

המתמלח: שלי חיינן Shelly.g@math.huji.ac.il

שעת קבלה: יום 3' 16⁰⁰ ש"ס 207

היה משכונ והיה התמלח ירמיה יהיה בכיתה אחת.
יהיה שלט בבנין אינטליגנטי.

מה זה מתמטיקה דיסקרטית? מה נמצא?

- מספרים, טורים

- סדרים

- קומבינטוריקה

פקודים הנכס יהיה מאוד שימושי לקבוע המושק המצא (אזן)
וחישובים. נמצא טכניקה לפתרון תיכונה בעזרת (חומצות)
אל הקלס יהיה (חמד) וכו'.

ספר י מתמטיקה בדידה / נתי לניאל ואילן פתח
מאמר מאוד מקרא את הפער בנוסל לשיעורים.

יפיו תרמלס בל שבו - זינק לפתור!

יהיה גם אתר קורס שבו יהיו תרגילים, פתחונות ועוד
בתחילת מליך נמצא את הנושאים של השלבים לפני כן. לפני היום
נמצא מספר אחד

אנציקלופדיה - המטרה היא הוכחת טענה מתמטית לאינטואיטיבית
טבעיים. זינק אחד ולא ב רק מוצאות (אפילו) היא לנסח
לעבור ולהוכיח את ה טענה. זינק לחשוב על אנציקלופדיה כעל
הפלה אתני דואני

זקרון האנציקלופדיה: רוצים להוכיח טענה לכל $a > 0$ שלם (בד"כ)
 $a = 0$ או $a = 1$.

בסס האנציקלופדיה: הוכחת הטענה ל- a בהתחלה.

תרגיל 1.1.1: אינדיקציה

(א) הנחת האינדוקציה: הנחת נכונה $k=n$

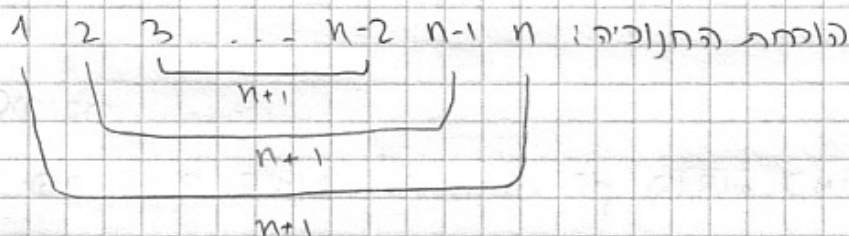
שלב האינדוקציה: הוכחת הנחת $k=n+1$

(ב) הנחת האינדוקציה עבור $k=n-1$ ($n \geq a+1$)

הוכחת הנחת עבור $k=n$

לפי האינדיקציה כמובן סקנדל

$$\sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{1.1.1}$$



כך n זוגות של $\frac{n}{2}$ זוגות וכל זוגות $\frac{n}{2}(n+1)$

אם n זוגי $\frac{n-1}{2}$ זוגות וזוג אחד $\frac{n-1}{2}$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)(n+1) + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

אם n אינו זוגי $\frac{n-1}{2}$ זוגות וזוג אחד $\frac{n-1}{2}$

הוכחת האינדוקציה:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

בסיס האינדוקציה:

הנחת האינדוקציה:

נניח להנחת נכונה $k=n-1$ כלומר

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

שלב האינדוקציה: נוכח את הנחת $k=n$

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2

בדוגמה בראשית החישוב לא תלוי בהוכחה

הנסיגה הנכונה היא:

$n^2 < 2^n$ for $n \geq 5$. אחת מהאפשרויות הנכונות.

$n=4$ $u^2=2^4=16$ - ואנחנו רוצים אי-שוויון חזק.

$n=3$ $9 < 8$ - לא נכון כלל.

נסיגה: $2^5=32 > 25=5^2$ ✓

הנחה: $k=n-1$ $2^{n-1} < (n-1)^2$ (*) $(n \geq 6)$

שלב הבא: נוכיח $k=n$ נכנס אל (*) ב-2.

$2^{n-1} < 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

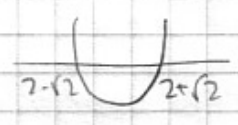
נראה ש $2^n = 2(n-1)^2$ וזה יספיק? לא, כי $2^n < 2^n$.

אם הנחה (בטריאליות).

אם נשואים? אין בעיה, גלגול:

$\frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$n^2 \leq 2(n^2 - 2n + 1)$
 $0 \leq n^2 - 4n + 2$



נבדוק מהי האנליזה עבור n מתקבל אי-שוויון.

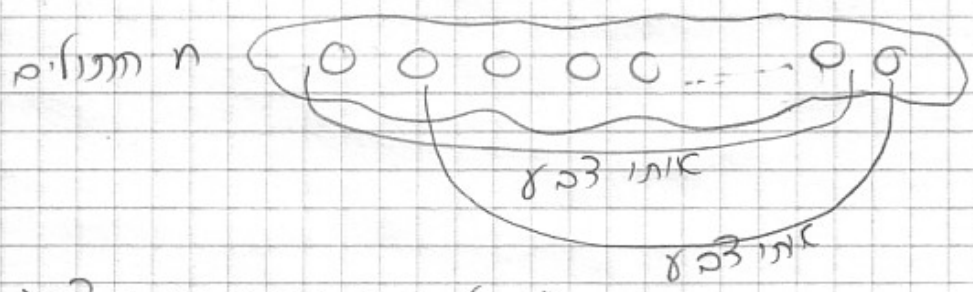
אם אנחנו רוצים להוכיח את זה לא יוצאים מהשאלה כי כנראה שכן?

סעיף: (א) נסוה) ב החתולים האותו צבע.

בסיס: חתול 1 הוא באותו צבע.

הנחה: נניח ש $n-1$ חתולים הם באותו צבע.

שלב: נוכיח ש n חתולים הם באותו צבע.



$\Leftarrow$ ב- n הם באותו צבע.

אם הוכחה?

הרור שלר זבור ז-ח הטענה והוכחה הן אבסורדיות.
 חס"ס האנציקלופדיה היה צריך להיות $2 = 0$.

אנציקלופדיה לא חתה אבל ציח צלחה י' לה י'נו אהבה אחרת
 עבודה של שטית מוחית.

אנציקלופדיה שלמה (מלאכה):

חס"ס: הטענה (כונה ל- $a = k$) בלבד

הנחה: הטענה (כונה ל- $a \leq k < n$)

שלב: הוכחת הטענה ל- $k = n$

האנציקלופדיה השלמה היא כמאלו חלקה יותר מהשאלה, ולכן
 הפך לא משתמשים בה זה כמו אברוג יתול בטנק.

9/11/05
תצטרף

של אבי: shellyg@math.huji.ac.il

לעת קבלה: יום 3 16:00 ל 20:00

אתר פקולטה: math.huji.ac.il

השמות הם של ימי החול יחולו אותם במחזוריות

סבי הקורס: אנליטיקה / גאומטריה / פיזיקה

חשוב: לרשום על התחזית של + ת.ב. ולרשום סקורציה התחזית

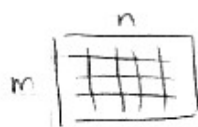
בתחילת הקורס עשנו אינדוקציה של מקורו של ה. (ש)

ההוכחה בין אינדוקציה שלמה לראשונה היא שהאינדוקציה שלמה

ההוכחה היא של כל האינדוקציה עד $n-1$ ולא רק של $n-1$ האחרון.

אינדוקציה פשוטה:

אינדוקציה של 2 פרמטרים (או יותר) $n, m-1$.



דוגמה: נניח שכל שלב של $m \times n$ הוא

רובים לתוך אותה קבוצה:

כמה שכיחות? $n-1$

הוכחה: האינדוקציה פשוטה:

של 1 נובע מהאינדוקציה של ראשונה שלב של n רובים

1-1 שכיחות n

המס האינדוקציה: $n=1$ $\square$ $0 = 1-1 = 1-1$ $\checkmark$

$n=2$ $\square$ $1 = 1-1 = 1-1$ $\checkmark$

הנחת האינדוקציה: נניח שהוכחה נכונה לכל n משבחה

של האינדוקציה: נניח את הטענה של $n+1$ משבחה

כל ההנחה, על אגף אחד של n הקבוצה $n-1$ שכיחות

לכן על אגף אחד של $n+1$ הקבוצה n שכיחות

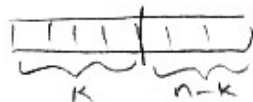
$n = 1 + (n-1)$
משבחה
שכיחות

אם אנחנו רוצים להראות של משנה האצו צדק נלכו את השורה נלמדו באינדוקציה אלא.

בסיס: לומר k צדק $1-k$ לבד.

הנני לומר $1+k-n$ צדק $k-n$ לבד.

$\Leftarrow$ סה"כ $n = (k-1) + (n-k) + 1$.



אז לא אינדוקציה שמה? כי לבדנו את השורה במקום אחר. וההנחה שלנו הייתה לא שורה של k משבצים ראש $k \geq n$.

שלב 2

(תורה אחת באינדוקציה) חזק. נוכח את נכונות הטענה.

הוכחה באינדוקציה על מספר השורות m .

בסיס: $m=1$ יש טבלה עם שורה אחת והוכחנו לצדק $n-1 = 1 \cdot n - 1$ לבד.

הנחה: נניח שהטענה נכונה לכל טבלה עם k שורות, $k \leq m$ לא נוכח שהטענה נכונה לכל טבלה עם $m+1$ שורות. נסביר אותה על 2 מקרים:

חזק $\Leftarrow 1-k-n$ לבד + שורה אחת

$(m+1-k) \cdot n \Leftarrow (m+1-k) \cdot n - 1$ לבד (נשלכנו אלנים)

סה"כ $n-1 + (m+1-k) \cdot n - 1 + 1 = (m+1) \cdot n - 1$

אשר (ש)

הערה: הענין החשוב. הטענה שקולה עם חתנו אחד היא האותו צדק היא נכונה באופן כללי. אלא הבדלים במספר האינדוקציה לא יכול להיות טענה נכונה באופן כללי. חייבים לבדוק טענה נכונה אחר.

הערה:

ניתן להוכיח את הטענה באינדוקציה נאמה. הסיסה אינדוקציה -
באופן קבוע.

הנחת האינדוקציה היא שהטענה נכונה לכל n לכל n קטן מ- m .

הוכחה על אינדוקציה:

ב לבירה מחדשה את מט המעדים ה-1. הטל, וכל מטנה
אין חילוקין, יש ממ חלקים $\leq$ מהם צריך $m-1$ לבירות.

הערה נוספת 1:

לכל n :

כאילו $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n-2}$

לפי שליש גורם למחלק את F_n ו- F_{m-1} . בהכרח $n < m$.

$F_m - \prod_{k=0}^{m-1} F_k = 2$ אם n הוא מחלק את F_m

↓
הוא קטן מ- F_n
↓
הוא מחלק את F_m

אם לא אז סתירה. F_n אינו חלקי ב- F_m .

$\Rightarrow$ יש אינסוף ראשוניים שהם F_n יש גורם למחלק

אותו אם לא אתה לא, אבל יש אינסוף F_n $\Rightarrow$
אינסוף ראשוניים.

סיכום:

יש שקילות, הפקסטי, סמלי, טרנספוזיט.

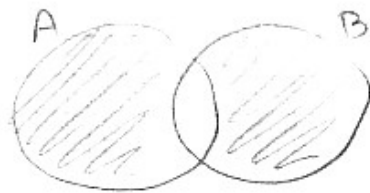
פונקציות = שוויון

"כן" מלפניה של "

מס שקילות מחלק את המרחב למחלקת שקילות.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

הפרק סימטרי:



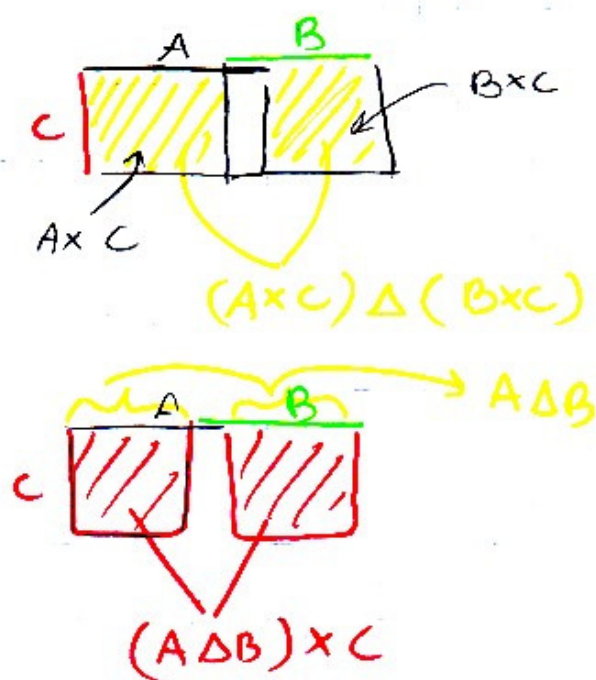
אין שיוצאם מתכנת - הפרק סימטרי זה כמו XOR
 וזה שיוצאם לאף זה

5) 16.11.05
תרגילים

אנא תרגילים: תרגום 3 אינו חובה
כל מאמץ הוא - owl.huji.ac.il

הערות עתידיות:

1) איך מצבים X כדי להיות $\cap$? במקום Δ צריך
קבוצה Δ נוספת Δ (המכונה Δ צריך Δ)



פונקציה $C = (x, y) \in A \times B \Leftrightarrow C \in A \times B$ אם

$x \in A$ ו- $y \in B$ $\Leftrightarrow$

ואם אחד מהם אז C אינו ב- $A \times B$ (אם C אינו ב- $A \times B$).

3) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

$(A \Delta B) \Delta C =$

וואלה:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\} \Delta C = \left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{איברים של } A \text{ ו- } B \\ \text{במקום } A \text{ ו- } B \\ \text{ולא ב- } C \end{array} \right\}$$

אם נסתכל אחר $A \Delta (B \Delta C)$ (קרא את אותו הדבר)

הרן טוען שאפשר גם להשתמש בדאמרות !
התיר הוכחה וזה פורמלי לחלוטין . אין לא מסכמה
איתו, אם כל אופן, אם להשתמש עם זה או
זה דיוק.

930 '000

[illegible]
$$aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b \quad \text{Min (x) 0 \leq x \leq 6}$$
$$arb, brc \Rightarrow arc \quad \text{transitivity } \odot$$

$\neg \exists a, b : aRb \wedge bRa$

(transpose of t) $S = R^t \cdot I \cdot R \in A \times A$: DINA 13

$$(a, b) \in R \not\Leftarrow \forall (b, a) \in R \quad \text{mit } b$$

לה' אלהינו 30 חלקי (קדש 328)

$$\forall a, b \text{ arb } \forall bRa \quad \text{pc } (\text{cdn } (c1)) \quad R \text{ no on'}$$

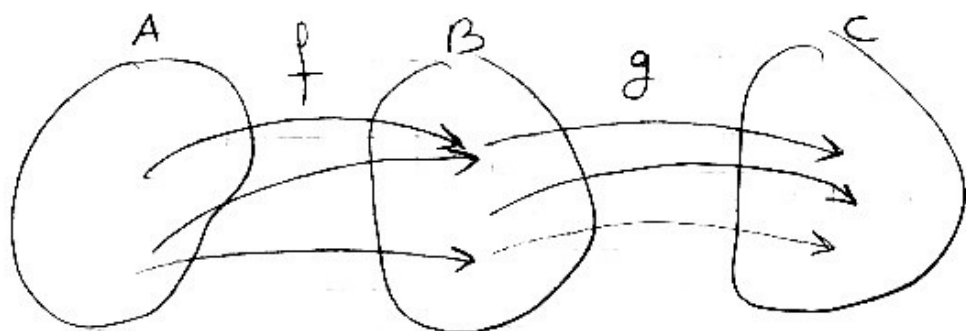
דמיון: ה'ח' = ה'ה' קבוצות הוא יח' סדר
אבל ~~ה'ה'~~ ה'ח' יח' סדר ה'ה' . ה'ח' סת' קבוצות
הן ברורות השוואה $\{2\} \neq \{3\}$ ואם $\{2\} \neq \{3\}$.

6

הרכבה

$$f: A \rightarrow B$$

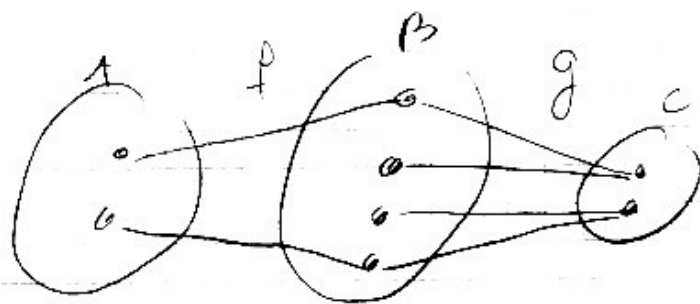
$$g: B \rightarrow C$$



$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

הרכבה

אפשר להרכיב שני פונקציות חתום
האנאלוגיה: (תחום אגרת) וק' שונים ב-A ונקודת אחר.
החיצים ב-B. f חתום $\Leftarrow$ הגדנו עלת נקודות
שונים. נקודת אחר החיצים ב-C ובתחת g חתום
למעשה לאברהם שונים.



במקרה ש-f ו-g חתום. אבל g לא חתום.
לדוגמה זאת, אם f חתום אז f חתום.

מה בדבר זה?

$$f, g \Leftarrow g \circ f$$

$$f \Leftarrow g \circ f$$

חתום היא תכונה שטמית מ'אין (לומר בהרכבה זה
שמי'אין חתום) ואילו $\Leftarrow$ היא תכונה שטמית מ'למעלה.

$$f: A \rightarrow B$$

$$\text{Im}(f) = \{b \in B : f^{-1}(b) \neq \emptyset\} \quad \text{תמונת } f$$

$$f: A \rightarrow \text{Im} f \quad \text{היא תמונת } f$$

$$f^{-1}(C) = \{f(a) : a \in C\} \quad \text{לגדי$$

$$\text{Im} f = f(A) \quad \text{והיא}$$

↓
פונקציה חתומה

תמונה. להראות ש f על אם f "ל" על
תבנית סיום: עשוי שיהיה זה לא סיומת
הבחירה. האם, אתה ממש מזהיק

2311 05
2311 05

הערה: הן אתר לציון בהורחה זה הורחה פויאלי וזה
הסדר אבל זה עא נכון. הציור עא אסרה חיים ערשם
בה הורחה באגלים. אבל ציור בהתחל יורם ערשם קאמי נאדיה!

ה' חנוה אלתאול 2

$$n \mid (a-b) \quad \text{nicht} \quad aRb \quad (K) \quad (S)$$

ஒரு CNN ஐ மீண்டும் மீண்டும்

$$\text{Sk} \quad n \mid (b-c) \quad \text{und} \quad n \mid (a-b) \quad : \text{Subtraktion}$$

$$n \mid ((a-b) + (b-c)) \Rightarrow n \mid (a-c)$$

מחלקת הפקידים : כל פקידים מחלקת שירותים

* $\alpha \in A$: α is a normal element

$[a]_R = \{b \in A : aRb\}$ $\exists$ a $\in$ A $\exists$ $b \in A$ aRb

$\{a \text{ סדרת } n \text{ איברים}\} \rightarrow [A]_R = \{b = n | (a-b)\}$: מקרה
 . כל n מתחלק על ידי n

$$[0]_R = \{a: a = kn, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1]_R = \{a : a = kn+1, k \in \mathbb{Z}\}$$

;

$$[n-1]_{\mathbb{R}} = \{a : a = kn + (n-1), k \in \mathbb{Z}\}$$

② נת קבוצה $D \subseteq A \times A$ $\{ (a, a) : a \in A \} = D$

11111 and me re clear

2. and $[a]_R = \{a\} \iff a \in A$ with b not related to a

$$a=b \quad \text{or} \quad \neg (a,b) \in D \quad \text{or} \quad [a]_R = \{b : (a,b) \in D\}$$

הוכחה: נניח $R \in A \times A$ היא ריבוי. נראה כי R היא ריבוי.

$$(b, a) \in R \text{ s.t. } (a, b) \in R \text{ s.t. } \forall a, b \in A$$

$$a=b \iff (b,a) = (a,b) \quad \text{sk } (a,b), (b,a) \in R \quad \text{wie } (b,a) \in R$$

⊢ $R \in \mathcal{R}$ סומריים ונזים לביים יק איברים אז צורה

(a, a) מה זה קרבה? R ירכיב אותו

[illegible]

אקסיומה: $\mathbb{N}$ של פתר תוצאות בסופו של
צבר יורש במהות

חש' סדר

חס בנאי R על קבוצה A נקרא חס סדר תלמי אם:
 R רלקטיבי, א.ט. סימטרי וטרנזיטיבי.
 (A, R) קבוצה סדורה תלמי (קט"ה או poset)
סימון: נסמן את R ע"י $\leq$.

חס סדר תלמי R נקרא חס סדר אפא (אנאור) אם על
 $a, b \in A$ $a \leq b$ או $b \leq a$ או $a \not\leq b$ ו $b \not\leq a$.
 (A, R) קבוצה סדורה (אנאור)

דוגמאות

$(\mathbb{Z}, \leq)$ - קבוצה סדורה אפא כי לכל שני מספרים אפא -

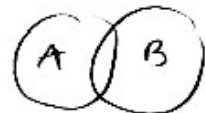
להשווה ביניהם. ואם יהיו קטן או שווה

$(\mathbb{Z}, <)$ - היות "קטן ממש" - זה לא חס סדר ^{תלמי} אפא -

כי הוא לא רלקטיבי. שיהי לא נכון $a < a$.

A - אוסף קבוצות - ו- R חס ההכלה $\subseteq$ -

זה חס סדר תלמי אפא לא אפא. למשל

על $A \subseteq B$ ולא $B \subseteq A$. 

$A = \mathbb{Z}$, $R =$ החספי a זמתק b - כלל שלית -

לומר $a \leq b$ אם $b \in R \cdot a$.

זה רלקטיבי ואנטי סימטרי ואם טרנזיטיבי. אם זה חס

סדר תלמי אפא הוא לא אפא כי $2 \nmid 3$ ו $3 \nmid 2$.

8

סדרות של מספרים $\{ \begin{matrix} a_i \in A, & a = (a_1, \dots, a_n) \\ b_j \in A & b = (b_1, \dots, b_m) \end{matrix} \right.$

(אמר ש- b הישג של a אם $a_i = b_i, \forall m \leq i$ $i = 1, \dots, m$ כל)

למשל $(7, 1, 2)$ היא הישג של $(7, 1, 2, 4, 6, 8)$

היחס הזה (הוא) הפאקטיבי, אסימטר, ו- טרנזיטיב.
אם שני יחס סדר תלוי.

אבל זה לא סדר מלא כי $(2, 3)$ ו- $(4, 6)$ לא
אחד השני

יחס הסדר המילוני, היא סדר קומה ל היחס אפל
הוא יחס סדר מלא ואת זה ראינו בביתה

תמונה H-

העיקר יחסי שקלול וסדר + ששניהם $\leq$ פונקציות
התמונה לרגשה!

המחן בשנים הוא יתקיים בשלל של השלמות ייתמקד בעיקר בתכונות 3 ו-4.
שנת קבלה של של: יחד של 204 168
* * * * *

עצמות

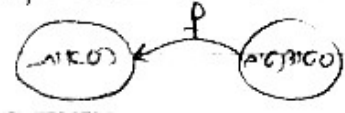
הקוצר A היא אפיון אם יש $n \in \mathbb{N}$ וקטע האפיון A הוא n.
אחרת A נקראת אנטיאפיון

גודל A של קבוצה סופית A, היא מספר האברים ב-A ומסומנת |A|. אפיון הוא כל אן משמעותי כאשר A אנטיאפיון אבל אפשר להגדיר קבוצות אחרות.

תפיסת A, B קבוצות (אחר של A, B שקופות או שנות עוצמה מסווגת).
אם יש פונקציה חתום ושל $f: A \rightarrow B$ ואם $|A| = |B|$

ב הקבוצות
השלול
אחת קבוצה
הן שקופות
ואחרת משותפות
השקופות

במקום ההגדרה הראשונה שבה הן קבוצות סופיות וכן קבוצות אנטיאפיון.
הערה: $A \sim B$ היא חס שקופות (פונקציה, אפיון וסטרנליסטי)



דוגמה: f פונקציה לא על $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ יש יתר כסאות מכאונות.

משפט: אם $A \sim B$ אז $A \cup B \sim A$ וכן האברים ב-B. $|A| = |B| = B$ וזה האברים ב-B.
ההוכחה היא באמצעות אפיון של היתר מיוחדת. אנחנו (יהי הטבר)

($\Rightarrow$) ה-A ו-B יש ח אפיונים $f: A \rightarrow B$ ו $f: B \rightarrow A$ נגדיר $f(a) = b$.
הדבר של f חתום ושל

($\Leftarrow$) (יהי ש $|A| \neq |B|$ ו $|A| = n$, $|B| = m$ יש שתי אפשרויות:

* $m < n$: f לא יוכל להיות על כי יש יותר מדי אפיונים ב-B.

* $m < n$: f לא יוכל להיות חתום כי אין מספיק אפיונים ב-B שכלם ילכו לעקבות שיקר.

אם באופציה החדשה שלשונות היא מ"ח.

קבוצות אנטיאפיון (אם כי דתאור כנראה נחמד בקבוצות, ערשו וטעם מצב)

$f(n) = 2n$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה חתום ושל $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ טבעיים זוגיים.

$f(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ f אפיון את הפונקציות לחיוביים ואחר האפיונים לשליליים.

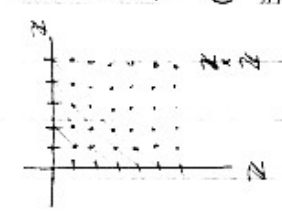
הערה: הפונקציה שללית פונקציה חתום ושל $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

(אם ש $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ וספיר את האפיונים ב $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ בארסונים.

$$\left. \begin{aligned} & \text{נקודות } (0,0) \\ & \text{הנקודה } (0,1) \\ & \text{הנקודה } (1,0) \\ & \text{הנקודה } (1,1) \\ & \text{הנקודה } (2,0) \\ & \text{הנקודה } (0,2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & 0 \leftarrow (0,0) \\ & 1 \leftarrow (0,1) \\ & 2 \leftarrow (1,0) \\ & 3 \leftarrow (1,1) \\ & 4 \leftarrow (2,0) \\ & 5 \leftarrow (0,2) \end{aligned}$$

$$f(0,k) = \sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$f(m,n) = \frac{k(k+1)}{2} + m = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$



אפשר לבדוק ש f שהצטרף האסכולוג וול $\leq N \sim N \times N \sim N \times \mathbb{Z}$

וסים של $\mathbb{Q}$ מתקיים $|N| \leq |Q| \leq |N \times \mathbb{Z}|$ כל מספר רציונלי

ניתן לחלק בצורה $\frac{m}{n}$ $(m, n) \in \mathbb{Z}$ ולחלקו למספר (m, n) של $\mathbb{Q}$

צמצום של אלו יספיק אבל $N \sim N \times \mathbb{Z} \leq N \sim \mathbb{Q}$

הגדרה כל הקבוצות שצורחתן בעוצמת הטבעיים נקראת בנות מניה ואסוציאציה $\aleph$

$\mathbb{R}$ קבוצה לאננה בת מניה היא כל מה שיש לה אפשר לטבע את האסוציאציה ככה שנוכל לספור אותם. מוכיחים את זה בשלילה אנחנו לא אפשר לטבע אותם באיזה סדר ואלו מראים שיש איבר שלא ספרנו אותו וזהו וזהו סתירה. העוצמה של $\mathbb{R}$ היא עוצמת הרציונלי והממשי $\aleph$ ומה של $\mathbb{R}$ לא בת מניה בסדר יוצא של $\aleph < \aleph$

הצורה מתחילה $\aleph$

אם $g: N' \rightarrow \mathbb{Q}$ יקרא $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ אז $g(n) = \prod p_i^{\beta_i}$ למשל

$g(12) \cdot g(2^2 3) = 2^2 \cdot 3^2 = 2^4 \cdot 3^2 = 144$ אם p_i - (המחלקים הראשוניים השונים) הפיכים של n

אז זהו, חברים, לרשתית בהוכחה?

+ כל מה שיש לנו יש פה, יתנו לטעמים באסוציאציה

+ כל מה שרצונו חזרה יש יצא, כמובן של שני הצדדים חזרים לאותו חדר

+ 2 זה חזרים לאותו חדר $\Leftrightarrow$ הפרוקם שלדים לביטויים הם חזרים

לדבר n נרשום $h(n) = \prod p_i^{\beta_i}$ ונרשום $g(n) = \prod p_i^{\alpha_i}$

נרשום נניח ש $g(n) \cdot g(m) = g(nm)$ $\Leftrightarrow \frac{h(n)}{h(m)} = \frac{h(nm)}{h(m)}$ השוויון הזה שרשום

למחלקה אחת של $\mathbb{Z}$

במסלול אחת של g על ושתהא בעצמה של $g = \frac{a}{b}$ נרשום פה לראשונים

6) 4.12.05
 גרסא

הוכח של חזק

$$f(x) = \lfloor \frac{x^2}{4} \rfloor$$

$$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g(x) = \lfloor 2\sqrt{x} \rfloor$$

$$f(0) = f(1) = 0$$

שתי הפונקציות אינן חזקות

$$g(1) = g(2) = 2$$

$\Leftarrow$ אם ההרכבה אינה חזקה אז $g \circ f$ אינה חזקה

הוכח של חזק:

$$f: S \rightarrow T$$

$$|f^{-1}(B)| \geq |B|$$

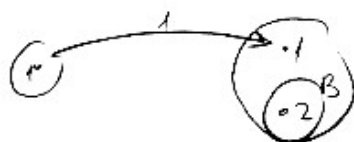
אם f חזקה אז $B \subseteq T$

זה לא נכון (נגדית)

$$|B| = 1$$

$$f^{-1}(B) = \emptyset$$

$$|f^{-1}(B)| = 0$$



$$|f^{-1}(B)| > |B|$$

$$B \subseteq T$$

אם f חזקה אז $B \subseteq T$

לחשוב אם f חזקה אז $B \subseteq T$ אז f חזקה

$\Leftarrow$ אם $B \subseteq T$ אז f חזקה

הוכח אחרת

אם $R \subseteq A \times A$ אז R חזקה

3)

חזקה

3) קיים $S \subseteq A \times A$ יחיד S חזקה

אם $R \subseteq S$ אז R חזקה

אם $R \subseteq S$ אז R חזקה

אם $R \subseteq S$ אז R חזקה

אם $R \subseteq S$ אז R חזקה

אם $R \subseteq S$ אז R חזקה

הצגה: איבר מניח בית סדר חלקי, אינו מכסה יחידה
הערות: בית סדר מלא ל אבר מניח יחיד (א קבוצה סופית)
הוכחה:

מאנציקציה על האות של A : אה ב A של אבר אחד אב
 נייטם המניח

(נני שהצגה נכונה קט' של ח איברים ומה A קבוצה
 עם ויתם אברה נרשם $A' \cup \{x\} = A$ נשם $A' = A \setminus \{x\}$
 $|A'| = n$ לפי הנחת האנציקציה ב A' של אבר
 מניח מ' (א' יחס סדר R' שנוסח על A' ב R)
 יש 2 אפשרויות

$$A \text{ מניח } \left\{ \begin{array}{l} m=x \Leftrightarrow x R m' \\ m=m' \Leftrightarrow \neg (x R m') \end{array} \right.$$

(י)

הוכחה השנייה

מאנציקציה על האות של A
 אם ב A יש אבר אחד ~~ש~~ יחס סדר חלקי על A הוא מלא
 אם הנחת האנציקציה נמשכת נכון לכל קבוצה ח אברה
 תהי A קבוצה עם ויתם איברים. אם נמנה קים ב A
 אבר מניח מ (א, בוקא יחיד) נחשם $A = A' \cup \{m\}$
 R משה יחס סדר חלקי על A' $R' = A' \times A'$
 לפי הנחת האנציקציה יחס סדר חלקי על A'
 $R \subseteq S \subseteq A \times A$: $R' \subseteq S' \subseteq A' \times A'$
 $S = S' \cup (\{m\} \times A)$

נתת ב אברה A ב השואא מ מ מניח מניח
 דרך אחרת ש-

S - אכן יחס סדר (חלקי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי)
 - כל שני איברים ברי השואא שני וקיים
 $x, y \in A^* \Leftrightarrow$ הם ברי השואא ב S

$x, y \in A^* \Leftrightarrow$ מ ברי השואא עם x (אם הם "י") מלא
 הערה על אבר מניח שנוסח יחס סדר מלא שוק

קומבינאטוריקה

הבעיה הראשונה היא קומבינאטוריקה היא לעיתים קרובות
המון דוגמאות. ובהקשר זה אנו רוצים לראות את תוצאת
שהיא לא פשוטה והיא על חשבון מחקרים יותר בקומבינאטוריקה
היא מתמקדת על דברים כמו: - מספר קטן
עקרון ההכנסה וההוצאה
- ספירת כל דברים

הצגות אחרות: 6

לכליור קומבינאטוריקה:

(5)
$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

הנחה אחרת:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}, \quad \binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$$

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

$$l = n \Leftrightarrow k = n+1 \Leftrightarrow l = 2n+1-k$$

$$l = 0 \Leftrightarrow k = 2n+1 \Leftrightarrow k = 2n+1-l$$



$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} + \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{2n+1-l} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} + \sum_{l=0}^n \binom{2n+1}{l} = 2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$$

$$\Rightarrow 2^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$$

הוכחה קומבינטורית:

$$A: [2n+1] \text{ על } n \text{ תת-קבוצות } K = \binom{2n+1}{n}$$

$$(כחול) \text{ } n \text{ תת-קבוצות } A \text{ על } n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$$

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

נשים לב שלכל תת-קבוצה K יש $n+1-k$ תת-קבוצות
 בגודל $n+1-k$. כל תת-קבוצה A של A בגודל n
 היא תת-קבוצה של $n+1-k$ תת-קבוצות בגודל $n+1-k$.

$$\frac{1}{2} (2^{2n+1}) = 2^{2n}$$



$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \quad (2)$$

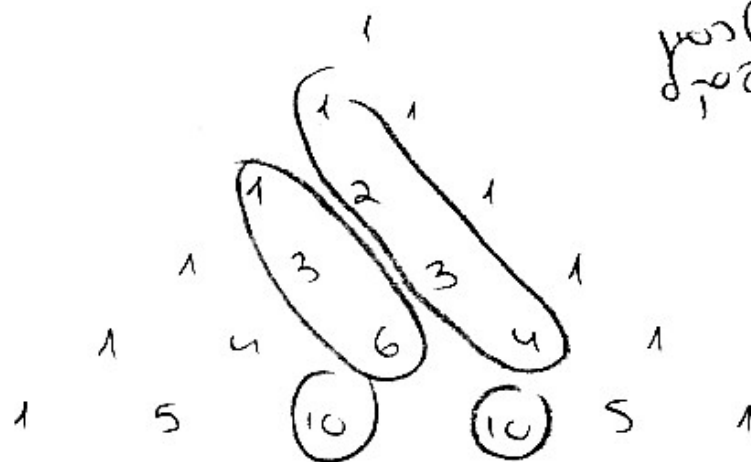
הוכחה: נניח $a=b=n$. אז:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\Delta \text{ (משולש פאסكال)} \quad \binom{n}{k} = \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1} \quad (3)$$

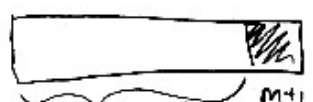
הוכחה קומבינטורית



(12)

הוכחה קומבינטורית

(סתם נתק מעגל) א של $[n]$ יש $\binom{n}{k}$ תת קבוצות.
 (בהחלטית) מסומנת בעגל a , $S = \{a_1, \dots, a_k\}$
 (תבונה במספר הכי גדול) בקבוצה ונסמן $m+1$.
 במור של $m+1 \leq k$ מה מספר האפשרויות לבחור
 את שאר איברי הקבוצה?



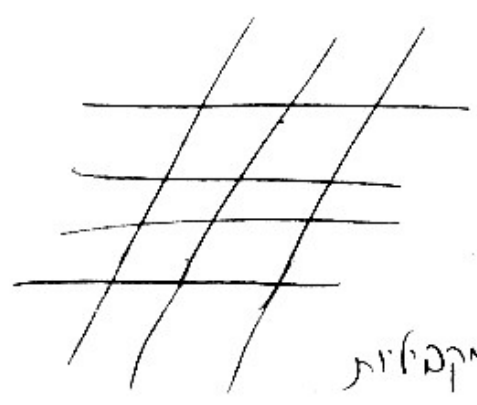
לסאר אברי הקבוצה יש לבח $\binom{n}{k}$ אפשרויות.
 עשוי (עבור כל k ה- m ימים האפשריים ונקט) $\sum_{k=m}^n \binom{n}{k-1}$
 (אם) לעבור על k ה- m ימים לה הצדדים k (נתק מעגל) א.

$$10 = \binom{5}{3}$$

בואנה

לומר $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ האפשרויות לבחור מספרים מתוך

$6 = \binom{4}{2}$	: 5
$3 = \binom{3}{2}$	: 4
$1 = \binom{2}{2}$	: 3



באופן כללי, k בחירה
 של 2 קווים מקבילים מתוך
 m ו-1 קווים מקבילים מתוך
 n תיתן מקבוצה
 $\triangleleft =$ סה"כ $\binom{m}{2} \binom{n}{2}$ מקבוצות

הסומן: קומבינטוריקה, תוצאים 5 ו-6.

- בקואנטוריקה יש 2 עקרונות חשובים:
- עקרון ההכרה וההדחה
 - עקרון שלובק היינים

דוגמה עקרון ההכרה וההדחה
פונקציה איזר: $\phi: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ שממדת דק:

$$\phi(1) = 1$$

$$n > 1 \quad \phi(n) = \text{מספרה בעים ב } [n] \text{ שלמים } n$$

$$\phi(10) = ? \text{ שלמים}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{3} \times \times \times \textcircled{7} \times \textcircled{9} \times$$

"דעים ל $10 = 2 \cdot 5$ אכ (מחק את ההפזלות של 2 ושל 5

$$\phi(10) = 4 \quad (\text{וקב})$$

אפיהמורה 1 זה כל מספר!

המורה של מספרים m, n נקראים לחים אם אין

מספר שלם $1 < d$ יה $d \mid m$ ו $d \mid n$.

הזרים ניתן לעסותפק בהם שלמים מספר ראשוני p

יה $p \mid m$ ו $p \mid n$.

Coen יה $1 < n \in \mathbb{N}$ ו $p_1, \dots, p_k$ ראשוניים

השנים המתוקים את n אכ:

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\phi(10) = 10 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4 \quad \text{: sanity check}$$

אכ (פחות בדוגמה הנלמדת אכ)

ההנחה השנייה נעקרת וההנחה בצורה ראשונה
 עמדה לעשנו בדומה. אנוני מוצים למחוק את כל
 הדפולוג של המדמים הראשונים של ח, אכן צריך
 עשים לא שלא נחלק דברים בעממים

הנחה: אם $n \geq 1$ אנוני כל n איש אדם בהכרח
 מחלק ראשון משותף. סומרי

ת, למצרים $\Rightarrow$ מתחלק באישה יק אשוי. n
 צריך למצוא ב. $A = [n]$ את מספר האיברים שאינם
 מתחלקים באף אחד מהראשונים $p_1, \dots, p_k$.
 (מדינה: אם $n \geq 1$

A_i - קבוצת המספרים ב. A שמתחלקים ב. p_i .
 $|A \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i|$ נרצה למצוא את
 את עקרון ההכלה וההדחה:

$$|A| = \left[\sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < l} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \dots + (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i=1}^k A_i \right| \right]$$

נחשב את המצבים:

$$|A_i| = \frac{n}{p_i} \quad \text{המספרים ב. } A_i \text{ הם בעצמם } \frac{n}{p_i}, p_1, p_2, \dots, p_k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j} \quad \text{סב, נ, מאותה סבה}$$

$$|A_i \cap \dots \cap A_k| = \frac{n}{p_i \dots p_k}$$

(צייב כעקרון ההכלה וההדחה):

$$n = \left(\sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} - \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{n}{p_1 \dots p_k} \right)$$

! להלאו צומק אלא

(4)

$$= n \left[1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} + \sum_{i,j=1}^k \frac{1}{p_i p_j} - \dots + (-1)^k \frac{1}{p_1 \dots p_k} \right] =$$

$$= n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)$$

למה?

$$\prod (1 - \frac{1}{p_i}) = (1 - \frac{1}{p_1}) (1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$$

אין פתרונות משהו? כל פעם בוחרים את $1 - \frac{1}{p_i}$ או את $1 - \frac{1}{p_j}$.

האורח ה- s + כספים: רשמו לנו s פעמים $1 - \frac{1}{p_i}$ -
 $(k-s) - 1$ פעמים 1 :

$$(-1)^s \sum \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_s}}$$

אז מה מדידה הנל מתקבל ראשית אנו מזהים את $1 - \frac{1}{p_{i_1}}, \dots, 1 - \frac{1}{p_{i_s}}$ ו-1 ויש משאר האורחים.

משל (5)

עקרון שובך היונים

הנחתה: יונים הן ידורים שלם לא ניתנים לחלוקה

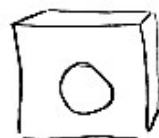
העקרון: אם יש m יונים ב- n שובכים אז יש לפחות 2 יונים באותו שובך.

דוגמה: בל בחירה של m מספרים שונים מתוך $1, 2, \dots, n$ יתמיד יהיו 2 מספרים זרים.

הוכחה: נחלק אותם לכובות: $\{1, 2, \dots, m\}, \{m+1, \dots, 2m\}, \dots$
 (שימו לב שיש n כובות ואם m עקרון שובך היונים, יהיו 2 מספרים באותו כוב. ע"ש $\{2i-1, 2i\}$).

המספרים האלה מהווים זרים כי אין להם גורם ראשוני משותף. (11)

נשים לא שזה חסם הדבר, לאמר אפשר
ח מספרים רק שלב 2 מהם יהיה אולם
משותף. למשל: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100.
ל הסימנים.



תקנון שלבך הינו -



טענה: n אנשים הגיעו למסעדה. חלקם לחצו ידניים, חלקם אולי לא.

א: יש לפחות 2 אנשים שחצו אותו מספר ידניים.

הוכחה: X - קבוצה האנשים $|X|=n$

$f: X \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ (ידניים)

$f(x)=i \iff$ אדם x לחץ i ידניים.

אם לחצו הידניים הוא בין 0 (מישהו לא לחץ) לבין

לבין $n-1$ (מישהו לחץ את כל האנשים).

(ראה שהמפה f אינו חלף כלומר אם 0 אז $n-1$ ו- $n-1$ אז 0).

אם כן, אם לא $a \in X$ ו- $f(a)=n-1$ אז a לחץ ידניים

אם כלם אדם $b \in X$ בהכרח $f(b) > 0$.

באור f אדם c חסר איש. תקנון שלבך הינו, יש שני אנשים

שונים $c \neq d$ יק $f(c) = f(d)$. באור f אינה חלף. (ט)

הערה: אם $|A|=|B|=n$ אז $f: A \rightarrow B$ אז $f \iff f$ חלף.

חשוב (ציר את מה שיש בגלל:

חלף = קרקורם - אנשים

בצורה - בצורה $a \cdot b \iff a \cdot b$ חלף ידניים

חשוב ידניים לחץ $a \neq 0$ - מספר הצורות של a $\text{degree}(a)$

משפט: אם G (לא מחוץ) יש 2 קרקורים אם אותה צורה

(חשוב G ההצורה בין שני מחוץ לחץ לא מחוץ

גרף מכוון $G(V, E)$

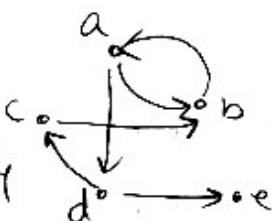
V - קבוצת קודים

E - קבוצת קודים $(u, v) \in V^2$ קבוצת קודים

גרף מכוון הוא כזה ש-

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (b, a), (c, b), (d, c), (d, e), (e, d)\}$



בסעיף c של a לא תהיה
השקפה של a ושל d

אם $u, v \in V$ ויש קוד $(u, v) \in E$ אז $u \rightarrow v$ נקראת קודית. אם $u, v \in V$ ויש קוד $(u, v) \in E$ אז $u \rightarrow v$ נקראת קודית.

כניסה של v $\text{indegree}(v)$ V v $\text{indegree}(v)$

צאת של v $\text{outdegree}(v)$ V v $\text{outdegree}(v)$

$\text{degree}(v) = \text{indegree}(v) + \text{outdegree}(v)$ V v $\text{degree}(v)$

גרף לא מכוון $G(V, E)$

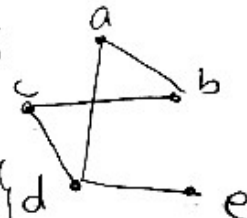
V - קבוצת קודים V vertex

E - קבוצת קודים E edge

גרף לא מכוון = "אחידות ידיות" - משתדל להיות

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, d), (c, b), (c, d), (d, e)\}$



קבוצת קודים

אם $u, v \in V$ ויש קוד $(u, v) \in E$ אז $u \sim v$ נקראת קודית.

הצורה של קבוצת קודים V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V v $\text{degree}(v)$
 $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$
 $\text{degree}(d) = 3$ $\text{degree}(e) = 1$

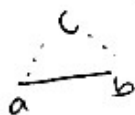
הצורה של קבוצת קודים V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V v $\text{degree}(v)$

הצורה של קבוצת קודים V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V v $\text{degree}(v)$

אם $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 1$ $V = \{a, b, c\}$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$

$\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$

אם $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$ $V = \{a, b, c\}$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$



אם $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$ $V = \{a, b, c\}$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$

$\sum_{v \in V} \text{degree}(v) = 2|E|$ $G = (V, E)$ $G = (V, E)$ $G = (V, E)$

אם $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$ $V = \{a, b, c\}$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$

אם $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$ $V = \{a, b, c\}$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$

אם $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$ $V = \{a, b, c\}$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$

אם $\text{degree}(a) = \text{degree}(b) = \text{degree}(c) = 2$ $V = \{a, b, c\}$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$ V $v \in V$ $\text{degree}(v)$

תורת הגרפים

הדפד אחרת על ישרים עם אטומים, אז לא אש נאמר
אחר הכוונה היא לכלל עם מכון.

$G = (V, E)$ גרף עם מכון V - הקדקודים E - הצלעות.

אסל v סדרה של קדקודים $(v_0, \dots, v_p)$ יק ש-
 $v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, v_p \in E$ ו- $0 \leq i \leq p-1$ יק שהצלעות כלן שונות זו מזו.

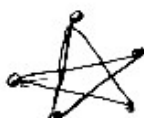
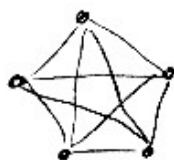
אם v הקדקודים במסלול שונים אז נאמר שהמסלול פשוט.
אם $v_p = v_0$ נאמר שהוא מעגל אם v הקדקודים שונים זה
מזה (פרט) $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ אם נאמר שהמעגל פשוט.

אורך המסלול $= p =$ מספר הצלעות.

אם u, v שני קדקודים (גדיר המרחק בין u ל- v הוא
האורך המינימלי של מסלול ביןהם מסומנים $d(u, v) = d_G(u, v)$
אם אין מסלול בין u ל- v נגדיר $d(u, v) = \infty$
המרחק הוא מטריקה הערה: $d(u, u) = 0$

קוטר הגרף הוא המרחק המקסימלי בין קדקודים בגרף
מסומנים $\text{diam}(G)$

גרף עם קוטר 1 כל הקדקודים מחוברים זה לזה בין כל
2 קדקודים יש צלעה. גרף זה נקרא קדקוד ומסומן
חא (ראשי $|V| = n$). למשל K_5 .



גרף עם קוטר 2:

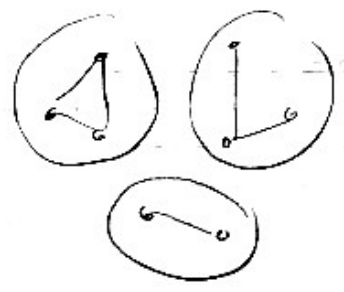
קטירות - "אפטר אדום אל קדקד" אל קדקד
 G קדקד קטיר אם יש מסלול בין u ו- v שני קדקדים.

קדקד q : (אדיר יחס שקילות על V באופן הבא.
 $u \sim v$ אם יש מסלול בין u ו- v .
 אם זה יחס שקילות?

$u \sim v$ - מסלול באותו G .
 $u \sim v \Rightarrow u \sim w$ בגלל שהכל לא מובן.
 $u \sim v, v \sim w \Rightarrow u \sim w$ - איחוד בין המסלולים.

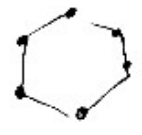
אם יש יחס שקילות יש מתקנה קטיר וכן יתכן
 הקטירות האלו

חלוקה של V יק: $A_1, A_2, \dots, A_k$ $V = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ כזה
 כך שאם $u, v \in A_i$ אז יש ביניהם מסלול ואם $u \in A_i, v \in A_j$ $(i \neq j)$ אז אין ביניהם מסלול.



הפרדה G לא קטיר $\Leftrightarrow \text{diam}(G) = \infty$
 G לא קטיר $\Leftrightarrow \exists u, v$ שאין ביניהם מסלול $\Leftrightarrow \text{diam}(G) = \infty$
 העצמה אומר ש- G יש יותר מרכיב קטיר אחד.

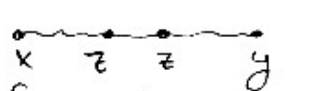
סאלה, G קטיר, $|V| = n$. מה הקוטר המקסימלי של G ?
 גלובלה: $n-1$ אל $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$



הפרדה בהחלט אם G קדקדים הקוטר הוא 3
 באופן כללי, אם $C_n =$ מעגל עם n קדקדים,
 $\text{diam}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

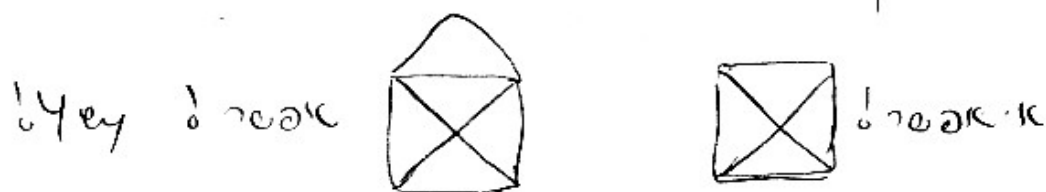
הוכחה של השאלה

יבוי $x, y \in V$ נרצה שבמסלול הכי קצר בין x ל- y , x ו- y קודקוד מופיע על ביותר פעם אחת.

למה?  כי אם z מופיע פעמים, אז ניתן לקצר את המסלול: לעבור מ- x ל- z ולמשך ישיר ל- y .
= במסלול הכי ארוך ב- G קודקוד יכול להופיע על יותר פעם אחת. ב- G יש ח קודקודים, על במסלול כזה יבוי על ביותר ו-ח צלעות.

מסלול ומעגל אוילר

האם אפשר לצייר את הציורים הבאים בלי להריס, או הציפורן מהצד ובלעדי להילך על אותה צלע פעמיים?



$G = (V, E)$ לא מכוון.

מסלול שמבקר בכל צלע באיך בדיוק פעם אחת וקרא מסלול אוילר.

אם לא שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת וקרא מסלול אוילר.

משפט אוילר: G - גרף קוץ לא מכוון. אם ב- G יש מסלול אוילר אחת על הדימוי האלף באיור.

(שני מאוד אופייני לצייר את הדימוי הממוחם הזה אכן זה לא נראה שיתאפשר לחתום לאחתות בקר לפחות לא הייתי.)



דוגמה

במסלול אוילר (בניגוד למעגל) (ק' הבקיסה ופויציאה לא ידבר שום).

מסקנה: ב-G יש מספרים אחרים כגון 0 ו-1

2. קצקוים בעל דרגה אי צווייג
(מחלל וואו מקרה פארט א מלחמה)

ה'תק"ה

הכרחי: כמו במשפט אולם. אם מספר זריק קריק
 נראה צלם בכניסה וצלם הדיאג (אם מספר צלם של
 צלם במל קריק) פריט אולי קריקדים הראשון והאחרון.
 הקריק הראשון והקריק האחרון יוכלו להיות מדרגה אוליג.
 מספר קריק: אם יש 8 קריקדים בעלי דרגה אוליג
 סימני כיתה משפט אולם. אם יש 2 קריקדים (אוליג,
 אוליג, אוליג, דרגה אוליג) אם נוסף אוליג קריק
 2 ו-2 צלם לזלזל ו-2 צלם דרגה אוליג
 בעל דרגה אוליג - אוליג ו-2 דרגה אוליג
 אוליג אוליג ו-2 צלם אוליג. במל שאר
 הקריקדים לא נמצאו והם (שאר דרגה אוליג, אוליג, אוליג)
 אולם, יש במל אוליג שמתחילים ב-2 ו-2
 מתחיל אוליג 2 ו-2 דרגה אוליג וקריק אוליג שמתחיל
 ב-2 ו-2 דרגה אוליג. אוליג ©

15 ה'תשס"ה בליל חמשה עשר

[illegible]

האם יש צורך ב-6 : אם כן, מהו גודל קבוצת האירועים? $\mathcal{F}$: כן, אז $\mathcal{F}$ הוא σ -אלגברה.

מסלול איילר

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון / לא מכוון

מסלול שמיר הוא צלע בדיוק פעם אחת לקראת מסלול איילר
מסלול

משפט איילר

- (1) יהי G גרף קשיר לא מכוון
 ב- G יש מסלול איילר $\Leftrightarrow$ כל הדרגות בגרף זוגיות
- (2) יהי G גרף קשיר מכוון
 ב- G יש מסלול איילר $\Leftrightarrow$ דרגת הדרגות = דרגת הדרגות לא קבוצה אחת
 הסבר: כי כל קבוצה של אגודת המסלול - הוא צריך פעם אחת להיכנס ופעם אחת לעזוב

מסלול המילטון

יהי G גרף מכוון / לא מכוון
 מסלול שמיר הוא קבוצה של גרף בדיוק פעם אחת
 לקראת מסלול המילטון.

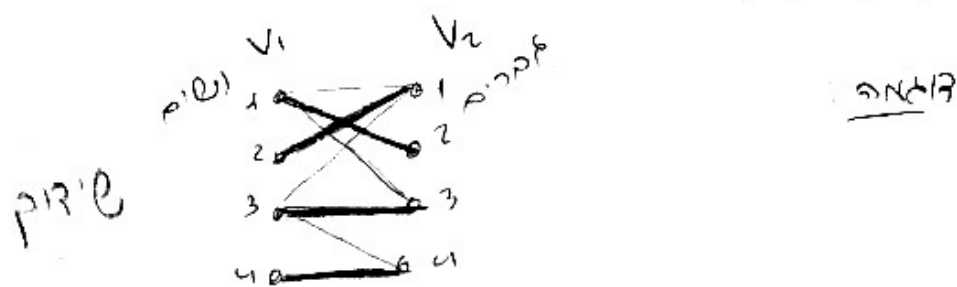
מסלול שמיר הוא קבוצה של גרף בדיוק פעם אחת לקראת
 מסלול המילטון. נשים לב שמסלול המילטון חותך לכל
 פסגה שונה ואחרונה בקבוצה למחציתו התחתונה.

אין אפיון פשוט האם גרף מסלול מסלול המילטון.
 אלאוריתם אם $n = 1$, (עבור n זוגי) התאמות של
 כל הקבוצות הנבדקות האם הם מסלול המילטון.
 (n זוגי וזה כיווץ לא יעיל במיוחד)

הבעיה: יש n אנשים ו- n נשים עם זיווגים ייחודיים.
 בין הים (הזכרים) נוצרם עלבדק בתניהם, יק שרלדק
 יק יבר ואישה שמכירה לה את כל

השפה מתמטית: $G = (V, E)$ מיל לא מכון.
 זיווג ב- G הא אולל של זלעזר, שליל אחת מלון און
 קובקוד מלולול.
זיווג מושלם איה בל קובקודי גמיל מלולול בל זיווג.

הבעיה: ותון מיל דו-צדדי $G = (V_1, V_2, E)$ אל בל E .
 ייאמלצורה V_1, V_2 יאשר $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
 אברונק דיא ללבר V_1 מליה אילל V_2 יא
 בל $|V_1| = |V_2|$



סימון: אם $S \subseteq V_1$ בל $\Gamma(S)$ איה קובקודי
 הללניל של S

משפט הלל Hall
 מיל דו-צדדי $G = (V_1, V_2, E)$ יא זיווג
 מושלם איה ללל $S \subseteq V_1$ מלליל
 הלללול דיא: $|S| \leq |\Gamma(S)|$
 איהם, אחרת - לל וילל עלבדק אולל.

מסקנה יהי $G=(V_1, V_2, E)$ גרף דו-צדדי ד-רגולרי.

1. $n=|V_1|=|V_2|$ ואם G יש לו ג' משלים.

הוכחה: סכום הדגים ב- $V_1 = n \cdot d =$ סכום הדגים ב- V_2 .

הוכחה: תהי $S \subseteq V_1$ ותהי F קבוצת הצלעות העוברות

ב- S . $|F| = d \cdot |S|$ (מה-ד-רגולריות)

(תבונן ב- $V_2 \in \Gamma(S)$ ותהי H קבוצת הצלעות

גורמות ב- $\Gamma(S)$ $|\Gamma(S)| = d \cdot |H|$.)

נשים לב ש $F \subseteq H$, כי אצל שצאת ב- S עוברת

אם ב- $\Gamma(S)$ $\Leftrightarrow |F| \leq |H|$ (תהי ב- d וקבא)

$|\Gamma(S)| \leq |H| \Leftrightarrow$ לא תהא הולו ש ציווג משלים.

משל $\odot$

מסקנה מהמסקנה:

הגל- דו צדדי $G=(V_1, V_2, E)$ $n=|V_1|=|V_2|$ ד-רגולרי

אשר למצוא בדיוק d ציווגים משלמים זהים,

לאיחודם של E -

הוכחה:

באנדוקציה ב- d .

$d=1$ יהי ברור.

הי בל קבוצה עוברת בדיוק בל אחת.

נניח שהשענה נכונה ל- $d-1$ ונראה ל- d .

לפי המסקנה יש ב- G ציווג משלים נכונות מהגל

אם הצלעות המשתתפות בציווג. אם קבוצה זיקו

בדיוק בל אחת נלק ושל אנו עמל (ד-ר) רגולרי עתה

נשתמש בהנחת האנדוקציה בגלל כזה יש $d-1$ ציווגים

משלמים זהים ואיחודם הוא הצלעות. נוסף את הצלעות

שזיקו ונקבל d ציווגים משלמים זהים. משל $\odot$

בתנאי הקדם ציינו על משפט Hall :

בהינתן ציוד $G = (V_1, V_2, E)$ יש ציוד $|V_1| = |V_2|$ ויש ציוד $|N(S)| \geq |S|$ לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים

יש ציוד $|N(S)| \geq |S|$ לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים

יש ציוד $|N(S)| \geq |S|$ לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים

אם תנאי Hall ניתן לנסח באופן לא פורמלי באופן הבא:

V_1 - נשים, V_2 - גברים. כל א נשים מכירות לפחות א גברים

תנאי Hall

יש ציוד $|N(S)| \geq |S|$ לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים

יש ציוד $|N(S)| \geq |S|$ לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים



תנאי Hall: כל איחוד של K נשים יש לפחות

K גברים

ניתן להבין את תנאי Hall אם להינתן ציוד עם

$|V_1| \neq |V_2|$ אם לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים $|N(S)| \geq |S|$

אז קיים ציוד שממנה את V_1 .

זה מה שהשתמשנו בו למעלה

מכאן עם הנשים - אם יש פחות נשים מאגברים,

עדיין אם כל נשים מכירות לפחות א גברים, יש

שידוך שממנה את כל הנשים. על אשה יש אבר

אך לא זהב.

יש 2 חלקות שוות

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

נוצרים לפחות K ציודים משותפים. כלומר מסוימים

ה- $x_1, \dots, x_n$ יק $x_i \in A_i \cap B_i$.

חנאי Hall: כל איחוד של $k \leq r$ קבוצות מה- A_i חתוכות לפחות r קבוצות מה- B_i .

הסבר: $\exists A_i$ - זמרים

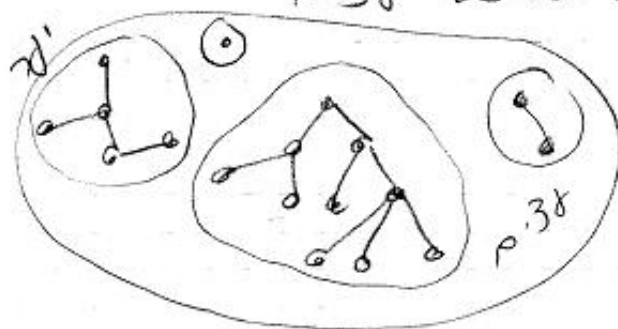
$\exists B_i$ - נשים

אמר A_5 מכיר אישה B_5 אחרת $A_5 \cap B_5 \neq \emptyset$.
צריך: כל r זמרים מכירים לפחות r נשים.

על ידי



אז (לא מכון) שאני מכיר n נשים (קרא י)
י קשרי נקרא ע
ע: אז (לא מכון) קשרי עלאמ ע
י: איחוד כל n זמרים



על ידי: קבוצות מצומצמות

משפט: כל r זמרים $2 \geq r$ קבוצות מכיר r נשים.

הערה: (חנאי) בעצם יש לפחות 2 זמרים

הוכחה (3) מקבוצת פשוט בעל r זמרים r נשים.
שורא ממנו מבטי לחזור מיד לקבוצת שממנו יצאנו.
אם הקבוצות סופי ואנחנו מקימים בקבוצת פשוט

(כ.אן.מ.מ.מ.)

עם, ניקח בקווקא שמאן, עם ניקח עמקקם יתר
עם דמיתו 1
משל (ט)

סאדוט אחר משהו שמאן חן בענין עם ההחיה
מאחר שיש ערה נתחיל את הסוף ממנו
ונגיד ערה אחת.

לענף 1 יהי T על X עם אסמ X על T על
הערה הפעולה נקראת ע'צ'ים.

הוכחה על T קטן כי אין 2 קווקאים
על T, u, v יש מסלול שלא עובר ב- x כי דמיתו 1
על T כמובן מסר מעצמים T מסר מעצמים יאם
הוכחנו משל, בודאי לא יזכרו מסלול.

משל (ט)

לענף 2: יהי T על, נבנה ער חס T חוסס
קווקא x וחבור x קווקא אחר של T . SE
הערך החס הוא x עם
הערה x מהכרה ער



הוכחה: T קטן u, v שונים x
יש מסלול מסלול (T) . ניקח u, x . ונניח
שחברנו את x לקווקא v . אסבין x עם u יש מסלול
בנק v .

ב- T אין מעצמים כי אם היה מסלול הוא היה בנק
לעבור בנק x , אסבין דמיתו 1 עם לא יכול לעבור
בא מסלול.
משל (ט)

מסקנה כל G מתקבל באופן זה:
 מתחילים בקדקוד אחד (שורש) ונוספים
 קדקוד אחד קדקוד רק של G קדקוד יחיד בדבר
 קדקוד אחד בדבר.
הוכחה (תבונן בראי ונתן אינדוקציה אחת אחת).
 כל פעם נקבל G חדש של G קדקוד אחד
 ואז נוסף את התוסף וההפך ויאללה עניין.
 ☺

תכונות מתמל 10:

G שרף לא מכוון

ח - n קדקודים e - n צלעות c - רכיב קטנות

- $e - n \geq c$ (באילו צדדים e)

- אם G קשה אז $e \geq n - 1$ ($c = 1$)

- אם G יש צדדים קדקודים, $e \geq n - 1$ אז

יש בו מעגל (באילו צדדים n).

מסקנה G הוא שרף $\Leftrightarrow e = n - 1$

הוכחה אפקטיבית $e = n - 1$

אז $n \neq e$ אחת יש בו מעגל.

$\Leftrightarrow e = n - 1$

הוכחה באילו צדדים n .

הערה:

G שרף $\Leftrightarrow e = n - 1$

אם יש $n - 1$ צלעות לפחות בהכרח G שרף.

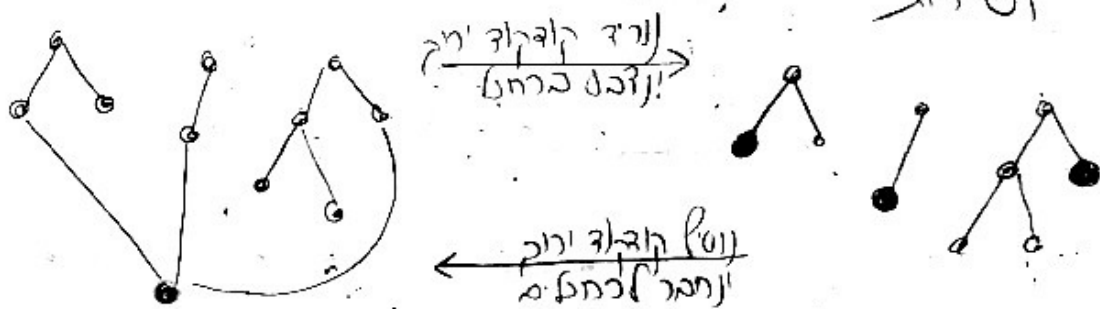
$n = 5$
 $e = 4$



תחילת - 12 - למאה 5

אם הישרות של n קאקאזים עם קאקאז אחד נחשב כחם
קליטות $\langle F \rangle$ אם הישרות של $n+1$ קאקאזים עם קאקאז

אחד יריב
השטן ערראט שוין ביצאט דא וואו צום ערראט פונעם
הפיה ב'הן. איך נעמט אהריל?

[illegible]

כא הולמ 30 חתן יהי < הקבוצות שוות אינן.

38 செ. 7' N

2010-11-11

কর ঠিকঠাকভাবে নেবে।

החברות המצויות: חברה להגנה בבריאות, חברה להגנה בבריאות, חברה להגנה בבריאות.

১৯ মার্চ ১৯৬৬: ১৯ মার্চ ১৯৬৬

ସମସ୍ତଙ୍କୁ ନମସ୍କାର ।

חבר לא מתאים = בתיבים המתואמים
שנמצאים באותה מחלקה של המילה.

$\Gamma = \{ \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \}$: der 8
 $\neq$

21/12/2011

[n] = ନିମ୍ନଲିଖିତ ନିୟମାନୁସାରେ

מחיר: 8 שקלים ע'מ'ת פר

הצעות המתועות של



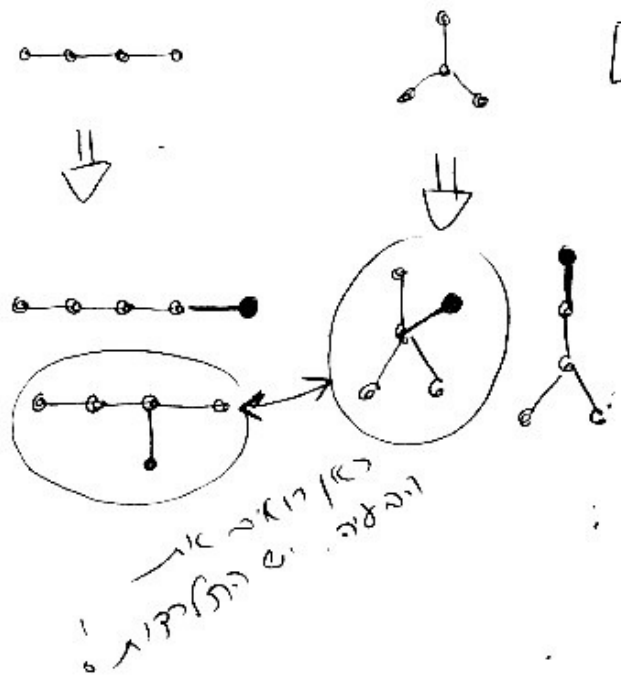
E.g. $\{(1,2), (1,3), (1,4)\}$ $\cap$

द्विः

23

מספרים ונתיבים

מספרים ונתיבים



$n=5$

$$5^{5-2} = 5^3 = 125$$

על (3) אור (נחש)

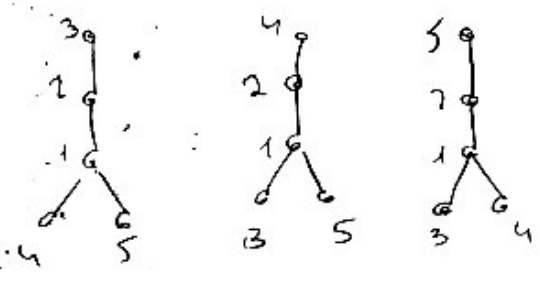
אור (נחש) ונתיבים

$$d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = d_4 = d_5 = 1$$

$$\sum d_i = 2 \cdot 5 - 2 = 8$$

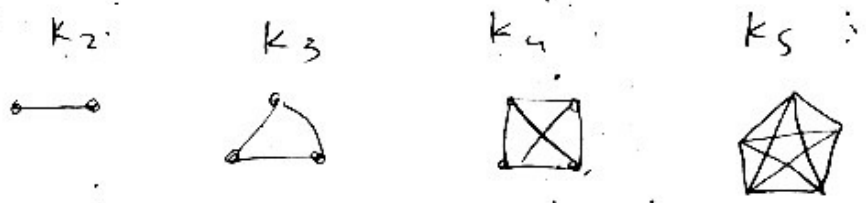
מספרם של הנתיבים

$$\binom{5-2}{2, 1, 0, 0, 0} : \binom{3}{2, 1} = 3$$



תצורה

$k_n =$ קבוצה מסדר n הנחשבת להיות קבוצה



הקשר בין R ו- S : $R = R(S, t)$ ו- $S = S(R, t)$ (החלופים)
 הקשר בין R ו- S : $R = R(S, t)$ ו- $S = S(R, t)$ (החלופים)
 הקשר בין R ו- S : $R = R(S, t)$ ו- $S = S(R, t)$ (החלופים)

$$R(S, t) = R(t, S)$$

24) 1/2/06
חידושים

להתרגל באופן (א) עקוב אחרי אתר הקורס -
סלפוס,

ויטא צינים,

אודי שני חדר (הבין שאלות!),

פתרון מתחיל החלפה.

חוס משנה שטח: קומה: 2 ארבעים לא מתווגים שנים

עם אותה קבוצה דמיון: $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3)$



מספר + מסלול

k_n - הגודל השלם n קובקוב

אם k_n זה המספר הקטן ביותר $R = R(s, t)$ יק של

צורה מסוג ורמול של פלגים k_R יש k_s חמול או k_t אדם.

הערות: * סימטריה: $R(s, t) = R(t, s)$

* $R(2, t) = t$ כי k_t יש $k_2 = 2$ חמול או k_t אדם

$$R(5, 2) = 5$$

$$R(3, 3) = 6 \quad *$$

$$R(4, 4) = 18 \quad *$$

$$R(5, 5) = ? \quad *$$

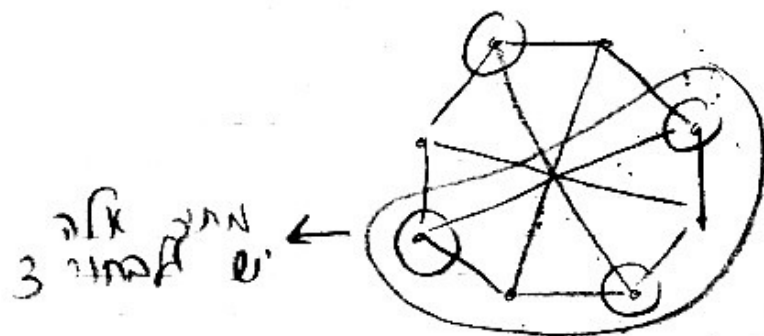
$$R(3,4) = 9$$

סעיף

$$R(3,4) > 8$$

חלק א

כל דבירה של K_8 בתוך K_4 ואזיבם K_4 משלים
בתוך K_4 או K_4 עצים



בהצגות
שאת החלוקה הן
אזיבם

ברור שאין בה משולש חתום.

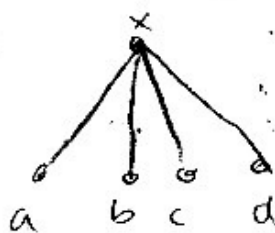
נראה שאין K_4 עצים: כי לאור החזרה
קוצקו צדק אחר 3 מתק 5 הקוצקו עצים לאיש
סגורים לא יזהו אחרות הם אחרות 2 סגורים
או 2 אחרות.

$$R(3,4) \leq 9 \quad \text{חלק ב}$$

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$$

(תנאי דבירה שיש בהם עצים K_4 עצים אחרים)
נראה להוכיח יש בהם משולש חתום או K_4 עצים

* יהי x קוצקו בה קא' ונניח שצדקו אחר 4 עצים
חלוקות (תבענו בהן שפרט ד' הקוצקו עצים a, b, c, d)



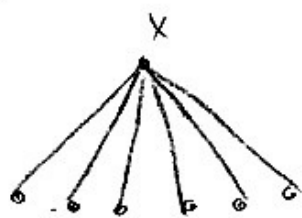
אם יש 2 עצים חתומים

+ אם בהצגות הן a, b, c, d

אזיבם עצים K_4 עצים
+ אם יש צדק חתום, אם יש
 K_4 חתום

(25)

* יהי x קובץ ונניח שיש בו n איברים
 ותבונן בתת קבוצה של 6 איברים
 הקובצים מחוברים ל- x כל אחד.
 אם בתת קבוצה נותן למצוא k איברים
 (סימני) או k איברים, ואם יש x יש k איברים
 ויש סימני.



נניח שיש בתת קבוצה 6 איברים
 ו- k איברים קובץ ו- 6 איברים.
 ייתכן להיות k של 3 בתת קבוצה ו- 5 איברים.
 אם זה באמת אפשרי
 ותבונן בתת קבוצה הכתומה בתחתית עם 9 קובצים
 ו- 3 איברים בתחתית. מכאן נראה שיש
 $9 = 3 + 6$ של 3 איברים ו- 6 איברים.

$$R(3,4) = 9$$

$$R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 9 + 9 = 18$$

נניח שיש בתת קבוצה 7 איברים ו- 4 איברים.
 $R(4,4) = 18$

נניח שיש בתת קבוצה 7 איברים ו- 4 איברים.
 ויהי k איברים או k איברים.

(סעיף א) 17 קובצים בתחתית ו- 8 איברים
 בתחתית. נניח שיש בתת קבוצה 8 איברים
 בתחתית ו- 1 או 2 או 4 או 8 .



אם בתת קבוצה אין k איברים
 ויהי שהם אינם בתחתית קובץ ו- 3 קובצים
 שבתחתיתם $1, 2, 4$ או 8 .

אם זה לא יתכן כי הם שלם כי זה צלע
רחוקה.

בשקולי סמלית אין k_4 (חוס).

סדרת פבונאצי

היא מוגדרת בצורה רקורסיבית

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

הסדרה היא משיקה הרבה בלמע, למשל בהתחברות של אותה ב

הצורה יש פיתרון מפורש (נוסחת בינום הזה)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

ואפשר להזניח אותה באופן דק, צורה של n

יש לבדוק 2 מקרי התחלה f_0, f_1 ולדבריה שני

n ולדבריה $n+1$ ואז להוכיח $n+2$

קבלה הנוסחה: מנתלים פיתרון מצורה $f_n = x^n$

$$x^2 = x + 1 \iff x^n = x^{n+1} - x^{n-2}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ואז הפיתרון הוא צורת ארנ

$$f_n = a x_1^n + b x_2^n$$