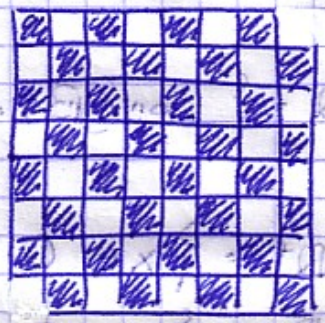
30.10.05
דיסקרטי

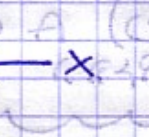
רות לוכנס - המחלקה למתמטיקה שימושית / ruthel@ma.huji.ac.il
ספר הקורס - מתמטיקה בדידה / ת. קנאל, אילן ברנס

---

**שאלה:** 
האם אפשר לפשוט כיסוי של לוח מלא דומינו [▭] - שם כל לוח יהיה אוסף כלשהו של תאים ומקיים: יש 32 מלבנים שונים זה מזה שתופסים בדיוק 2 תאים.
אפשר לפשוט את הכיסוי: כי בדומינו יש בדיוק 32 שחורים. 32 לבנים.

---

**קבוצות** קבוצה היא אוסף של דברים שונים, בלי סדר.
מסמנים קבוצות באותיות גדולות: $A, B$ וכו'.
את האיברים מסמנים באותיות קטנות: $x, y$ וכו'.
אם קבוצה $A$ כוללת את $x$ אז $x$ שייך ל-$A$: $x \in A$.
אם $x$ לא שייך ל-$A$: $x \notin A$.




**דוגמאות**

① $A = \{a, b, c, d\} = \{c, d, a, b\}$ - הסדר לא משנה.

② מה אברים יש בקבוצה $B$ = אוסף הפסוקים? את האיברים




ניתן לתלות $B$ איברים ביותר מפסוק. אם הקבוצה סופית אז מספר האיברים בה נקרא סדר.

**סדר של קבוצה** (order) הוא המספר של האיברים אם סופי.
את הסדר של קבוצה $A$ נסמן ב: $|A|$.

③ קבוצה ריקה $\emptyset$

PDF processed with CutePDF evaluation edition www.CutePDF.com

③ קבוצות שאנחנו מכירים:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ או $\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ שלם אי-שלילי}\}$

④ $\mathbb{N}^+ = \{$מספרים טבעיים$\} =$

$= \{1,2,3,\dots\} =$

$= \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$

① $\mathbb{Z} = \{$מספרים שלמים$\}$

$\mathbb{Q} = \{$מספרים רציונליים$\} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} =$

$= \{q \mid q = \frac{m}{n}$ עבור $m,n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $n \neq 0$ וגם $m,n$ זרים$\}$

$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$

$\mathbb{R} = \{$מספרים ממשיים$\}$

⑤ מהיכן לנו, אפשר להיזהר קבוצה כלשהי שאינה ריקה. תהא $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2\}$ מסוים. לדוגמה $\{1,2\}, \{\phi\}$

⑪ קבוצה יכולה להכיל קבוצות: $A = \{\{1,2\}, \phi\}$

ולשים ♡ ש- $|A| = 2$ והאברים הם: 1) $\phi$ 2) $\{1,2\}$

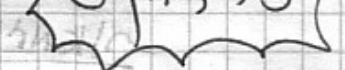
⑥ $\{x \notin X \mid$ קבוצות$\} = A$ - קבוצת כל הקבוצות שאינן

מכילות את עצמן. אבל אז לא ברור אם הקבוצה $A$ עצמה

גם קבוצה שכזו (Russell).

כלומר $A \in A$ או לא $\Leftarrow$ $A \notin A$ (כי $A$ היא קבוצה)

אם כן $\Leftarrow A \in A$. אבל אז!




① עבור מספר טבעי $n$, אפשר לחלק קבוצה $[n] = \{m \mid m \in \mathbb{N}^+ \wedge m = n\}$

למשל עבור $n=2$ $[2] = \{2,4,6,\dots\}$.

$A$ יש $n$ איברים $\Leftrightarrow$ יש חח"ע בין $A$ ובין $[n]$

עבור אפס לשים לב שזה לא נכון עבור $n=1$ וזה $n$ על האיברים ב- $A$

## שוויון בין קבוצות ותת קבוצות

את אפס קלפה של סיומנים:

$x \Rightarrow y$ - אם $x$ נכון אז גם $y$ נכון

$x \Leftrightarrow y$ - אם $x$ נכון אז גם $y$ נכון ואם $y$ נכון אז גם $x$.

**הגדרה** יהיו $A, B$ קבוצות. $A$ נקראת **תת קבוצה** (subset) של $B$ (או $A$ מוכלת ב-$B$) כאשר לכל איבר של $A$ נמצא ב-$B$.

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

**טענה** ① $A \subseteq A$

② $A \subseteq \phi$ אם ורק אם $A$ קבוצה ריקה. - בשונה כי אין איברים בקבוצה הריקה

③ אם $A \subseteq B$ ו $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$ - **טרנזיטיביות**

**הוכחה:** אם $x \in A$ אז מתקיים ש- $A \subseteq B$ $x \in B$.

ובאופן ש- $B \subseteq C$ אז $x \in C$. אופן ④

**הגדרה** אומרים ש $A = B$ כאשר $x \in A \iff x \in B$

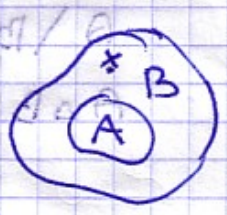
$A \subseteq B$ $\quad x \in A \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$ $\quad x \in B \Rightarrow x \in A$

**טענה** ④ $A = B \iff A \subseteq B$ ו $B \subseteq A$ (אנו סיימנו)

⑤ אם לא נכון ש- $A = B$ אז $A \neq B$

⑥ $A \subseteq B$ ו $A \neq B \Rightarrow A \subsetneq B$. אומר $A$ מוכל ב-$B$ (proper subset)



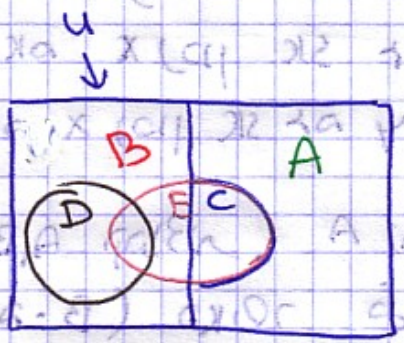

כלומר $x \in A \Rightarrow x \in B$ ואם קיים $x \in B$ כך ש- $x \notin A$.

⑦ אם $A, B$ קבוצות סופיות ואם $A \subseteq B$ אז $|A| \leq |B|$

ואם $A \subsetneq B$ אז $|A| < |B|$

קבוצה אחרת. לקבוצה בגודל זה קוראים אוניברסלית U.

דיאגרמת וֶן (Venn)




$U = \{$ כל השירים באולפן $\}$

$A = \{$ כל הגברים/בנים $\}$

$B = \{$ כל הנשים/בנות $\}$

$C = \{$ גברים מתחת גיל 20 $\}$

$D = \{$ נשים מתחת גיל 30 $\}$

$E = \{$ כל שמאזן את 20 $\}$

$A \supseteq C$

$D \not\subseteq E$

$E \not\subseteq D$

$E \not\supseteq C$

בדיאגרמה מאפשרת לנו לראות בקלות את היחסים בין כל הקבוצות.

שתי קבוצות נקראות זרות (disjoint) אם אין להן איברים משותפים.

$A, B$ זרות $\Leftarrow$ אין $x$ כך ש- $x \in A$ וגם $x \in B$.

**דוגמה:** בדיאגרמה שלמעלה A (גברים) ו-B (נשים) זרות!

## פעולות בקבוצות

יהיו 2 קבוצות $A, B$

חיתוך $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

איחוד $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

הפרש $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

הפרש סימטרי $A \triangle B = \{x \mid (x \in A, x \notin B) \vee (x \in B, x \notin A)\}$

**תכונות**

1) קומוטטיביות $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2) $A \cup A = A \cap A = A$

3) $A \cup \emptyset = A$ , $A \cap \emptyset = A$

③

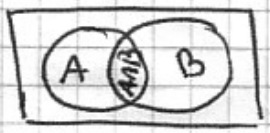
④ אסוציאטיביות $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

⑤ אם $A, B$ זרות זוגית $\Leftarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

⑥ באופן כללי: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

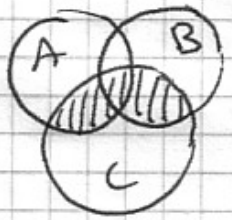
תאים את לה טוב מדיאגרמת ||



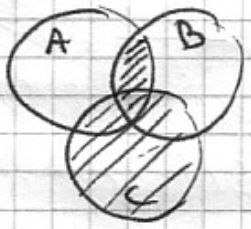

(5) אם הן זרות אז $|A \cap B| = 0$ וזה מתקבל

⑦ $(A \cup C) \cap (B \cup A) = (C \cup B) \cap A$

שוב - רואים את זה טוב בדיאגרמה.




דיסטריבוטיביות




למאוחדן זוגי:

$$(C \cup A) \cap (B \cup A) = (C \cup B) \cup A$$

הגדרה

אם יש קבוצה אוניברסלית $U$ אפשר לדבר על המשלים של תת קבוצה שלה. נגדיר משלים (complement) של כל תת קבוצה $U \supseteq A$ ע"י $A^c = U \setminus A$.




חוקי דה-מורגן (De Morgan)

(א) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

(ב) $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

כאמור אנחנו נוכיח שזהו את אלה ו אחרונה.

הוכחה:

(א) $x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B \iff \neg(x \in A \vee x \in B)$

$\iff x \notin A \wedge x \notin B \iff x \in A^c \wedge x \in B^c$

$\iff x \in A^c \cap B^c \iff A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

(ב) מדרכה דומה אחרים לם את ההלק הזה.

משל ☺

1.11.05

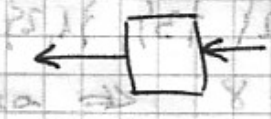
**הסקלרי**

מספר שאפשר לדבר עליו בקלות – ואיך אפשר לעשות חשבון עליו? לדבר על כמה פעולות שאפשר לעשות עליהן: חיתוך $\cap$, איחוד $\cup$ ו- $n$ של $\cdot$. לדבר על גודל $|\cdot|$.

**פעולה** שמקבלת שתי קבוצות ומחזירה קבוצה נקראת **פעולה בינארית**:




**פעולה** שמקבלת קבוצה אחת ומחזירה קבוצה נקראת **פעולה אונרית**:




לשם חיתוך ואיחוד הן מאיזו (בדיוק עלם) השפעה – אונרית.

**פעולה** • היא **קומוטטיבית** אם $A \cdot B = B \cdot A$

**פעולה** • היא **אסוציאטיבית** אם $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

מעכשיו נניח שכל הפעולות לא אמורים. לכן נעלם אפשר לשים סוגריים ואפשר לשים אותם בכל. באינדוקציה אפשר להראות שלכל $n$ איברים $A_1, \ldots, A_n$ יש משמעות ל- $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$.

לסכום $a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ו- $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$ – למכפלה.

ואפשר לעשות אותו דבר עם פיקפלות:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

אפשר גתת נוסחאות לתוצאות האלה.

**דוגמאות:**

① $1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$

② $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

③ $[n] = \bigcup_{i=1}^{n} [i] = [1] \cup \ldots \cup [n]$

④ $[1] = \bigcap_{i=1}^{n} [n] = [n] \cap \ldots \cap [1]$

## קבוצת החזקה (power set).

תהי קבוצה $A$. קבוצת החזקה $\mathcal{P}(A)$ מוגדרת כקבוצה של כל תת הקבוצות של $A$. $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

**דוגמאות**

(א) $A = \{x, y\}$ $\Leftarrow$ מה היא קבוצת החזקות?

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, A\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 4$ $\Leftarrow$ ישנם ארבעה איברים.

(ב) $A = \{1,2,3\}$ $\Leftarrow$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

ואכן, ישנם שמונה איברים $\Leftarrow$ $|\mathcal{P}(A)| = 8$.

שימו לב שהקבוצה הריקה $\emptyset$ וגם $A$ עצמה הם תמיד איברים ב-$\mathcal{P}(A)$.

אם $|A| = n$ (כלומר ב-$A$ יש $n$ איברים) אז $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. מהו מספר האיברים ב-$\mathcal{P}(A)$?

$$\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}}$$

ארגון שאם $A, B$ קבוצות כלשהן אז $|A \cup B| = |A| + |B|$ אמת. יש לנו כאן?

## המכפלה הקרטזית של קבוצות (Cartesian Product)

**הגדרה:** **זוג סדור** (ordered pair) $(a,b)$ הוא רשימה של שני איברים כך שסדר האיברים חשוב.

**סדר באורך $n$** הוא רשימה של $n$ איברים כך שסדר הופעתם חשוב $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

**הגדרה:** תהיינה $A, B$ קבוצות. **המכפלה הקרטזית** של $A$ ו-$B$ היא $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

* ברור שהפעולה הזאת קומוטטיבית. הרי הסדר חשוב!!

(5)

דוגמאות

$\{1,2\} \times \{x,y\} = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y)\}$

$\{1,2\} \times \{1,2\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

לא אותו דבר!

**$|A \times B| = |A| \cdot |B|$** אם $A$ ו-$B$ קבוצות סופיות אז:

את ההכללה הקרטזית אפשר לעשות כמה פעמים ואז

$$A^2 = A \times A = \{(x,y);\ x,y \in A\}$$

$$A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ פעמים}} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in A\}$$

דוגמה:

$$\{0,1\}^3 = \begin{cases} (0,0,0) & (1,0,0) \\ (0,0,1) & (1,0,1) \\ (0,1,0) & (1,1,0) \\ (0,1,1) & (1,1,1) \end{cases}$$

(כך כמו מספרים בינריים)

**$|A^n| = |A|^n$** מכאן ש-

דיברנו על כפל של שתי קבוצות. ומה עם...

## יחסים מינאריים

אנחנו רוצים לתאר שיש איזשהו קשר בין שני איברים.

**הגדרה** יהי $A$ קבוצה. תת קבוצה $R \subseteq A \times B$ נקראת יחס בינארי (Binary Relation) מ-$A$ ל-$B$.

דוגמאות:

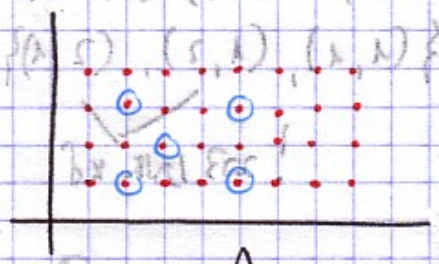
א) $R = \{(a,b) : a$ בן של $b\}$ כאשר $A$ ו-$B$ קבוצות אנשים.

ב) $A$ - קבוצה של אנשים
$B$ - קבוצה של פירות בעולם

$R = \{(a,b) : a$ אוהב את $b\}$

$a \heartsuit \oplus b$

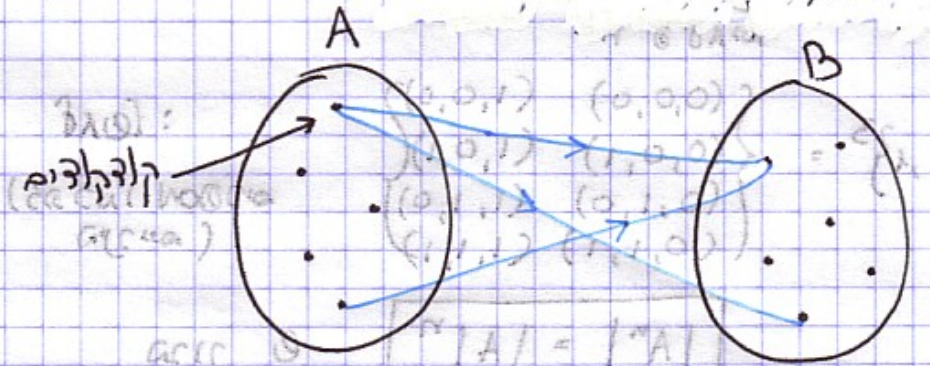
נניח את ההבדים בציור הבא:




כלי זה ברור.

## "גרף יחס בעצמו על אבולוציה (directed graph)

$(a,b) \in R$




$R = \{(a,b) : a \text{ בן של } b\}$ למשל כאן משפחה

$(y,z) \in R$

$(z,y) \notin R$

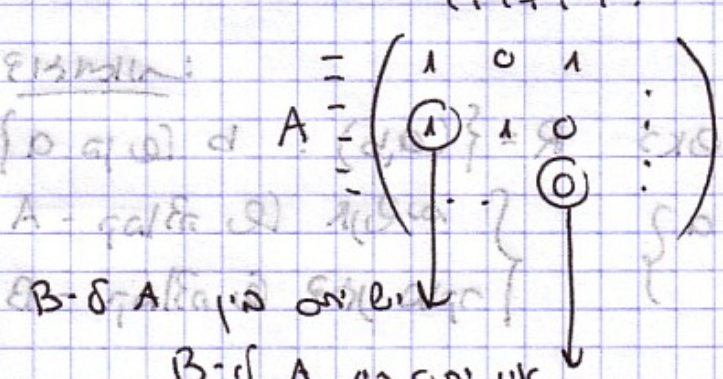
כי y לא בן של z.




קודקודים הם אנשים

יש קשת בין שני קודקודים אם הם מתחתנים מן השני הפוכים

יש גם "גרף של יחס בעצמה" מעניין שבה דואגה לעצמן הפלוגים.



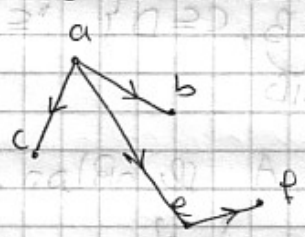
⑥ 6/11/05
דיסקרטית

**יחס בינארי -**

יהי $A$ קבוצה. כל קבוצה $R \subseteq A \times A$ נקראת יחס בינארי (binary relation) על $A$

**איך אפשר לתאר יחס בינארי?**

**דוגמה:** כל $a$ ו-$b$ מוגדרת $R \in (a,b)$




$(a,b) \in R$
$(a,c) \in R$
$(a,e) \in R$
$(e,f) \in R$

$(b,a) \notin R$
$(a,d) \notin R$

מתקיים $(a,b) \in R$ אפשר לכתוב גם $aRb$.

**דוגמאות:**

① $A = \mathbb{Z}$ נגדיר את היחס $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : a \le b\}$

$(1,3) \in R$, $(2,1) \notin R$ כי $1 \le 3$ אז $1R3$.

② $A = \mathbb{Z}$ $-1$ $R = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z},\ \frac{a-b}{3} \in \mathbb{Z}\} =$

$= \{(a,b) \mid a \overset{3}{\equiv} b\}$

למשל $1R4 \iff (1,4) \in R \iff -1 = \frac{1-4}{3} \in \mathbb{Z}$

$2R-1 \iff (-1,2) \in R$

**תכונות של יחסים:**

① אם לכל $a \in A$ $aRa$ אומרים ש-$R$ **רפלקסיבי** reflexive

② אם לכל $a \in A$ $\neg(aRa)$ אומרים ש-$R$ **אנטי רפלקסיבי** $(a,a) \notin R$

③ אם לכל $a,b \in A$ $aRb \Rightarrow bRa$ אומרים ש-$R$ **סימטרי** symmetric

④ אם לכל $a,b \in A$ $aRb$ ו-$bRa$ אז $a=b$ אומרים ש-$R$ **אנטי סימטרי**

⑤ אם לכל $a,b,c \in A$ $(aRb$ ו-$bRc)$ אז $aRc$ נקרא ש-$R$ **טרנזיטיבי** transitive

תרגילים

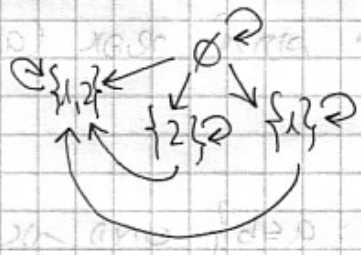
א. ניקח את המספרים השלמים $A=\mathbb{Z}$ ואת היחס $\geq$.

ב. השלמים עם היחס $>$ – טרנזיטיבי, אבל רפלקסיבי: הצלע סולרית. $R=\{(a,b) \mid a>b\}$ נכונה באופן ריק.

ג. נניח $B$ קבוצה. $A=\mathcal{P}(B)$ – הכלה ממש היא הקשת של $B$.
ניקח $R$ יחס הפרטה "$\supseteq$": $R=\{(C,D) \mid B\supseteq C, B\supseteq D, C\supseteq D\}$
כלומר $C$ ו-$D$ איברים של $A$

כלומר אנחנו מדברים על תת הקבוצות של $A$ אותו שמשנייה.
במשנן לדוגמה ניתן דוגמה: $B=\{1,2\}$

$\Rightarrow A=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ נציג ציור איכותי של $R$:




ציור יכול להיות מעניין
אבל הרבה פחות מדויק
∅ מוכלת בכל הקבוצות.
ו{1,2} היא מוכלת
בעצמה. כל תת קבוצה
מוכלת בקבוצה הגדולה.

אבל הרבה יותר קל לתאר את $R$ ולהוכיח שהיא יחס סדר חלש. $R$ בדוגמה ג' הינו רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי, שלכן כמו בדוגמה א' וזה יחס הסדר. אפשר לומר שעל הקבוצה יחס $\supseteq$ הינו כמו $\geq$ על המספרים.

ד. $A=\mathcal{P}(B)$ $R=\{(C,D) \mid C\supseteq D, C\neq D, \exists B\}$. כאן $R$ הינו טרנזיטיבי, אנטי סימטרי אך לא רפלקסיבי. שוב, כמו בדוגמה ב' – יחס $\subsetneq$ על קבוצות מקנה יחס $>$ על המספרים.

ה. $A=\{\text{אנשים}\}$. נאמר $aRb \iff b$ אביו של $a$.
אפשר לומר ש-$R$ סימטרי ורפלקסיבי, אבל לא בהכרח טרנזיטיבי!

יחסים מיוחדים

ⓐ יחס ריק $R=\emptyset \subseteq A\times A$ } הגרף הוא הקבוצה ללא קשתות
$\Leftarrow \neg(aRb)$ עבור $a,b\in A$ לכל

ⓑ יחס מלא $R = A\times A$ } הגרף הוא מלא
$\Leftarrow (aRb)$ עבור $a,b\in A$ לכל



ⓒ יחס שוויון $aRb \iff a=b$ - כאשר מתייחס רק לעצמו.




יחס שקילות (equivalence relation)

אומרים ש- $R\subseteq A\times A$ הינו יחס שקילות אם"מ R :- רפלקסיבי,
- סימטרי,
- טרנזיטיבי.

דוגמאות:

ⓐ יחס ריק - לא יחס שקילות - כי $\neg(aRa)$

ⓑ יחס מלא) הינו יחס שקילות. מה זה? מדוע כי בפסוק כל הצמדות האפשריות שייכים ליחס.

ⓒ יחס השוויון הינו יחס שקילות. מה זה? פשוט לבדיקה. נשים ♡ שיחס בעצם הינו אם אנו סימטרי. ניתן כמובן לנו שתיהה כי "אנו סימטרי" זה לא "לנו סימטרי" ...

ⓓ קבוצת השלושים של יחס $R = \equiv$. מה יחס שקילות. נבדוק את התכונות:
ברור ש- $a-a=0$ מתחלק ב-3 לכן שארית. - רפלקסיבי
אם $a-b$ מתחלק ב-3 אז $(a-b)=-(b-a)$ גם מתחלק ב-3. - סימטרית
אם $a-b$ מתחלק ו- $b-c$ מתחלק גוכ $a-b+b-c=a-c$ גם - טרנזיטיבית.

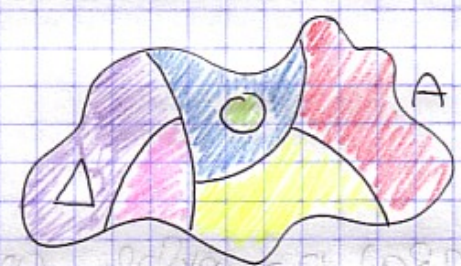
**הגדרה:** יהי $R$ יחס שקילות על $A$.
$a \in A$ נגדיר $[a]_R = \{b \in A : aRb\}$ - מחלקת השקילות של $a$ תחת $R$
equivalence class

**דוגמה:** יחס $\equiv_3$ על השלמים: $[2]_R = \{z \in \mathbb{Z} : 2Rz\} =$
$= \{b \in \mathbb{Z} : \frac{2-b}{3} \in \mathbb{Z}\} =$
$= \{n \in \mathbb{Z} : n \equiv_3 2\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
↓ $n$ משאיר שארית 2 בחלוקה ב-3.

שאלה: מה קשר? הקבוצות האלה ביחד נותנות חלוקה של הקבוצה $A$.

**הגדרה:** יהי $A$ קבוצה. חלוקה של $A$ (partition) היא אוסף של קבוצות $S$ כך ש- (א) לכל $\emptyset \neq$ , $\exists n \in S$ (כלומר הקבוצות לא ריקות)
(ב) לכל $n \neq n' \in S$, $n \cap n' = \emptyset$ (כלומר הקבוצות זרות)
(ג) $A = \bigcup_{n \in S} n$ (כלומר הקבוצות מכסות את $A$).

כלומר, חלוקה זה פירוק של $A$ לחלקים שלהן חופפים:




שאלה: את השלמים אפשר לחלק לשארית 0, 1 או 2 בחלוקה עם שארית.

**דוגמאות:**
א) $A = \mathbb{Z}$. חלוקה של $A$: $\{\text{מספרים זוגיים}, \text{מספרים אי-זוגיים}\}$
ב) $\{\{0\}, \{n \in \mathbb{Z} : 0 < n\}, \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}\}$
ג) חלוקה לאוסף הקבוצות: $\{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \ldots\}$

**משפט:** יהי $R$ יחס שקילות על $A$. אזי $\{[a]_R : a \in A\}$ חלוקה של $A$

מהמשפט קל יותר להוכיח את שאלת ה"אות ה" בהגדרת של חלוקה. ואגב לפני כן, נדגים את ההגדרה. ←

(8)

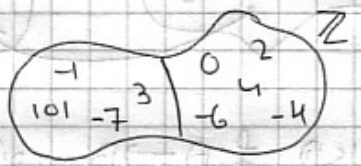
דוגמה $A = \mathbb{Z}$ שארית ב-3 $R = \{(a,b) : a-b \text{ מתחלק ב-}3\}$

מוגדר $aRb \iff$ אם $a$ ו-$b$ שניהם או
אם $a$ ו-$b$ אי-זוגיים.

כל הזוגיים $= [2]_R \iff$

כל האי-זוגיים $= [3]_R$

אין יותר מ-2 מחלקות שקילות וכאן מחלקה של כל השלמים.




כל מספר שארית:
$n$ זוגי $\iff \mathbb{Z} \in \frac{2}{1-n}$
$n$ אי-זוגי $\iff \mathbb{Z} \in \frac{2}{n}$

כלומר הצלחנו לחלק את $\mathbb{Z}$ לשתי קבוצות מכוח שני זוגיים שמתיחסים אחד לשני. וקבוצת מכוח את כל $\mathbb{Z}$.

**הוכחת המשפט:**

צריך להוכיח את ההכלה (א), (ב) + (ג) זו תלבה.

(א) נראה שלכל $a \in A$ $0 \neq [a]_R$. כלי ניתן מצלל הרפלקסיביות של $R$

$aRa \Rightarrow a \in [a]_R$. $\Rightarrow$ לכן $a$ $\emptyset \neq [a]_R$.

(ב) נראה שלכל שתי קבוצות מכוח: יהיו $a,b \in A$. צ"ל

שקיים $c \in [a]_R$ כך ש- $c \in [b]_R$. $\Rightarrow cRa$ ואם $cRb$

מצלל סימטריות $bRc$. מטרנזיטיביות $aRb \Rightarrow a \in [b]_R$.

נראה ש $[b]_R = [a]_R$. יהי $u \in [a]_R \Rightarrow uRa \Rightarrow$ מטרנזיטיביות $uRb$.

$\Rightarrow u \in [b]_R$. יהי $u \in [b]_R \Rightarrow uRb \Rightarrow$ מטרנזיטיביות $aRu$

$\Rightarrow u \in [a]_R$. $\Rightarrow [b]_R = [a]_R$. $\Rightarrow \emptyset = [b]_R \cap [a]_R$. כי אם היתה קיימת

כזו כיוון שמחלקות שקילות זרות שוות.

(ג) נראה שאיחוד כל המחלקות מכסה את $A$. לכל $a \in A$ $a \in [a]_R$.

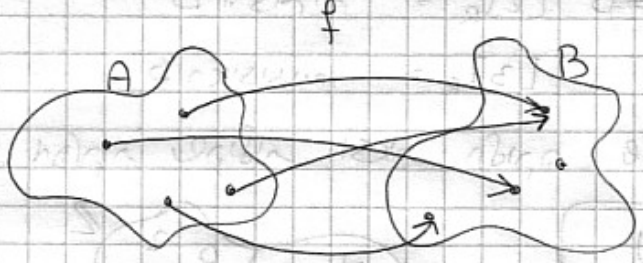
$\Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$. בשביל לקחת את כל האברים נקח האיחוד

של מחלקות השקילות שלהם יצטרך אותם עצמם - את כל האברים.

מש"ל ☺

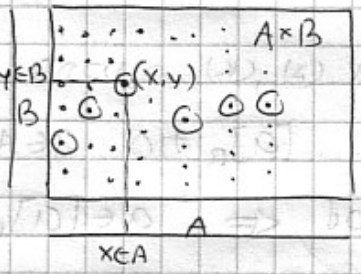
# פונקציות

פונקציה $f: A \to B$ מהקבוצה $A$ לקבוצה $B$ היא יחס שמתאים לכל $a \in A$ איבר אחד ויחיד מתוך $B$. נסמן $f(a) = b$




הגדרה אלטרנטיבית: פונקציה $f: A \to B$ היא יחס בין $A$ ל-$B$ (תת קבוצה של $A \times B$) כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ ויחיד כך ש- $(a,b) \in f$. $f(a) = b$.

כלומר:



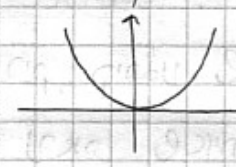

$f \subseteq A \times B$

ראשי התיבות שלכל $a \in A$ קיים כך $b \in B$ ואחד.

כל קבוצה מהצורה $A \times B$ נקראת מכפלה קרטזית של $A$ ו-$B$. הדרך הפשוטה ביותר לתאר פונקציה $f$ היא לתאר קבוצה שזוגות. לשם כך צריך לדעת שקילויות.

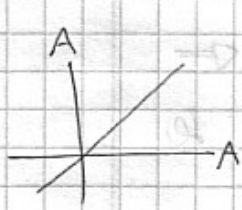
דוגמאות:

א) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = x^2$




גרף של $f$ $= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = x^2\}$

ב) פונקציית הזהות $f: A \to A$ $\quad f(a) = a$ לכל $a \in A$.




גרף של $f$ הוא יהיה $\{(x,x) : x \in A\}$ - אלכסון

הגדרה: תהי פונקציה $f: A \to B$

$A$ נקראת תחום ההגדרה של $f$ (domain)

$f(a)$ נקראת תמונה של $a$ תחת $f$ (image)

הטווח של $f$ - $\text{Im } f = \text{Range } f = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$

פעמים שעברה מהדרנו את מה פונקציה. פונקציה היא יחס מיוחד שמתאים בין איברים של שתי קבוצות.

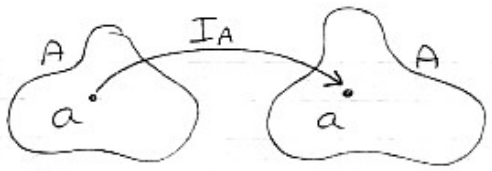
$f: A \to B$ $f$ מתאימה איבר אחד ויחיד מ-$B$ לכל איבר של $A$.

$A$ = תחום הגדרה של $f$ domain

$f(A) = \{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : \exists a \in A : f(a)=b\}$ = הטווח של $f$ range

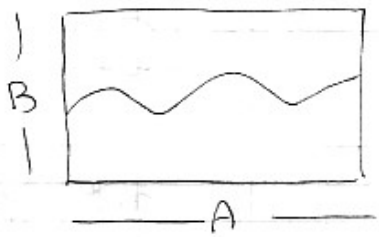
דוגמאות:

① לכל קבוצה $A$, $I_A : A \to A$ היא פונקציה הנקראת **זהות** על $A$. כלומר $I_A(a) = a$ לכל $a \in A$. כל איבר ב-$A$ מתאים לעצמו.




② כל פונקציה יש לה $f \subseteq A \times B = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.

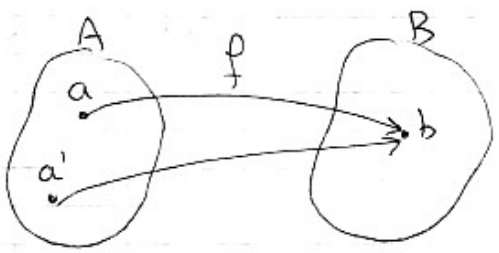
כאשר אנחנו מציירים פה על קואורדינטות קרטזיות




③ נגדיר פונקציה על הטבעיים $f: \mathbb{N} \to \{0,\dots,9\}$ באופן הבא: $f(n)$ = הספרה הראשונה של $n$. למשל $f(2341) = 2$

## תכונות של פונקציות

④ תהי פונקציה $f: A \to B$. אומרים ש-$f$ חד-חד-ערכית (חח"ע) injective אם $(a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'))$.




במילים הפה $f$ לא מחזירה תמונה כיצד $a$ ו-$a'$ שונים.

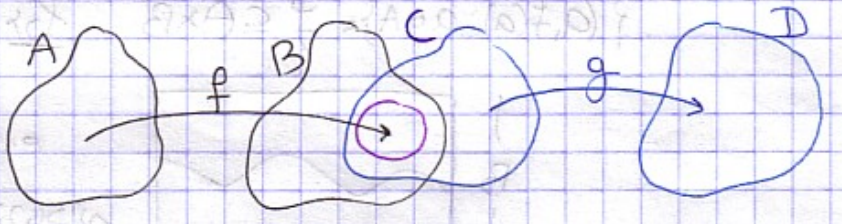
ⓑ נאמר ש $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=b$ אומרים
ש $f:A\to B$ היא על (onto או surjective).
או במילים, כל שקול לכך ש $f(A)=B$ - כי מצד $\subseteq$ אחד
מ $B$ הוא תמונה של איבר כלשהו ב $A$.

ⓒ אם $f$ תח"ע ועל אז לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ יחיד
כך ש $f(a)=b$. (bijective).

**הגדרה:** תהי פונקציה $f:A\to B$. תהי $C\subseteq B$.
$f^{-1}(C)=\{a\in A: f(a)\in C\}$ = inverse image of $C$ = "המקור של $C$".

★ בהתייחס לכך ס'מון לה ערך לכל פונקציה הפוכה...

**הגדרה** (הרכבה composition). יהיו $f:A\to B$ ו- $g$ פונקציות
1- $g:C\to D$ כך ש $f(A)\subseteq C$ (הכוונה ש $f$ אכן מתחום של $g$).




אז נגדיר הרכבה של $f\circ g$ ע"י $(f\circ g)(a)=g(f(a))$.
כאמור $f\circ g:A\to D$

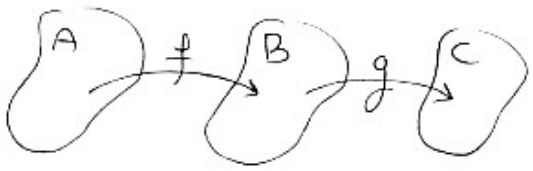
**דוגמאות**

ⓐ נגדיר $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ע"י $n\longmapsto n+1$
$g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ע"י $n\longmapsto n^2$
אז, $(f\circ g)(n)=f(g(n))=f(n^2)=n^2+1$
$(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(n+1)=(n+1)^2$
אנחנו רואים שההרכבה היא לאו דווקא קומוטטיבית.

ⓑ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י $n\longmapsto n+1$
$f$ תח"ע כי עבור $n=0$ אין קודם אחד.

ⓒ $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י $n\longmapsto n^2$ $g$ לאו דווקא חח"ע אבל כן תח"ע כי אין בתמונה שלו שניים

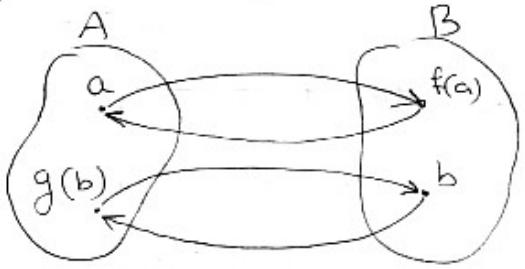
תרגיל




אם $f: A \to B$
ו $g: B \to C$
אז $g \circ f: A \to C$.

זה די ברור אפילו כאובן שזה נתון שהלכתה.

הגדרה: $f: A \to B$ נקראת הפיכה (invertible) אמ"מ קיימת $g: B \to A$ כך ש- $g \circ f = I_A$ ו- $f \circ g = I_B$




דוגמאות

(א) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$. אם $g(n) = n-1$ נקבל

$$f(g(n)) = f(n-1) = n-1+1 = n = Id_{\mathbb{Z}}$$
$$g(f(n)) = g(n+1) = n+1-1 = n = Id_{\mathbb{Z}}$$

$\Leftarrow$ $f$ הפיכה.

(ב) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$.

קיימת $g$ כך ש- $g \circ f = I_{\mathbb{N}}$ : $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & 0 < n \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = n \implies$$

אבל מה לגבי הכיוון ההפוך?

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = \begin{cases} 1 = f(0) & n = 0 \\ n = f(n-1) & 0 < n \end{cases}$$

למה הכוונה פה? למה מציינים לנו את התשובות של קודם שני התנאים שהפיכות.

**משפט:** $f$ פונקציה הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל.

**מהערה** מקודם אנו יודעים: $f$ - אפי היא סמ"ע אז יהיו שני איברים שונים שאין עליהם כלום.

חח"ע - אפי היא כמו חח"ע יהיו איברים שיש 2 תמונות שאפשר שהיה אותם אליהם.

**הוכחה:**

($\Leftarrow$) $f$ הפיכה. $\Rightarrow$ קיימת פונקציה $g: B \to A$ רק ש- $g \circ f = I_A$ ו- $f \circ g = I_B$.

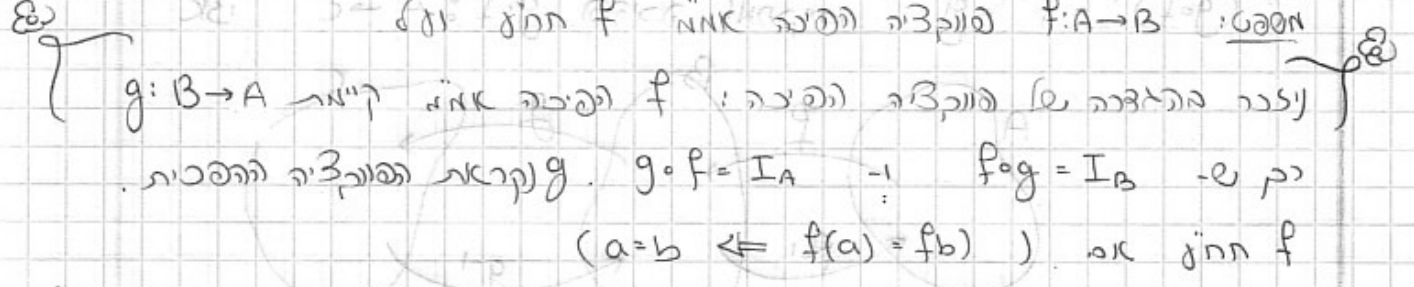
חח"ע: יהיו $a, a' \in A$ כך ש $f(a) = f(a')$ $\Rightarrow$ $g(f(a)) = g(f(a'))$.

$\Rightarrow a = a'$ (מהגדרת ההפיכה של $g \circ f$).

על: יהי $b \in B$. $a = g(b) \in A$. $f(g(b)) = f(g(b)) = b$

$\Rightarrow$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$.

**משפט:** $f:A\to B$ פונקציה הפיכה אמ"מ $f$ חח"ע ועל



עבור הוכחת שפונקציה הפיכה: $f$ הפיכה אמ"מ קיימת $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g = I_B$ ו- $g\circ f = I_A$. $g$ נקראת הפונקציה ההפכית.

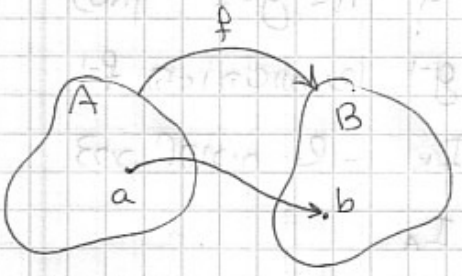
$f$ חח"ע אם $(f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2)$

$f$ על אם לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=b$.

**הוכחה:**

($\Rightarrow$) הוכחנו משיעור קודם.

($\Leftarrow$) צ"ל ש- $f$ חח"ע ועל.




נגדיר $g:B\to A$ באופן הבא:

לכל $b\in B$ נגדיר $g(b)=a$ כך ש- $f(a)=b$. מאחר ו-$f$ על אזי יבטיח שעבור כל $b$ קיים $a$ כזה. $g$ מוגדרת היטב: - $a$ כזה קיים מכך ש- $f$ על.

- $a$ כזה הינו יחיד כי $f$ חח"ע. אם $f(a_1)=b=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$.

נראה ש- $g$ מקיימת את התנאים הדרושים:

$$f\circ g = I_B \Leftarrow f(g(b)) = b \Leftarrow f(g(b)) = (f\circ g)(b)$$

(לפי הגדרה של $g$)

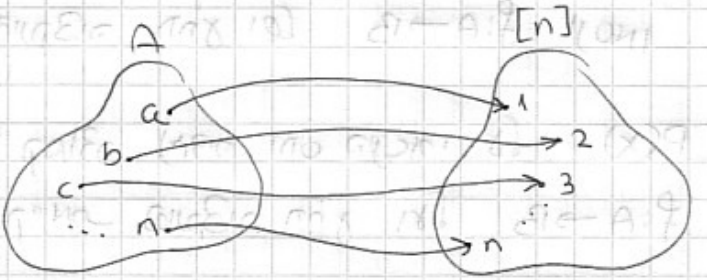
$$g\circ f = I_A \Leftarrow g(f(a)) = a \Leftarrow g(b) = a \Leftarrow f(a) = b$$

(מפני ש $f$ חח"ע) (לפי הגדרה של $g$)

מש"ל (11)

**הגדרה:** תהי $A$ קבוצה סופית. נאמר ש- $|A| = n$ אמ"מ קיימת פונקציה הפיכה $f:A\to [n]$

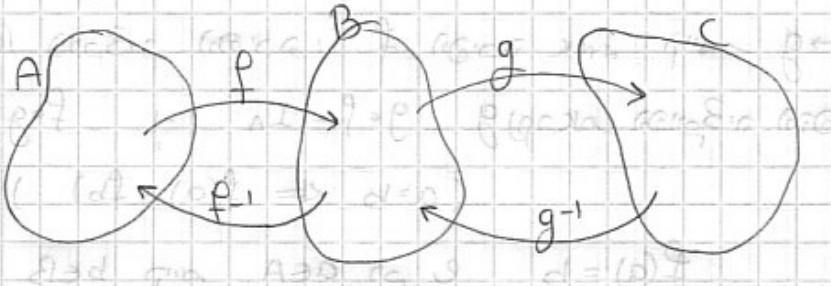
כלומר לא נאמר שאפשר לספור את האיברים של $A$, כמו שאנחנו עושים בראשונים- אפשר לבצע התאמה חח"ע ועל בין $A$ לקטע ראשוני $[n]$.




**הגדרה:** אם $f:A\to B$ הפיכה נסמן את הפונקציה ההפכית ע"י $f^{-1}: B\to A$

**משפט:** יהיו $f:A\to B$ ו- $g:B\to C$ הפיכות.

אזי $g\circ f:A\to C$ הפיכה ומתקיים $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$




**הוכחה:**

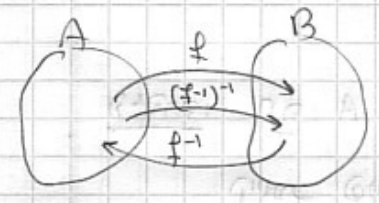
נסמן $h=g\circ f$ ו- $k=f^{-1}\circ g^{-1}$. $k$ מוגדרת היטב כי התחום של $f^{-1}$ הינו הטווח של $g^{-1}$: $k:C\to A$. כמו כן בכוון ל- $h:A\to C$.

צריך להוכיח ש- $\begin{cases} h\circ k=I_C \\ k\circ h=I_A \end{cases}$

$$(k\circ h)(a)=k(h(a))=k(g(f(a)))=$$
$$=f^{-1}(g^{-1}(g(f(a))))=f^{-1}(f(a))=a$$
$$\Rightarrow \quad k\circ h=I_A$$
$$(h\circ k)(c)=h(k(c))=h(f^{-1}(g^{-1}(c)))=$$
$$=g(f(f^{-1}(g^{-1}(c))))=g(g^{-1}(c))=c$$
$$\Leftarrow \quad h\circ k=I_C$$

משל"ל ☺

**משפט:** תהי $f:A\to B$ הפיכה. אזי $f^{-1}:B\to A$ הפיכה ומתקיים $f=(f^{-1})^{-1}$.




**הוכחה:** צריך להוכיח $(f^{-1}\circ f)=I_B$

$(f\circ f^{-1})=I_A$

אחד לה נכון שכן. הוכחה משל"ל ☺

**הגדרה:** אומרים ששתי הקבוצות $A$, $B$ **שוות עצמה** אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$ כלומר $|A|=|B|$.

**הגדרה:** תהי $X$ קבוצה. נאמר ש- $P(X)$ **גדולה יותר** מ- $A$ אם $A\sim B$ אך אין פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$.

**משפט:** היחס "להיות שקולות" הוא יחס שקילות.

**הוכחה:**

צריך להראות ש- $\sim$ אכ"פ רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית.

רפלקסיביות: יהי קבוצה $A$. צריך ש- $A \sim A$ כי: קיימת פונקציה חח"ע ועל $I_A : A \to A$ הנתונה ע"י $I_A(a) = a$ לכל $a \in A$.

סימטריות: יהיו $A$ ו- $B$ כך ש $A \sim B$ $\Rightarrow$ קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to B$ $\Rightarrow$ קיימת $f^{-1} : B \to A$ חח"ע ועל $\Rightarrow$ $B \sim A$

טרנזיטיביות: יהיו $A, B, C$ כך ש $A \sim B$ + $B \sim C$.

$\Rightarrow$ קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל ו- $g : B \to C$ חח"ע ועל $\Rightarrow$ $g \circ f : A \to C$ חח"ע ועל $\Rightarrow$ $A \sim C$.

משל"ה ☺

עתה שקילות של אכ"פ שקולות. סימן השוויון כ- $|A| = |B|$ כך שמהו מיותר. בהקבלה סופיות באות יש שוויון באפסים אבל ההתאמה בדומה אם לקבלות סופיות. במצב יתר מעניין יהיה להראות $|B| \sim |A|$. בהמשך (בהקבלות) נראה שיש אשמעות לשוויון אם בקבלות אין סופיות. אבל כרגע בשבילנו כך רק סימן.

**קלאות** (בקבלות סופיות)

① $f : A \to B$, $|B| < |A| \Rightarrow$ $f$ לא יכולה להיות חח"ע. יש יותר מד' איברים ב- $A$ - אין לאן לשים אותם.

② $f : A \to B$ $|B| > |A| \Rightarrow$ $f$ לא יכולה להיות על כי: אין מספיק איברים שונים ב- $A$.

③ $f : A \to B$ חח"ע ועל $\Rightarrow$ $|B| = |A|$.

④ $B \subsetneq A \Rightarrow |B| < |A|$

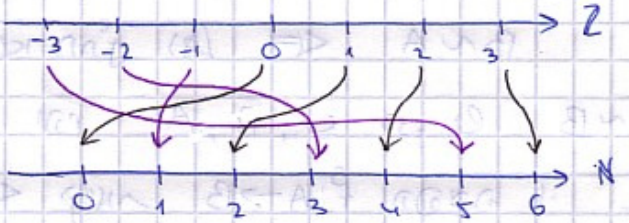
⑤ $B \supseteq A \Rightarrow |B| \geq |A|$

דוגמאות (קבוצות אינסופיות)

א) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ , $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ מתקיים $\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$.

נגדיר $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ חח"ע ועל ע"י: $f(n) = \begin{cases} 2n & n \geq 0 \\ -2n-1 & n < 0 \end{cases}$

מומלץ לצייר את ההתאמה שנתנה ולאחר מכן לשכנע את עצמכם.




קל לשכנע שקיימת $f$ חח"ע ועל $\Leftarrow \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \Leftarrow |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

ב) $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ , $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

משפט קנטור (Cantor): $|(0,1)| \neq |\mathbb{N}^+|$

הוכחה: נניח בשלילה קיימת $f: \mathbb{N}^+ \to (0,1)$ שהיא חח"ע ועל. אנו נראה שקיים $x \in (0,1)$ שאינו בתמונת $f$. נכתוב כל מספר ממשי ב-$(0,1)$ בייצוג עשרוני:

$$f(1) = 0.x_{11}x_{12}x_{13}\ldots x_{1m}\ldots$$
$$f(2) = 0.x_{21}x_{22}x_{23}\ldots x_{2m}\ldots$$
$$\vdots$$
$$f(n) = 0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots x_{nm}\ldots$$
$$\vdots$$

נסתכל על המספר: $0.x_{11}x_{22}\ldots x_{nn}\ldots$ הוא יכול (אבל) להיות שווה ל-$f(n)$ לכל $n$.

נשלים סתירה לכך ש-$f$ היא על. משל"ש

הגדרות

א) נאמר ש-$A$ קבוצה בת מניה (countable) אם $|A| \leq |\mathbb{N}|$

ב) $|A| \leq |B|$ אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע

$|B| \geq |A|$ אם קיימת $f: B \to A$ על

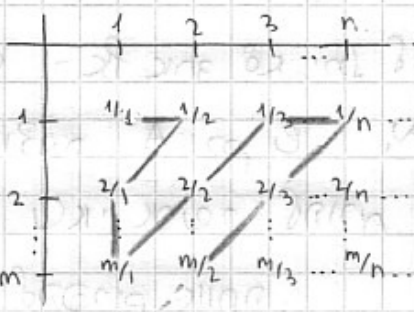
ג) $|B| > |A|$ אם $|B| \geq |A|$ אך $|B| \neq |A|$

## תרגילים

ג) $\mathbb{Z}$ בת מניה לפי דוגמה (ב) בשילוב הקודם

ב) $(0,1)$ אינה בת מניה לפי משפט קנטור

א) $\{\frac{m}{m+1} : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{Q}$ . בת מניה. בשקף מה שאנחנו צריכים פה הוא שאפשר לספור את המספרים הרציונליים. נספור אותם באלכסונים




שמתאימים את $\frac{n}{m}$ למספר שלפי הסדר הזה.

ד) $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ נראה $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ ע"י $x \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$

אפשר להמשיך ל- $f$ אבל הפיכה ובכך הקבוצות שוות עוצמה.

### משפט קנטור (עוד על הקנטור, משפט אותו)

לכל קבוצה $A$ $|P(A)| > |A|$

**הוכחה:** בקבוצות סופיות אם $n = |A|$ אז $|P(A)| = 2^n$

ובברור ש $2^n > n \Rightarrow |P(A)| > |A|$

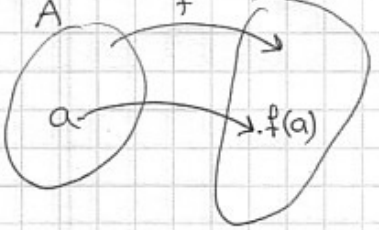
כי ניתן לראות ש $\emptyset = A \Rightarrow 0 = |A|$ אבל $|\{\emptyset\}| = |P(\emptyset)| = 1$.

**הוכחה:** נראה קיום א. שונין חלש. צריך ע"ז הראות פונק' $f: A \to P(A)$ ע"י $a \longmapsto \{a\}$.

ברור ש $f$ חח"ע. אם $f(a) = f(b) \Rightarrow \{a\} = \{b\} \Rightarrow a = b$.

$\Rightarrow |P(A)| \geq |A|$.

כעת נראה ש $|A| \neq |P(A)|$. למעשה צריך להוכיח שלא קיימת $f: A \to P(A)$ חח"ע ועל. נניח בשלילה ש- $f: A \to P(A)$ חח"ע ועל. נגדיר $B = \{a \in A : a \notin f(a)\} \subseteq A$




$\Rightarrow B \in P(A) \Rightarrow$ קיים $a \in A$ כך ש- $B = f(a)$. יש שתי אפשרויות:

אם $a \in B \Rightarrow B = f(a) \not\ni a$ וזו סתירה.

אם $a \notin B \Rightarrow B = f(a) \ni a$ וזו סתירה.

$\Rightarrow$ לא קיימת $f: A \to P(A)$ על. $\Rightarrow |P(A)| > |A|$ משל"ש (11)

סימונים:

א. $A$ קבוצה סופית עם $n$ איברים אז: $|A| = n$

ב. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ $\aleph_0$ הינו הקרדינליות של קבוצות אינסופיות בנות-מניה.

ג. $|\mathbb{R}| = |(0,1)| = \aleph_1 \Leftarrow$ הוכח ש- $\aleph_1 > \aleph_0$

ד. $|P(\mathbb{R})| = \aleph_2$ והוכח ש- $\aleph_2 > \aleph_1$.

השערת הרצף Continuum Hypothesis - אף אחד לא יכול להוכיח את זה אבל מניחים שלא קיימת קבוצה $A$ כך ש- $\aleph_1 > |A| > \aleph_0$

למעשה, יש הוכחה שאי אפשר להוכיח את השערת הרצף אבל יש גם אי אפשר להפריך אותה.

דוגמה ☺

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$$

$f: A \to B$, $x \mapsto x+1$ - $f$ חח"ע אפס לא על כי לא קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = 1$

$g: A \to B$, $x \mapsto (x-1)^2+1$ - $g$ לא על ולא לא חח"ע כי $g(\frac{1}{2}) = g(\frac{3}{2})$

$$f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\} = (0,1]$$

$$g^{-1}(2) = \{2\}$$

(4) 15.11.05
תרגילים




הפעם הקדמה קטנה: עד השורה של עלמוות של הבדלים
יהיו A ו- B קבוצות.

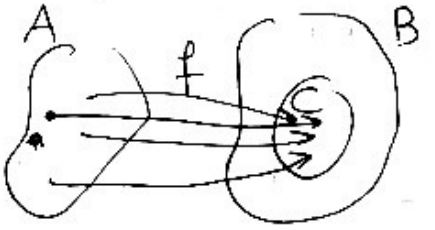
$$|A| \le |B| \iff \exists f: A \xrightarrow{\text{חח"ע}} B$$
$$|A| \ge |B| \iff \exists f: A \xrightarrow{\text{על}} B$$

משפט: $|A| \le |B| \iff |B| \ge |A|$

הסבר: נשים לב שהכיוון (מאליו) $\Leftarrow$ הוא הן שונות.
מהשוואה בין שתי הגדרות חח"ע ועל נקבל מה
שצריך להוכיח שאם יש פונקציה חח"ע $A$ ל-$B$ אז אפשר
למצוא פונקציה על מכיוון ההפוך.

הוכחה:

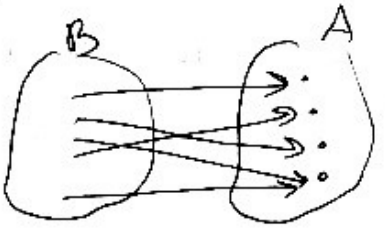
($\Rightarrow$) $|A| \le |B| \Rightarrow$ קיימת פונקציה $f: A \to B$ חח"ע




נסמן $C = f(A)$, כלומר התמונה של $f$ היא $C \subseteq B$.
כדור ש $f: A \to C$ תהיה (כי $f$ חח"ע) ועל (כי אנחנו
מסתכלים רק על התמונה - כלומר האיברים שיש להם איזור ב-$A$).
$\Leftarrow$ קיים פונקציה הפוכה $f^{-1}: C \to A$. נגדיר $g: B \to A$
$g: \begin{cases} f^{-1}(x) & x \in C \\ a & x \in B \setminus C \end{cases}$. כאשר $a \in A$ קבוע.

מכך ש- $g$ היא על. $f^{-1}(x)$ היא בין. השאר על (כי היא הפוכה)
נבין ש $g$ שמוגדרת על זה היא על. לכל $a \in A$
$f(a)$ מתקיים $g(f(a)) = (f^{-1}f)(a) = a$, שכן $f(a) \in C \Rightarrow a = f^{-1}(f(a))$

($\Leftarrow$) $|A| \ge |B| \Rightarrow$ קיימת $f: A \to B$ על. ונרצה להוכיח
שזו"ח תהיה מכיון ההפוך.



$f$ על $\Leftarrow$ לכל $a\in A$ קיים לפחות $b$ כך ש- $f(b)=a$.
זכרו שהגדרנו עוד אובייקט כאשר $\{a\}\subseteq B$ - $f^{-1}(\{a\})$.
זוכרים ש- $f$ לפחות אחד. אז פשוט נמתר אותה מהם - $b$
ונאמר $g:A\to B$ ש- $g(a)=b$. $\Leftarrow$ לכל $a\in A$ $f(g(a))=a$
נראה ש- $g$ חח"ע. יהיו $a,a'\in A$ כך ש- $g(a)=g(a')$
$\Leftarrow a=f(g(a))=f(g(a'))=a'$ $\Leftarrow$ $g$ חח"ע.

משפט (11)

הוכחה אופציונלית:

התנאי משפיע הכרחי מתקיים מתוך כך שבוחרים
בדיוק התכיאלים ומחנים לסרוגין ע שבוע.

(9) קבוצות סדורות Ordered Sets

הגדרה: תהי $A$ קבוצה ו- $R\subseteq A\times A$ מה בעברית אומרים ש- $R$
יחס סדר חלקי (partial order) אם הוא מקיים את התכונות
הבאות, שנקרא טרנזיטיביות. בפיכ נסמן את היחס $\leq$
relation

מה זה אומר? התכונות הן: לכל $a,b,c\in A$

$a\leq a$

$a\leq b$ ו $b\leq a$ $\Leftarrow$ $a=b$

$a\leq b$ ו $b\leq c$ $\Leftarrow$ $a\leq c$

נסמנים. אור יחס הסדר החלקי, בסימן $\leq$ כי לה מעלהו זוגה
ליחס "קטן או שווה" (רגיל) שאנחנו מכירים. אולם לפה מהכרח
בכלל. הגדרים יכנסו לתורת קבוצות ואת היחס יהיה יחס ההכלה $\subseteq$.
כאן רק, נשים לב שלא כל שני איברים בקבוצה אפשר להשוות
מהכרח, לכן לא נקרא ליחס סדר <u>מלא</u>.

פתרון

ג) $(\mathbb{R}, \leq)$ $aRb$ אמ"מ $a \leq b$ – כן יחס סדר חלקי.

ב) $(\mathbb{N}, |)$ $aRb$ אמ"מ $a|b$ – כן יחס סדר חלקי.

א) $(\mathbb{Z}, |)$ $mRn$ אמ"מ קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $n = km$.
כן יחס סדר חלקי כי אין אנטי סימטריות. $4|-4$ ו- $-4|4$
אפ"פ $4 \neq -4$.

ד) $(P(x), \subseteq)$ $ARB \iff B \subseteq A$. כן יחס סדר חלקי.
– מכיוון ש $A \in P(x)$ $A \subseteq A$
– אם $B \subseteq A$ ו- $A \subseteq B$ אז $A = B$
– אם $A \subseteq B$ ו $B \subseteq C$ אז $C \subseteq A$.

ה) $(P(x), \geq)$ כאשר $x \geq y$ אמ"מ $|x| \geq |y|$.
כן יחס סדר חלקי כי אין אנטי סימטריות. יכול להיות ש-
$|y| > |x|$ ו- $|x| \geq |y|$ אפ"פ כן יחס אומר שום דבר על
הקבוצות עצמן ואי אפשר לקבל מזה ש- $x = y$.

ו) $(P(x)/\sim, \leq)$
↓ ↘ מחלקות שקילות של $\sim$ על $P(x)$,
$|x| \geq |y|$ כאשר עוצמה של את קבוצה של $P(x)$
כן אין יחס חלקי אפ"פ אותנו לא עניין את כן תרשים.

**הגדרה:** $(A,R)$ נקרא יחס סדר מלא אם כן יחס סדר חלקי
ואם לכל $a,b \in A$ $aRb$ או $bRa$.

**טענה:** כן יחס סדר ומניח סיחס סדר חלקי בכך שני איברים
מקבוצה אפשר לתת תמיד הזה נקרא מלא.

פתרון

ג) $(\mathbb{R}, \leq)$ יחס סדר מלא

ב) $(\mathbb{N}, |)$ שמיחס סדר מלא כי $3 \nmid 2$ וגם $2 \nmid 3$.

א) $(P(x), \subseteq)$ לא יחס סדר מלא כאשר $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ וגם $\{2\} \not\subseteq \{1\}$

(16) 20.11.05
פרקטיקה

תזכורת:

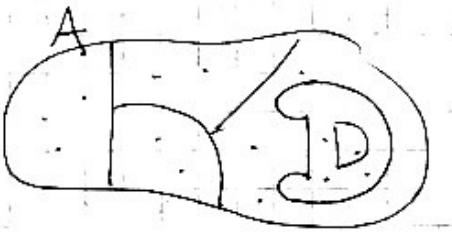
$R$ יחס בינארי על $A$, כלומר $R \subseteq A \times A$.

א) $aRa$

$aRb \Rightarrow bRa$

$aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$

$\Leftarrow$ $R$ יחס שקילות ומגדיר מחלקות שקילות של $A$ שאיחודן $A = \bigcup (A_i)$




אם $\{A_i\}$ הן מחלקות השקילות של $R$ אז יתקיים ש-

$a,b \in A_i : \exists \iff aRb$

ב) $aRa$

$aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$

$aRb,\ bRa \Rightarrow a=b$

$\Leftarrow$ $R$ יחס סדר חלקי.

לעתים $\leq$ על $R$

<u>הוכחה:</u> $A, B$ קבוצות סדורות חלקית.

$\Rightarrow$ נגדיר יחס סדר על $A \times B$:

א) $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ אם"מ $a_1 \leq a_2$ ו $b_1 \leq b_2$

$a_1, a_2 \in A$

$b_1, b_2 \in B$

נקרא $\leq$ יחס סדר חלקי על $A \times B$ ומכאן נקרא ליחס <u>קרטזי</u> (cartesian).

ב) $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ אם"ם $(a_1 < a_2)$ או $(a_1 = a_2)$ וגם $(b_1 \leq b_2)$

כך נקרא יחס אילוני (lexicographic) ובדומה נגדיר עבור $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

כלומר $a_1 < a_2$ אם קיים $k$ כך שמתקיים $a_1 = a_2$ עבור $i < k$ ו $a_k < a_k$.

יחס סדר מלא הוא יחס סדר מלקי כך שלכל $x,y \in X$

טענה: אם $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ יחסי סדר מלאים

אזי $(A \times B, \leq_{\text{מילוני}})$ יחס סדר מלא.

הוכחה: צ"ל שאם $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in A \times B$ אז $(a_1,b_1) \leq_{\text{מילוני}} (a_2,b_2)$ או $(a_2,b_2) \leq_{\text{מילוני}} (a_1,b_1)$ (את הכיוון שלה)

נניח כי $\leq$ יחס סדר מלא על $A$ ו$B$. (כלומר:

$(A, \leq)$ יחס סדר מלא $\Leftarrow$ או $a_1 \leq a_2$ או $a_2 \leq a_1$ $\Rightarrow$ $a_1 \neq a_2$ $a_1 \leq a_2$ או $a_2 \neq a_1$ $a_2 \leq a_1$ או $a_1 = a_2$)

מקרה א': $a_1 \leq a_2$, $a_1 \neq a_2$ $\Rightarrow$ $(a_1,b_1) \leq_{\text{מילוני}} (a_2,b_2)$

מקרה ב': $a_2 \leq a_1$, $a_1 \neq a_2$ $\Rightarrow$ $(a_2,b_2) \leq_{\text{מילוני}} (a_1,b_1)$

מקרה ג': $a_1 = a_2$. $(B, \leq)$ יחס סדר מלא.

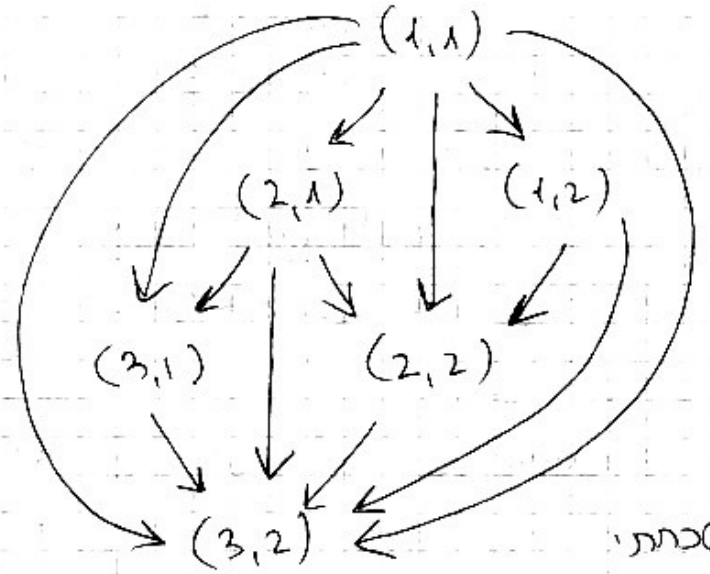
$\Rightarrow$ או $b_1 \leq b_2$ או $b_2 \leq b_1$ $\Rightarrow$

או $(a_1,b_1) \leq (a_2,b_2)$ או $(a_2,b_2) \leq (a_1,b_1)$. מ.ש.ל (!!)

לדוגמה: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2\}$

$\Leftrightarrow$ $A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

נצייר את $\leq$ של היחס




ענן שהיית שהכתבתי:

תלק מאמת'ים. בטל אופן הנרעין ברור.

נרשום את האיברים לפי יחס סדר $\leq$ הפוך:

$$(1,1) \leq (1,2) \leq (2,1) \leq (2,2) \leq (1,3) \leq (2,3)$$

כל יחס סדר מלא, ולפעמים קוראים לו "שרשרת". כיצד נשפר ברשום את $\leq$ האחרון בשורה?

③ $A = P(X)$ ונקח יחס הכלה $\subseteq$.
$(\subseteq, A)$ יחס סדר חלקי.

הערה: סימונים: $\cup$ איחוד $\cap$ חיתוך

| | | |
|---|---|---|
| $a \wedge b$ | $a$ וגם $b$ | |
| $a \vee b$ | $a$ או $b$ | |
| $\neg a$ | לכן $a$ | |
| $a \Rightarrow b$ | $a$ גורר $b$ | |
| $a \Leftrightarrow b$ | $a$ אמ"מ $b$ | |

# קוואנטיזציה

**המלון של הילברט:**

במלון יש אינסוף חדרים וגולש תפוסים.
מה אישהו למלון ומבקש חדר. אין בעיה!
יש אינסוף חדרים אז נציע את נפש חדר אחד
קדימה.

מגיעים סך אינסוף למלון ומבקשים חדרים. אין
בעיה! יש אינסוף חדרים אז נציע את נפש סך
חדרים קדימה.

מגיעים אינסוף אנשים למלון. אוי ואבוי, מה
נעשה?! אבל דאגה, יש פיתרון! נציע את
מס האנשים בחדר מ עחדר חב. ויוצ
אוטאינסוף התפשים נשים בחדרים איכותיים.

**זה היה סתם סיפור והוא לא קשור**
**לקוואנטיזציה.**

תרגילים מהבית...

# קומבינטוריקה

תרגיל: אותן שאלות אפשר לשאול בקבוצות סופיות! מה אותן יודעים על קבוצות סופיות?

④ $A, B$ שוות $\Leftrightarrow$ $|A \cup B| = |A \cap B|$

⑤ עיקרון הפלג: $|A \cup B| = |A| \cdot |B| - |A \cap B|$ מדוע? $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ כי $|A| = |A \cap B| + |A \setminus B|$

$\Rightarrow |A \cap B| = |A| - |A \setminus B| = |A \cup B| - |B|$

③ $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

טענה: $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ אם $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$

נוכיח $A_1, \ldots, A_n$ שוות.

הוכחה באינדוקציה:

תהי $n=1$ ברור ש $|A_1| = |A_1|$

נניח שהטענה נכונה ל- $n$ ונוכיח שהיא נכונה ל $n+1$.

יהיו $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ שוות. יש $n$ קבוצות: $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \cup A_{n+1}$ הן שוות. מדוע?

$A_i \cap (A_n \cup A_{n+1}) = (A_i \cap A_n) \cup (A_i \cap A_{n+1}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

תרגיל: נסיים את ההוכחה:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup (A_n \cup A_{n+1})| =$$

$$= |A_1| + \ldots + |A_{n-1}| + |A_n \cup A_{n+1}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| + |A_n| + |A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i|$$

כי הן שוות

$\Rightarrow$ סה"כ עקרון האינדוקציה הוכחה לכל $n$.

אשל ☺

טענה: $\left|\hat{\prod}_{i=1}^{n} A_i\right| = \hat{\prod}_{i=1}^{n} |A_i|$ כאשר $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות.

הוכחה: תרגיל (באינדוקציה).

טענה + הוכחה:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| =$$
$$= |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|) =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

משפט ☺

אפשר להכליל את זה ולקבל נוסחת ההכלה וההדחה

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots =$$

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{1+|S|} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|}$$

אפשר להוכיח את זה באינדוקציה אבל יהיה קשה.

נבדוק את זה עבור $n = 3$ שקיבלנו קודם?

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq \{1,2,3\}} (-1)^{1+|S|} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|$$

$$\begin{aligned}
&+ |A_1| && \{1\} \\
&+ |A_2| && \{2\} \\
&+ |A_3| && \{3\} \\
&- |A_1 \cap A_2| && \{1,2\} \\
&- |A_1 \cap A_3| && \{1,3\} \\
&- |A_2 \cap A_3| && \{2,3\} \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| && \{1,2,3\}
\end{aligned}$$

אי שוויון בוליאני.

(19)

**פתרון:**

א) צ"ל $R \subseteq A \times B$ יחס בינארי כך שלכל $a \in A$ קיימים $n$ איברים $b \in B$ כך ש-$aRb$ הוכיח כי $|R| = n|A|$.

$$|R| = \left|\bigcup_{a \in A}\{(a,b) : aRb\}\right| = \sum_{a \in A}|\{(a,b) : aRb\}| = \sum_{a \in A} n = n|A|$$

ב) כמה מספרים אי-זוגיים יש בין 0 ל-99?

נרשום אותם בשורה: $1, 3, 5, \ldots, 99$

לפני 1 יקדימה: $2, 4, 6, \ldots, 100$

ונלקן ב-2: $1, 2, 3, \ldots, 50$

$\Leftarrow$ יש 50 כאלה.

בעצם תפשנו את האחד ואת בן קבוצה הזוגי אי-זוגיים שלו $\{n, \ldots, n+1\}$ ובכך צוינו אחד מהם $n$. מעניין!

ג) כמה מספרים אי-זוגיים יש בין 0 ל-99 כך שהספרה שנותנת אם נסתכל כמה יש עם ספרה שונה נקח

$$\left|\left\{\begin{array}{c}\text{ספרה}\\ \text{שונה}\end{array}\right\}\right| - \left|\left\{\begin{array}{c}\text{כאלה עם}\\ \text{ספרה}\end{array}\right\}\right| = 50 - \left|\left\{\begin{array}{c}\text{כאלה עם}\\ \text{ספרה}\end{array}\right\}\right|$$

כלומר נניח $a \in \{1,3,5,7,9\}$ כמה $aa$ יש? אין כאלה 5:

$11, 33, 55, 77, 99$.

$\Leftarrow$ יש $50-5 = 45$ כאלה עם ספרות שונות!

יש עוד דרך לספור את זה: מתפשים

$$|R| = \left|\{ab : a \neq b, a \in \{0,\ldots,9\}, b \in \{1,3,5,7,9\}\}\right|$$

נשתמש ב-$a \in A = \{1,3,5,7,9\}$. $b \in B = \{0,\ldots,9\}$ עבור כל $a \in A$ קיימים $|\{b \in B : ab \in R\}| = 9$, כי ב-$B$ יש 10 איברים. ומכיוון שיש 5 כאלה נקבל $|R| = |A| \cdot 9 = 45$

**דוגמה:**

$A$ = {בוגרי בלגן אופים} $|A| = 70$ $|A \cap B| = 30$

$B$ = {משקשקים} $|B| = 40$ $|A \cap C| = 40$

$C$ = {בוגרות קטנות} $|C| = 60$ $|B \cap C| = 20$

$|A \cap B \cap C| = 10$

כמה בוגרות יש סה"כ? $|A \cup B \cup C| = ?$

$X$ = {כל הבוגרות בעולם} ← הקבוצה האוניברסלית

נעמיס את הפרטים שיש לנו.

סה"כ יצאו 90.




ואכן סה"כ נוסחת ההכלה וההדחה:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 70 + 40 + 60 - 30 - 40 - 20 + 10 = 90$$

**משפט:** יהיו $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות. אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|$$

**הגדרה:** $\bigcap_{i \in S} A_i = \begin{cases} \emptyset & |S| > 1 \\ A_i & |S| = 1 \end{cases}$ ← אם הקבוצות $\{A_n\}$ כרות. כי ראשר יש לפחות שתי קבוצות הן כרות ואזו ראשר יש קבוצה אחרת אז החיתוך הוא הינו עדיין.

מאחר ו- נקבל

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subseteq [n] \\ |S| = 1}} (-1)^{|S|+1} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|$$

מיצגת סכום על כל התת-קבוצות של $[n]$ שגודלן 2.

הוכחת ההשערה:

נוכיח באינדוקציה על $n$.

בסיס האינדוקציה: $n=1$ טריוויאלי. אין פה מאום על מה לדבר. יש קבוצה אחת לה איחוד שלה הוא עצמה. ההטלה מעל קבוצה אחת:

$$|A_1| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [1]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = |A_1| \quad \checkmark$$

↙ יש רק קבוצה אחת $S=[1]$.

הנחת האינדוקציה: נניח כי ההטלה נכונה עבור $n$ קבוצות.

שלב האינדוקציה: נוכיח את נכונות ההטלה עבור $n+1$ קבוצות:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| = \left| \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cup A_{n+1} \right| = \left| B \cup C \right| =$$

$$\begin{bmatrix} B \equiv \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ C \equiv A_{n+1} \end{bmatrix}$$

↑ הנחתנו בצבר

$$= |B| + |C| - |B \cap C| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap A_{n+1} \right| =$$

$$\overset{\text{ג'יג}}{=} \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}) \right| =$$

↙ פילוג

$$\overset{\text{ג'יג}}{=} \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| + |A_{n+1}| - \sum_{\emptyset \neq T \subseteq [n]} (-1)^{|T|+1} \underbrace{\left| \bigcap_{i \in T} (A_i \cap A_{n+1}) \right|}_{\bigcap_{i \in T \cup \{n+1\}} A_i} =$$

$$\{T \mid \emptyset \neq T \subseteq [n]\} \xrightarrow{\text{הסבר}} \{S \mid \{n+1\} \subsetneq S \subseteq [n+1]\}$$

$$T \longmapsto S = T \cup \{n+1\}$$

↑ משמרת את גודל $T$

$$= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| + |A_{n+1}| - \sum_{\{n+1\} \subsetneq S \subseteq [n+1]} (-1)^{|S|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| =$$

$$= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| + |A_{n+1}| + \sum_{\{n+1\} \subsetneq S \subseteq [n+1]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n+1]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$$

$(-1)^{n+1} = (-1)^{n}$ ←

מה עם $S$ שמכיל את $n+1$? אם $S \ni n+1$ אז $\emptyset \neq S \subseteq [n]$ ⟸ אז $S \supsetneq \{n+1\}$.

$S = \{n+1\}$ אז ⟵ $|A_{n+1}|$

$$\sum_{\{n+1\} \subsetneq S \subseteq [n+1]} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$$

משל"נ ☺

(21)

הוכחה: נשתמש ב $n=2$ (עבור את ההוכחה שעשינו בהרצאה):

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| =$$

$$= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| =$$

$$= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| =$$

$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - \Big( |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)| \Big) =$$

$$= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - \Big( |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \Big) =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

27.11.05
דיסקרטית

**פתרון:** $A = [8]$ ו- $S \subseteq P(A)$

נתון שגם קבוצה ב- $S$ יש בדיוק 4 איברים.
מה שגם איבר של $A$ שייך ל-3 קבוצות ב- $S$.
כמה קבוצות יש ב- $S$?

$$R = \{(x, B) : x \in A, B \in S, x \in B\}$$

$$|R| = |A| \cdot 3 = |S| \cdot 4 \Rightarrow$$

$|S|$: כמה B-ים יש (נתון כמה איברים יש בכל B)

$|A|$: כמה x-ים? לכל x כמה B-ים יש כך ש $x \in B \in S$

$$\Rightarrow |S| = |A| \cdot \frac{3}{4} = 6$$

**תשובה:**

## בעיות מניה בסיסיות

נניח ש- $A$ קבוצה של $n$ אוביקטים - $a_1, \ldots, a_n$. (שלא כמה אלו)
אפשר לחפש מאורכים (נתון או לא) יש תכונות שונים.

| | אוסרות חלקות | מותרות חלקות |
|---|---|---|
| לא חשובה סדר | ② | ① |
| כן חשובה סדר | ③ | ④ |

(1) יש חשיבות לסדר ואותיות חלכות:

שאלת הראשונה יש $n$ אפשרויות, לשאלה השניה יש $n$ אפשרויות
וכן הלאה עד השאלה ה-$k$ שיש לה גם $n$ אפשרויות. סה"כ $n^k$ אופנים.

לדוגמה אם $n=3$ ו- $k=2$ יש לנו $\begin{cases} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{cases}$ $9 = 3^2 = n^k$

או לחלופין כמה אפשרים אפשר לסדר ב"לוטו" בו יש 8 מספרים
כאן $n=49$ ו- $k=8$ $\Rightarrow$ $49^8$ אפשרים.

(2) יש חשיבות לסדר אבל אסורות חלכות:

שאלת הראשונה יש $n$ אפשרויות, לשאלה השניה יש $n-1$ אפשרויות
וכן הלאה לשאלה ה-$k$ יש $n-k+1$ אפשרויות.

$\Rightarrow$ סה"כ $\frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)\cdots(n-1)n$

לדוגמה $n=3$ ו- $k=2$ נקבל $\begin{cases} 12 & 13 \\ 21 & 23 \\ 31 & 32 \end{cases}$ $6 = \frac{3!}{(3-2)!}$

שימו לב - כאן מדובר ש- $k$ את $n$ אותיות לפחות בשונות.

(3) אין חשיבות לסדר ואסורות חלכות:

כמו ב-2 אם הסדר חשוב יש $\frac{n!}{(n-k)!}$ אופנים. אבל לא יודעים שכל
אוסף אותיות סופרנו $k!$ פעמים - כי כל מספר התמורות של $k$ אותיות
ולכן נקבל $\frac{n!}{(n-k)!k!} \equiv \binom{n}{k}$

מעתה ואילך תשובה לשאלה כמה תת קבוצות באורך $k$ יש לקבוצה בגודל $n$.

שאלה (קשה) אם שמים קודם $A = [8]$ ו- $|A^C| = 4$ כך ש- $|A| = 4$.
כמה $S$ כאלה יש? $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$ אבל יש עוד קבוצות באורך 4
ואסור להניח על איברים: $\binom{8}{4}$ כי מקבוצה בריקה אין תת קבוצות בגודל 4.
ושאלו אלינו יכולים לעשות אותם קבוצות, כיוון שמספר תת הקבוצות
של קבוצה הוא $2^{70}$, שלפי דעתי הרבה יותר

הערה: שקר מלא: טרנזיטיבי וגם רפלקסיבי: $(aRb, bRc \Rightarrow aRc)$
$\neg(aRa)$

4) אין תשובה טובה ומתרגת תלכות

נסתכל על הבעיה אחרת: כמה אפשרויות יש לשים $k$ כדורים בתוך $n$ קופסאות.




בעצם לי כמו מספר האפשרויות לכתוב את $k$ בצורה $k=\sum_{i=1}^{n} x_i$
נניח את כך הכדורים והמחיצות כאופן הבא:

ooo|o|ooo|...|o|o

כאשר $n$ מחיצות נקודו $1-n$ מחיצות את'כך. אנו יש סדרה בת $k+n-1$ סימנים $n-1$ מהם בקו שווים בדיוק $k$ ס-ים. אם) אפה הם כמה אפשרויות יש לבחור $k$ מקומות? $\binom{k+n-1}{k}$ ?

משולש פסקל של $\binom{n}{k}$:




תרגיל: $\binom{k}{n+1} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!}$

$$\frac{n!}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

אבן) מספר את הקבוצות עם $n+1$ לה $\binom{n}{k-1}$ $\Rightarrow$ $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
מלן $n+1$ לה $\binom{n}{k}$
מספר את הקבוצות עם $n+1$
איך נחשב את לה. לה מספר את הקבוצות עם $n+1$ שלוף בגודל $k+1$
$\binom{n+1}{k+1}$ - מספר את הקבוצות מגודל $k$ של קבוצה בגודל $n+1$
לה יהיה אותה נוסחה. אבן לה ראש הגיוני.

זוכרים, אם אומרים ש $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . מסדירים $0! = 1$ .

$$\binom{0}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \Rightarrow$$

ולשם מה משולש פסקל אומר?

נשים לב שכל שורה n את המקדמים של $(a+b)^n$ .

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

אם אומרים ש $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ וכבה, זה מה משולש פסקל.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\binom{8}{4} = 70$ ואפשר גם לשרטט ולספור 4 דלתות.

מחשבים מאמצים את מספר הדרכים שהילד מקבל שלום אם אפשר לו לרדת מהמשולש אלא או שמאלה. למה הכוונה? יש שם 8 שורות אומרים שהילד מגיע מתוכם 4 דלתות אז מתוך 8 דלתות אפשר לבחור בדיוק $\binom{8}{4}$ דרכים, אחרי שבחר דרך אחת שבה $\binom{8}{4}$ מחשבים מאמצים את מספר הדרכים שהילד מקבל שלום אם אפשר לו לרדת מהמשולש אלא או שמאלה. למה הכוונה? יש שם 8 שורות אומרים שהילד מגיע מתוכם 4 דלתות אז מתוך 8 דלתות אפשר לבחור בדיוק $\binom{8}{4}$ דרכים, אחרי שבחר דרך אחת שבה $\binom{n}{k}$ מחשבים מאמצים את מספר הדרכים שהילד מקבל שלום אם אפשר לו לרדת מהמשולש אלא או שמאלה. למה הכוונה? יש שם $n$ שורות אומרים שהילד מגיע מתוכם $k$ דלתות אז מתוך $n$ דלתות אפשר לבחור בדיוק $\binom{n}{k}$ דרכים, אחרי שבחר דרך אחת שבה $(n-k)$ דרכים שמאלה.

נשים לב שלפי הגדרה זו טריוויאלית ש $\binom{n}{k}$ : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

**משפט הבינום:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**הוכחה:**

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

מכפלה של $n$ סוגרים

$\underbrace{aba\cdots a}_{n}$ סדרה באורך $n$

$2^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

29.11.05
דיסקרטי

**משפט הבינום:** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

**תכונה של מקדמים בינומיים:** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ $(n \geq k \geq 1)$

מוסכם כי $\binom{n}{k} = 0$ כאשר $k > n$ או $k < 0$.

אנו צריכים אופן שרשום $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ עבור $n+1 \geq k \geq 0$

ניראה שזה מספיק מכיוון שמקרה הקצה:

| $k=0$ | $n+1=k$ |
|---|---|
| $\binom{n}{0}\binom{n}{-1}\binom{0}{n+1}$ | $\binom{n}{n}\binom{n}{n}\binom{n+1}{n+1}$ |
| $1+0=1$ | $0+1=1$ |

**הוכחת משפט הבינום:** באינדוקציה על $n$:

מסיס האינדוקציה: $n=1$: $(x+y)^1 = x+y = \binom{1}{0}x^1 y^0 + \binom{1}{1}x^0 y^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k$ ✓

הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n$

צעד האינדוקציה:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} =$$

$k=l-1 \Leftarrow$ הצפת משתנה $k+1=l$

$$= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}$$

משל ⓒ

$\binom{n}{-1} = 0$ כי $k=0$ אבר אחרון שלא מתאפס.

$\binom{n}{n+1} = 0$ כי $k=n+1$ אבר ראשון שלא מתאפס.

$\binom{n}{k}$ הוספנו שמקדים את $k$ ואז אבר $n-k$ אחרון שלא מתאפס.

$\binom{n}{k-1}$ הוספנו שמקדים את $k$ ואז אבר $n-k$ אחרון שלא מתאפס.

$\binom{n+1}{k}$ שווה למקדם $x^k y^{n+1-k}$ בפיתוח $(x+y)^{n+1}$.

**מסקנות:**

א) $y=1 \Rightarrow (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

ב) $x=1,\ y=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. לכן ניתן לפרש את הצד שמאל כמספר הקבוצות (גודל $k$) שאפשר לבנות מקבוצה בגודל $n$. סה"כ מספר הקבוצות הוא $2^n$.

ג) $x=-1,\ y=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0^n = 0 \quad (n>0)$

אומר לה מן הפה - $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \ldots = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{אי זוגי}} \binom{n}{k} = \sum_{\text{זוגי}} \binom{n}{k}$$

כלומר מספר תת הקבוצות מגודל זוגי = מספר תת הקבוצות מגודל אי זוגי.

ד) נגזור את זה ונקבל:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

ואם $x=1$ נקבל $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$

ה) משערך קלפים כאלו אותם פסק. אנו מגדירים אחד שם הקלפים הם הוא"ם מקבלים אקוונט פאון.

פתרון $1, 5, 10, 10, 5, 1$ כך נקבל.



**סדרה אונימודלית** Unimodal sequence

נסמן את הסדרה $\binom{n}{k}$ כאשר $n$ קבוע את $k$ יש $n+1$ איברים.

כלומר יש סדרה בגודל אונימודלית - כלומר יש איבר אחד או שני איברים שווים שהם מקסימום.

$\Leftarrow$ $\binom{n}{0} \cdots \binom{n}{\frac{n}{2}}$ סדרה עולה ו- $\binom{n}{\frac{n}{2}} \cdots \binom{n}{n}$ סדרה יורדת

שלה בדיוק שווה שהיא אונימודלית.

משפט (יי)

**הוכחה:**

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{k+1}{n-k}$$

$$\Leftarrow \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} < 1 \quad \text{כאשר} \quad k+1 < n-k \Rightarrow k < \frac{n-1}{2}$$

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} > 1 \quad \text{כאשר} \quad k+1 > n-k \Rightarrow k > \frac{n-1}{2}$$

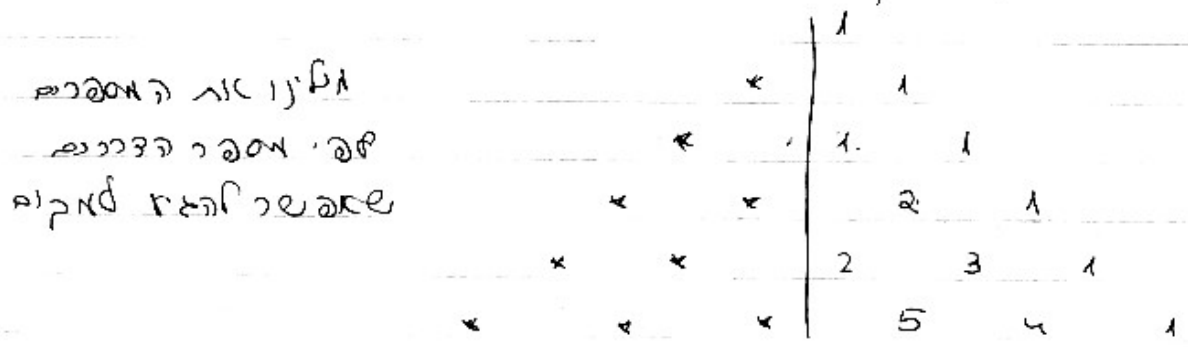
# מספרי Catalan

נבנה את המשולש הבא:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
```

אנחנו שמים לב שמספר במשולש הינו מספר הדרכים שניתן להגיע אליו מראש המשולש כאשר אותו רק צורת תנועה אחת אנו יכולים תנועה שמאלה.

נוסיף תנועה נוספת קדימה באותו המשולש:




מצאנו את המספרים שאפשר להגיע לאותם. שאפשר מספר הדרכים

אותנו רואים ששוב מתקיים התכונה שאיזה מספר הינו סכום של שתי שמעליו. מאופן בנייה:

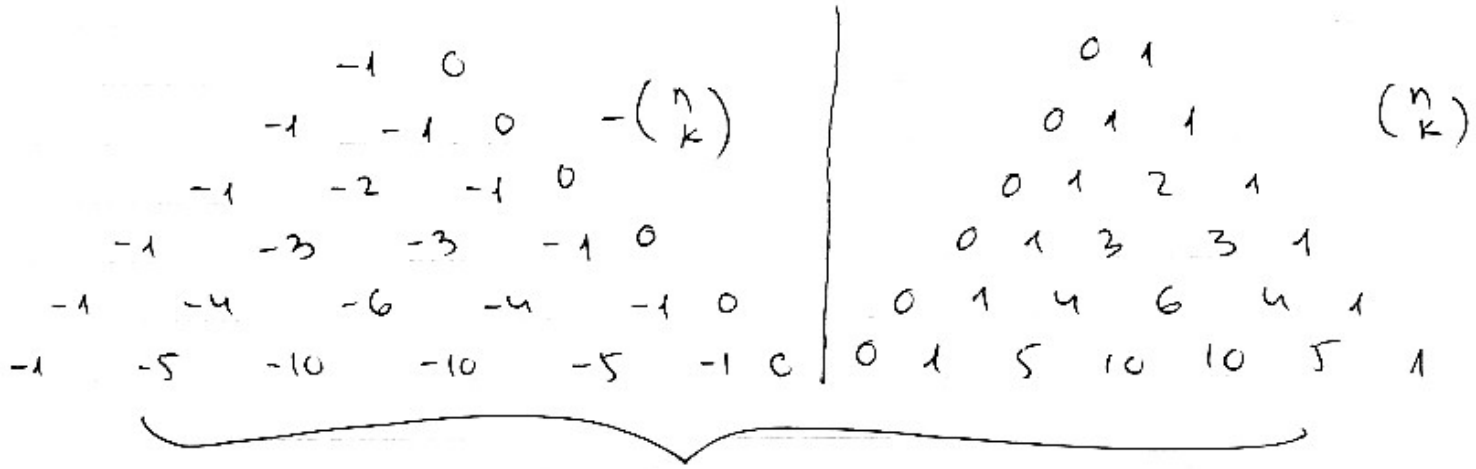
(0,0)

במשולש פסקל במקום $(x_n)$ נשים המספר $\binom{n}{k}$.

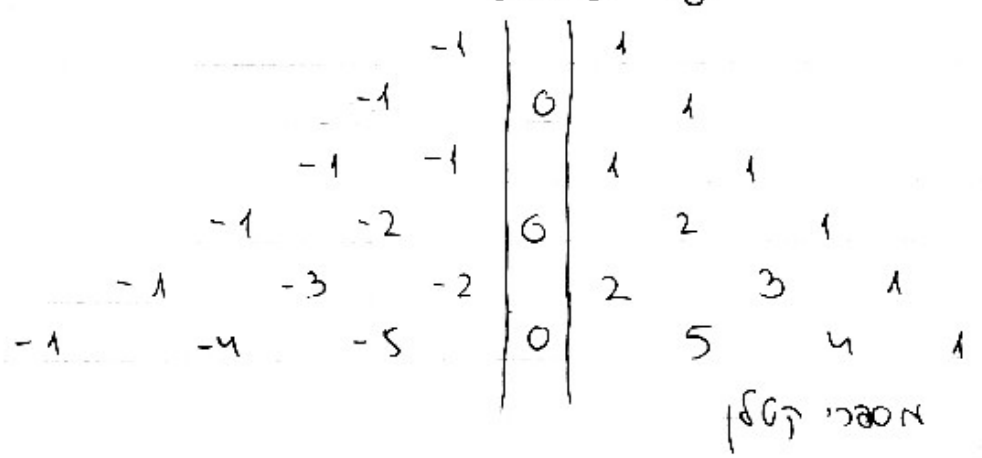
שכך $n \to$ $(x_n)$ ומה עם המשולש עם קדקוד?

מקום $x$

נשים שני משולשי פסקל זה-מול זה בצדדים




$\Downarrow$ נכון:



מספרי קטלן

מתקיים $(n,k)$ בכל הזוגות יש מספר $\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}$

$$\binom{2n+1}{n+1}-\binom{2n+1}{n}=0 \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ כל שורה אחרת יש 0 באמצע

בדיוק אותם שמספרי קטלן הם המספרים שמתקבלים לפי הנוסחה:

$$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$$

מתקיים תכונה משותפת נוספת.

משפט הבינום: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \Rightarrow (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

טענה: $\sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j}\binom{m}{r-j} = \binom{n+m}{r}$

הוכחה: (קומבינטורית).

נניח שיש $n+m$ כדורים, $m$ מהם שחורים ו- $n$ לבנים.

רוצים לבחור $r$ כדורים. ישנן $\binom{n+m}{r}$ אפשרויות.

כל פעם שנבחר $r$ כדורים, יהי $j$ מספר הכדורים השחורים.

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$$

$\binom{m}{j}$: מתוך $m$ כדורים שחורים יש $j$ כאלה אפשרויות

$\binom{n}{r-j}$: מתוך $n$ כדורים לבנים יש $r-j$ כאלה אפשרויות

$\Rightarrow \binom{n+m}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$ אפשרויות

$\Rightarrow \binom{n+m}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$

זה נכון גם אם $r>m$ או $r>n$ כי אז פשוט יהיה אפס.

נשלם ☺

דוגמה:

$r=m \Rightarrow \binom{n+m}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$

$j=0$ מ"ש $j=0$ מכאשר

$\binom{n+m}{r}$ מקדם של $x^r$ ב- $(1+x)^{n+m}$ = מקדם של $x^r$ במכפלה $(1+x)^m(1+x)^n$

$$= \sum_{a=0}^{m}\binom{m}{a}x^a \cdot \sum_{b=0}^{n}\binom{n}{b}x^b$$

יהיה $x^r$ ב- $\sum_{a=0}^{r}\binom{m}{a}\binom{n}{r-a}$

אפשר לתרגם את הטענה בדרך אחרת?

אלג' מה הקוף מהכפלה?

$$\sum_{\substack{a,b\\ a+b=r}} \binom{m}{a}\binom{n}{b} = \sum_{a=0}^{r} \binom{m}{a}\binom{n}{r-a}$$

משל (ב)

פלאה:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a}\binom{n}{n-a} = \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{a}^2$$

$r=n=m$

אפשר להכליל את הזהות לצמה מחוברים:

$$\binom{m+n+k}{r} = \sum_{j+a+b=0} \binom{m}{a}\binom{n}{b}\binom{k}{r-a-j}$$

- $r-a-j$: הבחירה שנשאר
- $b$: בחירה אחרונה
- $a$: מחברים בחירה

טענה: יהי $p$ מספר ראשוני. אז $p \mid \binom{p}{k}$ עבור $k \in \mathbb{N}$.
$p > k > 0$.

הוכחה: $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ - מספר שלם.

$$= \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

$p \nmid k!$ $\Leftarrow$ $k \neq 1, \ldots, p-1$ $\Leftarrow$ $p > k \geq 1$

$\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ $p$ מספר שלם

$p \nmid k!$ , $p \mid (p-1)\cdots(p-k+1)$ $\Leftarrow$ $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ $p \mid p$

משל (ג)

הוכחה ב':

$\binom{p}{n}$ = מספר הקבוצות בגודל $n$ של $\{1,\dots,p\}$

= מספר הפולינומים ב- $0,1$ באורך $p$ ודרגה $n$

= מספר הסדרות $(a_0,\dots,a_{p-1})$ שעבורן $\sum_{i=0}^{p-1} a_i = n$ ו- $a_i \in \{0,1\}$

= $|S|$ כאשר $S = \{(a_0,\dots,a_{p-1}) : a_i \in \{0,1\}, \sum a_i = n\}$

נתבונן ב- $(a_0,\dots,a_{p-1}) \in S$ שאינה קבועה ($p$ איברים של $S$)

א- $a_0,\dots,a_{p-1}$ באופן הבא $a_0 a_1 \dots a_{p-1}$

$a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_0$

$\vdots$

$a_{p-1} a_0 \dots a_{p-2}$ פשוט כל פעם עושים Shift

ברור שקיבלנו $p$ איברים של $S$, כל $n$-יה יש $p$ איברים ומכוון שסכום של כל אחת הוא $n$ כי לה אותה האיבר רק בסידור שונה.

אם נניח שכל $p$ האיברים שונים אז הוכחנו את הטענה כי אין נקבל משהו שווה לעצמו שקיבלנו.

נניח בשלילה ש(שורה $i$) = (שורה $j$) ($i<j$)

$\Leftarrow$ לכל $k$ $a_{i+k} = a_{j+k}$ $\Rightarrow$ $a_{k+c} = a_{k+(i-j)} = a_k$

$p > j-i > 0$ ו- $p$ ראשוני $\Leftarrow$ קיבלנו מספרים שלמים $l, m$

כך ש $|p-mc| = 1$ כאשר $j-i=c$ $\Leftarrow$ $lp+1 = mc$

$\Leftarrow$ לכל $k$ $a_k = a_{k+mc} = a_{k+lp+1} = a_{k+1}$

$\Leftarrow$ כל השורות שונות

$\Leftarrow$ כאשר יש איבר אחד של $S$ יש קבוצה של $p$ איברים שונים של $S$ $\Rightarrow$ $|S| = \binom{p}{n}$ $p|$ מש"ל ☺

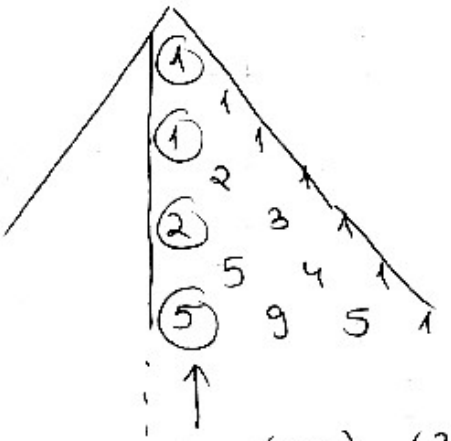
※ ובאמת נסתיר כי או $a_k = 0$ או $a_k = 1$ אמנם $p > k > 0$

---

**הערה:** בדומה בדיוק אפשר להוכיח ש $p | \binom{p^r}{n}$ $p^r > n > 0$

# מספרי קטלן

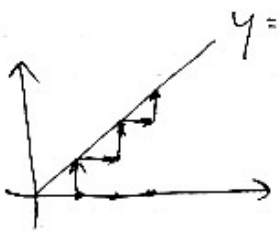
הם מופיעים את מספר הדרכים שבהן אפשר לחלק מצולע קמור למשולשים בעזרת אלכסונים שלא נחתכים.




אפשר לפתח את הביטוי $C_n$ ונקבל

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$



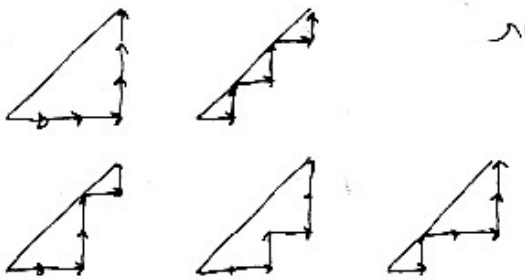

**הוכחה:** נשנה $(x,y)$

כאלה אפשרויות יש להגיע

מ- $(0,0)$ ל- $(n,n)$ בתוכן $x \geq y \geq 0$ זו $\longleftarrow$ ל- $0$ ?

לה בדיוק כמו מספרי קטלן - $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$

למשל $C_3 = 5$ ובאמת



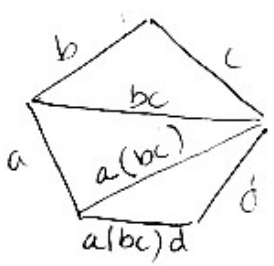
הוכחה חזקה יותר
מספרי קטלן מתארים
את הכמות הדרכים
שבהן אפשר לסדר
סוגריים מאוזנים
( $\longleftrightarrow$ )
$\uparrow$ $\longleftrightarrow$ $\rightarrow$

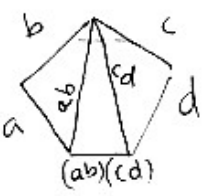
ללמוד ש- $C_n$ מקיים $C_{n+1}$ אותיות $\Rightarrow$ יש דרכים

למשל 4 אותיות מאוזנים סוגריים

$$((p\,?)(q\,v))$$
$$((p\,(?\,q))v)$$
$$(a((b\,c)\,d))$$
$$((p(?\,q)v)$$
$$(p(?(q\,v)))$$

אפשר לעשות את זה בדיוק על $(n+1)$ - צלעות



(29) 6/12/65
תרגילים

## הוכחות באינדוקציה

① $p \mid \binom{p^n}{c}$ $\quad 0 < c < p^n$

② יחידות של פירוק של מספר טבעי לגורמים הראשוניים שלו.

**הוכחות**

① נוכיח באינדוקציה על $n$. עבור $n=1$ - $p \mid \binom{p}{c}$
נניח שהטענה נכונה עבור $n$.
בשלב האינדוקציה נראה ש $\binom{p^{n+1}}{c} = \sum_{a+b=c} \binom{p^n}{a}\binom{p}{b}$
ובאופן דומה עבור מספר של מחוברים.

$$\Rightarrow \binom{p^{n+1}}{c} = \sum_{a_1+\dots+a_p=c} \binom{p^n}{a_1} \cdots \binom{p^n}{a_p} \quad (*)$$

נזכיר ש עבור $0 < a < p^n$ $\binom{p^n}{a} \equiv 0 \pmod p$
עבור $a = 0, p^n$ $\binom{p^n}{a} \equiv 1 \pmod p$

$\Leftarrow$ $\binom{p^n}{a_1} \cdots \binom{p^n}{a_p} \equiv 0 \pmod p$ חוץ מכשר $a_1, \dots, a_p \in \{0, p^n\}$
אומר $\binom{p^{n+1}}{c} \equiv 0$ ואז $p^n \nmid c$ אם $\Leftarrow$ $c = \sum_{i=1}^{p} a_i$ וגם
אותם $p \mid c$ כלומר $c = mp^n$ כאשר $p > m > 0$.

מ (*) נקבל

$$\binom{p^{n+1}}{c} \equiv \begin{pmatrix} \text{מספר של אפשרויות} \\ \text{לחלק את } c \text{ בצורה} \\ a_p + \dots + a_1 \\ \text{כאשר } a_i \in \{0, p^n\} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{מספר האפשרויות} \\ \text{לחלק את } m \text{ בצורה} \\ b_p + \dots + b_1 \\ \text{כאשר } b_i \in \{0,1\} \end{pmatrix} = \binom{p}{m} \equiv 0$$

$p > m > 0$

יהי $n$ מספר טבעי. הראשונים $p_1,\dots,p_k$ כך ש- $n = p_1,\dots,p_k$.

נניח בשלילה ש- $n$ אינו ראשוני, אז קיים $m$ המחלק את $n$ כך ש- $1 < m < n$ וגם $m \mid n$. כלומר קיים $a$ כך ש- $ma = n$.

נניח בשלילה שקיים $N$ טבעי גדול מ-1 שאינו מתחלק באף מספר ראשוני. נסמן ב- $p_1,\dots,p_k$ את כל המספרים הראשוניים. נניח בשלילה ש- $N = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_t$

$q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_t$ $\quad p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k$

$N$ הוא המכפלה הכי קטנה שקיימת שונה מ-1. נניח בשלילה שקיים $N$ כזה. $\Rightarrow \exists i,j$ כך ש- $p_i = q_j$ (אחרת אפשר לחלק את שני האגפים ב- $p_i = q_j$ ונקבל שונים בין שני מספרים קטנים מ- $N$ ואת הסתירה שווה).

נניח בה"כ $q_1 \geq p_1$ $\Rightarrow$ קיימים $a$ כך ש- $q_1 = ap_1 + b$ כאשר $p_1 > q > 0$ - השארית.

$$\Rightarrow p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = q_1 \cdots q_t = q_1(ap_1 + b) \cdots q_t =$$

$$= ap_1 q_2 \cdots q_t + bq_2 \cdots q_t$$

$$\Rightarrow p_1(p_2 \cdots p_k - aq_2 \cdots q_t) = bq_2 \cdots q_t$$

$bq_2 \cdots q_t$ מתחלק ב- $p_1$ $\Leftarrow$ $b$ מתחלק ב- $p_1$ הראשונים קטנים מ- $p_1$ $\quad p_1 > q > 0$

אולם שתי הפירוקים למספר קטן $N$ כי הוצאנו מ- $p_2 \cdots p_k$ מספר חיובי $aq_2 \cdots q_t$. אבל ראינו קודם כי 2 מספרים שונים יש פירוק יחיד אבל בכל זאת יש $p_1$ ובכך הגענו לסתירה!

משל ☺

את ההוכחה נשאיר לך. היינו חייבים לעשות באינדוקציה.
במקרה זה, מיותרת כמה. מה שאנחנו אומרים הוא
שניתן שמה לא נרון שלם וכמעט יש פירוק יחיד ⇐
קיים הכמעט, תמיד, שקיימות לו 2 הצגות ומשם נמשך
מהה שעשינו בעמוד הקודם.

## נוסחת תאורת (משיכה)

<u>בעיות מנה שאפשר לפתור ע"י נוסחאות נסיגה</u> (recurrence relation):

נתחיל מזה שלא תמיד אפשר למשוך נוסחאות בקורה
שכה זה הפעמים הבאות שאנחנו משתמשים בה.
לפעמים יהיו לנו מבנה אחר בעזרת האברים שקדמו לו.

דוגמאות

① $a_n = 2a_{n-1}$, $a_0 = 3$ $\Rightarrow$ $a_n = 3 \cdot 2^n$

② $a_n$ $(n \geq 1)$

$a_n = n^2 a_{n-1}$, $a_1 = 4$ $\Rightarrow$ $a_n = 4(n!)^2$

③ לפעמים לא נוכל למצוא נוסחה רק אחר אחד לפני.
<u>נוסחת פיבונאצ'י</u> (Fibonacci)

$a_0 = 1 \quad a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$\Rightarrow a_n = (1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ \dots)$

לנוסחת פיבונאצ'י יש מה נוסחה יפיה.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_n + a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אנחנו עוד לא יודעים מספיק פונקציות אבל אפשר
כבר להציע פונקציה:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

למתן"ים - סדרת פיבונאצ'י, קשורה מכאן ל-
ה שפנים ה"מתכפים..."

(4) $S(n,k) = $ (מספר החלוקות של $[n]$ ל-$k$ קבוצות)

לא מופיע היטב כאשר $1 \leq n$ ו- $n \geq k \geq 1$.

מגדיר ש- $S(n,1) = 1$

$S(n,n) = 1$

$S(n,k) = ?$ כאן נכנס שוויון פשוט כזה.

יש לכך נוסחה נקראת רקורסיבית:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)$$

↙

אפשרויות את $k$ כפי כמו אפשרי בסוף

(31) 11.12.05
שיעור 9

$S(n,k)$ = מספר החלוקות של $[n]$ ל- $k$ חלקים.

טענה: $S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$

הוכחה: $S(n,k)$ - מספר החלוקות של $[n]$.

$A_1 \cup \dots \cup A_k = [n]$ זרים כך ש $n \in A_i$ יהי

אם יש 2 כאלה נוותר:

א. $\{n\} = A_i$ $\Leftarrow$ $\{A_j\}_{j \neq i}$ חלוקה של $[n-1]$

$\Rightarrow S(n,k) = \underbrace{S(n-1,k-1)}_{\text{החלוקות של } [n-1] \text{ ל- } k-1 \text{ חלקים}}$

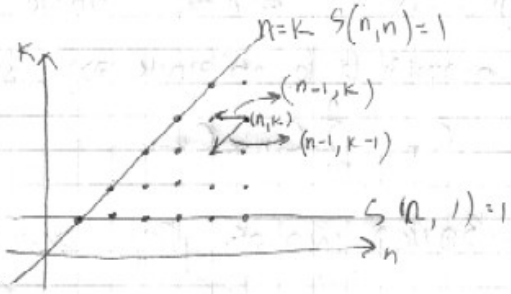
ב. $|A_i| > 1$ $\Rightarrow$ $\{n\} \neq A_i$.

נרשום (סדרה) של $\{A_i, \{A_j\}_{j \neq i}$ - כיצד חלוקה של $[n-1]$ ל- $k$ חלקים. יש $S(n-1,k)$ חלוקות כאלה.

אבל כמה חלוקות $\{A_j\}$ יש במקרה כזה? יש $k$ אפשרויות לבחור $i$ כך שמתוך $A_i$ יתווסף איבר $n$ $\Rightarrow$ יש $kS(n-1,k)$ חלוקות.

סה"כ יקבל $S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$

משל ☺




טענה: $S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i,k-1)$

הוכחה: נניח ש $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ חלוקה של $[n]$. לפי $j$ כך ש $n \in A_j$ $\{A_{j+1}, \dots, A_k\}$ חלוקה ל- $k-1$ חלקים של $[n] - A_j$ נניח ש $|A_j| = i$ אזי יש $S(i,k-1)$ חלוקות. אבל יש $\binom{n-1}{i}$ אפשרויות לבחור קבוצה עם $i$ איברים. מכיוון ש $k-1 \geq i-1$

$\Rightarrow$ נקבל $S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i,k-1)$ משל ☺

# נוסחת נוסיגה למספרי קטלן

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

**משפט:** $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$

**הוכחה:**

נראה שמספר הדרכים לקשר את מספרי קטלן ש אפשריים
עשים אלכסונים שאין חותכים זה את זה ב- $(2+n)$ צלעות
(כולל הצלע שבין $a$ למשולש)
את הצלע שיש לנו $(2+n)$ ואת הצלע
עשים עליה משולש




יש משולש אחד שאכן את $a$ ובדיוק ש $n \geq k \geq 1$
משני צדי המשולש נקבל
$(1+k)$ יגון $1 \cdot (k-2+n) =$ יגון

$C_{k-1}$ תלויות — $C_{n-k}$ תלויות

אבל אפשר לבחור $n$ צלעות שונות שלהן נעשה
את התהליך הזה. וזה איחוד זר של $n$ המקרים. אז נקבל

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k}$$

אחרון אמר ש מספר קטלן זה כמו הכיוונים עשים שמרים
מאוזנים מילה בת $n$ אותיות.
אז אפשר לבחור מקום $k$ ונקבל $n-k$ ב צדדי אחד $1-k$
אותיות בצדדי שני. לפי $k$ כמה נקבל $C_k C_{n-k}$ תלויות.

$$\Rightarrow C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-k} C_k$$

אפשר לעשות הוכחה קצרה. מראים כי שמספר קטלן הוא מס'
הדרכים לעבור מנקודה $(0,0)$ אל $(n,n)$ בצעדים מעלה וימינה.

משפט (3)

**בתירות**

יש שני מודאלים A ו- B.

יש n אנשים: כל אחד יכול להחזיק אחד מ- A,B.

נניח שאחרי הספירה מקבלים a הצבעות למודאל A

ו- b הצבעות למודאל B

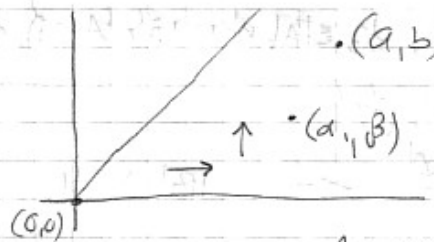
סה"כ יש $\binom{a+b}{a}$ אפשרויות להצבעות.

ו- $\binom{n}{a}=\binom{a+b}{a}$ אפשרויות לקבל תוצאות $(a,b)$.

**שאלה:** כמה אפשרויות יש כך שבתוך הספירה תמיד

1) - מספר הצבעות ל- B < מס' הצבעות ל- A ?

2) - — " — ≥ — — — ?




$\alpha$ - מספר הצבעות למודאל A שנבדק (ספרו).

$\beta$ - מספר ההצבעות למודאל B שנבדק (ספרו).

1) $\binom{a+b}{b}-\binom{a+b}{b-1}=\binom{a+b}{a}\left(\frac{b-1+a}{a+1}\right)$ ההוכחה

2) $\binom{a+b-1}{b}-\binom{a+b-1}{b-1}=\binom{a+b}{a}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ ההוכחה

ההוכחה:

## עקרון שובך היונים: pigeonhole principle

**משפט:** אם מכניסים $n+1$ יונים ל- $n$ שובכים אז קיים שובך שבו יש לפחות 2 יונים.

$$[n+1] \xrightarrow{f} [n]$$

$$|[n+1]| = n+1 > n = |[n]|$$

$\Leftarrow$ $f$ לא יכולה להיות חח"ע.

**דוגמאות**

א. נתון תת-קבוצה של 6 איברים של $[9]$. קיימים שני איברים שסכומם 9. $|A|=6$ ויהי $f$

$$f: A \to \{\{1,8\},\{3,6\},\{4,5\},\{2,7\},\{1,8\},\{0,9\}\}$$

$$f(a) = \{\alpha,\beta\} : a \in \{\alpha,\beta\}$$

$|A|=6$ ו- $|B|=5$ $\Leftarrow$ $f$ לא חח"ע.

$\Rightarrow$ לפי עקרון שובך היונים מתקיים $\{\alpha,\beta\}$ כך שלפחות 2 איברים $a,b \in A$ מקיימים $f(a)=f(b)=\{\alpha,\beta\}$

אבל $a \neq b \Rightarrow \{a,b\}=\{\alpha,\beta\} \Rightarrow 9=a+b$.

ב. אם יש $a_1, a_2, a_3, a_4$ מספרים מתוך $1,2,\dots,n$ כך ש $a_n < n$.

אם לא $\Rightarrow a_n \geq n$ לכל $n$ $\Rightarrow 0 < \sum a_n \leq \sum n$

ונקבל סתירה.

## הרחבה של עקרון שובך היונים

ג. אם שמים $kn+1$ יונים ב- $n$ שובכים אז קיים שובך שבו יש לפחות $k+1$ יונים.

ד. אם שמים $m$ יונים ב- $n$ שובכים קיים שובך שבו יש לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

13.12.05
דיסקרטי

**טענה:** תהי $B=\{1,2,\dots,2n\}$. אזי כל תת קבוצה של $B$ בגודל $n+1$ מקיימת שני איברים כך שאחד מהם מחלק את השני, שלמה שאומרת:
תהי $A\subseteq B$ כך ש $|A|=n+1$. מ"מ: $\exists a,b\in A$, $a\neq b$ כך ש $a|b$.

לכל $x\in\mathbb{N}$ אפשר לרשום $x=2^k\cdot b$ כאשר $b$ אי זוגי.
אז לכל איבר של $A$ יש זוג $(b,k)$.
אם $x\in A \Leftarrow 1\le x\le 2n$
$1\le b\le 2n$, $b=1,3,\dots,2n-1$ אי זוגי.
$\Leftarrow$ יש $n$ אפשרויות ל $b$.

נגדיר פונקציה: $f:A\longrightarrow\{1,3,\dots,2n-1\}$ (כל תת קבוצה)
$|A|=n+1$ $|\{1,3,\dots,2n-1\}|=n$
$x\longmapsto b$ כך ש $\exists k: x=2^k\cdot b$

$f$ לא חח"ע $\Leftarrow$ מ"מ $x,y\in A$, $x\neq y$ כך ש $f(x)=f(y)=b$
$\Rightarrow$ $x=2^k\cdot b$, $y=2^l\cdot b$, $l\neq k$
אם $l<k$ אז $y|x$.
אם $k<l$ אז $x|y$ מש"ל (!!)

**טענה:** כל קבוצה של $n$ אנשים יש שניים כך שהם מכירים אותן מספר של אנשים אחרים.

**הגדרה:** נגדיר פונקציה $R$ שמקבלת כארגומנט זוגות סדורים של אנשים כאשר $(a,b)\in R$ אם $a$ מכיר את $b$.

**הגדרה:** נגדיר פונקציה $f:A\longrightarrow\mathbb{N}$
$a\longmapsto$ מספר האנשים ש $a$ מכיר.
$a$ אנשים

מהרי"ל שפונקציה $f:A\longrightarrow\{0,\dots,n-1\}$ כאשר $|A|=n$.
$n$ אנשים, $n$ אפשרויות

יש 2 אפשרויות:

1) $f$ לא על $\Rightarrow$ $f$ לא חח"ע. צריך להוכיח כי בקבוצה מתאימה של $n$ איברים קיימים $a,b\in A$ שונים זה מזה כך ש $f(a)=f(b)$. אפשר להשתמש בעקרון שובך היונים ולכל קיים $a$ מספר אחר.

2) $f$ על $\Rightarrow$ קיים $a$ כך ש $f(a)=0$ ואם קיים $b$ כך ש $f(b)=1-n$ ניתן לסיים כי אם $a$ לא מכיל את $R$, ניתן ל $R$ להוסיף איבר אחד ולהיות $a\cup\{b\}$ מכיל אותו.

$\Leftarrow$ שקילות

**משפט** (Erdös-Szekeres)

בכל סדרה של $n^2+1$ מספרים ממשיים שונים זה מזה, יש תת סדרה של לפחות $n+1$ מספרים שמיוכו יורדת או עולה.

**דוגמה**: $n=3 \Leftarrow 10=1+n^2$, $4=1+n$

5 20 11 7 2 10 12 3 4 8

יורדת עולה

**הגדרה** סדרה באורך $n$ היא $a_1,\dots,a_n$

סדרה היא עולה אמ"מ $a_1<a_2<\dots<a_n$

יורדת אמ"מ $a_1>a_2>\dots>a_n$

תת סדרה של $a_1,\dots,a_n$ היא $a_{i_1},\dots,a_{i_m}$

כאשר $i_1,\dots,i_m$ סדרה עולה של מספרים טבעיים בין 1 ל $n$.

**הוכחת המשפט**

נגדיר סדרה $a_1,\dots,a_{1+n^2}$ שלא מקיימת את המשפט אינדוקטיבית באורך גדול $n$. נתאים פונקציה:

$$f:\{(p,q)\mid p,q\in[n]^2\}\longrightarrow\{1,2,\dots,1+n^2\}$$

$$t\longmapsto(p,q)$$

כאשר $p$ = אורך מקסימלי של תת עולה שמתחילה ב $a_t$.

$q$ = אורך מקסימלי של תת יורדת שמתחילה ב $a_t$.

(34) $f$ הוכיחו שקבוצה בגודל $n^2+1$ מקבילה מגודל $n^2$.

$\Leftarrow$ לפי עיקרון שובך היונים קיימים $s,t$ כך ש $s \neq t$ ו- $f(s)=f(t)$. בה"כ $t>s$. את הסדרה נראה כך:

$$a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_t, \ldots, a_{n^2+1}$$

$a_s = a_t \Leftarrow$ שונים $\Leftarrow$ המספרים

או $a_s < a_t$ או $a_t < a_s$. לפי ההנחה ניתן למחוק ת"ס יורדת באורך $n+1$ שמתחילה ב- $a_t$. נשים את $a_s$ לפני ונקבל ת"ס עולה באורך $n+1$, אבל כאן סתירה כי $q$ הוא האקסימלי.

או $a_s < a_t$. לפי ההנחה ניתן למחוק ת"ס יורדת באורך $n+1$ שמתחילה ב- $a_t$. נשים לפניה את $a_s$ ונקבל ת"ס עולה באורך $n+1$. אבל כאן סתירה כי $p$ הוא האקסימלי.

וכאן סתירה לטריכוטומיה. $\Leftarrow$ ההנחה הראשונית שלנו מפחד איקום ת"ס אורכה $n$.

משל (ש)

הערה: יש פה מאמץ לקרוא את ה"מות ת"ס מונוטוניות אורכות $n+1$.

עקרון ההכלה וההפרדה inclusion-exclusion principle

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left|\bigcap_{i \in S} A_i\right|$$

תזכורת ללא הוכחה שמת

תמורה = התלפה של סדר האיברים ב סדרה אומ"מ

$f$ תמורה $\Leftrightarrow$ $f:[n] \to [n]$ חח"ע ועל (צומר הפיכה)

קבוצת כל התמורות $[n]$ יש $n!$ תמורות.

נקודת שמת של $f$ היא $i \in [n]$ כך ש $f(i)=i$.

כמה תמורות יש כך של $f$ אין נקודת שמת?

במצב הראשון היית מסוקה בלתמלין אבל דווקא את
מספר התמורות מעניין נקודת שבת.

נגיד $D(n)$ - מספר תמורות מעין נקודת שבת של קבוצה בגודל $n$

נקבל נוסחה רקורסיבית: $D(n) = (n-1)\left(D(n-1) + D(n-2)\right)$

$D(1) = 0$

$D(2) = 1$

נוסחה הסגורה שאי־אפשר אף פה היא $D(n) = n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{1}{i!}$

## מקדמי הטרינומים

מספר תת־הקבוצות של $[n]$ בגודל $k$ $= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

נוסחת הבינום $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

נניח שיש $k$ בתים. כמה אפשרויות יש לסדר שם הבנים
לקבץ $n$ ילדים כך שיש $n_1$ בבית 1, $n_2$ בבית 2
וכן הלאה עד $n_k$ בבית $k$? $\left(n = \sum_{i=1}^{k} n_i\right)$

**פתרון:** $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$

$\binom{n}{n_1}$ מחזיר אפה $n_1$ ילדים

$\binom{n-n_1}{n_2}$ מחזיר אפה $n_2$ מקומות נבחרים לשאר $n-n_1$ ילדים

**הבחנה:** יש $n!$ אפשרויות לסדר $n$ הילדים. אבל אין משמעות לסדר של ה- $n_i$-ים בינם לבין עצמם. לכן $n_i$ יש $n_i!$ אפשרויות לסדר וככה נקבל $\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$

מסקנה: $\binom{n}{n_1\ \cdots\ n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$

## נוסחת המולטינומים:

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_k \geq 0 \\ n_1+\dots+n_k = n}} \binom{n}{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

$$\underbrace{(x_1 + \dots + x_k) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_k)}_{n \text{ סוגריים}} =$$

$= x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ מחוברים מהצורה $k^n$

$= x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ (כאשר בדיוק $n_j$ מהם שווים $x_j$)

### דוגמא

$$(a+b+c)^3 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

$$\begin{aligned}
= \quad & aaa + baa + caa + \\
& + aab + bab + cab + \\
& + aac + bac + cac + \\
& + aba + bba + cba + \\
& + abb + bbb + cbb + \\
& + abc + bbc + cbc + \\
& + aca + bca + cca + \\
& + acb + bcb + ccb + \\
& + acc + bcc + ccc
\end{aligned}$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3bc^2 + 3b^2c + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$$

$\binom{3}{0\,1\,2}$ $\binom{3}{1\,0\,2}$ $\binom{3}{1\,1\,1}$

(36)

תכונות של מקדמי המולטינום:

$$\binom{n}{n_1 \dots n_{k-1} 0} = \binom{n}{n_1 \dots n_{k-1}}$$

$$\binom{n}{n_1 \dots n_{k-1}} + \dots + \binom{n}{n_1 - 1 \; n_2 \dots n_k} = \binom{n+1}{n_1 \dots n_k}$$

מהתכונות הבאה אפשר לקבל מאינדוקציה את נוסחת המולטינום.

$$\left| \{ (x_1, \dots, x_4) : 0 \le x_i \le 4 \;,\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \} \right| =$$

הוראה

$$0 \le x_1 + x_2 \le 8$$

$$= \left| \{ (x_3, x_4) : 0 \le x_3, x_4 \le 4 \;,\; x_3 + x_4 = 10 - r \} \right| \cdot \left| \{ (x_1, x_2) : 0 \le x_1, x_2 \le 4 \;,\; x_1 + x_2 = r \} \right| = \sum_{r=0}^{8}$$

$$= \sum_{r=0}^{8} a_r \, a_{10-r} =$$

כאשר $a_r = \left| \{ (x_1, x_2) : 0 \le x_1, x_2 \le 4 \;,\; x_1 + x_2 = r \} \right|$

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | 0+0 | 0+1<br>1+0 | 0+2<br>1+1<br>2+0 | | 0+4<br>1+3<br>2+2<br>3+1<br>4+0 | | | 3+4<br>4+3 | 4+4 |

$$= 2a_2 a_8 + 2a_3 a_7 + 2a_4 a_6 + a_5^2 = 2(3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3) + 4^2 = 68$$

# תורת הגרפים

**הגדרה:** גרף הוא זוג $(V,E)$ כאשר

$V$ - קבוצה סופית לא ריקה

$E$ - קבוצה של זוגות של איברים שונים מתוך $V$

גרף יקרא **גרף מכוון** אם הזוגות ב- $E$ סדורים (directed graph)
**גרף לא-מכוון** אם הזוגות ב- $E$ לא סדורים (undirected graph)

$V$ היא קבוצת הקדקודים vertices
$E$ היא קבוצת הצלעות edges
בגרף מכוון הצלעות נקראות קשתות arrows

**הערה:** יש הגדרות יותר כלליות לגרף אבל מה שכתבנו כאן מספיק לנו. אלגנו האינפים מצוירים לא"ח, כלומר לא יכולה להיות שום הפרדה בין קדקודים לצלעות.

**דוגמה גרף:**



**דוגמה מולטי-גרף:**



כשיש יותר מצלע אחת בין קדקוד לקדקוד:



**מסלול-גרף:**

**מגף מכוון** מגדירים את הצלעות עם חיצים:

$$E \ni e = (u,v) \quad , \quad V \ni u,v \quad u \neq v$$




**מגף או-מכוון** מגדירים סתם קו בין הקדקודים

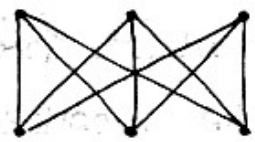
$$E \ni e = \{u,v\} \quad V \ni u,v \quad u \neq v$$




נניח ש $n = |V|$ ו- $m = |E|$.

(אאר שגף $(V,E)$ הוא גף **סדר** $n$.

**דוגמאות:**

(א)  זה נקרא $K_{3,3}$ - גף 3 בתים. יש 3 utilities (נניח חשמל, גז ומים) ויש לחבר את כל 3 הבתים לכל 3 ה- utilities.

גף זה $n = |V| = 6$ ו- $m = |E| = 9$.

(ב) קהילות הצלעות יכולה להיות ריקה אבל לא מעניין כך:



שוין את קדקוד שמתאים לאנשהו.

(ג) **גף מלא** הוא גף שבו כל שני קדקודים יש צלע. (complete)

גף מלא עם $n$ קדקודים $= K_n$ כאשר $E = \{$כל תת קבוצה של $V$ בגודל $2\}$

$\Leftarrow |E| = \binom{n}{2}$

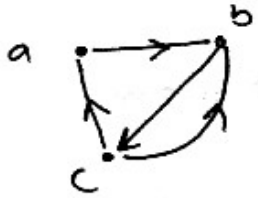
$K_2$: 

$K_3$: 

$K_4$: 

מאופן כללי: אם $G=(V,E)$ הוא גרף לא מכוון פשוט מתקיים $m \le \binom{n}{2}$ ($|V|=n$, $|E|=m$).
אם $G=(V,E)$ הוא גרף מכוון אז כמות הקשתות יכולה להיות פי 2 יותר: $m \le 2\binom{n}{2}$.

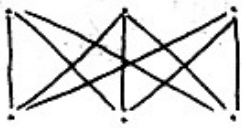
② דוגמה נוספת לגרף:




כאן $V=\{a,b,c\}$ ו- $E=\{(a,b),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

**הגדרה:**
יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. יהי $v \in V$. (לעתים נסמן $degree(v)$ את מספר הקשתות הנוגעות ב- $v$: $degree(v)=|\{e \in E : v \in e\}|$

**דוגמה:**
$K_{3,3}$



בגרף זה לכל $v \in V$ מתקיים $degree(v)=3$.

**הגדרה:** יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. יהי $v \in V$. (לעתים נסמן):
דרגת הכניסה: $indegree(v)=|\{w \in V : (w,v) \in E\}|$
דרגת היציאה: $outdegree(v)=|\{w \in V : (v,w) \in E\}|$
$degree(v) = indegree(v) + outdegree(v)$

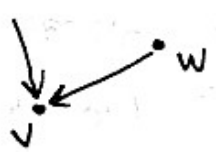
**דוגמה:**

outdegree:




$outdegree(v)=3$

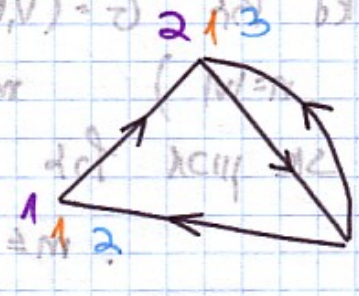
indegree:




$indegree(v)=2$

indegree + outdegree = degree

דוגמה:




$n=3$
$m=4$

**משפט:**

$$\sum_{v\in V} degree(v) = 2m$$

**הוכחה:**

נסתכל על $S = \{(v,e) : v\in V, e\in E, v \text{ on } e\}$

מה לה אומר? זוהי הגדרה לא מכוון לה בדיוק
כי $e$ היא קבוצה.
זוהי הגדרה מכוונת היא $e$-$v$ הוא
אחד מהקודקודים ב קשת $e$
מאנגלית אומרים - "v on incident e".

מה הגודל של $S$?

$$\sum_{e\in E} \underbrace{|\{v\in V : v \text{ on } e\}|}_{=2} = |S| = \sum_{v\in V} \underbrace{|\{e\in E : v \text{ on } e\}|}_{=degree(v)}$$

כי לכל צלע יש 2 קודקודים

$$\Rightarrow 2\cdot|E| = 2m = \sum_{v\in V} degree(v)$$

מש"ל

**מסקנה:** $\forall v\in V$. כך $degree(v)=0$ נקרא קודקוד מבודד (isdated)

**מסקנה:** לכל גרף לא מכוון יש מספר זוגי של קודקודים שדרגתם אי-זוגית.

**הוכחה:** נניח בשלילה. אז כל הדרגות באיזושהי הוא אי-זוגי.
ולפי סכום הדרגות בגרפים (שפיאן-לוי) יקבל מספר אי-זוגי.
ונראה סתירה כי אנחנו יודעים לקבל $2m$ שזה מספר זוגי.

מש"ל

בהרבה על אקס.

$G = (V, E)$ גרף
קבוצה של צלעות ↘ ↙ קבוצה של קודקודים

$e = (u,v)$ , $e \in E$ מעיד האם הצלעות הן מאותו סוג

$v$-ב indegree(v) : מס' הצלעות שנכנסות ל-$v$.
$v$-ב outdegree(v) : מס' הצלעות שיוצאות מ-$v$
$degree(v) = indegree(v) + outdegree(v)$

במידן סטואכון הצלעות הן קבוצות של 2 איברים $\exists e \in E$ $e = \{u,v\}$
אז מוגדר רק $degree(v)$

משפט: $2m = \sum_{v \in V} degreeV$ כאשר $m = |E|$.

יהי $(u,v)$ צלע בגרף $G$ כך שמתקיים $v$ שכן (neighbour) של קודקוד $u$.
אם שהצלע $(u,v)$ חלה (incident) ב-$u$ (וגם ב-$v$)

הגדרה: יהי $G = (V,E)$ גרף מסלול (path) (או שרשרת)
ב-$G$ הוא $(v_0, \dots, v_k)$ כך ש $v_i \in V$ ומתקיים $(v_{i-1}, v_i) \in E$
(אם $G$ לא מכוון אז $\exists e \in E$ $e = \{v_{i-1}, v_i\}$).
באורך של הדרך הוא $k$.

הגדרה: מעגל (cycle) ב-$G$ הוא מסלול $(v_0, \dots, v_k)$ כך ש $v_k = v_0$ באורך של המסלול הוא $k$.
אומרים שמעגל $(v_0, \dots, v_k)$ הוא מעגל פשוט (simple cycle)
אם $v_i \neq v_j$ לכל $i \neq j$ כך $0 < i, j < k$.

הגדרה: יהי $u, v \in V$ גרף
$d(u,v) = \min\{p \in \mathbb{N} : \exists (v_0, \dots, v_p) \in E^{\,p} \; v_0 = u, v_p = v\}$
$v$-ל $u$ מסלול קצר ביותר מ-$u$ ל-$v$ באורך $d(u,v)$

**הגדרה:** אומרים ש- $G$ **קשיר** (connected) אם $d(u,v) < \infty$ לכל $u, v \in V$. כלומר בין כל קודקודים קיים מסלול.

**טענה:** אם $G$ קשיר אז $d$ מטריקה. כלומר

$$d(u,v) = d(v,u)$$

לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $d(u,w) \le d(u,v) + d(v,w)$

**הוכחה:** נניח ש $d = d(u,v)$ לכן קיים מסלול $(v_0, \dots, v_d)$ כך ש $u = v_0$, $v = v_d$. זה $(v_0, v_1, \dots, v_d)$ מסלול $u$-$v$ באורך $d$ מאורך $d$ ולכן $d \ge \min\{\text{אורך מסלול } u\text{-}v\} = d(u,v)$

בלומר $d(u,v) \ge d(u,v)$ במילים אחרות $d(u,v) \le d(u,v)$

$\Leftarrow$ $d(u,v) = d(v,u)$

כעת יהיו $u, v, w \in V$ נניח ש $d = d(u,v)$

$$a = d(u,w)$$

לכן יש מסלול $(v_0, \dots, v_d)$ כך ש $u = v_0$, $v = v_d$.

ויהי מסלול $(w_0, \dots, w_b)$ כך ש $u = w_0$ $w = w_b$

$\Leftarrow$ $v_0, \dots, v_d, w_1, \dots, w_b$ מסלול באורך $d+b$ בין $u$ ל- $w$

$$d(u,w) = a \le d+b = d(u,v) + d(v,w) \quad \Leftarrow$$

ראו (א)

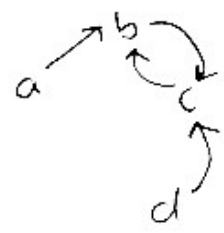
**דוגמאות**

ב)




$$d(a,c) > d(a,b) + d(b,c)$$
$$1 \quad > \quad 1 \quad + \quad 1$$

ג) אם $G$ גרף אכיון עדין אפשר שיתקיים $d(u,v)$ ולכן $d(u,w) + d(v,w) \ge d(u,v)$ אפילו לא נכון ש $d(u,v) = d(v,u)$ ולכן תנאי שני שצריך בהגדרה.




$d(a,c) = 2$

$d(c,a) = \infty$

**הגדרה** **הקוטר** (diameter) של $G$ הוא $\max\{d(u,v) : u,v \in V\}$

**משפט:** יהי $G$ גרף לא מכוון (אפשר יחס $\sim$ על $V$ ע"י:
$u \sim v$ אמ"מ $d(u,v) < \infty$. אז $\sim$ יחס שקילות

**הוכחה:**

רפלקסיביות: $u \sim u$ כי $d(u,u) = 0 < \infty$

סימטריות: ברור שמתקיים $d(u,v) = d(v,u) \Rightarrow u \sim v \Rightarrow v \sim u$

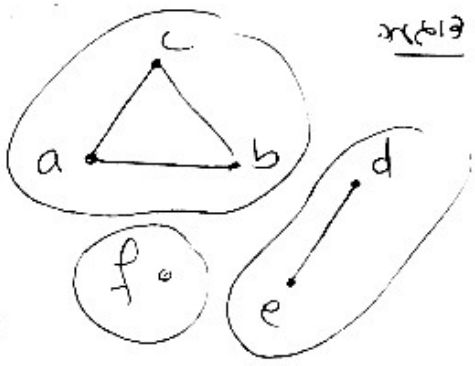
טרנזיטיביות: נראה ש- $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
לכן אם $u \sim v$ ו- $v \sim w$ אז $u \sim w$.

אשל ☺

משפט שקילות יוצר מחלקות שקילות

מחלקה = שקילות של $\sim$ נקראות רכיבי קשירות connected components

**דוגמא:**



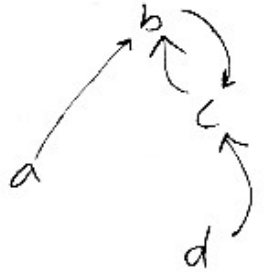

רכיבי הקשירות:
$\{a,b,c\}$
$\{d,e\}$
$\{f\}$

$|V| = 6$
$|E| = 4$

# מטריצת השכנויות adjacency matrix

**הגדרה:** נתון גרף מכוון ללא משקולות ומרובות קשתות
ק' הקודקודים של $V$ (הקודקודים)
במטריצה $n$ שורות ו$n$ עמודות $V$ יש $1$ אם $(v,u) \in E$
$0$ אם $(u,v) \notin E$

**דוגמא**

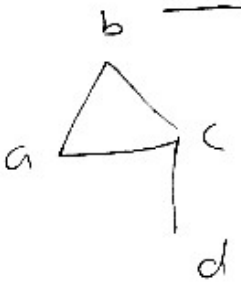



| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 0 | 0 |
| b | 0 | 0 | 1 | 0 |
| c | 0 | 1 | 0 | 0 |
| d | 0 | 0 | 1 | 0 |

אם $G=(V,E)$ כך ש- $|V|=n$ $|E|=m$
אז המטריצה מייצגת $n \times n$ ויש בה $m$ $1$-ים.

**הערה לגבי גרף מכוון** כמעט אותה הגדרה מלבד זו:
$1$ - אם $(v_i,v_j) \in E$
$0$ - אם $(v_i,v_j) \notin E$.

**דוגמא**

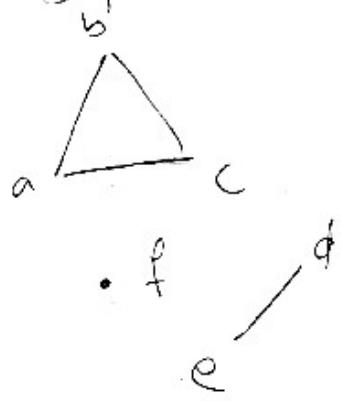



| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | 0 |
| b | 1 | 0 | 1 | 0 |
| c | 1 | 1 | 0 | 1 |
| d | 0 | 0 | 1 | 0 |

כאן במטריצה $n \times n$ יש $2m$ $1$-ים.
נשים לב שבמטריצה סימטרית - $M_{ij} = M_{ji}$

נשים לב כי קשירות בגרף עם אחד או שני קודקודים מבודדים שקולה לכך שהגרף המשלים הוא קשיר.

הגרף המשלים מצוייר מימין והטבלה משמאל:



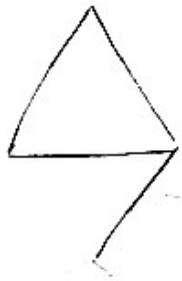

| | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | | | |
| b | 1 | 0 | 1 | | | |
| c | 1 | 1 | 0 | | | |
| d | | | | 1 | 0 | |
| e | | | | 0 | 1 | |
| f | | | | | | 0 |

**תת-גרפים**

**הגדרה:** $G=(V,E)$ גרף.
$G'=(V',E')$ **תת-גרף** של $G$ אם:
א) $V' \subseteq V$
ב) $E' \subseteq E$
ג) $\forall u,v \in V' : (u,v)\in E' \Rightarrow (u,v)\in E$

$G'$ **פורש** של $G$ אם $V'=V$.

**דוגמה**



גרף

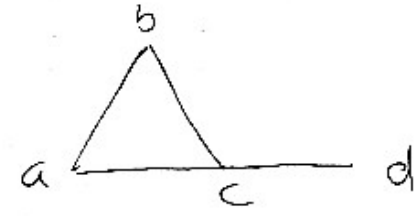
תת-גרף

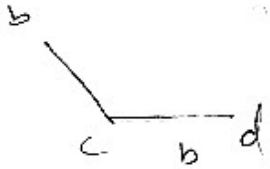
אומרים ש- $G'=(V',E')$ **תת-גרף המושרה** (induced graph) מ- $G=(V,E)$ אם $V' \subseteq V$ וכאשר $E' = \{(u,v)\in E : u,v\in V'\}$

**הערה:** המשלים של $G=(V,E)$ הוא $\bar{G}=(V,\bar{E})$ כאשר $\bar{E}$ הוא המשלים של $E$ ביחס לקבוצה של כל הזוגות מ- $V$.

פתרונות

(א)

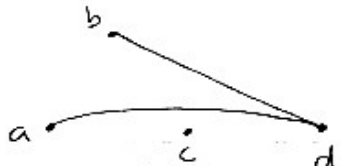



תת גרף אושרה על ידי $\{b,c,d\}$ :

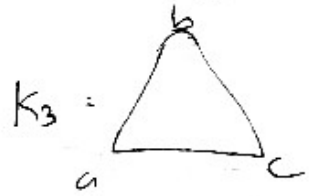



תת גרף פורש.



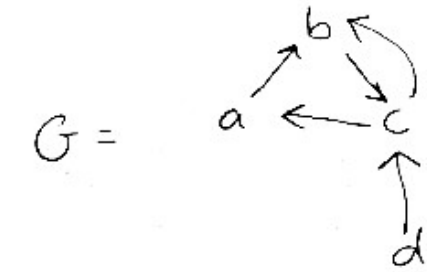

משלים של $G$:

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$




תת גרף אושרה על $\{a,b,c\}$ :

(ב)

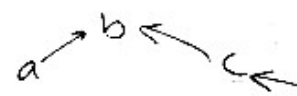




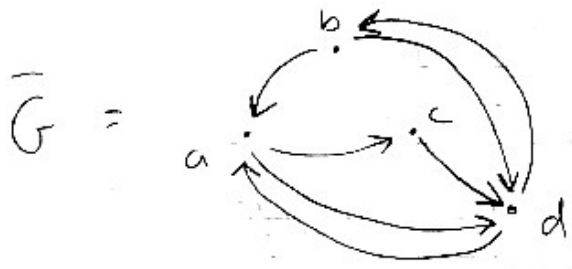


תת גרף אושרה על $\{b,c,d\}$

תת גרף פורש.



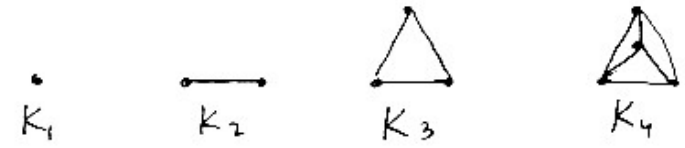

משלים



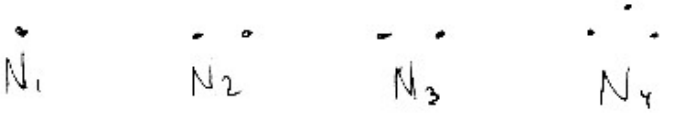

$$|E| + |\bar{E}| = n(n-1) = 2\binom{n}{2}$$

## דוגמאות של משפחות של גרפים:

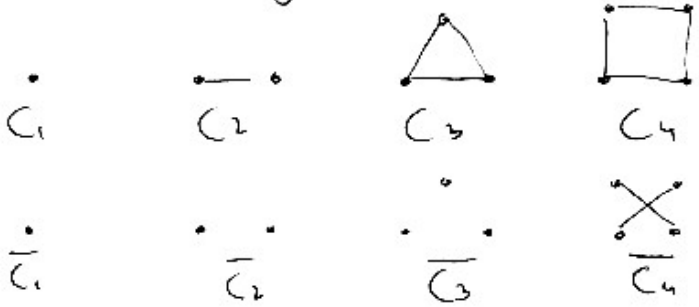
- **גרף שלם** $K_n$ = $n$ קודקודים. $|E| = \binom{n}{2}$




המשלים של $K_n$ הוא גרף ריק $N_n$:

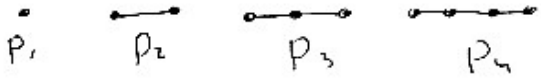



- **מעגל** $C_n$ - cyclic graph




המשלים:

- **שביל** $P_n$



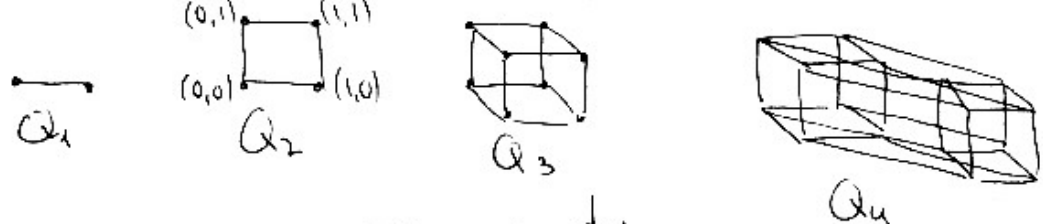

- **גרף הקוביה** $Q_d$: קודקודיו הם כל $d$-יות הסדורות של 0 ו-1.

כאן $V = \{0,1\}^d = \underbrace{\{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}}_{d \text{ פעמים}}$

$= \{(a_1, \dots, a_d) : a_i \in \{0,1\}$ לכל $i\}$

$\Rightarrow |V| = 2^d$

קודקוד בגרף מין $(a_1, \dots, a_d)$ לסדרה $(b_1, \dots, b_d)$ אחת בדיוק כך ש $a_j = b_j$ עבור $j \neq i$ ו- $a_i \neq b_i$.




$|E| = d \cdot 2^{d-1}$

← מספר הצלעות ב $Q_d$ → אפשרויות ל $j$ $(i \neq j)$

G גרף שנקרא k-רגולרי (k-regular) אם
$\deg(v) = k$ מתקיים $v \in V$.

דוגמאות:

$C_n$ - מעגל באורך 2

$K_n$ - מעגל באורך (n-1)

$N_n$ - מעגל באורך 0

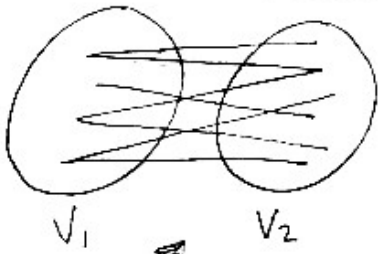
$Q_d$ - מעגל באורך d

27.12.05
פיסקרס יח'

**הגדרה:** גרף $G=(V,E)$ נקרא דו-צדדי bipartite אם קיימת חלוקה של הקדקודים $V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ כך שלכל $e=\{v_1,v_2\} \in E$ מתקיים $v_1 \in V_1$ ו- $v_2 \in V_2$.

אז כותבים $G=(V_1, V_2, E)$

**דוגמה**




$n_1 = |V_1|$ אם שכנות מקיף את $V_1$
$n_2 = |V_2|$ כפיפי מלכו על $V_1, V_2$
אז יש $m = n_1 \cdot n_2$ צלעות
לעומן אורכל ב $K_{n_1,n_2}$.

מכאן כלל: $K_{n_1,n_2}$ אינו $k$-כלילי. גרף דוגמה לציור.
אבל $K_{n,n}$ מקיף $n$-כלילי.

**משפט:** $G=(V,E)$ מכיל מעגל זוגי כאשר אין מעגלים מאורכים אי-זוגיים.

**הוכחה:**
($\Rightarrow$) נניח ש- $G=(V_1,V_2,E)$ זו כפיפי. נניח ש- $(v_0,\dots,v_p)$ מעגל פשוט $v_p = v_0$ ו- $\{v_{i+1},v_i\} \in E$.
נניח $v_0 \in V_1$. לכן לכל $m$ זוגי, $v_m \in V_1$ כי הצלעות עוברות מקדקודים מ $V_1$ ל $V_2$
לכל $m$ אי-זוגי, $v_m \in V_2$

$\Leftarrow$ $v_p$ נמצא בקבוצת $V_1$ $\Leftarrow$ לכן מספר הצלעות זוגי.

($\Leftarrow$) נניח שכל מעגל ב- $G$ הוא באורך זוגי.
ראשית, נניח ש- $G$ קשיר. נקבע לכל שני קדקודים $x \in V$ קיים מסלול מ- $x$ ל- $y$.
נסמן $V_1 \in V$ ניתיר $\{v \in V : \text{קיים מסלול מ } v \text{ ל } y \text{ באורך זוגי}\} = V_1$

$\{v \in V : \text{קיים מסלול מ- } V_1 \text{ ל } y \text{ באורך אי-זוגי}\} = V_2$

שבוע הבא בתחילת שיעור.

ולהפך באותו אופן.

משל (ב)

$\Leftarrow$ כי $G_1, G_2$ זרים $\Leftarrow$ $G$ אז

$G_1$ אין מסלול באורך אי-זוגי ב- $G \Leftarrow$ לכל $G_1$ הם אותו הדבר

$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ ( איחוד של זרים $G_i$ שכזה בגיהה קשורה )

גם גרפה כללי, נניח קשירות $G = \bigcup$

$\Leftarrow$ הוכיחנו את ההשפה לגרפה ש- $G$ קשיר.




מאידך-אופן מקבלים שאם $u_1 u_2 \in E$ אז בהכרח $u_2 \in V_1$

$u_1$ ל- $u_2$ $\Leftarrow$ יש מסלול אי-זוגי מ- $V_1$ ל- $u_2$.

מ- $u_1$ ל- $v_1$ באורך זוגי. ויש בדיוק ( = מסלול באורך אחד )

נראה ש $u_2 \in V_2$. (או $u_2 \notin V_1$). $\Leftarrow$ קיים מסלול $u_1 \in V_1$

תהי $E \ni e$ בגודל $e = \{u_1, u_2\}$. נניח ש- $u_1 \in V_1$

$\Leftarrow$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.




נניח שקיים $v \in V_1 \cup V_2$ כך קיים מסלול מ- $V_1$ ל- $v$ וגם

מאידך נניח שקיים מסלול $\overline{vu_2}$ באורך אי-זוגי.

אם אחד מהם זוגי נקבל מעגל באורך אי-זוגי -

ההפוכה נקבל מעגל באורך אי-זוגי -

סכום האורכים של $u_2$ ו- $v$ סתירה!

$\Leftarrow$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

גודל $G$ ש- $(V_1, V_2, E)$ אחת הוא דוגמה.

$V = V_1 \cup V_2$ - $G$ מגדר

$V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

$\exists e \in E \Leftarrow e = \{u_1, u_2\}$ כאשר $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$




$G$ קשיר $\Leftarrow$ לכל $v \in V$ קיים מסלול מ- $V_1$

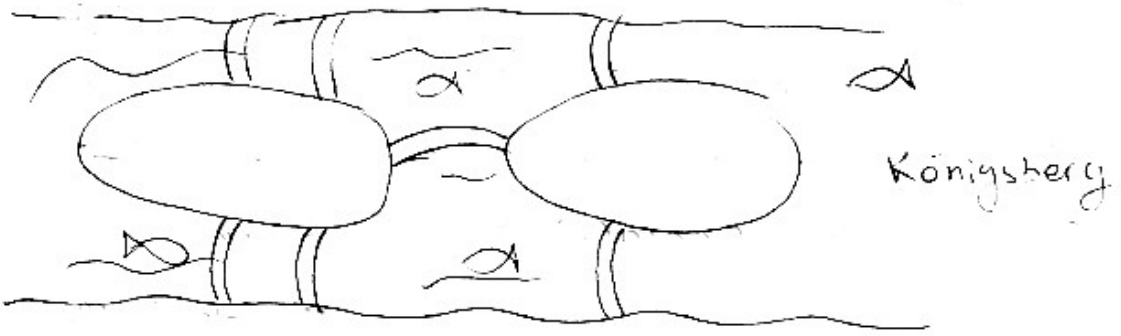
ל- $v$. לפי הצורה של המסלול

$v \in V_1$ או $v \in V_2$. לדוגמה יכול

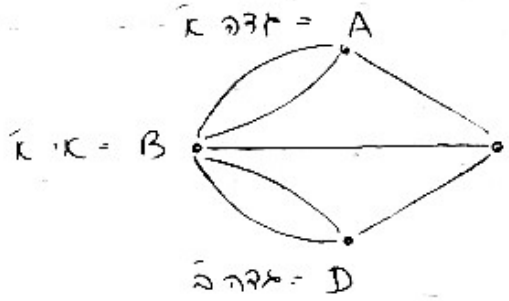
להיות ש- $v$ הוא מסלול ריק ואז אי-זוגי. אבל

תכל נורה שפגע.

# מעגל אוילר Euler




יש שם 7 גשרים. האם אפשר לצאת מכל
הנקודות בעיר כך שנחצה כל גשר פעם אחת?
אפשר לפרק את הבעיה באופן הבא:




ושואלים האם אפשר לצאת מנקודה כלשהי ולחזור אליה
תוך כדי מעבר פעם אחת בדיוק בכל גשר?

**הגדרה** יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. **מעגל אוילר** הוא מסלול
(סגור) שעובר בכל קשת ב- $G$ בדיוק פעם אחת (כלומר
מעגל שמבקר בכל קשת בדיוק פעם אחת).

**משפט** יהי $G$ גרף קשיר. אז ל- $G$ יש מעגל אוילר אמ"מ
$\deg(v)$ זוגי לכל $v \in V$

**הוכחה:**

($\Rightarrow$) נניח שיש מעגל אוילר. כיוון קיימת סדרה של קודקודים
$v_0, \dots, v_k$ כך ש- $v_0 = v_k$, $\exists v_i v_{i+1} \in E$ אם $\{v_i, v_{i+1}\}$
הוא $e$ הקשתות ב- $G$ שלאורך התכרות.

נניח ש $\forall v \in V$ נסמן את מס' הפעמים ש- $v$ מופיע ברשימה
$a = |\{i : v_i = v \ , \ 0 \le i \le d-1\}|$ ב- $a$ $v_0, \ldots, v_{d-1}$
אז $2a = |\{e \in E : e \cap \{v\} \neq \emptyset\}| = \deg(v)$.

**הערה:** מהוכחה ש- $G$ מכוון, התנאי יהיה שקיים מסלול אויילר
זהו מסלול בו לכל קודקוד $v$ $\text{outdegree}(v) = \text{indegree}(v)$

**טענה:** ($\Leftarrow$) נניח ש- $G$ מכוון כך ש $\deg(v)$ זוגי
$\forall v$ אז לכל $w$ כך ש $\deg(w) > 0$ קיים מסלול פשוט ב- $G$
שמכיל את $w$.

**הוכחה:** נבנה מסלול שמכיל את $w$: (תהי) $x \neq w$ ונלך
בדרכים עם התנאי שאי אפשר לעבור בקשת יותר מפעם אחת
כאשר אי אפשר להמשיך יותר הפירוש בשלב ש- $G$
סיים. התהליך הזה יגיע לסיום כי $G$ סופי. (ראה שהמסלול שקיבלנו
הוא מסלול. נניח בשלילה שהמסלול נגמר בקודקוד $w \neq x$ אבל
ראינו קודם כי מתקבל ש- $\deg(x)$ הוא אי-זוגי.




משל טענה

נ"ס את ההוכחה שהמשפט נשלם בשיעור הבא.

**משפט:** $G$ אילר אם"ם קשיר וכל $v$ דרגתו זוגית.

**הוכחה:**

($\Rightarrow$) ברור מהגדרה

($\Leftarrow$) נוכיח באינדוקציה: $G$ אילר אם קיים $v \in V$ שדרגתו זוגית: $\deg(v) = 2c$ ונתון ש $\deg(u)$ זוגי לכל $u \in V$ קשיר. נסמן $v_0 \in V$ כך ש $\deg(v_0) > 0$

הקדקדים זוגיים $\Leftarrow$ לפי ההנחה $v_0$ שייך למעגל $C_1 \subset G$

$C_1$ מכיל לפחות צלע. נסמן $G_1 = G \setminus C_1$ - אותם קדקדים כמו ב- $G$ ואותן הדרגות חוץ מאלה שב- $C_1$. לכל $v$

$$\deg_{G_1}(v) = \deg_G(v) - \deg_{C_1}(v)$$

זוגי $\Leftarrow$ זוגי זוגי

נמתר $v_1 \in C_1$ כך ש $\deg_{G_1}(v_1) > 0$. נמצא מכוסה ע"י מעגל $C_2$

כך ש $v_1 \in C_2$ $\therefore$ $G_1 \supseteq C_2$.




קיבלנו מעגל יותר ארוך: $C_1 \cup C_2 \subset G$

- מתחיל ב- $v_0$ ונגמר ב- $v_1$
- עובר על $C_2$
- עובר על $C_1$ עד $v_1$

נמשיך את כך שנה ושוב ומקבלים סדרה של מעגלים $C_1, \ldots, C_m$ כך שבכל פעם - לכתר $v_m \in (C_m \cap \ldots \cap C_1)$ יש $\deg_{G \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_m)}(v_m) > 0$

לפי: הטענה נקבע ש-$v_m$ שייך למעגל $C_{m+1} \subset (C_m \cap \ldots \cap C_1)$

סיימנו כאשר אין אפשרות להבחור $v_m \in C_m \cap \ldots \cap C_1$

כך ש $\deg_{G \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_m)}(v_m) > 0$

אם $M \neq C_m \cap \ldots \cap C_1$ אז קיים $v_M \in M$ כך ש- $v_M \in C_m \cap \ldots \cap C_1$

אזי $\deg_{G \setminus (C_1 \cup \ldots \cup C_m)}(v) = 0$ לכל $v \in C_1 \cup \ldots \cup C_m$

$\Rightarrow$ $C_1 \cup \ldots \cup C_m$ את מכיל הקשירות שכן $G$. $G$ קשיר $\Rightarrow C_1 \cup \ldots \cup C_m = G$ מעגל $\lambda$ ⑤

אילר.

**הגדרה:** גרף $G$ נקרא אוילרי אם הוא קשיר ומתקיים $\forall v \in V \quad indeg(v) = outdeg(v)$

ואם לא, אז גרף כזה נקרא -

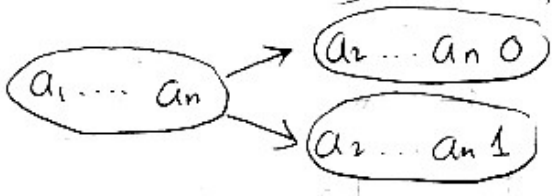


**משפט** (de Bruijn) יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > 0$. אזי קיים גרף אוילרי $G$ כך ש-

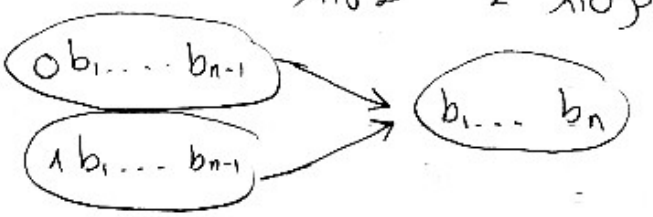
$V = \{0,1\}^n$ - הקודקודים

$a_1 \dots a_n$ ל- $b_1 \dots b_n$ יש קשת (שנקראת גם קשת כפולה) אמ"מ $a_2 = b_1, \dots, a_n = b_{n-1}$

מכל קודקוד יוצאות 2 קשתות:




ולכל קודקוד נכנסות 2 קשתות




$\forall v \in V \quad indegree(v) = 2 = outdegree(v)$

$\Leftarrow$ קיים מעגל אוילר.

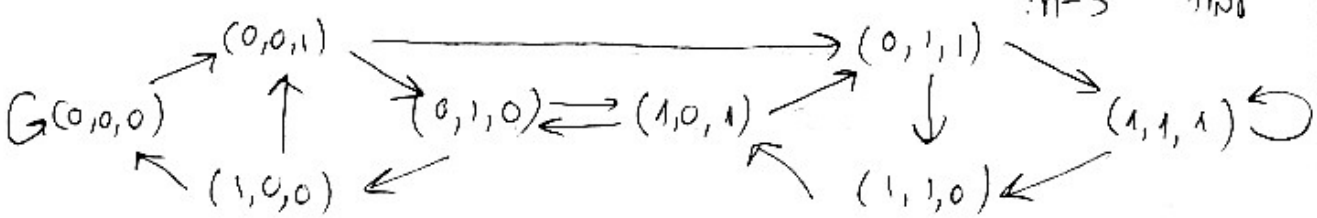
$|V| = 2^n \Rightarrow |E| = 2^{n+1}$

$\downarrow$

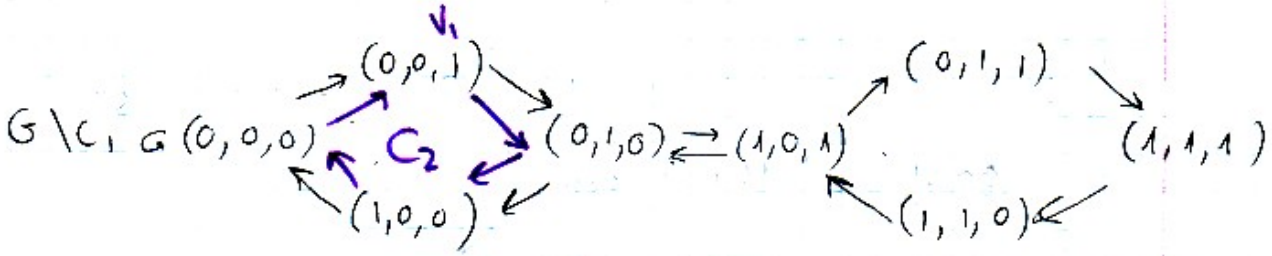
מכל קודקוד יוצאות 2 קשתות.

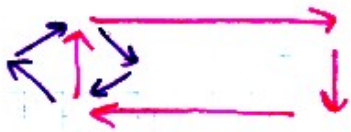
$\Leftarrow$ מספר הקשתות הוא $2^{n+1}$

לדוגמה $n=3$:



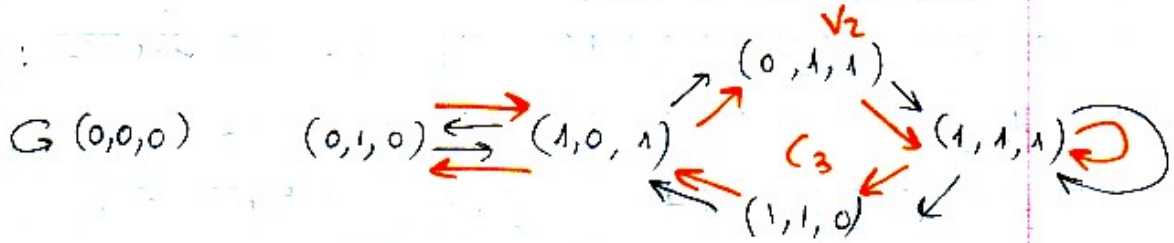


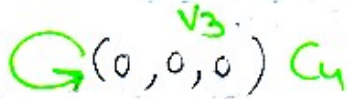




אחרי שלב ב הגרף

$G \setminus (C_1 \cup C_2)$ :

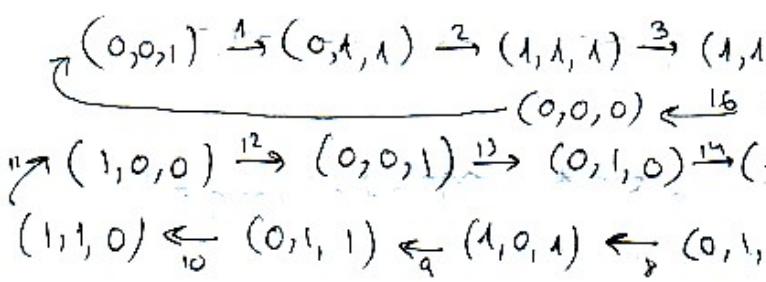



$G \setminus (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$




אחרי קבלת הקבוצה :

$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$




כי סדרה של צעדים שבסוף אחת מהן הצעד של אחרי
זה הכרחי שם כאשר שאחריה.

במקרה הכללי עם $n=3$ $|V| = 2^n = 8$

$|E| = 2^{n+1} = 16$

$V$ הן סדרות של 0-ים ו- 1-ים באורך $n$

ו- $E$ הן סדרות באורך $n+1$ של 0-ים ו- 1-ים –
כי בשלב שיקח סדרה אחת משתנה בדיוק אחד שלה
כאשר נ.ל. סדרה זוגית: $0\,1\,1 \to 0$ ויתן לתשום
כ סדרה באורך $n$: $\boxed{0\,1\,1\,0}$.

אז מה הסדרה שיוצאת לנו עבור $E$ בדוגמה?




לאחר סדרת זה מחוץ –

$n+2$ מספרים 0-אים ו 1 יקח שכל סדרה של 0-ים
ו- 1-ים באורך $n+1$ תופיע בדיוק פעם אחת ברשימה.

**הערה:** $G$ מקיים תכונה זו אבל אינו מספיק אופייני (לא משפיע) שאין קודקוד $v \in V$ כך ש- $\deg(v)$ ו- $\deg(w)$ אי-זוגיים לכל $w \neq v$.

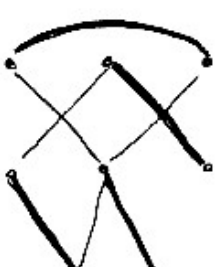
**הוכחה:** (טענה זו) $G=(V,E)$ יהי מקיים $G'=(V,E\cup\{u,v\})$ שבו כל הדרגות זוגיות לכן יש בו מעגל אויילר שמתחיל ב- $u$ ונגמר ב- $v$.
$\Leftarrow$ כשנשמיט את $\{u,v\}$ שהוספנו נקבל מסלול אויילר שמתחיל ב- $u$ ונגמר ב- $v$.
באופן דומה בכיוון ההפוך.

## Matchings זיווגים מושלמים

$G$ יהי גרף כלשהו. $G=(V,E)$

**הגדרה:** זיווג (matching) ב- $G$ הוא $M \subseteq E$ כך שהקודקודים ב- $M$ שונים זה מזה כלומר $\forall m_1,m_2 \in M$ אם $m_1 \neq m_2$ אז $m_1 \cap m_2 = \emptyset$. אומרים ש- $M$ זיווג מושלם (perfect matching) אם $V = \bigcup_{m \in M} (m)$

דוגמה



$G$

$M$ – גיוון מושלם.

נשים לב שקיפלנו משהו ב-$\mathbb{R}^3$.



משפט ההתאמה של Hall

יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי. $G$ קיים גיוון מושלם $M$ אמ"מ $|V_1|=|V_2|$ ולכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|S|\le|\Gamma(S)|$ כאשר $\Gamma(S)$ קבוצת השכנים של $S$ בגרף $G$.

הוכחה

($\Rightarrow$) נניח ש-$G$ קיים גיוון מושלם $M$.

$G$ יהי דו-צדדי $\Rightarrow$ יש פונקציה חח"ע ועל $f:V_1\to V_2$ כך ש $\forall x\in V_1: f(x)$ שכן $M$ (טוב, לא בדיוק משום ש $f(x)\in V_2$ מציין הקודקוד השני במ.מ $M$ אליו $x$ במ.מ $M$ אבל זה הרעיון).

$\Rightarrow |V_1|=|V_2|$ אם $S\subseteq V_1$ אז $|S|=|f(S)|\le|\Gamma(S)|$

($\Leftarrow$) באינדוקציה על $|V_1|$.

כאשר $|V_1|=|V_2|=1$ הגרף הוא רק $V_1$ $V_2$ ולכן יש גיוון מושלם.

תהיה $e=(v_1,v_2)$ קשת במשלים שלכל $S$ $|S|\le|\Gamma(S)|$.

## משפט החתונה של Hall

נניח ש- $G=(V_1,V_2,E)$ הוא גרף דו-צדדי.
אזי קיים זיווג המושלם מ-$V_1$ אם"ם לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|S|\le|\Gamma(S)|$.

**הוכחה:**

($\Rightarrow$) במישור הקל.

($\Leftarrow$) באינדוקציה. נאמר $|V_1|=|V_2|=n$ הטענה מובנת.
נניח שהמשפט מתקיים לכל גרף דו-צדדי, כאשר $|V_1|=|V_2|<n$
ולכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|S|\le|\Gamma(S)|$. נוכיח עבור $n$.
נניח ש- $G$ הוא גרף כך ש-$|V_1|=|V_2|=n$ ומתקיים $|S|\le|\Gamma(S)|$
לכל $S\subseteq V_1$. יש שני מקרים:

① לכל $S\subsetneq V_1$ מתקיים $|S|<|\Gamma(S)|$. נבחר $v_1\in V_1$. אנחנו
יודעים ש- $v_1$ שכן $\Gamma(\{v_1\})\neq\emptyset$. נבחר $v_2\in\Gamma(\{v_1\})$




נסיר את הקודקודים $\{v_1,v_2\}$ מן הגרף $G$ ונקבל גרף חדש $G'=(V_1',V_2',E')$
כאשר $V_1'=V_1\setminus\{v_1\}$, $V_2'=V_2\setminus\{v_2\}$ ו-$E'=\{e\in E: e\cap\{v_1,v_2\}=\emptyset\}$
שזה פשוט הקשתות שלא נמחקו.
נבדוק את הקודקודים $\Gamma_G(v_1)\setminus(V_2\cap\{v_1\})$.
נראה שלכל $T\subseteq V_1'$ מתקיים $|T|\le|\Gamma'(T)|$ (שכנים ב-$G'$)
נניח בשלילה שקיים $T\subseteq V_1'$ כך ש-$|T|>|\Gamma'(T)|$.
נוסיף את הקשתות $(v_1,V_2)$ כך שיהיו זיווגים ב-$G$.
אם נראה שלכל $T$ נכון $|\Gamma(T)|\ge|T|$ נסיים.




$$\Gamma(T)\supseteq\Gamma'(T)\cup\{v_2\}\Rightarrow|\Gamma(T)|\ge|\Gamma'(T)|+1\ge|T|$$

$|T| \leq |\Gamma(T)| - 1 \leq |\Gamma'(T)|$ $\Leftarrow$

ג) קיים $S \neq V_1$ כך ש- $|\Gamma(S)| = |S|$




לדוגמה 2 אפשרויות:

$G'$ = הגרף המושרה של $G$ על $S \cup \Gamma(S)$

$G''$ = הגרף המושרה של $G$ על $V_1 \setminus S, V_2 \setminus \Gamma(S)$

ב': ① $\forall T \subseteq S$ $|T| \leq |\Gamma'(T)|$

② $\forall T \subseteq V_1 \setminus S$ $|T| \leq |\Gamma''(T)|$

ואנו נקבל את הטענה. אפשר אז

$\left.\begin{array}{l} |\Gamma(S) \setminus V_2| = |S \setminus V_1| < n \\ |\Gamma(S)| = |S| < n \end{array}\right\} \Leftarrow$ לפי הנ"א $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \text{כיוון של } G' \\ \text{כיוון של } G'' \end{array}\right.$ $\Leftarrow$ מיתוך כך כיוון של $G$.

אנו נוכיח שלכל $T$:

① $\Gamma'(T) = \Gamma(T) = \Gamma_1(T) \quad \forall T \subseteq S$

$\Rightarrow |\Gamma'(T)| = |\Gamma(T)| \geq |T|$

② $\Gamma''(T) = \Gamma(T) \setminus \Gamma(S) \quad \forall T \subseteq V_1 \setminus S$

$|T| \overset{?}{\leq} |\Gamma(T) \setminus \Gamma(S)|$




נשים לב: $\Gamma(S \cup T) = \Gamma(S) \cup \Gamma''(T)$

$\Rightarrow |\Gamma''(T)| + |\Gamma(S)| = |\Gamma(S \cup T)| \geq |S \cup T|$

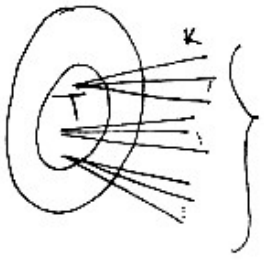
$= |S| + |T|$ ניתן לכתוב

$\Leftarrow |T| \leq |\Gamma''(T)|$ ③ עשינו

ההוכחה של המשפט

**טענה:** יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי
$k$ רגולרי ($\deg=k$) ו- $|V_1|=|V_2|$. אז קיים זיווג מושלם.

**הוכחה:** יהי $T\subseteq V_1$. נסמן $|\Gamma(T)|$ את מספר השכנים של $T$.




אם $\deg(v)=k$ $\forall v\in V_2$ ⇐ (מספר הקצוות המגיעים ל $T$) $\geq k|T|$.

$\Leftarrow$ $|T|\leq|\Gamma(T)|$.

משפט (*)

**טענה:** אם $\exists$ $T\subseteq V_1$ עבורו $|\Gamma(T)|<|T|$ אז קיים בגרף $\geq |V_1|-1$ זיווגים שונים.

15.1.06
דיסקרט

**משפט החתונה של Hall**: אפשר לנסח אותו באחד משני הדרכים:

יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי.

אזי קיים זיווג $M$ מ-$V_1$ אל $V_2$ אם ורק אם $|S|\le|\Gamma(S)|$ לכל $S\subseteq V_1$.

כאשר $\Gamma(S)$ קבוצת השכנים של $S$.

הערה:

$|M|=|\Gamma(V_1)|\ge|V_1|$

$V_2\supseteq\Gamma(V_1)$




הערה: מאינטואיציה אם $|V_1|=n$

$|M|=1 \iff$ לכל $v_1\in V_1$

$\exists m\in M \iff |\Gamma(\{v_1\})|\ge 1$



עכשיו נשים לב שמשפט החתונה נכון אם כאשר $|V_1|<n$

עלינו שהמשפט נכון עבור $G=(V_1,V_2,E)$ מקיימי את התנאים במשפט

ו- $n=|V_1|$. צ"ל שיש זיווג מקסימלי:

מקרה א' $|S|<|\Gamma(S)|$ עבור $S\subsetneq V_1$




$|T|<|\Gamma(T)|$ ולכן ניתן את $v_1$ ל-$m$ ונמשיך באינדוקציה.

מקרה ב' לכל $S\subsetneq V_1$ מתקיים $|S|=|\Gamma(S)|$




משפט (ב)

# trees





**הגדרה** יער הוא גרף קשיר חסר מעגלים

**משפט** התנאים הבאים שקולים:

1. $G$ קשיר, חסר מעגלים
2. $G$ חסר מעגלים מקסימלי (במובן שהוספת צלע יוצרת מעגל)
3. $G$ קשיר מינימלי (במובן שהורדת צלע תגרום לו להיות לא קשיר)

(1 $\Leftrightarrow$ 2) נניח ש-$G$ קשיר וחסר מעגלים.
צ"ל שלכל $u,v \in V$, $\exists!$ מסלול $P$ ב-$G$ שבין $u$ ל-$v$.
קיום מסלול: משום ש-$G$ קשיר, קיים מסלול $P$ כלשהו בין $u$ ל-$v$.
יחידות: נניח בשלילה שיש לנו שני מסלולים שונים $P \neq Q$ בין $u$ ל-$v$.
נסמן $P=(u,x_1,\dots,x_k,v)$ ו-$Q=(u,y_1,\dots,y_\ell,v)$.
משום ש-$P \neq Q$ נובע שקיים $i$ מינימלי כך ש-$x_i \neq y_i$.
נתבונן במעגל $C=(x_{i-1},x_i,\dots,x_k,v,y_\ell,\dots,y_i,x_{i-1})$.
זה סתירה לכך שאין מעגלים ב-$G$.

(2 $\Leftrightarrow$ 3) נניח ש-$G$ חסר מעגלים מקסימלי. נראה ש-$G$ קשיר מינימלי.
ראשית $G$ קשיר כי אחרת נוסיף צלע בין $u$ ל-$v$ שאינם קיימים מעגל.
נתבונן כעת בצלע $e=\{u,v\}$ כלשהי ב-$G$ ונראה שאם נוריד אותה $G$ לא יישאר קשיר.
אכן, אם $G-e$ קשיר אז קיים מסלול $P$ בין $u$ ל-$v$ ב-$G$ שאינו עובר דרך $e$.
אבל אז $P$ יחד עם $e$ יוצרים מעגל ב-$G$ (סתירה).

(3 $\Leftrightarrow$ 1) נניח ש-$G$ קשיר מינימלי. נראה ש-$G$ חסר מעגלים.
נניח בשלילה ש-$G$ כן מכיל מעגל $C$. נסיר צלע $e$ כלשהי ממעגל זה.
נראה ש-$G-e$ עדיין קשיר: יהיו $u,v \in V$ כלשהם.
קיים מסלול $P$ ב-$G$ בין $u$ ל-$v$. אם $e \notin P$ אז $P$ נשאר ב-$G-e$.
אחרת, $e \in P$ ונסמן $P=(u,\dots,x,e,y,\dots,v)$.
אז $(u,\dots,x,C\setminus\{e\},y,\dots,v)$ מסלול ב-$G-e$ בין $u$ ל-$v$.
סתירה למינימליות של $G$.

$G_1, G_2$ קשירים $\Rightarrow$ $G_1 \cup G_2$ קשיר. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ לא קשיר/לא אינדוקציה על $n$.

$n=1$ ברור.

נניח נכונות עבור $n$.

נוכיח עבור $n+1$.

יהי $G$ מסלול. $G$ מכיל לפחות $n+1$ קודקודים.

נסיר קודקוד כלשהו $v$ ואת הקשתות הנוגעות בו.

נקבל גרף $G'$ עם $n$ קודקודים.

$G'$ קשיר (לפי הנחת האינדוקציה).

נחזיר את $v$ ואת הקשתות שהסרנו.

$v$ מחובר לקודקוד יחיד ב-$G'$ (כי $G$ מסלול).

$G$ קשיר.

$\Leftarrow$ נניח ש-$G$ קשיר מינימלי. נראה ש-$G$ מסלול.

אם $G$ לא מסלול, אז קיים קודקוד $v$ עם דרגה $\geq 3$.

$v$ מחלק את $G$ ל-$k \geq 3$ רכיבי קשירות $G_1, \ldots, G_k$.

נסיר את $v$ ואת הקשתות הנוגעות בו.

$G \setminus \{v\}$ עדיין קשיר.

$G_1$ מחובר ל-$G_2$ ב-$G \setminus \{v\}$.

$G$ קשיר מינימלי: הסרת קשת מ-$G$ הופכת אותו ללא קשיר.

הסרת $v$ הסירה לפחות $3-1=2$ קשתות.

$G$ קשיר מינימלי: הסרת קשת מ-$G$ הופכת אותו ללא קשיר.

$\Rightarrow$ $G$ מסלול.

$\Leftarrow$ נניח ש-$G$ מסלול. נראה שהוא קשיר מינימלי.

אם נסיר קשת כלשהי, נקבל שני רכיבי קשירות.

$G$ קשיר.

$G$ מסלול $\Rightarrow$ $G$ קשיר מינימלי.

$G$ קשיר מינימלי $\Rightarrow$ $G$ מסלול.

$G$ מסלול $\Leftrightarrow$ $G$ קשיר מינימלי.

---

**משפט** יהי $G$ גרף קשיר עם $n$ קודקודים. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $G$ מסלול
2. $G$ בעל $(n-1)$ קשתות

**הוכחה**

$(\Rightarrow)$ נניח ש-$G$ מסלול. נוכיח כי יש בו $n-1$ קשתות




אחת ב"קצה" השני של המסלול ואין עוד. אז $n-1$ קשתות.

$(\Leftarrow)$ נניח ש-$G$ קשיר מינימלי. נראה שהוא מסלול.

אם לא, אז קיים קודקוד $v$ עם דרגה $\geq 3$.

$v$ מחלק את $G$ ל-$k \geq 3$ רכיבי קשירות $G_1, \ldots, G_k$.

נסיר את $v$ ואת הקשתות הנוגעות בו.

$G \setminus \{v\}$ עדיין קשיר.

$G_1$ מחובר ל-$G_2$ ב-$G \setminus \{v\}$.

$G$ קשיר מינימלי: הסרת קשת מ-$G$ הופכת אותו ללא קשיר.

הסרת $v$ הסירה לפחות $3-1=2$ קשתות.

$G$ קשיר מינימלי: הסרת קשת מ-$G$ הופכת אותו ללא קשיר.

$\Rightarrow$ $G$ מסלול.

$\Leftarrow$ נניח ש-$G$ מסלול. נראה שהוא קשיר מינימלי.

אם נסיר קשת כלשהי, נקבל שני רכיבי קשירות.

$G$ קשיר.

$G$ מסלול $\Rightarrow$ $G$ קשיר מינימלי.

$G$ קשיר מינימלי $\Rightarrow$ $G$ מסלול.

$G$ מסלול $\Leftrightarrow$ $G$ קשיר מינימלי.

שני אלפים קשורה מסרי מאפיין והם יתרי קטנים
$n \cdot G \Rightarrow$ לפי, הנחת האינדוקציה יש בהם
$|V_1|-1$ ו- $|V_2|-1$ צלעות. סה"כ
$|V_1|-1+|V_2|-1 = |V_1+V_2|-1 = n-1$
כי הם כדים בגלל ההנחת האינדוקציה

($\Leftarrow$) נניח $G$ קשיר $n-1$ צלעות.
ברשימה של הדרגות יש $2n-2n$ קודקודים.
$\Rightarrow$ קיים קודקוד שמדרגו לכל היותר אחת מהרשימה
$\deg(v)=1$.
נשאיר $(V_1, E_1), (V_2, E_2), \ldots, (V_{n-1}, E_{n-1})$ קשיר ועוד מאפיין.
לפי הנחת האינדוקציה $\Rightarrow$ $G$ עוד מאפיין.

אם $n=1$ מדובר שהגרף ריקה
$n=2$ המקרה הזה $\longrightarrow$ ולכך אין נכון.

משלים ☺

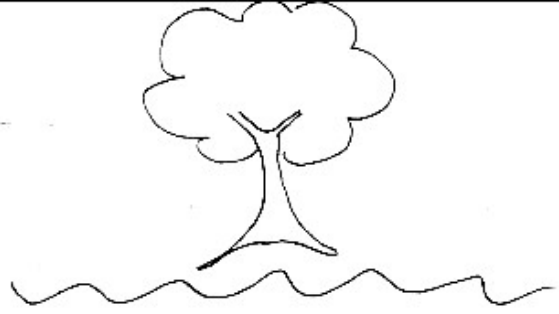
סיכום המשפטים

$G$ קשיר $\Leftarrow$ $G$ עץ $\Leftrightarrow$ $G$ עוד מאפיין מקס
$\Leftrightarrow$ $G$ קשיר מינימלי
$\Leftrightarrow$ $|E|-1$ צלעות

מסקנה
לכל עץ יש לפחות 2 עלים. עלים הם קודקודים שדרגתם 1. למה? כיוון שקיים $v$ כך ש $\deg(v)=1$
אז בשביל שהסכום יהיה $2n-2$ חייב לפחות לזוג אחד
שדרגתו 1. כלומר, שהסכום יהיה לוגי. $\sum_v \deg(v) = 2n-2$

$$\sum_v \deg v - n2 = \sum_v (\deg(v)-2) = 2-2n$$

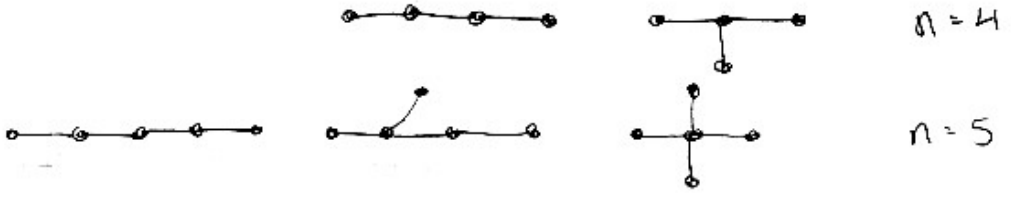
דוגמאות:



עץ $G$
$\Downarrow$
קיים $v \in V$ כך ש- $\deg v = 1$.

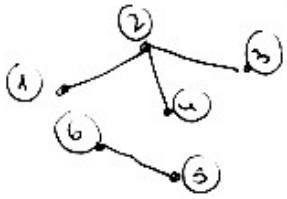
עץ עם $n$ קודקודים

$n = 2$
$n = 3$
$n = 4$
$n = 5$



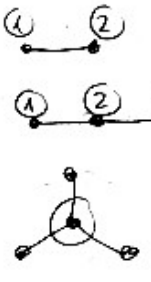
מהי כמות העצים על $n+1$ קודקודים? נתון על כמה $n$ קודקודים. פשוט מוסיפים עלה שמחבר את הקודקוד הנוכחי עם אחד הקודקודים הקיימים, אבל יש הרבה מאוד אופציות...

הגדרה: גרף מתויג (labeled) הוא גרף $G = (V, E)$ עם פונקציה חח"ע $f : V \to [|V|]$.

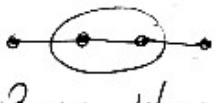


משפט (Cayley):
מספר העצים המתויגים בעל $n$ קודקודים הוא $n^{n-2}$.

הערה: אם $n = |V|$ אז ב- $E$ יש לכל היותר $\binom{n}{2}$ צלעות.



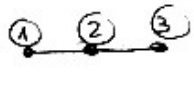
4 אופציות - מתוכם את המרכזי: וה שאר סימטריים



$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ אומר במקרה הזה סימטריה לסיבוב.



אפשרות 1 בלבד





פולמאות:
$n = 2$ $2^0 = 1$
$n = 3$ $3^1 = 3$
$n = 4$ $4^2 = 16 = 4+12$ סה"כ

## הוכחת הלמה

נניח שיש עץ אחד עם $n$ קדקודים שהדרגות
שלהם $d_1, \dots, d_n$ כך שדרגה של קדקוד $i$
שווה $d_i$. לפי טענה קודמת $\sum d_i = 2|E| = 2(n-1)$
כלומר $\sum d_i = 2n-2$

טענה 1: קיים עץ עם דרגות $d_1, \dots, d_n$ אמ"מ
$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$, כאשר לכל $i$ $d_i \geq 1$.

הוכחה:

($\Rightarrow$) ראינו כבר

($\Leftarrow$) באינדוקציה על $n$.

אם $n=2$ הדרך היחידה $\longrightarrow$ $d_1 = d_2 = 1$

כעת נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור $n$.

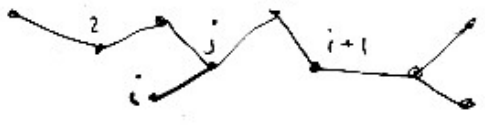
אם לכל $i$ $d_i \geq 1$ ו- $\sum d_i = 2n-2$.

קיים $i$ כך ש $d_i = 1$ (אחרת $\sum d_i \geq 2n > 2n-2$) $n \geq 3$

לכן קיים $j$ כך ש $d_j > 1$ (כי אם לא $d_j = 1$ לכל $j$
ואז $\sum d_j = n \neq 2n-2$). נמחק את הדרגה
$(d_n, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, \dots, \hat{d_i}, \dots, d_1)$
הקטנו את $d_j$ ב-1 מחקנו את $d_i$

קיבלנו סדרה חדשה $(e_{n-1}, \dots, e_1)$ שבה לכל
$k$ $1 \leq e_k$ ומתקיים $\sum_{k=1}^{n-1} e_k = \sum_{k=1}^{n} d_k - d_i - 1 =$
$= 2(n-2) = 2 - (n-1)2 =$

אבל! לא כל סדרה שמקיימת את תנאי ההוכחה
מוכרחים על זה דרגות $(e_{n-1}, \dots, e_1)$
נוסף בנוסף לקדקוד $j$ שמתקבל ממחיקת $i$ קדקוד
חדש $i$. אז וקבל עץ עם דרגות $d_n, \dots, d_1$




מעל טענה 1 ⓒ

טענה 2: מספר הפתרונות של $d_1+\dots+d_n=2n-2$ כאשר $d_i\geq 1$ הוא $\binom{n-2}{n-2}$

הוכחה: נוכיח זאת באינדוקציה על $n$.

$n=2$ $\longrightarrow$ $d_1+d_2=2$ $d_i\geq 1$ $\binom{0}{0}=1$ ✓

נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור $n$.

נניח ש $d_1,\dots,d_n$ מקיימים $d_i\geq 1$ ו $\sum d_i=2n-2$.

נוכל לשים לב שקיים $j$ כך ש $d_j=1$ (כאן קל). בהכ"ל נניח $d_n=1$. מספר הפתרונות של $(d_1,\dots,d_{n-1})$ הוא:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-2}{(d_1,\dots,d_{j-1},\dots,d_{n-1})}\overset{\text{HI}}{=}\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-2}{n-3}=$$

מספר הפתרונות כך ש $d_j=1$

מספר הפתרונות של $d_1+\dots+d_{n-1}=2n-3$ כאשר $d_i\geq 1$

$$=\binom{n-2}{n-2}\overset{\text{משל"ש}}{=}\binom{n-2}{(1,\dots,1)}$$

הוכחה: הינלון אשלה, אבל נראה לי שזה גם מוכיח. צריך לחשב עד כמה שהמשפטיונים כה מספר הפתרונות שלעיל שונה... או שאולי לא...

## הוכחה שני משפט קיל:

מסקנה 2:

$$\text{מספר הפתרונות}=\sum_{\substack{(d_1\dots d_n)\\ d_i\geq 1\\ \sum d_i=2n-2}}\binom{n-2}{d_1-1\ \dots\ d_n-1}=$$

$$=\sum_{\substack{e_1\dots e_n\\ e_i\geq 0\\ \sum e_i=n-2}}\binom{n-2}{e_1\ \dots\ e_n}=(1+\dots+1)^{n-2}=n^{n-2}$$

(משל"ג נוים)

משל"ש (משפט הפולינום)

משל"ש

## הוכחה שנייה אחרת לטענה 2

באינדוקציה על $n$.

$n=2$ $\longrightarrow$ $d_1+d_2=2$ $\binom{0}{0}=1$ ✓

נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור $n$.

נניח ש $d_1\dots d_n$ מקיימים $d_i\geq 1$ ו $\sum d_i=2n-2$.

נוכל לשים לב שקיים $i$ כך ש $d_i=1$ (כאן קל). בהכ"ל נניח $d_n=1$. מספר הפתרונות של $(d_1,\dots,d_{n-1})$ הוא:

$$\binom{n-2}{(d_1-1,\dots,d_{n-1}-1)}=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-3}{(d_1-1,\dots,d_j-2,\dots,d_{n-1}-1)}=$$

מספר הפתרונות של $d_1+\dots+d_{n-1}=2n-3$ כאשר $d_i\geq 1$ כך ש $d_j=1$

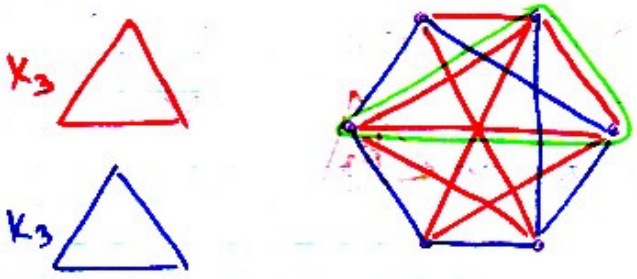
$$=\sum_{j=1}^{n-1}\text{מספר הפתרונות של } d_1+\dots+d_{n-1}=2n-3 \text{ כאשר } d_i\geq 1 \text{ כך ש } d_j=1$$

משל"ש

# משפט רמזי (Ramsey)

נניח ש- $s,t \in \mathbb{N}$ ו- $s,t \geq 1$.
מה יודעים שקיים $R \in \mathbb{N}^+$ (כלומר $R$ קיים) כך ש- $K_R$ (גרף שלם על $R$ קודקודים) יש בצבע 1 $K_s$ או בצבע 2 $K_t$?

**דוגמה:** $R = 6$ $\quad s = t = 3$




כאן לכל הקיים את אחד מהם אפשר כתוב, אפילו יש אחד!

**טענה:** לכל $s,t$ אנשים, קיימת מספר $R$ כך שאם אנשים כך שאו כולם מכירים אחד את השני או שלושה לא מכירים.

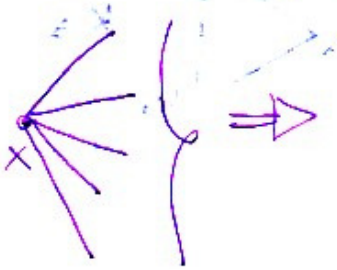
**הוכחה:**
ההוכחה היא באינדוקציה על $s+t$.

$A$ מכיר את $B$ $\equiv$ $A$ — $B$
$A$ לא מכיר את $B$ $\equiv$ $A$ — $B$

צבע של $K_6$ יהיה בצבעים // שאחד מייצג את מי.

צ"ל: קיים $R$ כך שקיים $K_3$ או $K_3$ בגרף

למה זה נכון?
נסתכל על $x$ - אחד מהקודקודים. מאחר ויש לו 5 קשתות




⇒ (a) או מספר הקשתות הצבועות באדום $\geq 3$.
(b) או מספר הקשתות הכחולות $\geq 3$.

לפחות יש לו קשת באדום או קשת כחולה

במקרה א'



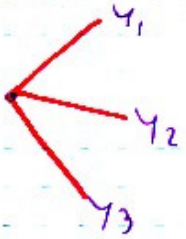

יש אוך 2 צלעות אחרונות שלו יוך ל.ש. כלומר קבע ה שם לא מקבים שלה.

בין ה- y-ים יש צלעות כי הגרף מקשר.
ושוב יש 2 אפשרויות:

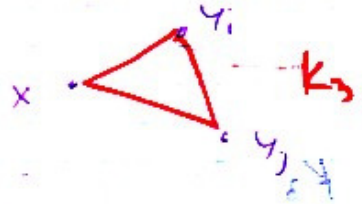
(i) או קיימת צלע **רחוקה** את בין $y_1, y_2, y_3$
$\Leftarrow$ מקבלים $y_1$ $y_j$ $K_3$ שוב 3 שמכילה את הה.

(ii) זו שאנחנו - כשוב כל הצלעות אפשרות
ואז $y_1$ $y_2$ $y_3$ $K_3$ שוב 3 אנשים שקשורים
לה את הה.

במקרה ב'




ואז מדיוק כמו במקרה א'
או שיש צלע אחרונה בין $y_i$ ל $y_j$ ואז




או שאין צלע אחרונה, שוב כלפן כתלות






משל"

## תזכורת שאלה שקולה: (משפחה המקורית)

$s, t$ נתונים. לאיזה $R$ יודעים שכל גרף על $R$ קדקודים, או קיים את גרף $K_s$ או קיים את גרף $K_t$ על בחשים?

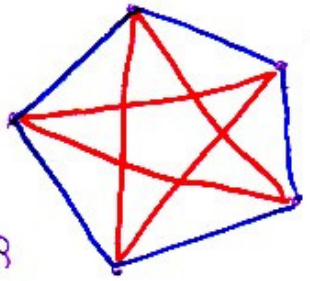
אם קיים $R$ כזה אז לכל $r \geq R$ גם לכל $r$ יהיה קיים $R$ כזה. נרצה למצוא את ה-$R$ הכי קטן שזה מתקיים.

המספר הנ"ל שתלוי ב- $s, t$ - $R(s,t)$ הוא מה שאנחנו מחפשים.

$R(s,t)$ = המספר הטבעי הקטן ביותר כך שכל גרף על $R$ קדקודים = יש בו את $K_s$ או $K_t$

לפי הסעיף הקודם $R(3,3) \leq 6$

נרצה ש- $R(3,3) > 5$. למה? נרצה דוגמה של גרף על 5 קדקודים שאין בו $K_3$



אין פה משולש בכלל אחד! כואב את זה בבין...

ואם לא מרגיה ש $R(3,3) > 5$ אנחנו רוצים שכל דבר שהוא הסעיף יתקיים. מרגיש בבירה שבה לא נכון!

פרופ' לורנס חושבת שאין כוונה אפורשת כלל- $R(s,t)$, אפל ניתן לחסום אותו.

משפט: (Erdős-Szekeres)

$$R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$$

(מסקנה שלנו $R(3,3) \le \binom{4}{2} = 6$ $s=t=3$)

הוכחה: באינדוקציה על $s+t$.

אם $\begin{matrix} s=1 \\ t=1 \end{matrix}\}$ הטענה ברורה. כי $\begin{matrix} K_s \\ K_t \end{matrix}\}$ גרף נקודה

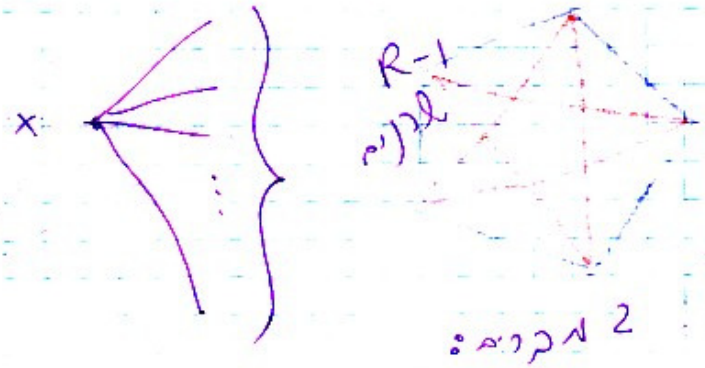
אם $s,t \ge 2$ באינדוקציה על $s+t$ - נניח שהטענה נכונה ל כל זוגות $(s,t)$ כך ש, $n = s+t-1$ ונוכיח ל $n = s+t$.

נשאיר $R$ $\binom{s+t-2}{s-1}$, $A = \binom{s+t-3}{s-2}$, $B = \binom{s+t-3}{s-1}$

שפיתלת מתקיים $R = A+B$

נניח שיש לנו גרף שלם $K_R$, ויהי $x$ קודקוד.

ל- $x$ יש $R-1$ שכנים, כלומר $A+B-1$




כעת נוכיח ש $2$ מקרים:

מקרה ב' יש $\ge B$ קשתות בצבע כחול

מקרה א' יש $\ge A$ קשתות בצבע אדום.




ⓒ נמתר $A$ קשתות כחולות

$$A = \binom{s+t-3}{s-2} = \binom{(s-1)+t-2}{(s-1)-1}$$

על $K_A$ שנשיר להראות את נקודת האינדוקציה

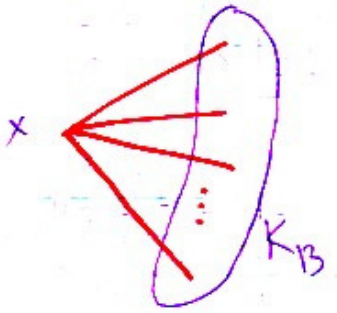
$\Leftarrow$ ב $K_A$ קיים $K_{s-1}$ או $K_t$

$\Leftarrow$ ב $K_R$ קיים $K_s$ ו $K_t$

יחד עם $x$




② נבחר $B$ בצורה אקווי




$$B = \begin{pmatrix} s+t-3 \\ s-1 \end{pmatrix}$$

מתקיים כמו קודם שמתאים את $K_B$ מהבניה של $K_R$

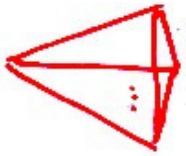
שם הנתון הראנדקי:

$$B = \begin{pmatrix} s+t-3 \\ s-1 \end{pmatrix} \geq R(s-1, t-1)$$

$\Leftarrow$ קיים או $K_s$ או $K_{t-1}$ כתת קבוצה של $K_B$.

ואז ב $K_R$ קיים או $K_s$ או $K_t$

כאשר מחברים את $x$



משל 😊

הערה: מהדוגמה נובע ש- $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$

זה נותן חסם עליון את הגודל של קבוצת הראמזי.

שנשיר עם הדגשות את זה מהשבוע בשוט ד"ר רושם

של מקדמי הבינום.

כמה צורות אלו?

$R(s,t)$

| s \ t | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 14 | 18 | 23 | 28 | 36 |
| 4 | 9 | 18 | 25 | | | | |

לפי הנוסחה לעיל $\binom{s+t-2}{s-1}$

| s \ t | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |
| 4 | 10 | 20 | 35 | | | | |

**הגדרה:** מהי הלכה אם בגרף 2 צבעים יש מספר $k$ של צבעים?

נ"א נתונים מספרים טבעיים $s_1, \ldots, s_k$ והשאלה היא אז קיים $R(s_1, \ldots, s_k)$ (מינימלי) כך שבכל צביעה של $K_R$ בשני צבעים לפחות 1 מ- $K_{s_1}, \ldots, K_{s_k}$ בלבד $i$ $K_{s_i}$ תת גרף של $K_R$

ב אותו אופן נראה המשפט הבא אשר לדראות

$$R(s_1 \ldots s_k) \le R(s_1 - 1, s_2 \ldots s_k) + \ldots + R(s_1 \ldots, s_{k-1}, s_k - 1)$$

$$R(s_1 \ldots s_k) \le \binom{s_1 + \ldots + s_k - k}{s_1 - 1 \; s_2 - 1 \ldots s_k - 1}$$

**משפט** $R(n,n) > 2^{\frac{n}{2}}$

יש לנו הוכחה הסתברותית.

נראה לי שסיימנו את התוכן של הקורס.
עוד לפני הוא לא בא לי אתכונת יהיה המבחן.
תרשו לי רגע אחרון שאשתף עם שאלות שאלות
את מישהו שאלם שלם בעיית הבחינות.

יש מועמדים $A, B$.
כמה אפשרויות יש עבור הטבירות יק שתי נקודות
מקיימות שבע ימין

$$\#(\text{קלסות } A\text{-ל}) \leq \#(\text{קלסות } B\text{-ל}) \quad (*)$$

נניח סהכ יש $a+b$ קלסות ונדגים את זה בגרף.
הליכה מינה = קלס ל- $A$
שמאלה $B$

אז אם תמיד $(*)$ הגרף ירוץ להיות מתחת לאלכסון




נכון שמספר הקלסן מוגים עבו את מס' הדרכים
לרכיע לנקודה מקום מתשלים מפל עובר את הקו
שבאמצע.



מש התאומה הפרה בין המשולש
לבין מה שאנחנו מחפשים הלרים
א - (0,0) במשולש למקום $(a,b)$
במשולש שמין נקבל

$$\binom{a+b}{b} - \binom{a+b}{b-1}$$

בשעה הקודמת הגדרנו את $R(s,t)$ - המספר הטבעי הקטן ביותר כך שלכל גרף $G$ על $R$ קודקודים יש $K_s$ או $\overline{K_t}$. בדקנו את ההתנהגות של $R(s,t)$ כפונקציה של $s$ ו-$t$.

**תכונות:**

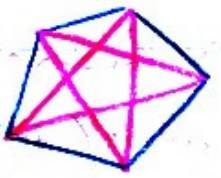
1) $R(s,1) = 1$

2) $R(s,t) = R(t,s)$

3) $R(s,t) \le R(s-1,t) + R(s,t-1)$

4) $R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$

5) $R(3,3) = 6$



ראיה קלה לכך ש $R=5$ לא נכונה.

6) $R(2,t) = t$ למה? אם יש בגרף את המשלים של כוכב אז כל הקודקודים אכן מחוברים ואז ברור שיש $K_t$. בדוגמה הבאה רואים את מה שחשוב בהוכחה בין הגדרת מספר שהרי בכל גרף של $6$ קודקודים לפחות $2$ יש בגרף ($K_2$) או שהוא בהכרח $\overline{K_3}$. אבל אנחנו צריכים שיהיו $3$ כאלה ביחד - המשלים!

**טענה:** לכל $s \ge 3$, $t \ge 3$ $R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1} - 1$

**הוכחה:** יהי $G$ על $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ קודקודים. נוכיח שיש $K_s$ או $\overline{K_t}$.

יהי $v$ קודקוד כלשהו ב-$G$. נחלק את הקודקודים ל-$A$ - שכנים של $v$ ו-$B$ - לא שכנים של $v$.

$|A| \ge R(s-1,t)$ או $|B| \ge R(s,t-1)$

נניח בה"כ $|A| \ge R(s-1,t)$. אם ב-$A$ יש $\overline{K_t}$ אז סיימנו. אחרת יש ב-$A$ $K_{s-1}$ ולכן $v$ יחד איתם יוצרים $K_s$.

$$\Rightarrow R(s,t) \le \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1} \quad \square$$

משפט $R(t,t) > (\sqrt{2})^t$ לכל $t \geq 3$.

הוכחה $R(2,2) = 2 = (\sqrt{2})^2$

הוכחה באופן דומה לתרגיל $R(t,t) < \lceil (\sqrt{2})^t \rceil$

נסמן את $\lceil (\sqrt{2})^t \rceil$ ב-$n$. צ"ל שקיימת בניה של $K_n$ ע"י שני בצעים כך שאין את גרף $K_t$ בצבע אחד.

מהו מספר הבניות של $K_n$? - יש $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ צלעות ולכן בכל אפשר לתת לאחד משני הצבעים $2^{\binom{n}{2}}$ בניות אפשריות.

נוכיח שהתירת שלא ירוצים לפחות $t$ קודקודים כך שכל הצלעות ביניהם באותו צבע.

עבור $T$ - את קבוצה של הקודקודים (של $K_n$) בגודל $t$. מספר הבניות של $K_n$ כך שהתת-גרף $K_t$ - $T$ יהיה בצבע אחד (כחול או אדום) הוא $2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{t}{2}} = |C_T|$

$C_T$ - קבוצת הבניות בהן $K_t$ בצבע אחד.

$C$ - כל הבניות האפשריות

$$\bigcup_T C_T = \left\{ \begin{array}{l} \text{קבוצת הבניות} \\ \text{שבהן יש} \\ \text{את גרף } K_t \text{ בצבע} \\ \text{אחד} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} T \text{ את קבוצה של } n \text{ מתוך } t \end{array}$$

צ"ל: $C \neq \bigcup_T C_T$ מה? $C$ היא כל הבניות. $\bigcup_T C_T$ הן הבניות שמקיימות את מה שאנחנו רוצים. אם מה שרשום למעלה נכון אז יש בהכרח ב-$C$ בניה שכן מקיימת את הדרוש ומכאן תנאי הטענה.

אבל $|C| = 2^{\binom{n}{2}}$

$$\left| \bigcup_T C_T \right| \leq \sum_T |C_T| = \underbrace{\binom{t}{v}}_{\text{מספר ה-}T\text{-ים}} \cdot \underbrace{2^{1+\binom{t}{2}-\binom{v}{2}}}_{|C_T|}$$

(כאשר $\binom{n}{2} > \binom{v}{2} 2^{1+\binom{t}{2}-\binom{v}{2}}$

(59)

$$\binom{n}{t} = \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t!} < \frac{n^t}{t!}$$

$$n = \lfloor (\sqrt{2})^t \rfloor \leq 2^{t/2}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{t} < \frac{n^t}{t!} \leq \frac{(2^{t/2})^t}{t!} = \frac{2^{t^2/2}}{t!}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{t} 2^{\binom{n}{2}-\binom{t}{2}+1} < \frac{1}{t!} 2^{t^2/2 + \binom{n}{2} - \frac{t(t-1)}{2} + 1} =$$

$$= \frac{1}{t!} 2^{t/2+1+\binom{n}{2}} \overset{\text{נ"ל}}{\leq} 2^{\binom{n}{2}}$$

כלומר נ"ל: $2^{t/2+1} \leq t!$

את זה אפשר להוכיח באינדוקציה.

$t=3$ $\quad 2^{3/2+1} < 3!$

$4\sqrt{2} < 6$ ✓

$t \to t+1$ $\quad \sqrt{2} < t+1$

$$\Rightarrow 2^{t/2+1} \cdot \sqrt{2} \leq (t+1) \cdot t!$$

$$2^{\frac{t+1}{2}+1} \leq (t+1)!$$ כ.ז.א

☺ "מש"ל

(69) 29.1.06
פיזיקה סטטיסטית

נסמן ב- $R=R(s,t)$ את מספר הדרכים השונות שניתן לבנות מסלול מ- $(0,0)$ ל- $(s,t)$ בעזרת צעדים מהצורה $(1,0)$ ו- $(0,1)$.

ברור ש- $R(s,0)=1$ ו- $R(0,t)=1$ לכל $s,t$.

נשים לב ש- $R(s,t)=R(s-1,t)+R(s,t-1)$ לכל $s,t\geq 1$.

נוכיח את הטענה הנ"ל באינדוקציה על $s+t$.

עבור $s+t=0$ הטענה ברורה.

נניח שהטענה נכונה עבור כל $s,t$ כך ש- $s+t=n$, ונוכיח עבור $s+t=n+1$.

אם $s=0$ או $t=0$ אז $R(s,t)=1$ ולכן הטענה נכונה.

אחרת, $s,t\geq 1$ ולכן $s-1+t=n$ ו- $s+t-1=n$.

לפי הנחת האינדוקציה, $R(s-1,t)=\binom{s-1+t}{s-1}$ ו- $R(s,t-1)=\binom{s+t-1}{s}$.

לכן $R(s,t)=\binom{s-1+t}{s-1}+\binom{s+t-1}{s}$.

לפי נוסחת פסקל, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

לכן $R(s,t)=\binom{s+t}{s}$.

משפט (☺)

תהי $K_A$ קבוצה של $A$ קודקודים, ותהי $K_B$ קבוצה של $B$ קודקודים.

נניח ש- $K_A\cap K_B=\emptyset$ ושאין קשתות בין קודקודים של $K_A$ לקודקודים של $K_B$.

אזי מספר המסלולים הפשוטים מקודקוד $x$ ב- $K_A$ לקודקוד $y$ ב- $K_B$ הוא $(A-1)(B-1)$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $A+B$.

עבור $A+B=2$ הטענה ברורה.

נניח שהטענה נכונה עבור כל $A,B$ כך ש- $A+B=n$, ונוכיח עבור $A+B=n+1$.

אם $A=1$ או $B=1$ אז הטענה נכונה.

אחרת, $A,B\geq 2$ ולכן $A-1+B=n$ ו- $A+B-1=n$.

לפי הנחת האינדוקציה, מספר המסלולים מ- $x$ ל- $K_A$ הוא $(A-1)(B-1)$, ומספר המסלולים מ- $K_A$ ל- $y$ הוא $(A-1)(B-1)$.

לכן מספר המסלולים מ- $x$ ל- $y$ הוא $(A-1)(B-1)+(A-1)(B-1)=2(A-1)(B-1)$.

אבל זה לא נכון, כי יש מסלולים שעוברים דרך קודקודים של $K_A$ יותר מפעם אחת.

נתבונן במסלול כזה, ונסמן ב- $z$ את הקודקוד הראשון של $K_A$ שהוא עובר דרכו.

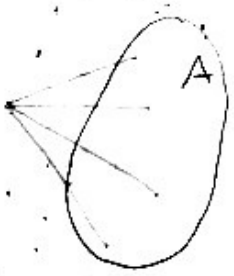
אזי המסלול עובר מ- $x$ ל- $z$ ואז מ- $z$ ל- $y$.

מספר המסלולים מ- $x$ ל- $z$ הוא $(A-1)(B-1)$, ומספר המסלולים מ- $z$ ל- $y$ הוא $(A-1)(B-1)$.

לכן מספר המסלולים שעוברים דרך $z$ הוא $(A-1)^2(B-1)^2$.

מספר המסלולים שעוברים דרך קודקוד כלשהו של $K_A$ הוא $\frac{(A-1)^2(B-1)^2}{2}$, כי כל מסלול כזה נספר פעמיים.

לכן מספר המסלולים הכולל הוא $2(A-1)(B-1)-\frac{(A-1)^2(B-1)^2}{2}$.



דוגמה $R(3,4) \le R(2,4) + R(3,3) - 1$

$R(2,4) = 4$ (מה?)

$R(3,3) = 6$

$\Rightarrow R(3,4) \le 9$

## משפט רמזי לגרפים

תזכורת: $G \to (H_1, H_2)$ $\equiv$ לכל צביעה של $E(G)$ בשני צבעים יש $H_1$ בצבע 1 או $H_2$ בצבע 2.

$G \not\to (H_1, H_2)$ $\equiv$ יש צביעה של $E(G)$ בשני צבעים ללא $H_1$ בצבע 1 וללא $H_2$ בצבע 2.

(קונפיגורציה)

נגדיר $R(s_1, \dots, s_k)$ מספרים טבעיים כך שלכל $r$ קיים $R$ כך שלכל צביעה של $E(K_{R}^{r})$ בצבעים $1, \dots, k$ קיים $i$ כך שיש $K_{s_i}^{r}$ בצבע $i$.

כך שלכל $r$ קיים $R$ כך שלכל צביעה של $E(K_R^r)$ בצבעים $1,\dots,k$ קיים $i$ כך שיש $K_{s_i}^r

(16)

אמה אין לו ישר שרוצה לפחות 3 נקודות.

אסקנה מתשפט (מה לגבי $n=3$):

לכל $t_i$ קיים מ"ק שלפ קבוצה של $N$ נקודות
מהישור, את זה קיימות $3$ נקודות לא יהיו
קיימת תת קבוצה של $3$ נקודות מהמה כלל.

## תרגיל בית 3

מספרי הסדרות של אפסים ואחדים $F_n =$
באורך $n$ בלי 11

| | |
|---|---|
| $n=0$ | 1 |
| $n=1$ | 0 ; 1 |
| $n=2$ | 00, 01, 10 |
| $n=3$ | 000, 001, 010, 100, 101 |
| | 5 |

הנוסחה היא מקרית $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
את אפשר לנסות לנחש $F_n$ אשר מצרת
את כל האפשרים.

איך נמצא נוסחה סגורה ל $F_n$?

נסתכל קודם על דוגמה אחרת: נמצא נוסחה כללית ל נוסחת
הנוסחה $a_0 = a$
$a_1 = b$
$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$

נסתכל על הסדרות שמקיימות את זה ($a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ הסדרות שמקיימות את זה)

① אם $(a_n)$ סדרה כזו גם $(ca_n)$ סדרה כאשר $c$ קבוע

② אם $(a_n)$ ו- $(b_n)$ סדרות אז $(a_n + b_n)$ סדרה.

נחפש פתרונות מהצורה $a_n = r^n$ כלומר

סדרה הנדסית.

לכל $n$ $r^{n+1} = 5r^n - 6r^{n-1}$

$\Rightarrow r^2 = 5r - 6$

$\Rightarrow (r-2)(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \quad r_2 = 3$

$\Rightarrow$ הסדרות $(2^n)$, $(3^n)$ מקיימות את נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$

אפשר לבדוק שגם $(A2^n + B3^n)$ פתרון, לכל $A, B$ קבועים.

נרשום לצורך שהוא נתון התחלה $a_0 = a$

$a_1 = b$

כעת ישנן 2 משוואות בשני נעלמים

$a = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 = A + B$

$b = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 2A + 3B$

וזאת מה. אפשר לפתור: $A = 3a - b$

$B = -2a + b$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = (3a-b)2^n + (b-2a)3^n}$$

נותר לבדוק את ההנחות שבדרך ואנחנו יודעים שיש רק פתרון אחד. לשם כך די להוכיח שהפתרון הוא יחיד.

נשאר בדרך כלל שפתרון נוסחאות נסיגה מהסוג הזה – שמופיע שפתרון מהצורה $r^n$ וכך מתקבל פולינום שדרגתו שווה לסדר הנסיגה שיש לנו טלה.

נחזור לסדרת פיבונאצ'י:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

נחפש פתרון $F_n = r^n$ כאשר $r^2 = r + 1$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) = r_1, r_2$$

$$\Rightarrow F_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

נמצא את ההתניה עבור $A$ ו- $B$:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ r_1 A + r_2 B &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{2 - r_2}{r_1 - r_2} \\ B &= \frac{2 - r_1}{r_2 - r_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_n = \left(\frac{2 - r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1^n + \left(\frac{2 - r_1}{r_2 - r_1}\right) r_2^n}$$

נשים לב שהדרך שבה הגדרנו את הסדרות בעיה.
מה קורה: ראשית, שני הסדרות שבהן השתמשנו מתלכדות?
במידה מסוימת אפשר לפתור נוסחאות נסיגה מהצורה
$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k}$$
ראשית $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ קבועים ו- $a_0, \ldots, a_{n-k}$ נתונים.
מחפשים פתרונות מהצורה $a_n = r^n$ ראשר
$$r^{k+1} = \alpha_1 r^k + \alpha_2 r^{k-1} + \ldots + \alpha_k r^0$$
מרחבי $k+1$ שורשים. מה קורה ראשר $k$ רבים?
למשל $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$
אז נקבל $r^2 = 2r - 1$ כלומר $(r-1)^2 = 0$
וישר פתרון $1$. אך ראינו שמה שעשה (עשינו
כך שיהי $a_n = n$ הוא פתרון. ואכן
בכלל $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot n$
(נסה כמו משוואות דיפרנציאליות).

## שאלה הבחינה

חלק א' -

הוכיחו שמשוואת הגלים המתארת את התפשטות (2/1)
גל בחוט מתוח היא:

חלק ב' -

שאלות כמו בתרגילי הבית (לא בחירה)

חלק ג' -

שאלות הבנה - בדיקת יכולת (בחירה) יכול להיות שיהיו שאלות עם תשובות או נכונות.