A$ יחס סדר עליה. הוכיחו שקיים $S \subseteq A \times A$ כך ש S יחס סדר מלא על A ו $R \subseteq S$.

4. נגדיר $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ כך:

$$f(n) = (-1)^n \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

הוכיחו ש f היא חח"ע ועל.

$\mathbb{Q}^+$ הוא אוסף המספרים הרציונליים החיוביים ממש. $\mathbb{N}^+$ הוא אוסף הטבעיים החיוביים ממש. נגדיר $g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ כך: אם הפירוק של n לראשוניים הוא מהצורה

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

אז נגדיר

$$g(n) = p_1^{f(a_1)} \cdot p_2^{f(a_2)} \cdots p_k^{f(a_k)}$$

הוכיחו ש g חח"ע ועל.

פתרון תרגיל 4 במתמטיקה דיסקרטית

סמסטר א', תשס"ו

(ה) כדי להראות שהוא יחס שקילות, נראה שהו רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזי-טיבי.

רפלקסיביות: $\forall a \in A : aRa \wedge aRa$ ולכן aSa .
סימטריות:

$$\forall a, b \in A : aSb \Leftrightarrow aRb \wedge bRa \Leftrightarrow bRa \wedge aRb \Leftrightarrow bSa$$

טרנזיטיביות:

$$\forall a, b, c \in A : aSb \wedge bSc \Leftrightarrow aRb \wedge bRa \wedge bRc \wedge cRb \Rightarrow aRc \wedge cRa \Leftrightarrow aSc$$

(ג) כדי להראות ש T יחס סדר, נראה שהוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי, ואנטיסימ-טרי.

רפלקסיביות: $\forall a \in A : aRa$ ולכן $[a]T[a]$.
טרנזיטיביות:

$$\begin{aligned} [a]T[b] \wedge [b]T[c] &\Rightarrow \exists u \in [a], v \in [b], v' \in [b], w \in [c] : uRv \wedge v'Rw \\ &\Rightarrow uRv \wedge vRv' \wedge v'Rv \wedge v'Rw \\ &\Rightarrow uRv' \wedge v'Rw \Rightarrow uRw \Rightarrow [a]T[c] \end{aligned}$$

אנטיסימטריות:

$$\begin{aligned} [a]T[b] \wedge [b]T[a] &\Rightarrow \exists u, u' \in [a] \exists v, v' \in [b] : uRv \wedge v'Ru' \\ &\Rightarrow uRv \wedge vRv' \wedge v'Ru' \wedge u'Ru \\ &\Rightarrow uRv' \wedge v'Ru \Rightarrow [u] = [v'] \Rightarrow [a] = [b] \end{aligned}$$

(ז) כדי לבדוק ש S יחס סדר נבדוק את שלושת התכונות.

רפלקסיביות: $\forall a \in A : aR_Aa \Rightarrow \forall a \in A : aSa$
טרנזיטיביות: $aSb \wedge bSc \Rightarrow bR_Aa \wedge cR_Ab \Rightarrow cR_Aa \Rightarrow aSc$

אנטיסימטריות: $aSb \wedge bSa \Rightarrow bRa \wedge aRb \Rightarrow a = b$
 נוכיח ש S מלא אס R_A מלא:

$$S \text{ מלא} \Leftrightarrow \forall a, a' \in A : aR_A a' \vee a'R_A a \Leftrightarrow \forall a', a \in A : a'Sa \vee aSa' \Leftrightarrow R_A \text{ מלא}$$

(ג) בנוהל, נבדוק את שלושת התכונות של יחס סדר.

רפלקסיביות: אם $x \in A$ אז $xR_A x$ ולכן xTx (כי $x \in A \wedge x \in A \wedge xR_A x$)
 באופן דומה $x \in B \Rightarrow xTx$

טרנזיטיביות: נתון xTy, yTz , נפצל לארבעה מקרים:

- i. $x \in A, y \in A, z \in A$
- ii. $x \in A, y \in A, z \in B$
- iii. $x \in A, y \in B, z \in B$
- iv. $x \in B, y \in B, z \in B$

ii ו iii הם מיידיים מהגדרת T ואילו i ו iv נובעים מטרנזיטיביות של R_A ו R_B בהתאמה. שימו לב ש:

$$xTy \Rightarrow (y \in A \rightarrow x \in A)$$

ובאופן דומה

$$yTz \Rightarrow (z \in A \rightarrow y \in A)$$

ולכן לא ייתכנו מקרים חוץ מארבעת אלה.

אנטיסימטריות: אם $xTy \wedge yTx$, אז:

$$x, y \in A \vee x, y \in B$$

(בדקו שלא ייתכן שאחד ב A ואחד ב B). כעת:

$$x, y \in A \Rightarrow xR_A y \wedge yR_A x \Rightarrow x = y$$

$$x, y \in B \Rightarrow xR_B y \wedge yR_B x \Rightarrow x = y$$

(ד) W יחס סדר. רפלקסיביות: $(a, b)W(a, b) \Rightarrow a = a \wedge bR_B b$

טרנזיטיביות: נניח $(a, b)W(a', b') \wedge (a', b')W(a'', b'')$. אם $a = a' = a''$ אז טרנזיטיביות נובעת מטרנזיטיביות של R_B . אם $a \neq a'$ או $a' \neq a''$ אז $a \neq a'' \wedge aR_A a''$ (נובע מאנטיסימטריות וטרנזיטיביות של R_A). בשני המקרים מתקיים $(a, b)W(a'', b'')$.

אנטיסימטריות: מהשיקולים של הסעיף הקודם

$$(a, b)W(a', b') \wedge (a', b')W(a, b) \Rightarrow a = a'$$

וכעת התוצאה נובעת מאנטיסימטריות של R_B .

V יחס סדר. רפלקסיביות: $(a, b)V(a, b) \Rightarrow aR_A a \wedge bR_B b$

טרנזיטיביות:

$$\begin{aligned}(a, b)V(a', b') \wedge (a', b')V(a'', b'') &\Rightarrow aR_A a' \wedge bR_B b' \wedge a'R_A a'' \wedge b'R_B b'' \\ &\Rightarrow aR_A a'' \wedge bR_B b'' \Rightarrow (a, b)V(a'', b'')\end{aligned}$$

אנטיסימטריות:

$$\begin{aligned}(a, b)V(a', b') \wedge (a', b')V(a, b) &\Rightarrow aR_A a' \wedge bR_B b' \wedge a'R_A a \wedge b'R_B b \\ &\Rightarrow a = a' \wedge b = b' \Rightarrow (a, b) = (a', b')\end{aligned}$$

U לא דווקא יחס סדר. דוגמה: נקח $A = B = \mathbb{N}, R_A = R_B = \leq_{\mathbb{N}}$. אבל $(3, 5)U(5, 3) \neq (5, 3)U(3, 5)$.

3. ההוכחה באינדוקציה על מספר האיברים ב- A . למעשה, נראה ראשית טענה נוספת באינדוקציה: לכל יחס סדר R על A , קיים איבר מינימלי על A במובן הבא:

$$\exists m \in A : \neg \exists a \in A : a \neq m \wedge aRm$$

אם A מכילה איבר בודד, אז הטענה ברורה (האיבר הבודד של A הוא המבוקש). באינדוקציה, נניח ש- A מכילה $n+1$ איברים. נרשום:

$$A = A' \cup \{x\}$$

כאשר A' מכילה n איברים בלבד. יחס סדר R על A משרה יחס סדר R' על A' (הוכח!): נמצא באינדוקציה איבר מינימלי m' של A' . כעת, אם $\neg xRm'$ אז $m = x$ ואם xRm' אז $m = m'$ ובשני המקרים m מינימלי על A (הוכח!).

כעת נעבור לטענה המקורית, שאותה גם נוכיח באינדוקציה. שוב, אם A איבר בודד הטענה טריביואלית (כל יחס סדר הוא מלא). באינדוקציה, אם A יש $n+1$ איברים, נרשום:

$$A = A' \cup \{m\}$$

כאשר נבחר את m להיות איבר מינימלי כלשהו של A . באינדוקציה, נרחיב את היחס R' שמושרה על A' ליחס סדר מלא S' על A' . כעת נגדיר את $S \subseteq A \times A$:

$$S = S' \cup \{(m, a) : a \in A\}$$

נבדוק ש- S יחס סדר מלא.

ע"מ להוכיח ש- S יחס סדר, נשים לב שאם נגדיר $C = \{m\}$, אז S הוא בדיוק היחס סדר שמוגדר כ- T בשאלה 2 (עבור $A = C, B = A'$). כדי להראות ש- S מלא, נניח $x, y \in A$. אז אם $x = m$ או $y = m$ אז ברור ש- x, y ברי השוואה, כי m בר השוואה עם כל איבר ב- A . אחרת, $x, y \in A'$ ולכן הם ברי השוואה לפי S' .

4. חח"ע של f : אם $f(n_1) = f(n_2)$ אז או ששניהם 0 או ששניהם בעלי סימן זהה ועוצמה זהה. לכן $(-1)^{n_1} = (-1)^{n_2}$ וכן $\left[\frac{n_1+1}{2}\right] = \left[\frac{n_2+1}{2}\right]$. מהתנאי הראשון נובע שההפרש בין n_1 ל- n_2 הוא זוגי. מהתנאי השני נובע ש- $|n_1 - n_2| < 2$. לכן $n_1 = n_2$.

היות f על: יהי $z \in \mathbb{Z}$. אם $z \geq 0$ אז $z = f(2z)$. אם $z < 0$ אז $z = f(2z - 1)$.

ע"מ להוכיח ש- g חח"ע ועל, נצטרך להשתמש ביחידות הפירוק: לכל מספר טבעי יש פירוק יחיד כמכפלה של ראשוניים. בנוסף, לכל מספר רציונלי חיובי יש ייצוג יחיד כמנה של שני מספרים טבעיים חיוביים זרים (הוכח!) לבסוף, שני מספרים הם זרים אם הפירוקים שלהם לראשוניים הם זרים.
עבור מספר n , נרשום:

$$h(n) = \prod_{i=1 \dots k, f(a_i) \geq 0} p_i^{f(a_i)}$$

$$k(n) = \prod_{i=1 \dots k, f(a_i) < 0} p_i^{-f(a_i)}$$

למעשה $g(n) = h(n)/k(n)$. לכל n , המספרים $h(n), k(n)$ זרים כי הפירוקים שלהם לראשוניים זרים. מכאן, לפי ההערות מקודם, אנחנו מסיקים ש:

$$g(n_1) = g(n_2) \Leftrightarrow h(n_1) = h(n_2) \wedge k(n_1) = k(n_2)$$

כעת, אם $n_1 \neq n_2$, אז קיים p כך ש- p מופיע בריבוי שונה ב- n_1 וב- n_2 . לכן:

$$h(n_1) \neq h(n_2) \vee k(n_1) \neq k(n_2)$$

כי הריבוי ב- n_1 חייב להיות שלילי או אישלילי, ומכאן ש- $g(n_1) \neq g(n_2)$. לכן g חח"ע.

כדי להוכיח ש- g על, נבחר רציונלי שרירותי

$$x = \frac{\prod_{i=1}^{k_1} p_i^{a_i}}{\prod_{j=1}^{k_2} q_j^{b_j}}$$

כשהקבוצות $\{p_i : i = 1 \dots k_1\}$ ו- $\{q_j : j = 1 \dots k_2\}$ זרות. אז:

$$x = g \left(\prod_{i=1}^{k_1} p_i^{f^{-1}(a_i)} \cdot \prod_{j=1}^{k_2} q_j^{f^{-1}(b_j)} \right)$$

תרגיל 5 במתמטיקה דיסקרטית - לא להגשה

סמסטר א', תשס"ו

1. $\mathbb{N}$ היא קבוצת כל המספרים הטבעיים. $\mathbb{Q}$ היא קבוצת כל המספרים הרציונליים. $|A|$ מסמן את העוצמת של הקבוצה A .

(ב) הוכיחו שלכל k טבעי וחיובי, עבור $A_k = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ (k פעמים) מתקיים $|A_k| = |\mathbb{N}|$.

(ג) הוכיחו ש $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|$.

2. כמה תת-קבוצות מגודל 5 יש לקבוצה $\{1, 2, \dots, 10\}$ כך:

(ב) שכל אחת מהן מכילה את 1 או את 2?

(ג) שכל אחת מהן מכילה את 1 או את 2 אבל לא את שניהם?

3. תהי A קבוצה סופית ולא ריקה.

(ב) הראו שמספר התת-קבוצות של A מגודל זוגי שווה למספר התת-קבוצות של A מגודל איזוגי. (אם הסתבכתם: הוכיחו את הטענה למקרה בו A מגודל איזוגי.)

(ג) מהו מספר התת-קבוצות מגודל זוגי של הקבוצה $\{1, 2, \dots, 101\}$?

4. הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$(ב) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{לכל } n, k > 0$$

$$(ג) \quad \sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} = 2^{2n-1} \quad \text{לכל } n > 0$$

פתרון תרגיל 5 במתמטיקה דיסקרטית

סמסטר א', תשס"ו

(ב) ראינו בהרצאה העתקה חח"ע $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. העתקת הזהות $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ היא בודאי חח"ע. באינדוקציה על k נבנה העתקה חח"ע $f_k: A_k \rightarrow \mathbb{N}$. נניח שבנינו את ההעתקה f_k ; נבנה את ההעתקה f_{k+1} . ובכן, שימו לב ש $A_{k+1} = A_k \times \mathbb{N}$. נגדיר $g_k: A_k \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ע"י

$$g_k(a, n) = (f_k(a), i(n))$$

g_k חח"ע (למה?) נגדיר $f_{k+1} = f \circ g_k$. f_{k+1} חח"ע, בתור הרכבה של פונ-קציות חח"ע.

מצד שני ההעתקה $d_k: \mathbb{N} \rightarrow A_k$ המוגדרת ע"י $d_k(n) = (n, n, \dots, n)$ היא חח"ע. כלומר, מצאנו העתקות חח"ע $\mathbb{N} \rightarrow A_k$ וגם $A_k \rightarrow \mathbb{N}$ ע"פ משפט קנטור-ברנשטיין, נקבל ש $|A_k| = |\mathbb{N}|$.

(ג) לכל מספר רציונלי יש הצגה $\frac{n}{m}$ כך ש $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. שימו לב שההעתקה $s: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י:

$$s(n) = \begin{cases} (n, 0), & n \geq 0 \\ (-n, 1), & n < 0 \end{cases}$$

היא חח"ע. לכן ההעתקה $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = A_6$ המוגדרת ע"י:

$$\left(\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2} \right) \rightarrow (s(n_1), m_1, s(n_2), m_2)$$

היא חח"ע (מדוע?)

ראינו שיש העתקה חח"ע $f_6: A_6 \rightarrow \mathbb{N}$. לכן ההעתקה $f_k \circ f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ היא חח"ע. כמו כן ההעתקה $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ המוגדרת ע"י $n \rightarrow (n, n)$ חח"ע ולכן לפי משפט קנטור-ברנשטיין $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

(ד) יש $\binom{10}{5}$ דרכים לבחור 5 מספרים מתוך קבוצה בת 10 איברים. מתוכם, $\binom{8}{5}$ מקרים הבחירה לא מכילה את 1 או את 2 אלא רק אחד מהם 8 מספרים האחרים; לכן יש

$$\binom{10}{5} - \binom{8}{5} = 252 - 56 = 196$$

דרכים לבחור קבוצה שמכילה את 1 או את 2.

(ג) מתוך המקרים שבדקנו קודם, אם קבוצה מכילה את 1 ואת 2 אז נותרו עוד שלושה איברים לבחור בה מתוך 8; לכן יש $\binom{8}{3}$ מקרים שצריך להפחית. לכן נותרו

$$196 - \binom{8}{3} = 196 - 56 = 140$$

אפשרויות.

(ב) נבנה העתקה חח"ע ועל מתת-קבוצות של A מגודל זוגי לתת-קבוצות של A מגודל איזוגי. נניח ש A לא קירה; נבחר איבר $a \in A$. עבור קבוצה מגודל זוגי $B \subseteq A$, נגדיר:

$$f(B) = \begin{cases} B \cup \{a\}, & a \notin B \\ B \setminus \{a\}, & a \in B \end{cases}$$

אם B מגודל זוגי, אז $f(B)$ מגודל איזוגי, כי הפרש הגדלים שלהם הוא 1. בנוסף, f חח"ע ועל (בדקו!) לכן A יש אותו מספר של תת-קבוצות זוגיות ואיזוגיות.

(ג) ל[101] יש 2^{101} תת-קבוצות. חצי מהן מגודל זוגי, ולכן יש $2^{101}/2 = 2^{100}$ כאלה.

(ד) את הסעיף הזה נעשה בחישוב ישיר:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!} \frac{k+n-k}{k(n-k)} \\ &= \frac{(n-1)!n}{(n-k-1)!(n-k)(k-1)!k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

(ג) והפעם עם סיפור קצר: מה שמבקשים בצד שמאל הוא למעשה מספר התת-קבוצות מגודל זוגי של קבוצה בגודל $2n$, אבל משאלה 3 אנחנו יודעים שבדיוק חצי מהתת-קבוצות הן מגודל זוגי ולכן יש 2^{2n-1} כאלה.

תרגיל מס' 6 במתמטיקה דיסקרטית (להגשה)

1. בקורס יש 10 קבוצות תירגול ו-10 מתרגלים.
 - א. בכמה דרכים ניתן לשבץ את המתרגלים לקבוצות התירגול?
 - ב. אם 4 קבוצות תירגול הן בשעות הערב וישנם שני מתרגלים שאינם יכולים לעבוד בערב, בכמה דרכים ניתן לשבץ את המתרגלים?
 2.
 - א. יש 4 קופסאות בצבעים שונים ו-17 כדורים זהים. כמה אפשרויות יש לשים את הכדורים בקופסאות? כמה אפשרויות יש אם אסור שתישאר קופסא ריקה?
 - ב. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 17$? כמה פתרונות שלמים חיוביים ממש יש?
 3.
 - א. נתונים שני ישרים מקבילים. על הראשון מסומנות n נקודות ועל השני מסומנות m נקודות. כמה משולשים שונים יש שקדודיהם על הנקודות המסומנות?
 - ב. נתונים 3 ישרים מקבילים. מסומנות עליהם m , n ו- r נקודות בהתאמה, כך שכל 3 נקודות שנלקחות מ-3 הישרים אינן על ישר אחד. כמה משולשים שונים יש שקדודיהם על הנקודות המסומנות?
 - ג. נתון ריבוע במישור. על כל צלע מסומנות 10 נקודות שונות (שאינן קדקודי הריבוע). כמה משולשים שונים יש שקדודיהם על הנקודות המסומנות?
 - ד. נתונים במישור n ישרים מקבילים ועוד m ישרים מקבילים בכיוון אחר. כמה מקביליות שונות מתקבלות באמצעות חיתוכי הישרים הללו?
 4.
 - א. בכמה דרכים ניתן להושיב 14 אנשים סביב שולחן עגול?
 - ב. בכמה דרכים ניתן להושיב סביב שולחן עגול 7 נשים ו-7 גברים, כך שכל אישה תשב בין שני גברים?
 - ג. בכמה דרכים ניתן להושיב 7 זוגות נשואים סביב שולחן עגול, כך שכל אישה תשב ליד בעלה?
 - ד. בכמה דרכים ניתן להושיב 14 אנשים, כך ש-8 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והשאר על הספסל?
 - ה. בכמה דרכים ניתן להושיב 14 אנשים, כך ש-8 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והשאר סביב שולחן עגול שני?
- (הערה: שני סידורים סביב שולחן עגול הם זהים אם האחד מתקבל מהשני ע"י סיבוב).

5. הוכיחו את הזהויות הקומבינטוריות הבאות בשתי דרכים שונות (אלגברית וקומבינטורית):

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n} \quad \text{א.} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad \text{ב.} \quad \binom{n}{k} = \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1} \quad \text{ג.}$$

6. יהי p מספר ראשוני ו- k, c מספרים שלמים חיוביים.

א. הוכיחו כי אם $0 < k < p$ אז p מחלק את $\binom{p}{k}$.

ב. (רשות) הוכיחו כי אם $0 < k < p^c$ אז p מחלק את $\binom{p^c}{k}$.

בהצלחה!



פתרון תרגיל מס' 6 במתמטיקה דיסקרטית

1. א. $10!$ ב. $6 \cdot 5 \cdot 8!$

2. א. מספר האפשרויות לחלק 17 כדורים ל-4 קופסאות שונות: $\binom{17+4-1}{17} = \binom{20}{17}$.

אם אסור שתישאר קופסא ריקה: $\binom{13+4-1}{13} = \binom{16}{13}$.

ב. שימו לב שמדובר בדיוק באותה הבעיה מסעיף א', רק הניסוח שונה.

3. א. יש שתי דרכים לפתור את הבעיה:

דרך 1: נבחר נקודה אחת על ישר אחד ושתיים על הישר השני. נקבל את הנוסחא:

$$\binom{m}{1} \binom{n}{2} + \binom{m}{2} \binom{n}{1}$$

דרך 2: נספור את כל שלשות הנקודות, ונחסר את אלו שנמצאות על אותו ישר. נקבל את הנוסחא:

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}$$

שימו-לב, שיש שוויון בין שתי הנוסחאות.

ב. $\binom{m+n+r}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} - \binom{r}{3}$.

ג. יש שתי דרכים לפתור את הבעיה.

דרך 1: נבחר את הנקודות על שתיים או שלוש צלעות, ונקבל: $4 \cdot 3 \cdot \binom{10}{2} \cdot 10 + 4 \cdot 10^3 = 9400$

דרך 2: נספור את כל שלשות הנקודות, ונחסר את אלו שנמצאות על אותה הצלע. נקבל:

$$\binom{40}{3} - 4 \cdot \binom{10}{3} = 9400$$

ד. $\binom{m}{2} \binom{n}{2}$.

4. א. $13!$ ב. $6! \cdot 7!$ ג. $6! \cdot 2^7$ ד. $7! \cdot 6!$ ה. $7! \cdot 5!$ $\binom{14}{8}$

5. זהויות קומבינטוריות:

א. $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$

הוכחה אלגברית: ידוע ש- $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$ (למה?) וגם ש- $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$ (למה?). מכאן ניתן להסיק ש-

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$$

ולקבל את השוויון הדרוש.

הוכחה קומבינטורית: נספור את מספר תת-הקבוצות של $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$ שגודלן לכל היותר n בשתי דרכים שונות. נשים לב, שלכל תת-קבוצה בגודל $k \leq n$ יש תת-קבוצה משלימה בגודל $2n+1-k > n$. לכן, מצד אחד, מספרן הוא $2^{2n+1}/2 = 2^{2n}$, ומצד שני, יש $\binom{2n+1}{k}$ תת-קבוצות

בגודל k , ולכן מספרן הוא $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

ב. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

זהו מקרה פרטי של השוויון שהוכחתם בכיתה: $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$, עבור $a=b=n$.

ההוכחות האלגברית והקומבינטורית מחקות את אלו שנלמדו בשיעור.

ג. $\binom{n}{k} = \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1}$

הוכחה אלגברית: באינדוקציה על n .

עבור $n=1$: אפשרי רק ש- $k=1$, ואז $\binom{1}{1} = \sum_{m=0}^0 \binom{m}{0} = \binom{0}{0} = 1$ כנדרש.

נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח אותה עבור $n+1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1} = \sum_{m=k-1}^n \binom{m}{k-1}$$

ע"י שימוש בזהות מתרגיל 5, שאלה 4-ב' ובהנחת האינדוקציה.

הוכחה קומבינטורית: ידוע כי מספר תת-הקבוצות של $\{1, \dots, n\}$ בגודל k הוא $\binom{n}{k}$. עתה, נספור

אותן באופן הבא. נתבונן באיבר הכי גדול בקבוצה (הוא חייב להיות לפחות k) ונסמנו ב- $m+1$.

שאר $k-1$ אברי הקבוצה נבחרו מבין הקודמים לו, ולכן יש עבורם $\binom{m}{k-1}$ אפשרויות.

6. א. $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$: משום ש- p ראשוני, p לא מופיע בפירוק לראשוניים במכנה, אך מופיע במונה.

ב. $\binom{p^c}{k} = \frac{p^c!}{k!(p^c-k)!}$:

הוכחה 1: נספור כמה פעמים p מופיע במונה ובמכנה.

מספר הפעמים ש- p מופיע במונה: $p^{c-1} + p^{c-2} + \dots + p + 1$.

מספר הפעמים ש- p מופיע במכנה:

$$(\lfloor k/p \rfloor + \lfloor k/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor k/p^c \rfloor) + (\lfloor (p^c-k)/p \rfloor + \lfloor (p^c-k)/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor (p^c-k)/p^c \rfloor)$$

נחבר את שני הסכומים איבר-איבר, ונקבל שהסכום הוא לכול היות:

$$\lfloor p^c/p \rfloor + \lfloor p^c/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor p^c/p^c \rfloor = p^{c-1} + p^{c-2} + \dots + p + 1$$

וזהו בדיוק הסכום שהתקבל במונה. אך כאשר חיברנו את הערכים השלמים, איבדנו לפחות 1, משום ש- $\lfloor k/p^c \rfloor = \lfloor (p^c-k)/p^c \rfloor = 0$.

הוכחה 2: באינדוקציה על c .

עבור $c=1$: הטענה נכונה לפי סעיף א'.

נניח שהטענה נכונה ל- c . נתבונן בביטוי: $(x+y)^{p^c} = \sum_{k=0}^{p^c} \binom{p^c}{k} x^k y^{p^c-k}$, ואז לכל $0 < k < p^c$,

הגורם $\binom{p^c}{k}$ מתחלק ב- p .

נוכיח את הטענה עבור $c+1$. נתבונן בביטוי:

$$\sum_{l=0}^{p^{c+1}} \binom{p^{c+1}}{l} x^l y^{p^{c+1}-l} = (x+y)^{p^{c+1}} = \left((x+y)^{p^c} \right)^p = \left(\sum_{k=0}^{p^c} \binom{p^c}{k} x^k y^{p^c-k} \right)^p$$

אז כל גורם מהצורה $\binom{p^{c+1}}{l}$ הוא מכפלה של p גורמים מהצורה $\binom{p^c}{k}$. אם לפחות עבור אחד

הגורמים הללו, $0 < k < p^c$, אז p יחלק את $\binom{p^c}{k}$ ולכן גם את $\binom{p^{c+1}}{l}$.

אחרת, או שכל הגורמים הם עם $k=0$, ואז נקבל ש- $l=0$, או שכל הגורמים הם עם $k=p^c$, ואז נקבל ש- $l=p^{c+1}$. בכל אופן, הטענה נכונה לכל $0 < l < p^{c+1}$.

תרגיל 7 במתמטיקה דיסקרטית - לא להגשה

סמסטר א', תשס"ו

1. כמה פתרונות בשלמים יש למערכות הבאות:

- (ב) $\sum_{i=1}^{10} x_i = 20$, לכל $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 5$, וגם $x_i \geq 2$ לכל $6 \leq i \leq 10$.
- (ג) $\sum_{i=1}^{10} x_i = 20$, עבור $0 \leq x_i \leq 2$, $1 \leq i \leq 2$, עבור $0 \leq x_3 \leq 1$, וגם $0 \leq x_i$ עבור $4 \leq i \leq 10$.
- (ד) $\sum_{i=1}^{10} x_i = 20$, עבור $0 \leq x_i \leq 3$, $1 \leq i \leq 5$, וגם $1 \leq x_i \leq 4$ עבור $6 \leq i \leq 10$.

2.

- (ב) כמה פונקציות הפיכות $f: [n] \rightarrow [n]$ ישנן כך ש $\forall i: f(i) \neq i$?
- (ג) כמה פונקציות $f: [n] \rightarrow [n]$ ישנן כך ש $\forall i: f(i) \neq i$? (הפתרון אמור להיות סכום, לא נוסחה סגורה).

3. בבחירות בין מועמד A למועמד B זכה כל אחד מהמועמדים ב n קולות בדיוק.

- (ב) בכמה דרכים ניתן לספור את הקולות כך שבשום שלב B לא יצבור יותר קולות מ A ?
- (ג) בכמה דרכים ניתן לספור את הקולות כך שעד ספירת הקול ה $i-1$ י A יצבור יותר קולות מ B , ואח"כ (ז"א מספירת הקול ה i והלאה) בשום שלב A לא יצבור יותר קולות מ B ?
- (ד) בכמה דרכים ניתן לספור את הקולות כך שיש שלב מסוים שעד אליו A יוביל ממש על B (מהקול הראשון והלאה), ואח"כ לעולם A לא יוביל על B ?

4.

- (ב) בכמה דרכים ניתן לבחור m כסאות מתוך שורה של n כסאות כך שלא נבחר שני כסאות סמוכים?
- (ג) בכמה דרכים ניתן לבחור m כסאות מתוך n כסאות הנמצאים סביב שולחן עגול כך שלא נבחר שני כסאות סמוכים זה לזה?

פתרון תרגיל 7 במתמטיקה דיסקרטית

סמסטר א', תשס"ו

1.

(ב) יש התאמה חח"ע ועל בין פתרונות למשוואה הנתונה לבין פתרונות בשלמים אישיליים של המערכת $\sum_{i=1}^{10} y_i = 10$ דרך ההתאמה:

$$y_i = \begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq 5 \\ x_i - 2, & 6 \leq i \leq 10 \end{cases}$$

לכן מספר הפתרונות הוא כבחירה עם חזרות של 10 מתוך 10, כלומר $\binom{19}{9}$.

(ג) מכלל הפתרונות יש להוריד את הפתרונות שבהם $x_3 \geq 2, x_2 \geq 3, x_1 \geq 3$. אם כל שלושת התנאים מתקיימים אז יש $\binom{20-8+9}{9}$ פתרונות, אם השניים הראשונים אז יש $\binom{20-6+9}{9}$ פתרונות, אם השניים האחרונים או הראשון והאחרון אז יש $\binom{20-5+9}{9}$ פתרונות, אם רק הראשון או רק השני אז יש $\binom{20-3+9}{9}$ אפשרויות, ואם רק האחרון אז יש $\binom{20-2+9}{9}$ פתרונות. כעת מע-קרון ההכלה וההדחה, מספר הפתרונות הסופי הוא:

$$\binom{29}{9} - \left(\binom{26}{9} + \binom{26}{9} + \binom{27}{9} \right) + \left(\binom{23}{9} + \binom{24}{9} + \binom{24}{9} \right) - \binom{21}{9} = 2217348$$

(ד) כמו בסעיף הראשון, יש התאמה חח"ע ועל בין פתרונות למערכת הנתונה לפתרונות למערכת

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 15, \forall i : 0 \leq y_i \leq 3$$

על סמך עקרון ההכלה וההדחה, בדומה לסעיף הקודם, נחסר ממספר הפתרונות במערכת בלי אילוצים את מספר הפתרונות שבהם יש אילוץ בודד, נוסיף את מספר הפתרונות שבהם יש שני אילוצים, וכך הלאה. מאחר שאין משמעות מיוחדת לאף משתנה, נוכל לסכם יחד מקרים שבהם אותו מספר אילוצים מתקיים. אם j אילוצים מתקיימים, אז נוכל לחסר

4 מה j משתנים המתאימים. נגדיר T_k להיות מספר הפתרונות למערכת $\sum_{i=1}^{10} z_i = k$ כאשר z_i שלמים אישיליים. אז:

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq [10]} (-1)^{|A|} T_{15-4|A|} &= \sum_{j=0}^{10} (-1)^j \binom{10}{j} T_{15-4j} \\ &= \binom{24}{9} - 10 \binom{20}{9} + \binom{10}{2} \binom{16}{9} - \binom{10}{3} \binom{12}{9} \\ &= 116304 \end{aligned}$$

הסכום נעצר אחרי ארבעה איברים מאחר ש $T_k = 0$ עבור $k < 0$.

2.

(ב) עבור $A \subseteq [n]$, נסמן ב $k(A)$ את מספר הפונקציות ההפיכות $f : [n] \rightarrow [n]$ כך ש $\forall i \in A : f(i) = i$ או $k(A) = (n - |A|)!$. לפי עקרון ההכלה וההדחה, התשובה היא:

$$\sum_{A \subseteq [n]} (-1)^{|A|} k(A) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{n!}{j!} = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

(ג) נסמן ב $m(A)$ את מספר הפונקציות $f : [n] \rightarrow [n]$ כך ש $\forall i \in A : f(i) = i$ או $m(A) = n^{n-|A|}$ והתשובה היא:

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} n^{n-j}$$

באופן ישיר אפשר גם לראות שכל מספר יכול לעבור ל $n - 1$ ערכים שונים (ז"א כל מספר פרט לעצמו) ולכן יש $(n - 1)^n$ אפשרויות. פתיחת הביטוי הזה בעזרת הבינום תספק שוב את התשובה שחישבנו כבר.

3.

(ב) נגדיר מסלול להיות סדרה של נקודות אשר מתחילה בנקודה כלשהי במישור ונעה בכל שלב יחידה אחת ימינה או למעלה. ספירות הקולות בהן B לא מוביל על A אף פעם הן בהתאמה חח"ע ועל למסלולים אשר מתחילים ב $(0, 0)$ ומסתיימים ב (n, n) בלי לחצות את האלכסון $y = x$; ע"י הזזה ביח-ידה אחת ימינה, נקבל התאמה למסלולים אשר מתחילים ב $(1, 0)$, מסתיימים ב $(n + 1, n)$, ואינם נוגעים באלכסון.

המסלולים מ $(1, 0)$ ל $(n + 1, n)$ אשר כן נוגעים באלכסון הם בהתאמה חח"ע ועל לכלל המסלולים מ $(0, 1)$ ל $(n + 1, n)$ (אשר כולם חוצים את האלכסון) ע"י שיקוף חלק המסילה אשר נמצאת עד למפגש הראשון עם האלכסון (שיקוף - הכוונה לכך שהנקודה (x, y) במסילה מוחלפת בנקודה (y, x)). מספר המסילות האלה, אם כך, הוא $\binom{2n}{n-1}$; סך מספר המסלולים מ $(1, 0)$ ל $(n + 1, n)$ הוא $\binom{2n}{n}$; ולכן מספר המסלולים המבוקשים הוא

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

(ג) אפשר להניח ש i הוא זוגי, כי אחרת אין שום דרך שהמבוקש יתקיים. נסמן $i = 2j$. כעת פירקנו את הבעיה מהסעיף הקודם לשתי בעיות: יש למצוא מסלול מ $(0, 0)$ ל (j, j) שלא נוגע באלכסון עד לנקודה הזו ולכפול אותו במספר המסלולים מ (j, j) ל (n, n) שלא עוברים מעל לאלכסון. אם נוריד את הקול הראשון (אשר חייב להיות ל A) ו i (אשר חייב להיות ל B), נקבל התאמה חח"ע ועל בין פתרונות לחלק הראשון של הבעיה למסילות מ $(0, 0)$ ל $(j-1, j-1)$ אשר אינן חוצות את האלכסון. לכן הפתרון הוא:

$$\frac{1}{j} \binom{2j-2}{j-1} \cdot \frac{1}{n-j+1} \binom{2(n-j)}{n-j}$$

(ד) ע"י החלפת הקולות שניתנים ל A ול B עד לנקודת השוויון, נקבל התאמה חח"ע ועל לספירות שבהן B תמיד מוביל על A , ולכן התשובה זהה לזו בסעיף הראשון, קרי $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

4.

(ב) אם הכסא הימני ביותר לא נבחר, אז מימין לכל כסא שנבחר יש כסא שלא נבחר, ויש לבחור m צמדים כאלה. יש התאמה חח"ע ועל בין בחירות של m כסאות משורה עם $n-m$ כסאות לבחירות כנ"ל, ע"י החלפת כל כסא שנבחר בצמד של כסא ומקום ריק מימינו. לכן יש $\binom{n-m}{m}$ אפשרויות כאלה. אם הכסא הימני ביותר נבחר, אז הכסא שמשמאלו לא נבחר. כעת שוב כל אחד מה $m-1$ כסאות האחרים ממלא למעשה שני מקומות, שהם המקום שלו והמקום מימינו, וכלן יש $\binom{n-1-(m-1)}{m-1}$ אפשרויות. בסה"כ:

$$\binom{n-m}{m-1} + \binom{n-m}{m} = \binom{n-m+1}{m}$$

(ג) הבהרה: הכוונה לכך שהכיסאות במעגל ממוספרים ולכן שונים. נצבע את אחד הכסאות במעגל בירוק, ונפתח את המעגל לשורה כך שהכסא הירוק הוא הימני ביותר. מתוך כלל האפשרויות כפי שנספרו בסעיף הקודם, יש לחסר את המקרים בהם גם הכסא הימני ביותר וגם השמאלי ביותר נבחרו, מאחר שהם לא חוקיים במעגל. הסידורים האלה הם בהתאמה חח"ע ועל עם בחירת $m-2$ כסאות משורה של $n-3$ כסאות כך שהכסא הכי ימני בה ריק (נוריד את הכסא הימני ביותר, וכן את שני הכסאות השמאליים ביותר מהשורה המקורית). לכן הפתרון הוא:

$$\binom{n-m+1}{m} - \binom{n-3-(m-2)}{m-2} = \binom{n-m+1}{m} - \binom{n-m-1}{m-2}$$

תרגיל מס' 8 במתמטיקה דיסקרטית (להגשה)

1. א. נתונים 20 כדורים ממוספרים. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל-6 קופסאות בצבעים שונים, כך שאף קופסא לא תישאר ריקה?
ב. מצאו את מספר הפונקציות $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ (כאשר $m \geq n$) שהן על.
ג. מה התשובה לסעיף ב' כאשר $n=6$, $m=20$? מה הקשר לסעיף א'?
2. בכמה דרכים ניתן לסדר את המספרים $1, \dots, 2n$ במטריצה $2 \times n$ כך שהמספרים עולים בכל שורה ובכל עמודה? כלומר, לכל איבר במטריצה האיברים מימינו (אם יש) ומעליו (אם יש) גדולים ממנו.
(רמז: השוו בעיה זו לבעיית הבחירות).
3. הוכחתם בשיעור את המשפט הבא:
משפט (Erdős-Szekeres): בכל סדרה של n^2+1 מספרים ממשיים שונים זה מזה, יש תת-סדרה של לפחות $n+1$ מספרים שהיא יורדת או עולה.
הוכיחו כי חסם זה הוא הדוק, כלומר: תנו דוגמא לסדרה באורך n^2 שלא מכילה שום תת-סדרה עולה או יורדת באורך $n+1$.
4. א. הוכיחו שאם $\{a_1, \dots, a_n\}$ מספרים שלמים שונים זה מזה, אזי יש תת-קבוצה לא ריקה שלהם שסכומה מתחלק ב- n .
ב. תהי $A = \{a_1, \dots, a_{10}\}$ קבוצת מספרים שלמים שונים זה מזה. האם בהכרח קיימת תת-קבוצה לא ריקה של A שסכומה מתחלק ב-11?
5. צלף יורה חצים על מטרה בצורת משולש שווה צלעות שאורך צלעו שווה ל-1.
א. הראו שאם הצלף יורה 5 חצים (שכולם פוגעים במטרה) אז יש 2 מהם שיפגעו במטרה במרחק של לכל היותר $\frac{1}{2}$ זה מזה. (רמז: חלקו את המשולש למשולשים שווים צלעות קטנים יותר).
ב. הוכיחו שאם הצלף יורה n^2+1 חצים (שכולם פוגעים במטרה) אז יש 2 מהם שיפגעו במטרה במרחק של לכל היותר $1/n$ זה מזה. (רמז: $n^2 = 1+3+\dots+(2n-1)$).
6. א. יהיו $m_1, \dots, m_n$ מספרים שלמים שמוצעים לפחות k . הוכיחו שקיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $m_i \geq k$.
ב. נסדר את המספרים $1, \dots, 10$ סביב מעגל בסדר כלשהו. הוכיחו שקיימים 3 מספרים רצופים על המעגל שסכומם לפחות 17.

בהצלחה!



פתרון תרגיל מס' 8 במתמטיקה דיסקרטית

1. א. נגדיר את הקבוצות הבאות :

$S =$ קבוצת כל הסידורים האפשריים של 20 הכדורים הממוספרים ב-6 הקופסאות.

$A_i =$ קבוצת כל הסידורים האפשריים של 20 הכדורים כך שהקופסא ה- i נשארת ריקה ($1 \leq i \leq 6$).

הפתרון המבוקש הוא : $|S| - \left| \bigcup_{i=1}^6 A_i \right|$.

ברור כי $|S| = 6^{20}$. על-מנת לחשב את גודל האיחוד, נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה :

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^6 A_i \right| &= \sum_{i=1}^6 |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k < l < m \leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| - \left| \bigcap_{i=1}^6 A_i \right| \end{aligned}$$

נחשב כ"א מהגורמים בנפרד. משיקולי סימטריה, די לחשב את אחד הגורמים בכל סכום.

$$|A_i| = 5^{20}, |A_i \cap A_j| = 4^{20}, |A_i \cap A_j \cap A_k| = 3^{20}, |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 2^{20}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| = 1, \left| \bigcap_{i=1}^6 A_i \right| = 0$$

$$\text{התשובה הסופית היא לכן : } 6^{20} - \left(6 \cdot 5^{20} - \binom{6}{2} \cdot 4^{20} + \binom{6}{3} \cdot 3^{20} - \binom{6}{4} \cdot 2^{20} + 6 \cdot 1 \right)$$

ב. אפשר להתבונן בבעיה באופן הבא : ישנם m כדורים ממוספרים מ-1 עד m ו- n קופסאות ממוספרות מ-1 עד n . כל פונקציה f משרה חלוקה של הכדורים לקופסאות באופן הבא : $f(i)=j$ אם הכדור ה- i נמצא בקופסא ה- j . f על אם"ם אף קופסא לא נשארת ריקה.

כמו בסעיף א', נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. נגדיר את הקבוצות הבאות :

$S =$ קבוצת כל הסידורים האפשריים של m הכדורים הממוספרים ב- n הקופסאות.

$A_i =$ קבוצת כל הסידורים האפשריים של m הכדורים כך שהקופסא ה- i נשארת ריקה ($1 \leq i \leq n$).

$$\text{הפתרון המבוקש הוא : } |S| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|, \text{ והתשובה הסופית היא לכן : } n^m - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^m \right)$$

ג. אותה התשובה מסעיף א'.

2. כזכור, בעיית הבחירות הרגילה היא פונקציה $f: \{1, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, -1\}$, כך שאם הפתק ה- i היה עבור המועמד הראשון, $f(i)=1$, ואם הוא היה עבור המועמד השני, $f(i)=-1$. הפונקציה f מקיימת את התכונות הבאות :

$$\sum_{i=1}^{2n} f(i) = 0, \forall k < 2n : \sum_{i=1}^k f(i) \geq 0$$

נראה כי כל פונקציה f כזו שקולה לסידור מטריצה כמבוקש, ולכן מספר הדרכים לסידור המטריצה הוא מספר קטלן C_n .

בהינתן פונקציה f כ"ל, נסדר את המספרים במטריצה באופן הבא: בשורה הראשונה נסדר בסדר עולה את הקבוצה בגודל n הבאה $\{i: f(i)=-1\}$. בשורה השנייה נסדר בסדר עולה את הקבוצה בגודל n הבאה $\{i: f(i)=1\}$. בדקו שהסידור הנ"ל מכבד את התנאי המבוקש.

בהינתן סידור חוקי של המספרים במטריצה, נגדיר את הפונקציה f באופן הבא: אם i נמצא בשורה הראשונה אז $f(i)=-1$, ואם i נמצא בשורה השנייה אז $f(i)=1$. בדקו ש- f מקיימת את התנאים הנדרשים.

3. דוגמא:

$$\{n^2-n+1, n^2-n+2, \dots, n^2-1, n^2, n^2-2n+1, n^2-2n+2, \dots, n^2-n-1, n^2-n, \dots, 1, 2, \dots, n-1, n\}$$

כלומר: n בלוקים של n מספרים כ"א, כך שבתוך כל בלוק המספרים עולים ממש, ובין בלוקים שונים המספרים יורדים ממש.

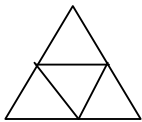
4. א. נתבונן בקבוצת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{i=1}^k a_i\right\}_{k=1}^n$. הקבוצה הזו היא בת n איברים, נסמן ב- r_k את

השארית בחלוקה ב- n של הסכום החלקי $\sum_{i=1}^k a_i$, ונשים לב ש- $0 \leq r_k \leq n-1$. נתבונן בקבוצת השאריות

$\{r_k\}_{k=1}^n$. אם 0 שייך לקבוצה הזו אז סיימנו (למה?). אחרת, לפי עקרון שובך היונים יש $s < t$ כך ש-

$$r_s = r_t \quad \text{ואז} \quad \sum_{i=s+1}^t a_i \quad \text{מתחלק ב-} n \text{ בלי שארית (למה?).}$$

ב. הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית: ניקח את הסדרה שבה $a_i = 1 + 11 \cdot i$. נשים לב כי לכל $B \subseteq A$ (לא ריקה) השארית של סכום כל אברי B בחלוקה ב-11 תהיה $1 \leq |B| \leq 10$.



5. א. נחלק את המשולש ל-4 משולשים שווים-צלעות קטנים, שאורך צלעם $\frac{1}{2}$ (כמו בציור): לפי עקרון שובך היונים, לפחות 2 חצים יפגעו באותו משולש קטן, לכן המרחק ביניהם יהיה לכל היותר $\frac{1}{2}$ (למה?).

ב. באותה השיטה, נחלק את המשולש הגדול למשולשים שווים-צלעות קטנים שאורך צלעם $\frac{1}{n}$. נשים לב לכך שקיבלנו n^2 משולשים קטנים (לפי הרמז: $n^2 = 1 + 3 + \dots + 2n - 1$). לפי עקרון שובך היונים, לפחות 2 חצים יפגעו באותו משולש קטן, לכן המרחק ביניהם יהיה לכל היותר $\frac{1}{n}$ (למה?).

6. א. אחרת, אם כל $m_i < k$, אזי $m_1 + \dots + m_n < nk$, ולכן הממוצע שלהם יהיה קטן ממש מ- k , וסתירה.

ב. נסדר את המספרים $1, \dots, 10$ במעגל. נסמן את המספרים בסדר שקיבלנו ב- $a_1, \dots, a_{10}$. נתבונן בסכומים הבאים:

$$m_1 = a_1 + a_2 + a_3, m_2 = a_2 + a_3 + a_4, \dots, m_8 = a_8 + a_9 + a_{10}, m_9 = a_9 + a_{10} + a_1, m_{10} = a_{10} + a_1 + a_2$$

נסכום את כל הסכומים הללו, ונקבל ש- $m_1 + \dots + m_{10} = 3(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) = 3 \cdot 55$ (למה?).

לכן, הממוצע של כל ה- m_i הוא 16.5. לפי סעיף א', קיים $m_i \geq 16.5$, ומשום שכל ה- m_i הם מספרים שלמים, בעצם $m_i \geq 17$.

תרגיל 9 במתמטיקה דיסקרטית - לא להגשה

סמסטר א', תשס"ו

1. שאלות מולטינום:

(ב) הראו ש $\binom{n}{m_1, \dots, m_l}$ הוא המקדם של $\prod_{i=1}^l x_i^{m_i}$ כשפותחים את הסוגריים של $(x_1 + \dots + x_l)^n$.
(ג) הסיקו ש:

$$\sum_{(i_1, \dots, i_l), (j_1, \dots, j_l)} \left\{ \binom{n}{i_1, \dots, i_l} \binom{k}{j_1, \dots, j_l} : \sum_{t=1}^l i_t = n \wedge \sum_{t=1}^l j_t = k \wedge \forall t : i_t + j_t = m_t \right\} = \binom{n+k}{m_1, \dots, m_l}$$

(ד) הסיקו, כפי שהופיע בתרגיל קודם, ש:

$$\binom{n+k}{t} = \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \binom{k}{t-i}$$

2. הוכיחו שאם מציינים אוסף של קטעים עם אורך מצטבר הגדול מ-2 בתוך ריבוע שאורך צלעו 1, אז יש קו המקביל לאחת מצלעות הריבוע אשר חותך לפחות שניים מהקטעים.

3. הגדרה: יהיו a, b קודקודים בגרף (לא מכוון). נאמר ש a קשור ל b אם יש מסילה בין a ל b , כלומר ניתן להגיע מ a ל b ע"י הליכה לאורך צלעות הגרף. נסמן יחס זה ב $a \sim b$.

(ב) הוכיחו ש $\sim$ הוא יחס שקילות (מחלקות השקילות נקראות רכיבי הקשירות של הגרף).

(ג) תנו דוגמה לגרף עם 3 רכיבי קשירות ודוגמה לגרף עם רכיב קשירות בודד (גרף כזה נקרא קשיר).

4. יהי a קודקוד בגרף לא מכוון G . הדרגה של a ב G היא מספר הצלעות ב G אשר מכילות את a , ונסמנה ב $d_G(a)$.

(ב) הראו שבכל גרף סופי יש שני קודקודים שווי דרגה.

(ג) לגבי כל אחת מהסדרות הבאות, קבעו אם קיים גרף כך שזוהי סדרת דרגות קודקודיו. אם כן, תנו דוגמה; אם לא, הוכיחו מדוע אין.

i. (2, 2, 3, 3, 4, 4)

ii. (4, 4, 4, 4, 4)

iii. (3, 3, 3, 3, 3, 3)

iv. (1, 1, 1, ..., 1) (100 פעמים)

v. (0, 1, 2, 3, ..., 19, 20)

פתרון תרגיל 9 במתמטיקה דיסקרטית

סמסטר א', תשס"ו

1.

(ב) אנו מקבלים תרומה למקדם הנתון כאשר אנחנו בוחרים, בפתיחת הסוגריים, את האיבר x_1 ב m_1 מקרים מתוך n בסה"כ; את האיבר x_2 ב m_2 מקרים; וכך הלאה. ז"א צריך לחלק n כדורים זהים ל l תאים שונים כך שיהיו m_1 כדורים בתא הראשון, m_2 בתא השני, וכך הלאה, עם m_l בתא האחרון. זה בדיוק המולטינום.

(ג) שימו לב ש:

$$(x_1 + \dots + x_l)^n (x_1 + \dots + x_l)^k = (x_1 + \dots + x_l)^{n+k}$$

כעת, ע"מ לקבל את המקדם של $\prod x_i^{m_i}$, באגף שמאל נצטרך לסכם את המכפלות של המקדמים של איברים מהצורה $x_i^{t_i}$ באיבר הראשון במכפלה, ושל $x_i^{m_i - t_i}$ מהאיבר השני במכפלה; ובאגף ימין נקבל פשוט את המולטינום. עם מעט בהייה באינדקסים אפשר לראות שזהו בדיוק הביטוי שרשום בשאלה.

(ד) במקרה זה $l = 2$. בהינתן i_1 מהסעיף הקודם, אנחנו יודעים את $i_2 = n - i_1$, וכן את $j_1 = m_1 - i_1$ ואת $j_2 = k - j_1$. לכן, מספיק לסכם על i_1 ולרשום באגף שמאל את מכפלת הבינומים. אם במקום i_1 נרשום t נקבל את הביטוי שרשום בשאלה.

2. נטיל את הקטעים על שתי צלעות סמוכות של הריבוע. סך אורך שני ההיטלים של קטע הוא לפחות כאורך הקטע עצמו, מאחר שההיטלים יוצרים משולש יחד עם הקטע המקורי, וסכום אורך שתי צלעות במשולש תמיד גדול מאורך הצלע השלישית. מכאן, שסך אורך ההיטלים גדול מ-2, ולכן יש צלע שעליה ההיטל ארוך מ-1. לכן, יש נקודה על האחת הצלעות שמכוסה ע"י 2 צלעות שונות לפחות. כעת הישר דרך נקודה זו אשר ניצב לצלע (ומקביל לצלע השנייה) חותך כל קטע אשר מכסה נקודה זו, ולכן הוא חותך 2 קטעים לפחות.

3.

(ב) רפלקסיביות: המסילה הריקה מקשרת כל נקודה לעצמה. סימטריות: אם יש מסילה מ a ל b , אז אפשר ללכת על הקשתות בכיוון ההפוך (מאחר שהגרף אינו מכוון) ולחזור מ b ל a . טרניזיביות: אם יש מסילות מ a ל b ומ b ל c , אז שרשורם יניב מסילה מ a ל c .

(ג) הגרף עם שלוש נקודות וללא קשתות מכיל 3 מחלקות קשירות, אחת לכל נקודה. פורמלית:

$$V(G) = \{1, 2, 3\}, E(G) = \emptyset$$

הגרף עם נקודה בודדת וללא קשתות מכיל מחלקת קשירות בודדת. פורמ-
לית:

$$V(G) = \{1\}, E(G) = \emptyset$$

4.

(ב) נניח בשלילה שיש לנו גרף עם n קודקודים שבו לכל קודקוד דרגה שונה. יש n אפשרויות שונות לדרגה, קרי $\{0, 1, \dots, n-1\}$; אז מאחר שאין חזרות, כך אפשרות מנוצלת. לכן יש קודקוד עם דרגה 0 וקודקוד עם דרגה $n-1$. מצד אחד, בין שני הקודקודים האלה עוברת קשת וכי יש קשת בין הקודקוד מדרגה $n-1$ לכל קודקוד אחר; מצד שני, אין ביניהם קשת, כי אין אף קשת שמכילה את הקודקוד מדרגה 0. סתירה.

(ג)

i. יש: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$$E = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$$

ii. יש: הגרף המלא K_5 עם 5 נקודות.

iii. אין: סכום הדרגות הוא $21 = 7 \cdot 3$, מספר איזוגי. אבל סכום הדרגות בגרף הוא פעמיים מספר הקשתות (מאחר שכל קשת תורמת 2 לסכום הדרגות) ומכאן שהוא חייב להיות זוגי.

iv. יש: $V = [100]$, ויש קשת בין שני מספרים אם הם ההפרש ביניהם 50. אז הדרגה של כל קודקוד היא 1 (מדוע?)

v. אין: ע"פ הסעיף הקודם, חייבים להיות שני קודקודים שווי דרגה.

תרגיל מס' 10 במתמטיקה דיסקרטית (להגשה)

הערה: בתרגיל זה $G = (V, E)$ הוא גרף לא מכוון.

1. הגדרה: **הגרף המשלים** של G הוא הגרף $\bar{G} = (V, \bar{E})$ כאשר קבוצת הקדקודים של $\bar{G}$ זהה לזו של G , ואילו שני קדקודים u, v הם שכנים ב- $\bar{G}$ אם הם אינם שכנים ב- G .
 - א. הוכיחו כי אם G לא קשיר, אז $\bar{G}$ קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.
 - ב. הוכיחו שאם ל- G יש קוטר גדול או שווה ל-4, אזי הקוטר של $\bar{G}$ הוא לכל היותר 2.
 - ג. תנו דוגמא לגרף G שקוטרו 3 והקוטר של $\bar{G}$ הוא גם-כן 3.
2. נניח של- G יש n קדקודים ודרגת כל קדקוד היא לפחות $(n-1)/2$. הוכיחו כי G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.
3. א. נסמן ב- n את מספר הקדקודים של G , ב- e את מספר הצלעות של G וב- c את מספר רכיבי הקשירות של G . הוכיחו באינדוקציה על e כי: $c \geq n - e$.
 - ב. הסיקו שבגרף קשיר בעל n קדקודים יש לפחות $n-1$ צלעות.
4. א. הוכיחו כי אם הדרגה של כל קדקוד של G היא לפחות 2, אז יש בו מעגל.
 - ב. הוכיחו כי אם ב- G יש $n \geq 3$ קדקודים ולפחות n צלעות, אז יש בו מעגל.
(הדרכה: באינדוקציה על n).
5. יהי G גרף קשיר לא-מכוון **שבו הדרגה של כל קדקוד היא זוגית**. הראו שניתן לכוון את צלעות G כך שדרגת היציאה של כל קדקוד שווה לדרגת הכניסה שלו.
6. בתירגול הוכחנו את הטענה הבאה:
טענה 1: בגרף קשיר לא-מכוון יש מסלול אוילר אם יש בו 0 או 2 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.
הוכיחו את הכללת הטענה הזו:
טענה 2: נניח שבגרף קשיר לא מכוון יש k קדקודים מדרגה אי-זוגית. אזי k זוגי, וניתן לפרק את קבוצת הצלעות של הגרף ל- $k/2$ מסלולים זרים בצלעות.

בהצלחה!



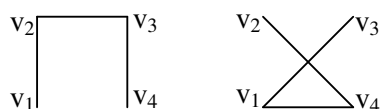
פתרון תרגיל מס' 10 במתמטיקה דיסקרטית

שאלה 1:

א. נניח ש- G אינו קשיר, אז יש ב- G לפחות 2 רכיבי קשירות. יהיו u, v שני קדקודים. אם הם שייכים לרכיבי קשירות שונים של G , אז ודאי שיש ביניהם צלע ב- $\bar{G}$. אם הם שייכים לאותו רכיב קשירות, ניקח קדקוד w ברכיב קשירות אחר, ואז ב- $\bar{G}$ יש מסלול $\langle u, w, v \rangle$. לכן, $\bar{G}$ קשיר וקוטרו לכל היותר 2.

ב. יהיו u, v שני קדקודים. אם $d_G(u, v) > 1$, אזי $\{u, v\} \in \bar{E}$ ולכן $d_{\bar{G}}(u, v) = 1$. אחרת, אם $d_G(u, v) = 1$, נוכיח כי קיים קדקוד w שאינו מחובר ב- G לאף אחד מהקדקודים u, v . (במקרה זה, יש מסלול $\langle u, w, v \rangle$ ב- $\bar{G}$ ולכן $d_{\bar{G}}(u, v) = 2$). אם אין קדקוד w כנ"ל, אזי בין כל שני קדקודים x, y יש מסלול העובר דרך u או דרך v (או דרך שניהם) שאורכו לכל היותר 3 (למה?). וזאת בסתירה להנחה שהקוטרו של G הוא לפחות 4.

ג. דוגמא: הגרפים G ו- $\bar{G}$ הם הגרפים הבאים:



שאלה 2:

נראה שבין כל 2 קדקודים u, v קיים מסלול שאורכו לכל היותר 2.

אם u ו- v שכנים, אז סיימנו. אחרת, ל- u יש לפחות $(n-1)/2$ שכנים ול- v יש לפחות $(n-1)/2$ שכנים, ולכן לפי עקרון שובך היונים יש להם שכן משותף (למה?). נסמנו ב- w . לכן, קיים מסלול $\langle u, w, v \rangle$.

שאלה 3: ראו הוכחה בספר "מתמטיקה בדידה", עמ' 171, טענה 5.1.14.

שאלה 4:

א. יהי v קודקוד כלשהו בגרף, נצא מ- v , ונטייל על צלעות הגרף באופן כלשהו, כאשר אנו מקפידים שלא לחזור מייד לצלע שממנה הגענו. מכיוון שהדרגה של כל קדקוד היא לפחות 2, אז לא ניתקע באף קדקוד. מכיוון שהגרף סופי, נגיע לבסוף לקדקוד שבו כבר ביקרנו, ואז קיבלנו מעגל כנדרש.

ב. ראו הוכחה בספר "מתמטיקה בדידה", עמ' 171, טענה 5.1.15.

שאלה 5:

לפי משפט (אוילר) בגרף G יש מעגל אוילר. נעקוב אחרי המעגל ונכוון את הצלעות בהתאם לו. מעגל אוילר נכנס לכל קודקוד כמספר הפעמים שהוא יוצא ממנו (למה?), ולכן מתקבל כיוון של הצלעות כנדרש.

שאלה 6:

לפי טענה שלמדתם בשיעור, בגרף לא-מכוון מספר הקדקודים מדרגה אי-זוגית הוא תמיד זוגי.

נוסיף לגרף קדקוד נוסף v , ונחבר את כל הקדקודים שדרגתם אי-זוגית בצלע ל- v . בגרף החדש, לכל הקדקודים דרגה זוגית (למה?), ולכן קיים בו מעגל אוילר. עתה נשמיט את הקדקוד ואת הצלעות החדשות שהוספנו, ונקבל $k/2$ מסלולים זרים בצלעות.

תרגיל מס' 11 במתמטיקה דיסקרטית (לא להגשה)

הגדרות: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון.

מסלול שמבקר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת נקרא **מסלול אוילר**. מעגל שמבקר בכל צלע בגרף בדיוק פעם אחת נקרא **מעגל אוילר**. (שימו לב שהגדרה זו טובה גם לגרף מכוון).

מסלול שמבקר בכל קדקוד בגרף בדיוק פעם אחת נקרא **מסלול המילטון**. מעגל שמבקר בכל קדקוד בגרף בדיוק פעם אחת נקרא **מעגל המילטון**.

1. מצאו דוגמאות לגרף לא מכוון :

א. עם מעגל אוילר וללא מעגל המילטון.

ב. עם מעגל המילטון וללא מעגל אוילר.

2. **סדרות De Bruijn**. סדרו על מעגל סדרה באורך 2^n של אפסים ואחדים, כך שכל סדרה באורך n של אפסים ואחדים תופיע כקטע רצוף של הסדרה המעגלית. הדרכה :

א. הגדירו גרף מכוון עם 2^{n-1} קדקודים, שקדקודיו הם כל הסדרות באורך $n-1$ של אפסים ואחדים. לכל קדקוד $x=(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ נוסף צלע מ- x ל- $(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, 0)$ וצלע מ- x ל- $(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, 1)$.

ב. הוכיחו שבגרף המכוון הנ"ל יש מעגל אוילר.

ג. מצאו את הסדרה המעגלית הדרושה.

3. **צופן Gray**. גרף הקוביה ה- n מימדית, שיסומן ב- Q_n , הוא גרף לא מכוון, שאוסף הקדקודים שלו הוא אוסף כל הסדרות $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ עם $a_i \in \{0, 1\}$, ויש צלע בין כל שתי סדרות השונות זו מזו בדיוק בקואורדינטה אחת.

א. הוכיחו שאם $n \geq 2$, אז יש מסלול המילטון על Q_n . (הדרכה: באינדוקציה על n).

ב. לפניכם n נורות כבויות. ניתן להדליק או לכבות כל נורה ע"י לחיצה על מתג. עליכם לעבור על כל 2^n המצבים האפשריים של הנורות. איך תעשו זאת ע"י מספר מינימלי של לחיצות? הוכיחו טענתכם.

4. א. אם כל k נשים מכירות ביחד לפחות $7k$ גברים, הוכיחו כי קיים "שידוך" שבו זוכה כל אישה ב-7 גברים.

ב. אם כל k גברים מכירים לפחות $k-3$ נשים, הוכיחו שקיים שידוך הממצה את כל הגברים, למעט לכל היותר 3 מתוכם.

5. א. בכנסת יש k ועדות. רוצים לבחור בכל אחת מהוועדות יושב-ראש, כך שח"כ לא יכהן כיושב-ראש של יותר מועדה אחת. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שהבחירה אפשרית. הוכיחו טענתכם.

ב. מחלקים את כל חברי הכנסת לפי שתי חלוקות שונות $A_1 \cup \dots \cup A_k = B_1 \cup \dots \cup B_k$. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שניתן לבחור k נציגים $x_1, \dots, x_k$, שיהיו נציגים של כל החלקים הן לפי החלוקה הראשונה והן לפי החלוקה השנייה.

בהצלחה!



פתרון תרגיל מס' 11 במתמטיקה דיסקרטית

1. ראו תרשים 5.3.9 בעמ' 197 בספר "מתמטיקה בדידה".
2. ראו דוגמא 5.3.7 בעמ' 194-196 בספר "מתמטיקה בדידה".
3. א. ראו דוגמא 5.3.10 בעמ' 198 בספר "מתמטיקה בדידה".
ב. ניתן לראות את 2^n המצבים האפשריים של הנורות כקדקודי הגרף Q_n . מסלול המילטון שמצאתם בסעיף א', עובר בכל אחד מהמצבים הללו פעם אחת בדיוק. לכן, ע"י $2^n - 1$ לחיצות, ניתן לעבור על כל 2^n המצבים האפשריים של הנורות. ברור שזהו מספר הלחיצות המינימלי (למה?).
4. א. נניח שלכל אישה יש 7 בנות. נגדיר היכרות בין קבוצת הבנות לקבוצת הגברים באופן הבא: כל בת מכירה את הגברים שמכירה אימה. נבדוק שמתקיימים תנאי משפט Hall, כלומר שכל k בנות מכירות לפחות k גברים. תהי A קבוצה של k בנות, ותהי B קבוצת האמהות שלהן. ברור ש- $|B| \geq k/7$, כי לכל אמה יש בדיוק 7 בנות. לכן, לפי ההנחה, הנשים ב- B מכירות לפחות k גברים, מכאן שהבנות ב- A מכירות לפחות k גברים. ממשפט Hall, קיים שידוך בין קבוצת הבנות לקבוצת הגברים שממזה את כל הבנות. כעת, נשדך לכל אישה את 7 הגברים ששידכנו לבנותיה, וסיימנו.
ב. נוסיף לקבוצת הנשים עוד 3 נשים זרות. ונניח שכל אחת מהנשים הזרות מכירה את כל הגברים. כעת, כל k גברים מכירים לפחות k נשים (לפחות $k-3$ מהנשים המקוריות ואת 3 הנשים הזרות). לכן, לפי משפט Hall, קיים שידוך הממזה את כל הגברים. עתה, נגרש את 3 הנשים הזרות, ואז מספר הגברים שיאבדו את השידוך שלהם הוא לכל היותר 3.
5. א. נשים לב לכך שאנו מחפשים זיווג בין חברי-הכנסת לוועדות, כאשר הזיווג הוא בין ועדה ליושב-הראש שלה. לפי משפט Hall, תנאי הכרחי ומספיק לכך הוא שבכל איחוד של k ועדות יש לפחות k חברי-כנסת שמשתתפים בהן.
ב. התנאי: כל איחוד של $r \leq k$ תת-קבוצות מה- A_i ים חותכות לפחות r תת-קבוצות מה- B_i ים.
הסבר: נתבונן על ה- A_i ים בתור k "גברים" ועל ה- B_i ים בתור k "נשים". תנאי ההיכרות בין גבר A_s לאישה B_t הוא שהחיתוך $A_s \cap B_t$ אינו ריק. התנאי שכתוב לעיל שקול לתנאי Hall במקרה זה. לפי משפט Hall, קיים זיווג מלא, כך שכל A_i מזווג עם $B_{f(i)}$, ונבחר את הנציגים $x_1, \dots, x_k$ כך ש- $x_i \in A_i \cap B_{f(i)}$.

תרגיל 12 במתמטיקה דיסקרטית - להגשה

סמסטר א', תשס"ו

הגדרה: עץ הוא גרף קשיר וחסר מעגלים. עלה בעץ הוא קודקוד מדרגה 1.

1. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

(ב) G עץ.

(ג) בין כל 2 קודקודים ב- G יש מסילה פשוטה יחידה (מסילה פשוטה היא מסילה שבה כל קודקוד מופיע לכל היותר פעם אחת).

(ד) ניתן לסדר את קודקודי G בסדרה כך שכל קודקוד, פרט לראשון, מחובר ב- G לבדיוק אחד מקודמיו בסדרה.

2. הראו ש $(d_1, \dots, d_n)$ היא סדרת הדרגות של עץ כלשהו עם n קודקודים ($n > 1$) אם ורק אם $\forall i : d_i > 0$ וגם $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.

3. הראו שבכל עץ עם לפחות 2 קודקודים יש לפחות 2 עלים.

4. יהי G עץ. הוכיחו ש:

(ב) אם הקוטר של G זוגי, אז החיתוך של כל המסילות הפשוטות באורך $\text{diam}(G)$ מכיל קודקוד.

(ג) אם הקוטר של G איזוגי, אז החיתוך של כל המסילות הפשוטות באורך $\text{diam}(G)$ מכיל צלע.

רמז: גזמו את כל העלים ב- G . הראו שמתקבל עץ. מה קוטרו? המשיכו באינדוקציה.

5. יער הוא איחוד זר של עצים. הראו שמספר היערות על n קודקודים עם קודקוד כחול אחד בכל מרכיב קשירות שווה למספר העצים על $n + 1$ קודקודים עם קודקוד אחד ירוק.

פתרון תרגיל 12 במתמטיקה דיסקרטית

סמסטר א', תשס"ו

1.

• א $\leftrightarrow$ ב: G קשיר $\leftrightarrow$ בין כל 2 קודקודים יש מסילה, ולכן יש גם מסילה פשוטה. אם יש ב- G מעגל, אז יש שתי מסילות פשוטות בין כל שני קודקודים במעגל, כי אפשר ללכת בשני הכיוונים על המעגל. אם יש שתי מסילות פשוטות ב- G בין שתי נקודות, אז קל לראות איך אפשר ליצור מהן מעגל (ע"י שרשרון וביטול החלקים המשותפים).

• א $\leftarrow$ ג: בכל עץ יש קודקוד מדרגה 1 (ראו שאלה 3); יהי $v \in V(G)$ קודקוד כזה. נשמיט אותו ונקבל עץ (מדוע?) עם קודקוד אחד פחות. שם יש סדרה כנדרש, $(v_1, \dots, v_{n-1})$. נוסיף את הקודקוד שלנו במקום האחרון ונקבל סדרה כמבוקש.

• ג $\leftarrow$ א: תהי $a = (v_1, \dots, v_n)$ סדרה כנדרש, ז"א שכל v_i מחובר לבדיוק אחד מה- v_j ים כש $j < i$. בפרט, נובע באינדוקציה שלמה שקיימת מסילה מכל v_i ל- v_1 , ולכן הגרף קשיר. נניח בשלילה שיש בגרף מעגל C , ונמסן ב- v_{i_0} את הקודקוד ב- C עם אינדקס i_0 גדול ביותר. אז v_{i_0} מחובר ל-2 קודקודים ב- C , ולכן מחובר לפחות לשניים מקודמיו בסדרה a . סתירה.

2. נניח ש- G עץ על n קודקודים. מקשירות נובע ש $\forall i : d_i > 0$, כי אחרת יש קודקודים מבודדים. כמו כן ראינו שבעץ יש $n - 1$ צלעות ולכן סכום הדרגות הוא $2(n - 1) = 2n - 2$.

להפך, נפעל באינדוקציה על n . עבור $n = 2$ הטענה ברורה. אחרת, יש קודקוד כלשהו עם דרגה 1, כי אם כל הדרגות הן לפחות 2 אז סכומן לפחות $2n$. בנוסף, יש קודקוד עם דרגה לפחות 2, כי אחרת סכום הדרגות $2n - 2 < n$. נשמיט את הקודקוד מדרגה 1 וכן נחסר 1 מהקודקוד שדרגתו לפחות 2. קיבלנו סדרה חדשה, בוארך $n - 1$, אשר מקיימת את התנאים שלנו. באינדוקציה, נבנה עץ מסדרת הדרגות הזו; ואז, נוסיף את הקודקוד שהשמטנו, ונחבר אליו את הקודקוד שממנו החסרנו 1 לדרגה. קל לראות שאכן קיבלנו עץ.

3. יהי n מספר הקודקודים ב- G . עבור $n = 2$ הטענה ברורה. נוכיח באינדוקציה על n . מאחר שב- G יש $n - 1$ צלעות, אז, כמו בשאלה הקודמת, יש קודקוד מדרגה 1. נשמיט אותו ונקבל גרף G' שהוא עדיין עץ (מדוע?) ולכן מכיל 2 עלים. ב- G נקבל שהקודקוד שהשמטנו הוא עלה, והוא מחובר לכל היותר לאחד משני העלים של G' , ולכן גם ב- G יש לפחות שני עלים.

4. אם $\text{diam}(G) = 1$ או $\text{diam}(G) = 0$ אז הטענה ברורה. נמשיך באינדוקציה על $\text{diam}(G)$. נגזום את כל עלי G ונקבל גרף G' . מאחר שכל מסילה מכסימ-לית מתקצרת ב-2 ע"י תהליך הגיזום הזה (הוכח) וכל מסילה מכסימלית ב- G' מתקבלת ממסילה מכסימלית ב- G ע"י גיזום, הטענה נובעת באינדוקציה.

5. נבנה פונקציות התאמה בין הקבוצות:

בהנתן יער עם קודקוד כחול בכל מרכיב קשירות, אנו נוסיף קודקוד ירוק אחד, נחבר את כל הקודקודים הכחולים אליו, ונשכח את צבע הקודקודים הכחולים. בהנתן עץ על $n + 1$ קודקודים עם קודקוד ירוק, נבצע בכחול את כל השכנים של הקודקוד הירוק, ואז נמחק את הקודקוד הירוק ואת צלעותיו. קל לבדוק שהפונקציות הפוכות אחת לשנייה ולכן הקבוצות שהן מתאימות ביניהן שוות עוצמה.

תרגיל מס' 13 במתמטיקה דיסקרטית (לא להגשה)

1. א. הוכיחו את הטענה הבאה :

טענה: יהי T עץ. נבנה גרף חדש ע"י הוספת קדקוד נוסף x וחיבור x לקדקוד אחד בדיוק ב- T . אז הגרף החדש גם הוא עץ. יתר על כן, כל עץ סופי מתקבל באופן זה, כלומר ע"י הוספת קדקוד אחרי קדקוד, וחיבור הקדקוד החדש לקדקוד קיים ע"י צלע.

ב. בעזרת הטענה לעיל, סיפרו וציירו את כל העצים הלא מתוייגים עם 2, 3, 4, 5 ו-6 קדקודים.

2. סיפרו וציירו את כל העצים המתוייגים שדרגות קדקודיהם נתונות להלן :

א. $(3,2,1,1,1)$.

ב. $(3,3,1,1,1)$.

ג. $(3,2,2,1,1,1)$.

3. הוכיחו כי מספר העצים המתוייגים בעלי n קדקודים שבהם לקדקוד ה- n יש דרגה k הוא

$$\binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

4. נסמן ב- f_n את מספר הסדרות של 0-ים ו-1-ים באורך n שאינן מכילות שני 1-ים רצופים.

א. חשבו במפורש את f_n ל- $0 \leq n \leq 5$ (רשמו את כל הסדרות האפשריות).

ב. הוכיחו את נוסחת הנסיגה הבאה : $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (לכל $n \geq 2$).

ג. הוכיחו את הזהות : $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ (באינדוקציה על n ובעזרת סעיף ב').

הערה: המספר f_n נקרא **מספר פיבונאצ'י ה- n** .

הערה: את השאלות הבאות תוכלו לפתור רק לאחר שתלמדו על **מספרי רמזי**.

5. הוכיחו כי מספרי רמזי מקיימים את נוסחת הנסיגה הבאה : $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$ (לכל $s, t \geq 3$).

6. הוכיחו כי $R(3,3)=6$.

7. הוכיחו כי $R(3,4)=9$.

הדרכה: א. הוכיחו כי $R(3,4) \geq 9$ ע"י כך שתמצאו צביעה של צלעות K_8 , שאין בה משולש כחול או K_4 אדום (רמז: סדרו 8 קדקודים על מעגל וצבעו בכחול את הצלעות המחברות בין 2 קדקודים מנוגדים או סמוכים, ובאדום את שאר הצלעות).

ב. הוכיחו כי $R(3,4) \leq 9$ באופן הבא. נניח שנתונה צביעה כלשהי של צלעות K_9 באדום וכחול.

- הראו שאם מאחד הקדקודים של K_9 יוצאות 4 צלעות כחולות או יותר, אז יש בגרף משולש כחול או K_4 אדום.
- הראו שאם מאחד הקדקודים של K_9 יוצאות 6 צלעות אדומות או יותר, אז יש בגרף משולש כחול או K_4 אדום.
- הסיקו כי במקרה הנותר יוצאות מכל קדקוד בדיוק 3 צלעות כחולות ו-5 אדומות. האם מקרה זה אפשרי?

8. הוכיחו כי $R(4,4)=18$.

הדרכה: א. הוכיחו כי $R(4,4) \geq 18$ ע"י כך שתמצאו צביעה של צלעות K_{17} שאין בה K_4 כחול או K_4 אדום. (רמז: סדרו 17 קדקודים במעגל, וצבעו בכחול את הצלעות המחברות בין 2 קדקודים שמרחקם על-גבי המעגל הוא 1,2,4,8 יחידות, ובאדום את כל השאר).

ב. הסיקו כי $R(4,4) \leq 18$ משאלות 5 ו-7.

בהצלחה!



פתרון תרגיל מס' 13 במתמטיקה דיסקרטית

1. א. נסמן את הגרף החדש המתקבל מהוספת הקדקוד x ל- T ע"י G . נסמן ב- y את הקדקוד היחיד של T שאליו מתחבר x . נוכיח כי G קשיר וחסר מעגלים.

G קשיר, כי בהינתן 2 קדקודים, אם שניהם שונים מ- x , אז יש ביניהם מסילה כבר ב- T . ובין x לכל קדקוד אחר, יש מסילה העוברת דרך y .

G חסר מעגלים, כי אם היה ב- G מעגל, הוא היה צריך לעבור דרך הקדקוד החדש x . אך זה לא אפשרי, כי x מדרגה 1.

יתר על כן, בהינתן עץ כלשהו T , אם נגזום ממנו עלה x , אז $T \setminus \{x\}$ יישאר עץ (למה?). לכן, אם נגזום מ- T עלה אחר עלה, נקבל לבסוף עץ עם קדקוד אחד. עתה – נוסיף את העלים לפי הסדר ונקבל את הבנייה הנדרשת.

ב. יש עץ יחיד עם 2 קדקודים ועם 3 קדקודים. יש 2 עצים עם 4 קדקודים. יש 3 עצים עם 5 קדקודים. יש 7 עצים עם 6 קדקודים.

2. על-מנת לספור את העצים עם הקדקודים המתויגים נשתמש בנוסחה שלמדתם בשיעור.

א. $3!/(2!1!) = 3 : (3,2,1,1,1)$

ב. $4!/(2!2!) = 6 : (3,3,1,1,1,1)$

ג. $4!/(2!1!1!) = 12 : (3,2,2,1,1,1)$

3. עלינו לספור את העצים המתויגים בעלי n קדקודים שבהם לקדקוד ה- n יש דרגה k .

ראשית, מספר העצים המתויגים בעלי n קדקודים שסדרת הדרגות שלהם $d_1, \dots, d_n$ מקיימת: $d_i \geq 1$, $d_n = k$ ו- $\sum d_i = 2n-2$ הוא:

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1, k-1} = \binom{n-2}{k-1} \binom{n-k-1}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1}$$

עתה, נסכם את כל הדרגות האפשריות, ונשתמש בנוסחת הבינום המוכללת של ניוטון:

$$\sum_{\substack{d_1+\dots+d_{n-1}=2n-2-k \\ d_i \geq 1}} \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1, k-1} = \binom{n-2}{k-1} \sum_{\substack{d_1+\dots+d_{n-1}=2n-2-k \\ d_i \geq 1}} \binom{n-k-1}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1} =$$

$$= \binom{n-2}{k-1} \sum_{\substack{e_1+\dots+e_{n-1}=n-k-1 \\ e_i \geq 0}} \binom{n-k-1}{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}} = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

4. א. $f_0=1$ (הסדרה הריקה), $f_1=2$, $f_2=3$, $f_3=5$, $f_4=8$, $f_5=13$.

ב. נוכיח את נוסחת הנסיגה הבאה: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (לכל $n \geq 2$).

תהי $(x_1, \dots, x_n)$ סדרה חוקית של 0-ים ו-1-ים, כלומר כזו שאין בה שני 1-ים רצופים. נגדיר:

b_n = כל הסדרות החוקיות באורך n עם $x_n=0$.

c_n = כל הסדרות החוקיות באורך n עם $x_n=1$.

נשים לב ש- $f_n = b_n + c_n$.

עתה, נתבונן בסדרה חוקית באורך $n-1$. אם $x_{n-1}=0$, אז ניתן להוסיף $x_n=0$ או $x_n=1$. אם $x_{n-1}=1$ אז ניתן להוסיף רק $x_n=0$, על-מנת שהסדרה המתקבלת תישאר חוקית.

$$\text{לכן: } f_n = 2b_{n-1} + c_{n-1} = b_{n-1} + (b_{n-1} + c_{n-1}) = b_{n-1} + f_{n-1}$$

סדרה חוקית באורך $n-1$ עם $x_{n-1}=0$ מתאימה בדיוק לסדרה חוקית אחת באורך $n-2$. לכן: $b_{n-1}=f_{n-2}$, ולכן: $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ כנדרש.

$$\text{ג. נוכיח את הזהות: } f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2 = (-1)^n \text{ באינדוקציה על } n.$$

$$\text{ראשית, נבדוק את נכונות הטענה ל-} n=1: f_0f_2-f_1^2 = 3-4 = -1 \text{ ול-} n=2: f_1f_3-f_2^2 = 10-9 = 1$$

עתה, נניח שהטענה נכונה ל- n ול- $n+1$, ונוכיח כי היא נכונה ל- $n+2$ (לכל $n \geq 1$).

מההנחה שהטענה נכונה ל- $n+1$ נקבל את הזהות הבאה (ע"י שימוש בסעיף ב'):

$$(-1)^{n+1} = f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = f_n(f_n + f_{n+1}) - f_{n+1}^2 = f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_n f_{n+1} (*)$$

עתה, נוכיח את הטענה ל- $n+2$ (ע"י שימוש בסעיף ב' וב-(*)):

$$\begin{aligned} f_{n+1}f_{n+3}-f_{n+2}^2 &= f_{n+1}(f_{n+1}+f_{n+2})-f_{n+2}^2 = f_{n+1}^2+f_{n+1}f_{n+2}-f_{n+2}^2 = f_{n+1}^2+f_{n+1}(f_n+f_{n+1})-(f_n+f_{n+1})^2 = \\ &= f_{n+1}^2+f_{n+1}f_n+f_{n+1}^2-f_n^2-f_{n+1}^2-2f_nf_{n+1} = f_{n+1}^2-f_nf_{n+1}-f_n^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

5. נוכיח כי מספרי רמזי מקיימים את נוסחת הנסיגה הבאה: $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

נסמן $r_1=R(s-1,t)$, $r_2=R(s,t-1)$ ו- $r_1+r_2=n$. עלינו להראות שבכל צביעה של K_n בשני צבעים, קיים K_s כחול או K_t אדום.

יהי x קדקוד כלשהו ב- K_n , אז דרגתו היא $n-1$. לכן, מ- x יוצאות לפחות r_1 צלעות כחולות או r_2 צלעות אדומות (למה?).

נניח בה"כ ש- x יוצאות r_1 צלעות כחולות. נתבונן בתת-הגרף הנפרש r_1 הקדקודים השכנים הללו. תת-הגרף הזה מכיל K_{s-1} כחול או K_t אדום. אם הוא מכיל K_t אדום – אז סיימנו. אחרת, תת-הגרף הנפרש ע"י K_{s-1} ו- x מהווה K_s כחול (למה?).

6. נוכיח כי $R(3,3)=6$.

ראו משפט 5.7.3 בעמ' 234 בספר "מתמטיקה בדידה".

7. נוכיח כי $R(3,4)=9$.

א. נבנה את הגרף הבא: נסדר 8 קדקודים על מעגל ונצבע בכחול את הצלעות המחברות בין 2 קדקודים מנוגדים או סמוכים, ובאדום את שאר הצלעות. שימו לב, שבגרף הזה אין K_3 כחול או K_4 אדום. לכן: $R(3,4) > 8$.

ב. נוכיח כי $R(3,4) \leq 9$ באופן הבא. נניח שנתונה צביעה כלשהי של צלעות K_9 באדום וכחול.

- יהי x קדקוד ב- K_9 שיוצאות ממנו 4 צלעות כחולות, המחברות את x לקדקודים a, b, c, d . נסתכל בגרף הנפרש ע"י 4 הקדקודים הללו. אם כל צלעותיו אדומות, אז מצאנו K_4 אדום. אחרת, קיימת לפחות צלע כחולה אחת, נניח $\{a, b\}$, ואז $\{x, a, b\}$ פורשים K_3 כחול.
- יהי x קדקוד ב- K_9 שיוצאות ממנו 6 צלעות אדומות, ונסתכל על תת-הגרף הנפרש ע"י 6 הקדקודים השכנים הללו. מכיוון ש- $R(3,3)=6$, ניתן למצוא בגרף הזה K_3 כחול (ואז סיימנו) או K_3 אדום, שיחד עם x ייצור K_4 אדום.

- נסיק כי מכל קדקוד יוצאות בדיוק 3 צלעות כחולות ו-5 אדומות. נחשוב על הצלעות האדומות בתור הצלעות של גרף G ועל הצלעות הכחולות בתור הצלעות של הגרף המשלים של G . אזי, סכום הדרגות של קדקודי G הוא $9 \cdot 3$, שאינו מספר זוגי, וסתירה!

8. נוכיח כי $R(4,4)=18$.

א. נבנה את הגרף הבא: נסדר 17 קדקודים במעגל, ונצבע בכחול את הצלעות המחברות בין 2 קדקודים שמרחקם על-גבי המעגל הוא 1,2,4,8 יחידות, ובאדום את כל השאר. שימו לב שבגרף הזה לא קיים K_4 כחול, כי אם נקבע קדקוד x ונחבר אותו ל-3 קדקודים אחרים ב-3 צלעות כחולות, אז אחד ההפרשים בין הקדקודים שנקבל יהיה שונה מ-1,2,4,8 (למה?), ואז יש ביניהם צלע אדומה.

הצלעות האדומות מחברות בין קדקודים שמרחקם על-גבי המעגל הוא 3,5,6,7. לכן, משיקולי סימטריה, לא קיים K_4 אדום. לכן: $R(4,4) > 17$.

ב. נסיק משאלות 5 ו-7 ש- $R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 9 + 9 = 18$ (שימו לב ש- $R(4,3) = R(3,4) = 9$ משיקולי סימטריה).

תרגיל חזרה במתמטיקה דיסקרטית - לא להגשה

סמסטר א', תשס"ו

- עבור כל אחד מהיחסים הבאים, קבעו אם הוא יחס שקילות ו/או יחס סדר.
 - בגרף לא-מכוון G , נגדיר יחס על הקודקודים: uRv אם יש מסילה מ u ל v .
 - בגרף מכוון G , נגדיר יחס על הקודקודים: uSv אם יש מסילה מכוונת מ u ל v .
 - בעץ מכוון G (ז"א גרף מכוון כך שאם נשכח את כיווני הקשתות נקבל עץ לא-מכוון), נגדיר יחס על הקודקודים: uTv אם יש מסילה מכוונת מ u ל v .
- מה המקדם של $x^{30}y^{50}z^{20}$ ב $(x+y+z)^{100}$?
- כמה פרמוטציות יש בגודל n עם בדיוק k נקודות שבת?
 - כמה פונקציות מ $[n]$ ל $[n]$ יש עם בדיוק k נקודות שבת?
- כמה דרכים שונות יש לעלות בגרם מדרגות המכיל n מדרגות אם בכל צעד עולים או מדרגה אחת או שלוש מדרגות? הביעו את התשובה הן כנוסחת רקורסיה והן כנוסחה סגורה.
- נתון גרף G עם n קודקודים כך שעבור כל שני קודקודים שאינם שכנים, סכום דרגותיהם לפחות n . הוכיחו של G יש מסלול המילטון.
- $K_{m,n}$ הוא גרף עם $m+n$ קודקודים, מחולקים לשתי קבוצות בגודל m ו n . בין כל שני קודקודים בקבוצות שונות עוברת קשת, ובין שני קודקודים באותה קבוצה לא עוברת קשת.
 - תנו תנאי הכרחי ומספיק על $K_{m,n}$ כך שהוא יכיל מעגל אוילר.
 - תנו תנאי הכרחי ומספיק על $K_{m,n}$ כך שהוא יכיל מסילת המילטון.
- נניח שיש n בנים ו $2n$ בנות כך שכל k בנים מכירים לפחות $2k$ בנות. האם אפשר להתעלם מ n בנות ואת ה n שנותרו להתאים לבנים כך שכל בן מכיר את בת-זוגתו? האם לכל אוסף של n בנות שנבחר, אפשר להתעלם מהן ולהתאים את הבנות שנותרו לבנים?
- כמה עצים מתויגים יש על n קודקודים כך שדרגת הקודקוד 1 היא k ודרגת הקודקוד 2 היא m ?
- בנו עצים (לא מתויגים) המתאימים לרשימות הדרגות הבאות:
 - $(1, 1, 1, 2, 3)$
 - $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3)$
- לכל אחת מהרשימות הנ"ל, האם יש רק עץ אחד שמתאים לה?
- הוכיחו ש $R(n, 3) < n^2$ לכל $n \geq 2$.

פתרון תרגיל חזרה במתמטיקה דיסקרטית

סמסטר א', תשס"ו

1. R יחס שקילות תמיד. R יחס סדר רק אם כל רכיב קשירות בגודל 1.
 S יחס סדר אם אין מעגלים מכוונים, ולרוב אינו יחס שקילות (אין סימטריות).
 T יחס סדר, כי בעץ אין מעגלים.

$$2. \binom{100}{30, 50, 20}$$

$$3. \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)! \right) (n-1)^{n-k} \binom{n}{k}$$

4. $a_0 = a_1 = a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$.
 אם ננחש שהסדר היא מהצורה cx^n , אז נצטרך לפתור את המשוואה

$$x^3 = x^2 + 1$$

. חישוב (נומרי) מראה ש...1.46557 הוא הפתרון המבוקש. כעת הצבה בערכים הראשונים ושימוש במחשבון נותן $c = 0.61149 \dots$.

5. הערה: זהו למעשה שכלול של משפט שהוכח ע"י Dirac ב-1952.

לא קשה לראות שאפשר להניח שהגרף קשיר. נקח מסילה מכסימלית בגרף, ונסמנה ב- $x_0 x_1 \dots x_k$. מאחר שהמסילה היא מכסימלית, כל השכנים של x_0 ו- x_k נמצאים בה; נסמן ב- A את קבוצת הקודקודים שהם "צעד אחד שמאלה" מהשכנים של x_0 ("א", אם x_i שכן של x_0 , אז $x_{i-1} \in A$ וב- B את הקודקודים שהם שכנים של x_k . אנו יודעים ש- $|A| + |B| \geq n$, ויש רק $k < n$ קודקודים שיכולים להמצא שם (מאחר שלא יתכן ש- x_k נמצא לא ב- A ולא ב- B), לכן יש קודקוד x_i שמשותף ל- A ול- B . נהפוך את המסילה שלנו למעגל, אשר נראה כך:

$$x_0 x_{i+1} x_{i+2} \dots x_k x_i x_{i-1} \dots x_0$$

מאחר שקיבלנו מעגל, אנו יכולים להתחיל את המסילה שלנו מכל נקודה בתוכה. אבל מאחר שהגרף קשיר, יש קודקוד y אשר אינו נמצא במסילה והוא שכן לקודקוד x_j שכן נמצא במסילה. נסיים את המסילה ב- x_j ונצטרף אליה את y ; כך קיבלנו מסילה יותר ארוכה, בסתירה.

6. ע"מ שהגרף יהיה אוילריני, כל הדרגות צריכות להיות זוגיות. מאחר שבקבוצה הראשונה דרגות הקודקודים m , ובקבוצה השנייה הם n , התנאי הוא ש m ו n זוגיים.

התנאי להמילטוניות: $|m - n| \leq 2$.

7. אנו יודעים שאפשר לזווג 2 בנות לכל בן. אם נתעלם מהבת השנייה המזווגת לכל בן, נתעלם מ n בנות בסה"כ ונשאר עם זיווג מושלם.

לעומת זאת, ברוב המקרים לא נוכל להתעלם מכל קבוצה של n בנות. לדוגמה, אם בן אחד מכיר פחות מ n בנות, לא נוכל להתעלם מכל המכרות שלו.

$$8. \binom{n-2}{k-1, m-1, n-k-m}$$

9. לרשימה השנייה יש רק עץ אחד מתאים. לשנייה יש שניים.

10. עבור $n = 2$ הטענה ברורה. באינדוקציה:

$$R(n, 3) \leq R(n-1, 3) + R(n, 2) < (n-1)^2 + n = n^2 - 2n + 1 + n < n^2$$