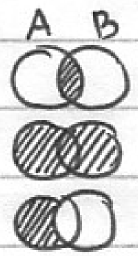
מבוא לתורת הקבוצות

הגדרה קבוצה לא ניתן הגדרה פורמלית מדויקת למונח קבוצה. נסתפק באמירה שקבוצה היא אוסף של איברים.
נסמן $x\in A$ אם x שייך לקבוצה A ו- $x\notin A$ להפך.

הגדרה שוויון בין קבוצות (נאמר ש $A=B$ אמ"מ לכל $x\in A$ גם $x\in B$: $A\subseteq B$
ולכל $x\in B$ גם $x\in A$: $B\subseteq A$

משפט תהיינה A,B,C קבוצות. אזי מתקיימות התכונות הבאות
1. רפלקסיביות $A\subseteq A$
2. טרנזיטיביות $A\subseteq C \Leftarrow B\subseteq C \wedge A\subseteq B$
3. אנטי סימטריות $A=B \Leftarrow B\subseteq A \wedge A\subseteq B$

הגדרה תהיינה A,B קבוצות. נגדיר:



חיתוך $A\cap B=\{x: x\in B \wedge x\in A\}$

איחוד $A\cup B=\{x: x\in B \vee x\in A\}$

הפרש $A\setminus B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}$

משפט יהיו A,B,C קבוצות. אזי מתקיימים החוקים הבאים:
1. חוק החילוף $A\cap B=B\cap A$
$A\cup B=B\cup A$
2. חוק הקיבוץ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3. חוק הפילוג $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

הגדרה משלים תהי U קבוצה אוניברסלית ותהי $A \subseteq U$. המשלים של הקבוצה A הוא הקבוצה $U \setminus A$ שתסומן ע"י A^c.

משפט תהי $A \subseteq U$ קבוצה. אז

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \cap A^c = \emptyset$
3. $A \cup A^c = U$

משפט חוקי דה-מורגן. תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^n$ קבוצות. אז:

1. $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$
2. $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$

הגדרה קבוצת החלקה תהי A קבוצה. קבוצת החלקה של A היא

$$2^A = P(A) \equiv \{x : x \subseteq A\}$$

הגדרה n-יה היא רשימה באורך n $(a_1, \ldots, a_n)$ כאשר סדר האיברים חשוב.

הגדרה מכפלה קרטזית של n קבוצות היא $\bigtimes_{i=1}^n A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) : i \in A_i\}$

הגדרה יחסים תהיינה A, B קבוצות. קבוצה $R \subseteq A \times B$ נקראת יחס בינארי מ-A ל-B. אם $A = B$ R נקראת יחס על A.
אם $(a,b) \in R$ נאמר ש-a מתייחס ל-b ונסמן aRb

הגדרה יהי R יחס על קבוצה A. נאמר ש-R:

רפלקסיבי: אם לכל $a \in A$ aRa

אנטי רפלקסיבי: אם לכל $a \in A$ $\neg(aRa)$

סימטרי: אם לכל $a,b \in A$ $aRb \Rightarrow bRa$

אנטי סימטרי: אם לכל $a,b \in A$ $aRb \land bRa \Rightarrow a = b$

טרנזיטיבי: אם לכל $a,b,c \in A$ $aRb \land bRc \Rightarrow aRc$

משפט יהי R יחס על A. R סימטרי ואנטי סימטרי $\iff R\subseteq I_A$

הגדרה יחס שקילות יהי R יחס על A. אם R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, נאמר ש-R יחס שקילות על A.
מחלקת שקילות מחלקת השקילות של a היא $[a]_R=\{b\in A: aRb\}$
החלוקה המושרית ע"י R היא קבוצת כל מחלקות השקילות של יחס R.

הגדרה חלוקה תהי A קבוצה לא ריקה. משפחה S של קבוצות היא חלוקה של A אם:
1. $S_i\neq\emptyset$ לכל $S_i\in S$
2. הקבוצות ב-S זרות זו לזו $S_i\cap S_j=\emptyset$ לכל $S_i,S_j\in S$; $i\neq j$
3. הקבוצות מכסות את A. $A=\bigcup_{S_i\in S} S_i$

משפט יהי R יחס שקילות בקבוצה לא ריקה A. אזי קבוצת כל מחלקות השקילות של R היא חלוקה של A.

הוכחה מראים את קיום 3 התכונות של הגדרת חלוקה.

הגדרה היחס המושרה תהי A קבוצה לא ריקה ותהי S חלוקה כלשהי של A. היחס המושרה ע"י חלוקה S הוא היחס R שמוגדר ע"י
$xRy \iff$ קיים i כך ש $x\in S_i$ וגם $y\in S_i$.

משפט תהי A קבוצה לא ריקה ותהי S חלוקה של A. אזי היחס R המושרה ע"י S הוא יחס שקילות ב-A.

הגדרה פונקציה תהיינה A,B קבוצות. יחס $f\subseteq A\times B$ נקרא פונקציה מ-A ל-B אם לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד כך ש afb. מסמנים $f:A\to B$
A נקראת התחום של f ו-B נקראת הטווח של f.

הגדרה חח"ע תהי $f:A\to B$. f נקראת חח"ע אם לכל $a,b\in A$
אשר $a\neq b$ מתקיים $f(a)\neq f(b)$
על נאמר ש f היא על B אם לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=b$

הגדרה הרכבה תהיינה A,B,C קבוצות ותהיינה $g:B\to C$, $f:A\to B$ פונקציות.
ההרכבה של g ו-f היא הפונקציה $h:A\to C$ שמוגדרת $h(a)=g(f(a))$
לכל $a\in A$. מסמנים $h=g\circ f$.

הגדרה פונקציה הפיכה תהי $f:A\to B$. f נקראת הפיכה אם קיימת
$g:B\to A$ כך ש $g\circ f=I_A$ ו $f\circ g=I_B$. הפונקציה g
תיקרא הפונקציה ההופכית של f.

משפט תהי $f:A\to B$ הפיכה. אז קיימת ל-f פונקציה הופכית יחידה.

משפט תהי $f:A\to B$. f הפיכה אמ"מ f חח"ע ועל.

הגדרה קבוצה A תיקרא סופית אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שמספר איבריה
של A הוא n. אחרת A תיקרא אינסופית.

הגדרה עוצמה של קבוצה סופית A היא מספר האיברים של A ונסמן $|A|$

הגדרה שקילות של קבוצות תהיינה A,B קבוצות. נאמר ש-A ו-B שקולות
אם קיימת פונק' הפיכה $f:A\to B$. נסמן $A\sim B$ או $|A|=|B|$ ונאמר
ש A ו-B שוות עוצמה.

משפט תהי X קבוצה. היחס $\sim$ המוגדר על קבוצות ב $P(X)$ הוא יחס שקילות.
הערה זה שאם $A\sim B$ אומרים A שקולה ל-B לא אומר שהיחס יחס שקילות!

משפט תהינה A,B קבוצות סופיות. אזי $|A|=|B|$ אמ"מ $A\sim B$

הוכחה ($\Leftarrow$) באינדוקציה על עוצמת הקבוצות

($\Rightarrow$) נניח $|A|=m$ ו- $|B|=n$. מראים ש $m\le n$ וגם $n\le m$.

הגדרה קבוצה בת מניה A תיקרא בת מניה אם A סופית או $A\sim\mathbb{N}$

הגדרה תהינה A,B קבוצות אינסופיות. נאמר ש-

$|A|\le|B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$

$|B|\le|A|$ אם קיימת פונק' על $f:A\to B$

משפט $|\mathbb{N}^+|<|(0,1)|$

הוכחה בעזרת האלכסון של קנטור

משפט $|\mathbb{R}|=|(0,1)|$

הוכחה ע"י $f(x)=\frac{1-2x}{x(1-x)}$

הגדרה סימונים $|\mathbb{N}|=\aleph_0$ ו- $|\mathbb{R}|=\aleph$. ברור ש $\aleph_0<\aleph$

משפט (קנטור) תהי A קבוצה. אזי $|A|<|P(A)|$

הוכחה ראשית מראים ש $|A|\le|P(A)|$ ואז מוכיחים בשלילה ש $|A|\ne|P(A)|$

משפט (קנטור-ברנשטיין) אם A,B קבוצות אזי $|A|\le|B| \wedge |B|\le|A| \Rightarrow |A|=|B|$

הערה המשפט הזה לא טריוויאלי עבור קבוצות אינסופיות

הגדרה יחס סדר חלקי: יחס בינארי R על A נקרא יחס סדר חלקי אם R רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי. הזוג הסדור (A,R) נקרא קבוצה סדורה חלקית (קס"ח)

הגדרה

יחס סדר מלא _ יחס סדר חלקי R נקרא יחס סדר מלא אם לכל $a,b\in A$ מתקיים aRb או bRa. במקרה זה הזוג הסדור (A,R) נקרא קבוצה סדורה ליניארית (קט"ל)

אינדוקציה

הגדרה האקסיומה של האינדוקציה המתמטית: תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים. אז יש ב-A איבר מינימלי.

משפט עקרון האינדוקציה המתמטית: תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \in \mathbb{N}$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. בסיס האינדוקציה: הטענה $P(0)$ נכונה.
2. שלב האינדוקציה: לכל $n>0$ נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת את נכונות $P(n)$

אז $P(n)$ תקפה לכל מספר טבעי n.

משפט תהי A קבוצה סופית כך ש $|A|=n$. אזי: $|P(A)|=2^n$.

הוכחה באינדוקציה על n - גודל הקבוצה A.

משפט תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \in \mathbb{N}$. אם קיים $a \in \mathbb{N}$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

1. בסיס האינדוקציה: הטענה $P(a)$ נכונה
2. לכל $n>a$ נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת את נכונות הטענה $P(n)$

אז הטענה $P(n)$ תקפה לכל מספר טבעי $n \geq a$.

הוכחה בשלילה ואז שימוש באקסיומת האינדוקציה המתמטית.

משפט (אי שוויון ברנולי) יהי $0<x \in \mathbb{R}$. אזי לכל $2 \leq n$ $(1+x)^n > 1+nx$

הוכחה באינדוקציה על n

משפט תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n\in\mathbb{N}$. אם קיים $a\in\mathbb{N}$
כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:
1. בסיס האינדוקציה: הטענה $P(a)$ נכונה
2. שלב האינדוקציה: לכל $n>a$, נכונות הטענה $P(k)$ לכל $a\le k\le n-1$
גוררת את נכונות הטענה $P(n)$.
אזי הטענה $P(n)$ נכונה לכל $n\geq a$.

הוכחה הנחה בשלילה שיש $n\geq a$ כך ש $P(n)$ לא נכונה ושימוש באקסיומת האינדוקציה המתמטית.

הגדרה ראשוני מספר טבעי $2\le n\in\mathbb{N}$ נקרא ראשוני אם הוא מתחלק רק ב-1 ובעצמו.

משפט כל מספר טבעי $2\le n$ ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים
הוכחה באינדוקציה שלמה על n

משפט יש אינסוף מספרים ראשוניים.

קומבינטוריקה

משפט אם A,B קבוצות סופיות וזרות אזי $|A\cup B|=|A|+|B|$

משפט A,B קבוצות סופיות ו- $A\subseteq B$ אזי $|B\setminus A|=|B|-|A|$

משפט אם A,B קבוצות סופיות אזי $|A\times B|=|A|\cdot|B|$

משפט תהיינה A,B קבוצות סופיות ותהי $R\subseteq A\times B$.
1. אם קיים $s\in\mathbb{N}$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $|\{b: b\in B, aRb\}|=s$
אזי $|R|=|A|\cdot s$
2. אם קיים $t\in\mathbb{N}$ כך שלכל $b\in B$ מתקיים $|\{a: a\in A, aRb\}|=t$
אזי $|R|=t\cdot|B|$

משפט תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ קבוצות סופיות וזרות בזוגות. אזי $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$

משפט תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ קבוצות סופיות. אזי $\left|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|$

משפט (בחירה עם חזרות כשהסדר חשוב) תהי A קבוצה ו- $|A|=n$. יהי $k\in\mathbb{N}$. מספר הסדרות באורך k שניתן לבנות מאיברי A הוא n^k.

הגדרה תמורה (פרמוטציה) תהי A קבוצה ו- $|A|=n$. סדרה באורך n ללא חזרות של איברי A נקראת תמורה של A.

הגדרה עצרת המכפלה $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ מסומנת ע"י $n!$ ונקראת n עצרת. נגדיר $0!=1$

משפט מספר התמורות של הקבוצה $[n]$ הוא $n!$

משפט מספר הפונקציות החח"ע מהקבוצה $[n]$ לעצמה הוא $n!$

משפט (בחירה ללא חזרות כשהסדר חשוב) תהי A קבוצה ו- $|A|=n$ ויהי $0\le k\le n$. מספר הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מאיברי A הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$

משפט (בחירה ללא חזרות כשהסדר אינו חשוב) תהי A קבוצה ו- $|A|=n$ ויהי $0\le k\le n$. מספר התת קבוצות של A בגודל k הוא $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

הגדרה מקדם בינומי המספר $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ כאשר $0\le k\le n$ נקרא מקדם בינומי ומסומן ע"י $\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$

משפט (בחירה עם חזרות כשהסדר לא חשוב) תהי A קבוצה ו- $|A|=n$. מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך איברי A כשמותרות חזרות בבחירה והסדר אינו חשוב הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$

סיכום

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$

משפט (נוסחת הבינום של ניוטון) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. אזי
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

משפט יהי $n\in\mathbb{N}$. אזי $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

הוכחה הצבה בבינום של ניוטון $a=b=1$.

משפט יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

משפט יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ כאשר $0\le k\le n$. אזי $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

משפט (זהות פסקל) יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ כאשר $0\le k\le n$. אזי $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$

הגדרה סדרה של מספרים שתחילה עולה ואחר יורדת נקראת סדרה אונימודלית.

משפט יהי $n\in\mathbb{N}$. אם n זוגי אז $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\dots<\binom{n}{n/2}>\binom{n}{n/2+1}>\dots>\binom{n}{n}$

אם n אי-זוגי אז $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\dots<\binom{n}{(n-1)/2}=\binom{n}{(n+1)/2}>\dots>\binom{n}{n}$

משפט יהיו $n,k,m\in\mathbb{N}$ כאשר $0\le m\le k\le n$. אזי $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$

משפט יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ כאשר $0\le k\le n$. אזי $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

הוכחה הצבה בבינום של ניוטון $a=1$ $b=-1$

משפט מספר הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו-n אחדים הוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

הגדרה מספר קטלן הוא מספר מהצורה $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

משפט יהי $S(n,k)$ מספר החלוקות של $[n]$ ל-k חלקים (תאים לא ריקים) כאשר $1\le k\le n$. הפונקציה $S(n,k)$ מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה הבאה:

$$S(n,1)=1 \quad S(n,n)=1$$

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k) \quad \text{לכל} \quad 2\le k\le n-1$$

הגדרה נקודת שבת. תהי $\pi=(\pi_1,\dots,\pi_n)$ תמורה של איברי $[n]$. אינדקס $1\le i\le n$ שעבורו $\pi_i=i$ נקרא נקודת שבת של התמורה π. התמורה π תיקרא תמורה ללא נקודת שבת, אם לא קיים $1\le i\le n$ שעבורו $\pi_i=i$.

משפט יהי $D(n)$ מספר התמורות ללא נקודת שבת של הקבוצה $[n]$. הפונקציה $D(n)$ נתונה ע"י נוסחת הנסיגה:

$$D(1)=0 \qquad D(2)=1$$

$$D(n)=(n-1)[D(n-1)+D(n-2)]$$ לכל $2<n$.

משפט יהי $C(n)$ מספר המחרוזות המאוזנות שכוללות n אחדים ו-n אפסים. הפונקציה $C(n)$ מקיימת את הנוסחה הרקורסיבית:

$$C(0)=C(1)=1$$

$$C(n)=\sum_{k=1}^{n} C(k-1)\,C(n-k)$$ לכל $1<n$.

משפט (עקרון שובך היונים) אם מכניסים $n+1$ יונים ל-n שובכים, אז קיים שובך שבו יש לפחות 2 יונים.

משפט בכל תת קבוצה של $[9]$ שבה 6 מספרים, יש שני מספרים שסכומם 9.

משפט בכל תת קבוצה של $[2n]$ שבה $n+1$ איברים יש שני מספרים כך שאחד מחלק את השני ללא שארית.

הגדרה סדרה מונוטונית (אמר שסדרה $(a_1,\dots,a_n)$ של מספרים ממשיים היא סדרה מונוטונית עולה אם $a_1<\dots<a_n$. (אמר שזו סדרה מונוטונית יורדת אם $a_1>\dots>a_n$.

הגדרה תת-סדרה תהי $A=(a_1,\dots,a_n)$ סדרה של מספרים ממשיים ויהיו $1\le i_1<\dots<i_k\le n$ מספרים טבעיים. הסדרה $(a_{i_1},\dots,a_{i_k})$ היא תת סדרה של A.

משפט (Erdös-Szekeres) בכל סדרה של n^2+1 מספרים ממשיים שונים זה מזה, יש תת סדרה של לפחות $(n+1)$ מספרים שהיא מונוטונית.

משפט בכל קבוצה של אנשים יש לפחות שני אנשים שמכירים בדיוק אותו מספר אנשים בקבוצה (כאשר היכרות היא הדדית)

משפט (הכללות לעקרון שובך היונים)

1. אם שמים $kn+1$ יונים ב-n שובכים אז קיים שובך שבו לפחות $k+1$ יונים.
2. אם שמים m יונים ב-n שובכים אז קיים שובך שבו לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

משפט (עקרון ההכלה וההדחה) תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ קבוצות סופיות. אז:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_n|$$

הוכחה באינדוקציה על n