מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל מספר 1

1) תהי A קבוצה סופית. הוכיחו בעזרת אינדוקציה שמספר תתי הקבוצות של A הוא $2^{|A|}$, כאשר |A| הוא גודל הקבוצה. רמז: נניח ש $a \in A$. סיפרו את כל תתי הקבוצות של A שמכילות את a ואת כל אלו שאינן מכילות אותו.

2) הוכיחו בעזרת אינדוקציה ש $\sum_{i=1}^{n} iq^{i-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$.

3) הוכיחו בעזרת אינדוקציה:

א. $\sum_{i=0}^{n} u^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$

ב. $4^{2n} - 1$ מתחלק ללא שארית ב-15 לכל n טבעי.

ג. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

4) משפט האינדוקציה המלאה אומר:
תהי P טענה לגבי מספרים שלמים. אם P(0) (כלומר אם P נכונה לגבי n), ואם P(m) לכל מספר טבעי m
שקטן מ-n גורר שגם P(n), אז מתקיים P(k) לכל מספר טבעי k.

א. הוכיחו שאם מספר ראשוני p מחלק את המכפלה ab (a,b שלמים),אז p מחלק את a או את b. רמז: השתמשו באלגוריתם של אוקלידס ובעובדה ש 1b=b.

ב. הוכיחו בעזרת אינדוקציה מלאה שכל מספר שלם ניתן לפירוק באופן יחיד למספר סופי של גורמים ראשוניים. צריך להוכיח הן את קיום הפירוק והן את יחידותו. לצורך הוכחת היחידות השתמשו בסעיף הקודם.

מתמטיקה דיסקרטית – פתרון חלקי לתרגיל מספר 1

2) הוכיחו בעזרת אינדוקציה ש $\sum_{i=1}^{n} iq^{i-1} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$.

עבור n=1 אגף שמאל אכן שווה לאגף ימין.
נניח שהשוויון מתקיים ל-n ונוכיח אותו ל-n+1:

$$\sum_{i=1}^{n+1} iq^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} iq^{i-1} + (n+1)q^n = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} + (n+1)q^n =$$

$$\frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1} + (n+1)q^n(1-q)^2}{(1-q)^2} = \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1} + (n+1)q^n - 2q(n+1)q^n + q^2(n+1)q^n}{(1-q)^2} =$$

$$\frac{1-(n+2)q^{n+1} + (n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

4 א. יהי p ראשוני ונניח ש-p מחלק את המכפלה ab של שני מספרים שלמים a,b.
מכיוון ש-p ראשוני אז השלמים היחידים שמחלקים אותו הם 1,p. לכן אם p אינו מחלק את a אז gcd (a,p)=1. בתרגול הראינו שקיימים שני מספרים שלמים u,v כך ש au+pv=gcd (a,p)=1.
נכפיל את שני האגפים ב-b ונקבל: bau+bpv=b. הנחנו ש-p מחלק את ab ולכן p מחלק את bau.
כמובן ש-p מחלק את bpv. לכן p מחלק את אגף שמאל ולכן הוא מחלק את אגף ימין.

כעת נוכיח באינדוקציה על n שאם ראשוני p מחלק מכפלה של n מספרים שלמים אז הוא מחלק את אחד המספרים הללו. הוכחנו את הטענה ל n=2 (מה קורה ב n=1?). נניח שהיא נכונה ל-n ונוכיח אותה
ל n+1:

נסמן $b = \prod_{i=1}^{n+1} a_i , b' = \prod_{i=1}^{n} a_i$ ונניח ש-p מחלק את b. $b = b' a_{n+1}$ ולכן אם p לא מחלק את a_{n+1} אז ממה שהראנו קודם p מחלק את 'b. 'b הוא מכפלה של n מספרים שלמים ולכן מהנחת האינדוקציה p מחלק אחד מהם. מ.ש.ל.

ב. נוכיח באינדוקציה שלמה שכל מספר שלם מתפרק למספר סופי של גורמים ראשוניים ושהפירוק הזה הינו יחיד.
עבור n=2 הטענה ברורה.
נניח שהטענה נכונה לכל מספר טבעי שקטן מ-n ונוכיח אותה עבור n עצמו.
אם n ראשוני אז ודאי שהטענה נכונה. n הוא פירוק סופי של n לגורמים ראשוניים והפירוק הזה יחיד כי אין מספרים שלמים אחרים שגדולים מ-1 ומחלקים את n.
אם n אינו ראשוני אז קיימים a,b שלמים גדולים מ-1 כך ש ab=n. מכיוון ש-a<1 אז b<n וכנ"ל a<n.
מהנחת האינדוקציה קיים מספר סופי של מספרים ראשוניים $q_1, ... q_k , p_1, ... p_l$ כך ש
$a = \prod_{i=1}^{k} q_i , b = \prod_{i=1}^{l} p_i$ ולכן $n = \prod_{i=1}^{k} q_i \prod_{i=1}^{l} p_i$ וזהו פירוק סופי של n לגורמים ראשוניים.

להוכחת יחידות הפירוק נניח בשלילה שקיימים שני פירוקים שונים של n לגורמים ראשוניים (נשכח את הסימונים הקודמים בעזרת p,q ונכתוב): $\prod_{i=1}^{k} q_i^{m_i} = n = \prod_{i=1}^{l} p_i^{n_i}$ כאשר כל המעריכים שלמים וחיוביים, כל הבסיסים הם מספרים ראשוניים ואם $i \neq j$ אז $p_i \neq p_j, q_i \neq q_j$ (כי אם לא אז $p_i^{n_i+n_j} = p_i^{n_i} p_j^{n_j}$). מכיוון ש $n_1 > 0$ אז p_1 מחלק את n. מסעיף א קייםiI כך ש p_1 מחלק את q_i ומכיוון ש- q_i ראשוני אז $q_i = p_1$. אם $n_1 > m_i$ אז p_1 מחלק את $\frac{n}{q_i^{m_i}}$ אבל אינו מחלק אף אחד מבין $q_{2,}...q_k$ בסתירה לסעיף א. באותו אופן לא ייתכן ש $n_1 < m_i$. כך מראים שלכל i קיים j כך ש $p_i = q_j, n_i = m_j$ - כלומר הפירוק יחיד.

מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל 2

1) א. בכמה דרכים אפשר להושיב 2n אנשים על ספסל?
ב. בכמה דרכים אפשר להושיב n זוגות של אנשים על ספסל כך שכל שני בני זוג יושבים זה על זה.
ג. בכמה דרכים אפשר לחלק 2n אנשים לזוגות ולהושיב אותם על ספסל כך שכל שני בני זוג יושבים זה ליד זה?
ד. הסבר את הקשר בין התוצאות בסעיפים א,ג.

2) להוכיח את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$

3) א. להוכיח את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{i-k}=\binom{n+m}{i}$

i) בדרך אלגברית מתוך $(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$

ii) בדרך קומבינטורית

ב. להסיק ש $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

4. קבוצת כדורגל מורכבת משוער ועשרה שחקנים. קבוצת כדורסל מורכבת מחמישה שחקנים.
א. בכמה אופנים אפשר להרכיב מבין 27 אנשים, שצי קבוצות כדורגל וקבוצת כדורסל אחת?
ב. בכמה אופנים אפשר לעשות זאת אם יש 30 אנשים לבחור מתוכם?

5. כמה מספרים בני 10 ספרות אפשר ליצור מספרות המספר 1223334444?

מתמטיקה דיסקרטית – פתרון חלקי לתרגיל 2

2) להוכיח את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$

$$2^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{2n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}=$$

$$\binom{2n}{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}=\binom{2n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k-1}\binom{2n}{k}=\binom{2n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$$

3) א. להוכיח את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{i-k}=\binom{n+m}{i}$

בדרך אלגברית: על פי נוסחת

$$(1+x)^{n+m}=\sum_{i=0}^{n+m}\binom{n+m}{i}x^{i}$$

הבינום

$$(1+x)^{n}(1+x)^{m}=(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k})(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{k})$$

מכיוון ששני הביטויים זהים אז לכל i המקדמים של x^i בשניהם צריכים להיות שווים.
בביטוי השני מקבלים x^i אם לכל k<I מכפילים את x^k ב x^{i-k}. שני גורמים אלו
מופיעים עם מקדמים $\binom{n}{k},\binom{m}{i-k}$ בהתאמה. סוכמים על פני k ומקבלים את הזהות.

בדרך קומבינטורית: באגף ימין מופיע מספר הדרכים לבחורi אנשים מתוך n+m
אנשים. נניח שמספרנו את האנשים הללו. אפשר לשאול את השאלה בכמה מההבחירות
הללו נבחרו בדיוק k אנשים מבין n האנשים הראשונים (וזה אומר שבחרנו בדיוק i-n
מתוך m הנותרים). התשובה היא $\binom{n}{k}\binom{m}{i-k}$. כעת נסכום על כל ה-k ונקבל את
הזהות.

ב. להסיק ש $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

שימו לב שאגף שמאל שווה ל $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. אם בסעיף א. נבחר i=m=n נקבל את הזהות הזו
כמראה פרטי.

4. קבוצת כדורגל מורכבת משוער ועשרה שחקנים. קבוצת כדורסל מורכבת מחמישה שחקנים.
א. בכמה אופנים אפשר להרכיב מבין 27 אנשים, שתי קבוצות כדורגל וקבוצת כדורסל אחת?
ב. בכמה אופנים אפשר לעשות זאת אם יש 30 אנשים לבחור מתוכם?

פתרון:

א. נבחר שוער ועשרה שחקנים לקבוצה אחת, שוער ועשרה שחקנים לקבוצה השנייה וחמישה שחקנים לקבוצת הכדורסל. מכיוון שאיננו מבדילים בין שתי קבוצות הכדורגל אז אנו סופרים כל הרכב פעמיים – פעם אחת כשבחרנו 11 איש לקבוצה "הראשונה" ופעם שנייה כשבחרנו את אותם אנשים לקבוצה "השנייה" (אבל אין קבוצה ראשונה ושנייה ולכן אין הבדל בין שתי הבחירות הללו). לכן צריך לחלק ב 2!. והפתרון הוא:

$$\frac{\binom{27}{1}\binom{26}{10}\binom{16}{1}\binom{15}{10}\binom{5}{5}}{2!}=\frac{1}{2}\frac{27!}{26!}\frac{26!}{10!16!}\frac{16!}{15!}\frac{15!}{10!5!}\frac{5!}{5!}=\frac{27!}{10!10!5!2}.$$

ב. כאן הפתרון דומה אבל יש לנו יותר אנשים לבחור מתוכם:

$$\frac{\binom{30}{1}\binom{29}{10}\binom{19}{1}\binom{18}{10}\binom{8}{5}}{2!}=\frac{1}{2}\frac{30!}{29!}\frac{29!}{10!19!}\frac{19!}{18!}\frac{18!}{10!8!}\frac{8!}{5!3!}=\frac{30!}{10!10!5!3!2}.$$

5. כמה מספרים בני 10 ספרות אפשר לבנות מספרות המספר 1223334444?

עלינו לבחור 4 מקומות מתוך 10 לספרה 4 , 3 מקומות מתוך 6 לספרה 3 וכך הלאה:

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}=\frac{10!}{4!3!2!}$$

מתמטיקה דיסקרטית תרגיל 3

1. הוכיחו ש $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ מספר שלם (רמז – שאלה 1 בתרגיל 2).

2. א. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$?

ב. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למערכת המשוואות $\begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} x_i = N \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = M \end{matrix}$ (m<n ו M<N)?

ג. כמה פתרונות שלמים חיוביים יש למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$?

ד. כמה פתרונות שלמים גדולים מ 2- יש למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$?

3. א. בכמה דרכים אפשר לסדר בשורה i כדורים אדומים ו j כדורים לבנים?

ב. בכמה דרכים אפשר לעשות זאת כך שלא יהיו שני כדורים לבנים זה ליד זה? (רמז – הפכו זאת לבעיית חלוקה).

ג. תבנית מורכבת ממספר סופי של שורות לא ריקות שאולי אינן באותו אורך. בכמה תבניות אפשר לסדר i כדורים אדומים ו j לבנים?

למשל $\begin{matrix} oxooo \\ xo \\ oxxxoo \end{matrix}$ היא דוגמא לתבנית כזו (I=5,j=7) וזו תבנית שונה מ $\begin{matrix} oxooo \\ ox \\ oxxxoo \end{matrix}$ כי בשורה השנייה סדר הכדורים שונה. (רמז העזרו בשאלה הקודמת).

4. א. בהצבעה על הצעה מסויימת בה השתתפו 2n+1 אנשים התקבלה החלטה ברוב של קול אחד. בכמה דרכים אפשר למנות את הקולות כך שלכל אורך הספירה יהיה רוב לתומכים בהחלטה?

ב. אם a אנשים הצביעו בעד ההחלטה ו-b אנשים התנגדו ו b<a, בכמה דרכים אפשר לספור את הקולות כך שלמתנגדים לא יהיה רוב בשום שלב?

מתמטיקה דיסקרטית תרגיל 3

1. הוכיחו ש $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ מספר שלם (רמז – שאלה 1 בתרגיל 2).

בתרגיל הקודם הראינו שמספר הדרכים ליצור n זוגות מ-2n אנשים הוא $\frac{(2n)!}{2^n n!}$. לכן זהו מספר שלם.

2. ב. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למערכת המשוואות $\begin{matrix}\sum_{i=1}^{n} x_i = N \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = M\end{matrix}$ (M<N ו m<n)?

ג. כמה פתרונות שלמים חיוביים יש למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$?

ד. כמה פתרונות שלמים גדולים מ 2- יש למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$?

פתרון:

ב. בדקו וראו שאוסף הפתרונות של מערכת המשוואות שווה לאוסף הפתרונות של $\begin{matrix}\sum_{i=m+1}^{n} x_i = N-M \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = M\end{matrix}$. נסמן ב-A את אוסף הפתרונות של המשוואה הראשונה, ב-B את אוסף הפתרונות של המשוואה השנייה וב-C את אוסף הפתרונות של שתי המשוואות. אם $(a_1,\dots a_m)\in A,(b_1,\dots b_{n-m})\in B$ אז $(a_1,\dots a_m,b_1,\dots b_{n-m})\in C$ כלומר $A\times B\subseteq C$. מצד שני אם $(c_1,\dots c_n)\in C$ אז $(c_1,\dots c_m)\in A,(c_{m+1},\dots c_n)\in B$ ולכן $C\subseteq A\times B$. לכן שתי הקבוצות שוות ומתקיים |C|=|A||B|. לפי סעיף א' $|A|=\binom{N-M+n-m-1}{n-m},|B|=\binom{M+m-1}{m}$ ולכן $|C|=\binom{M+m-1}{m}\binom{N-M+n-m-1}{n-m}$.

ג. מכיוון שאנו רוצים שכל פתרון יהיה חיובי "נכניס" 1 לכל משתנה. כעת נותר לנו לחלק N-n "1"ים בין n משתנים. מספר הגרכים לעשות זאת הוא (לפי סעיף א) $\binom{N-n+n-1}{N-n}=\binom{N-1}{N-n}$

ד. לפי סעיף א', מספר הפתרונות בשלמים לא שליליים של $\sum_{i=1}^{n} y_i = N+n$ הוא $\binom{N+n+n-1}{n}$.

בהינתן פתרון $\sum_{i=1}^{n} y_i = N+n$ נגדיר $x_i = y_i - 1$. אז x_i שלם וגדול מ 2- ומתקיים $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}(y_i-1) = N+n-n = N$. באותו אופן בהינתן פתרון אחר $\sum_{i=1}^{n} y'_i = N+n$, נקבל $x'_i = y'_i - 1$ פתרון של המערכת שלנו ששונה מ x_i. מצאנו אם כך העתקה חח"ע ועל בין קבוצת

4. א. בהצבעה על הצעה מסויימת בה השתתפו $2n+1$ אנשים התקבלה ההצעה ברוב של קול אחד.
בכמה דרכים אפשר למנות את הקולות כך שלכל אורך הספירה יהיה רוב לתומכי ההצעה?
פתרון:

א. נסמן את קבוצת ההילוכים המקריים שמקיימים את התנאי ב-A. נסתכל על הילוך מקרי מ-A.
הקול הראשון שנספר חייב להיות בעד ההצעה. אם נשמיט את הקול הזה ניוותר עם n מצדדים ו-n מתנגדים. מכיוון שלכל אורך הספירה (כשכוללים את הקול הראשון) יש רוב לתומכים אז בלי הקול הראשון מתקיים שלכל אורך הספירה אין רוב למתנגדים. כלומר, בהשמטת הקול הראשון אנו מקבלים הילוך מקרי שמתאים למקרה שחישבתם בכיתה. נקרא לאוסף ההילוכים המקריים של n צעדים למעלה ו-n צעדים למטה כשבשום שלב אין יותר ירידות מעליות בשם B.
אז מצאנו העתקה בין A ל-B.
אם יש לנו שני הילוכים מקריים שונים מ-A אז בצעד הראשון שניהם זהים ולכן אם נשמיט את הצעד הראשון שני ההילוכים הללו ישארו שונים. כלומר ההעתקה שלנו היא חח"ע.
אם יש לנו הילוך מקרי מ-B אז נוסיף לו צעד ראשון "למעלה (שלומר בעד ההצבעה) ואז נצעד את ההילוך הזה. נקבל הילוך שיש בו $n+1$ קולות בעד, n קולות נגד ומכיוון שבמקור לא היה רוב למתנגדים אז עכשיו שהוספנו צעד ראשון "בעד" יהיה כל הזמן רוב לתומכים. כלומר קיבלנו כך איבר מ-A. האיבר הזה, כשנשמיט את הצעד הראשון שלו, יתן לנו את האיבר של B איתו התחלנו. כלומר ההעתקה שלנו היא גם על.
ולכן AוB מאותו גודל וכפי שחישבתם בכיתה

מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל 4

1) נתונים m מספרים שלמים $a_1, a_2, ...a_m$. הוכיחו שקיימים $1 \le k \le l \le m$ כך ש $\sum_{i=k}^{l} a_i$ מתחלק ב-m.

2) נניח שהיכרות היא יחס סימטרי. כלומר אם א מכיר את ב אז גם ב מכיר את א. הוכיחו שבקרב n אנשים ישנם לפחות שניים שמכירים אותו מספר אנשים (מתוך אותם n אנשים).

3) א. הוכיחו שמתוך 52 מספרים שלמים לא שליליים שקטנים מ-100תמיד יהיו שניים שסכומם 100.
ב. הוכיחו שמתוך 52 מספרים שלמים תמיד יש שניים שסכומם או ההפרש בינהם מתחלק ב-100.

4) נתונה קבוצה $X = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ של מספרים חיוביים ומספר m. נסמן k=n/2 (כלומר המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול ממחצית n). הוכיחו שהאוסף $\{J \subseteq \{1,...n\} \mid \sum_{i \in J} x_i = m\}$ הוא מגודל לכל היותר $\binom{n}{k}$

5) א.בתחרות שח בין נבחרות רוסיה וישראל סיים כל שחקן ישראלי 3 משחקים בתיקו וכל שחקן רוסי סיים 4 משחקים בתיקו.האם ייתכן שישנם 15 שחקנים ישראלים בנבחרת? מה היחס בין גודל הנבחרות?
ב. תהי S קבוצה של תתי קבוצות של A={1,2,…8}. כל איבר של S יש 4 מספרים וכל מספר ששיך ל-A מופיע ב-3 קבוצות. כמה איברים יש ל-S ?

מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל 5

1. א. בכמה דרכים אפשר לסדר סביב שולחן עגול 5 כסאות למבוגרים ו-3 כסאות לילדים?
ב. בכמה דרכים אפשר לסדר בשורה 5 כסאות למבוגרים ו-3 כסאות לילדים אם אסור ששני כסאות ילדים יעמדו זה ליד זה?
2. איזה משני הביטויים גדול יותר $\binom{800}{400},\binom{1000}{300}$?
3. גרף פטרסון הוא גרף G=(V,E) שקודקודיו הן כל תתי הקבוצות בגודל 2 של $\{1,2,3,4,5\}$ ובין שני קודקודים יש צלע אם ורק אם חיתוכם ריק.
   א. כתבו בצורה פורמלית את קבוצת הקודקודים של G ואת קבוצת הצלעות.
   ב. חשבו את מספר הקודקודים ומספר הצלעות של גרף פטרסון.
   ג. ציירו את גרף פטרסון.
4. א. יהי $G_{m,n}$ גרף שקודקודיו הם $V=\{1,2,...n\}$ ובין שני קודקודים יש צלע אם ורק אם ההפרש בינהם m. כמה רכיבי קשירות יש לגרף? מה אורכו של המסלול המקסימלי בגרף?
ב. יהי G_n גרף שקודקודיו הם $V=\{1,2,...n\}$ ובין שני קודקודים שונים a,b יש צלע אם ורק אם בפירוק לגורמים ראשוניים מופיע 2 באותו ריבוי ב-a כמו ב-b. כמה רכיבי קשירות יש לגרף? מה גודלם של רכיבי הקשירות?
5. יהי G גרף.
א. הראה שאם הדרגה של כל קדקוד היא לפחות k אז קיים בגרף מסלול פשוט באורך k.
ב. הראה שאם הדרגה של כל קדקוד היא לפחות 2 אז קיים בגרף מעגל.

מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל 5

1. א. כל סידור בספסל נותן סידור במעגל על ידי "הדבקת" קצות הספסל. כל סידור במעגל מתקבל באופן הזה מ-8 סידורים בספסל. כלומר יש העתקה חח"ע ועל משמיניות של סידורים בספסל לסידורים במעגל באופן ששני סידורי מעגל שונים מתאימים לשתי שמיניות שהן זרות זו לזו (ולא סתם שונות זו מזו). לכן מספר הסידורים במעגל הוא שמינית ממספר הסידורים בספסל כלומר $\binom{8}{5}/8$.

ב. אנו צריכים שני כסאות מבוגרים שיפרידו בין כסאות הילדים. זה משאיר לנו 3 כסאות מבוגרים שיכולים להיות בקצה השמאלי, בין שני כסאות הילדים הראשונים, בין שני כסאות הילדים ה"שני והשלישי" או בקצה הימני. כלומר אנו צריכים לדעת כמה פתרונות יש למשואה x+y+z=3. זאת אנו יודעים ...

3. א. בין שני קודקודים a,b בגרף יש מסלול אם ורק אם השארית שלהם בחלוקה ב-m שווה (כלומר a(mod m)=b(mod m) – אפשר להוכיח זאת באינדוקציה על אורך המסלול. לכן מספר רכיבי הקשירות בגרף הוא min (n,m). אורך המסלול הפשוט המקסימלי הוא הערך השלם של n/m.

4. א נבחר קודקוד כלשהו ונסמן אותו x_0. בצעד ה-n נרצה לבחור מבין הקודקודים שטרם בחרנו, קודקוד שהוא שכן של x_{n-1}. מכיוון שלכל קודקוד לפחות k קודקודים אז כל עוד n<k יש קודקוד כזה. כך נבנה מסלול פשוט באורך k.

ב. בצעד הראשון נבחר קודקוד כלשהו ונסמן אותו x_0, נבחר את אחד משכניו ונסמן אותו x_1. בצעד ה-n נבחר שכן של x_{n-1} ששונה מ-x_{n-2} - אפשר לעשות זאת כי לכל קודקוד לפחות 2 שכנים. אם הגרף הוא בעל מספר סופי של קודקודים אז לכל היותר לאחר |G|+1 צעדים נבחר קודקוד שכבר היינו בו. בין שני המופעים של הקודקוד הזה יש מעגל.

מתמטיקה דיסקרטית תרגיל 6

1) ישנם n מתגים המפעילים n נורות. הוכיחו שניתן לעבור על כל 2^n המצבים של הנורות, ללא חזרות, ולשוב למצב המקורי ע"י הרמה או הורדה של מתג אחד בלבד בכל פעם. נסחו והוכיחו את הבעיה, כבעיה בתורת הגרפים.

2) שני גרפים $G_1=(V_1,E_1), G_2=(V_2,E_2)$ הם איזומורפיים אם קיימת העתקה $f:V_1\to V_2$ שהיא חח"ע ועל ובנוסף מתקיים לכל שני קודקודים $v_1,v_2\in V_1$ ש-$(v_1,v_2)\in E_1$ אמ"מ $(f(v_1),f(v_2))\in E_2$.

א. הציעו תנאי הכרחי לכך ששני גרפים בעלי אותו מספר קודקודים ואותו מספר צלעות יהיו איזומורפיים (בדקו את דרגות הקודקודים).

ב. הראו שתנאי זה אינו מספיק

ג. הראו שיש בדיוק 6 עצים לא איזומורפיים בעלי 6 קודקודים.

3. א. הוכיחו שאם בעץ יש קודקוד מדרגה n אז יש בעץ לפחות n עלים (כאשר אנו מחשיבים את השורש בינהם).

ב. יהי T עץ שמבין קודקודיו בדיוק 4 הם מדרגה 1 ובדיוק 1 הוא מדרגה 4. אילו דרגות יכולות להיות לשאר הקודקודים?

4) א. יהי G גרף קשיר ונניח ש T,S הם שני עצים פורשים שלו (שונים זה מזה). נניח ש-t צלע שנמצאת ב T ולא ב-S. הוכיחו שקיימת צלע s ב-S כך שאפשר למחוק מ T את t להוסיף את s ולקבל עץ. כלומר $T\setminus\{t\}\cup\{s\}$ הוא עץ.

ב. יהי G גרף קשיר בעל n קודקודים כך שלכל צלע יש משקל (לצלעות שונות יש משקלים שונים). אנו נרצה לבנות עץ פורש שסכום המשקלים על צלעותיו הוא מינימלי. נעשה זאת בדרך הבאה: בצעד הראשון נבחר את הצלע בעלת המשקל המינימלי. לאחר k צעדים בחרנו k צלעות ועלינו לבחור את הצלע ה k+1. מבין הצלעות שנותרו יש צלעות שאם נבחר אותן הן יצרו מעגל עם הצלעות שכבר בחרנו. לכן לא נבחר צלע מהן. מבין שאר הצלעות (כלומר אלו שאינן יוצרות מעגל עם הצלעות הקודמות) נבחר את זו שהיא בעלת המשקל הנמוך ביותר. לאחר n-1 צעדים נעצור.

1. הסבירו מדוע תמיד אפשר לבצע n-1 צעדים.
2. הסבירו מדוע לאחר n-1 צעדים מתקבל עץ פורש.
3. (רשות) הוכיחו שהעץ שהתקבל הוא אכן בעל משקל מינימלי מבין כל העצים הפורשים האפשריים. (רמז: נניח שהעץ הפורש המינימלי הוא אחר מהעץ שהתקבל. השתמשו בסעיף א. על מנת לבצע סדרה של החלפות בין הצלעות כדי לעבור מהעץ שלנו לעץ המינימלי. הסבירו מדוע לא ייתכן שהגענו לעץ בעל משקל נמוך יותר).

ג. הסבירו מדוע בהינתן גרף קשיר וקודקוד מסויים x אפשר לבנות עץ פורש שבו x מקושר לכל קודקוד במסלול הקצר ביותר שקיםם בינהם ב-G.

פתרון תרגיל 6 במתמטיקה דיסקרטית

4) א. כשמוחקים את t מ-T מתקבלים שני רכיבי קשירות. אנו נרצה למצוא צלע s ב-S שמחברת קודקוד ברכיב קשירות אחד אל קודקוד ברכיב הקשירות השני. אם נמצא כזו צלע אז נקבל גרף קשיר (כי s מחברת בין מה שהיו שני רכיבי הקשירות) וחסר מעגלים (כי צלע ב $T\setminus\{t\}$ לא חיברה בין שני רכיבי הקשירות הללו), כלומר עץ. נבחר קודקוד בכל אחד מרכיבי הקשירות של $T\setminus\{t\}$. מכיוון ש-S קשיר אז יש ב-S משלול בין שני הקודקודים הללו. במסלול הזה יש לפחות צלע אחת שעובר מרכיב קשירות אחד לשני ונבחר אותה.

ב. 1) אם בחרנו צלע המחברת בין שני קודקודים, נאמר שבחרנו את שני הקודקודים הללו. כל עוד לא בצענו n-1 צעדים לא בחרנו את כל קודקודי הגרף. מכיוון שהגרף קשיר אז יש צלעות שמחברות בין (חלק מ-) הקודקודים שכבר נבחרו ל (חלק מ-) הקודקודים שטרם נבחרו.הוספת אף אחת מהצלעות הללו לא יכולה ליצור מעגל (כי מעגל יווצר רק על ידי הוספת צלע בין שני קודקודים שכבר נבחרו) ולכן אפשר יהיה להמשיך ולהוסיף צלע.

2) לאחר n-1 צעדים מתקבל גרף קשיר (כי בכל שלב מחברים בין הגרף הקשיר שכבר בנינו לקודקוד חדש) חסר מעגלים (כי אנו מקפידים לא ליצור מעגלים) ולכן מתקבל עץ על כל קודקודי הגרף המקורי ולכן זה הוא עץ פורש.

3) נקרא לעץ שאנחנו בנינו T ולעץ המינימלי S. נבחר את הצלע עם המשקל הנמוך ביותר שנמצאת ב-$T\setminus S$. כפי שתארנו בסעיף א' מחיקת הצלע הזו מ-T תיתן לנו שני רכיבי קשירות ואפשר למצוא צלע אחרת s מ-S שהוספתה ל-$T\setminus\{t\}$ תתן לנו עץ פורש. נשים לב שכשבחרנו את t בבניית T שקלנו גם את בחירת s (כי הוספת s לתת הגרף לא היתה יוצרת מעגל) ולכן בהכרח ל-s משקל לכל הפחות כמו ל-t. אנו יכולים לבצע סדרה כזו של החלפות עד שנגיע מ-T ל-S. מכיוון שבכל שלב לא הפחתנו את המשקל אז לא ייתכן ש-S בעל משקל נמוך יותר מאשר T.

ג. נבנה עץ פורש בסדרה של צעדים. בצעד הראשון את כל השכנים של x ואת כל הצלעות המחברות את x אליהם. זה נותן לנו תת-גרף קשיר וחסר מעגלים. לאחר k צעדים נבחר את כל הקודקודים שטרם בחרנו שהם שכנים למישהו מהקודקודים שכבר בחרנו ולכל קודקוד כזה נבחר צלע אחת שמחברת אותו לתת-הגרף שכבר בנינו. עדיין מתקבל תת-גרף קשיר וחסר מעגלים כפי שהוסבר בסעיף ב חלק 2. נשים לב שהמסלול הקצר ביותר ב-G בין x לקודקוד שנבחר בצעד ה-k הוא מאורך k: לגבי הר=קודקודים שנבחרו בצעד הראשון הטענה ברורה. נניח שהדבר נכון לכל הקודקדוים שנבחרו עד לצעד ה-k ונניח ש-y נבחר בצעד ה-k. מצד אחד יש מסלול בין x ל-y באורך k. מצד שני אם היה מסלול קצר יותר אז השכן של y במסלול הזה היה נבחר (מהנחת האינדוקציה) בשלב מוקדם יותר מאשר השלב ה (k-1) ומהבניה y היה נבחר מיד אחריו כלומר לפני השלב ה-k. כמו כן לאחר שבחרנו את כל הקודקודים נעצור וממה שהסברנו התקבל עץ פורש שבו המסלול מ-x לכל קודקוד אחר הוא הקצר ביותר הקיים ב-G.

מתמטיקה דיסקרטית תרגיל 7

1. נגדיר מחלקה F של גרפים באופן רקורסיבי:
בסיס - הגרף הכולל קודקוד בודד שיך ל-F.
כלל רקורסיבי - יהי G גרף ב-F, x קודקוד ב- G ו- y קודקוד חדש שאינו שייך ל- G. נבנה גרף חדש ע"י הוספת הקודקוד y והצלע $\{x,y\}$ ל- G. אז גם הגרף החדש שייך למחלקה F.
מהי המחלקה F? הוכיחו תשובתכם.

2. יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. נניח כי לכל $e \in E$ הגרף $G'=(V,E\setminus\{e\})$ הוא עץ. הוכיחו כי G מעגל.

3. יהי G גרף קשיר לא מכוון. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שניתן לפרק את קבוצת הצלעות של G ל-k מסלולים זרים בצלעות. רמז - השתמשו באינדוקציה, המקרה $k=1$ הוא בעיית מסלול אוילר.

4. יהי G גרף לא מכוון שבו לכל קודקוד דרגה זוגית. הראו שניתן לכוון את צלעות G כך שדרגת היציאה של כל קודקוד תהיה שווה לדרגת הכניסה שלו.

5. תהי B קבוצה בת n איברים. לכל פונקציה $f:B\to B$ נגדיר: $B_0^f=B$, $B_{i+1}^f=f(B_i^f)$. תהי H_n קבוצת כל הפונקציות $f:B\to B$ כך ש- $|B_n^f|=1$. הוכיחו כי $|H_n|=n^{n-1}$.

מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל 8

1) יהי G=(V, U, E) גרף דו-צדדי (כלומר קודקודי G הם $U \cup V$ וקבוצת הצלעות E, מוכלת ב $U \times V$. נניח ש $|V| \leq |U|$. לכל $S \subseteq U$ נסמן $\Gamma(S)$ את מספר הקודקודים ב-V שאיברי S "מכירים" (כלומר מספר הקודקודים שביניהם לבין איברי S יש צלעות).
נאמר שזיווג ממצה את U אם לכל u ב-U יש בזיווג צלע שיוצאת מ-u.
הוכיחו שב-G קיים זיווג שממצה את U אמ"מ לכל $S \subseteq U$, $|S| \leq \Gamma(S)$.
הדרכה: נוסיף לגרף עוד |V|-|U| קודקודים ונחבר כל אחד מהם לכל הקודקודים ב-V. הראו שכעת מתקיימים התנאים של משפט החתונה והסבירו למה הבנייה הזו פותרת את הבעיה שלנו.
2) תהיינה $A_1, \ldots A_k$ קבוצות סופיות של מספרים. נציג של קבוצה הוא מספר ששייך אליה. הראו שאפשר לבחור לקבוצות k נציגים שונים זה מזה אמ"מ לכל $S \subseteq \{1, \ldots k\}$ מתקיים $|\bigcup_{i \in S} A_i| \geq |S|$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.
3) השתמשו בעקרון ההכלה וההדחה על מנת לחשב את:
א. מספר הפתרונות בשלמים $0 \leq x_i \leq 6$ למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 14$.
ב. מספר הקבוצות בנות 10 כדורים שאפשר להרכיב מ-4 כדורים לבנים, 3 כדורים אדומים ו-4 כדורים כחולים.
4)א. 7 אנשים הפקידו את מעיליהם בשמירת החפצים. בכמה דרכים אפשר להשיב להם אותם כך שאף אחד מהם לא יקבל בחזרה את המעיל שלו?
ב. נאמר שתמורה f קובעת מספר a אם f(a)=a. כמה תמורות של {1,…8} אינן קובעות אף מספר זוגי?

תרגיל 9 מתמטיקה דיסקרטית

1) מצאו את הפונקציות היוצרות של:

א. $1, c, c^2, \ldots c^{n-1}, \ldots$ כלומר $a_i = c^i$ (c מספר ממשי כלשהו)

ב. $0,0,0,-1,1,-1,1\ldots(-1)^n,\ldots$ כלומר $a_0 = a_1 = a_2 = 0;$ $a_i = (-1)^i (i \geq 3)$

ג. 5,6,7,8,…n+5,… כלומר $a_i = i + 5$

2) מצאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה הנתונה על ידי: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1$ $a_n = -a_{n-1} + 16a_{n-2} - 20a_{n-3}$

3) מצאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה הנתונה ע"י המשוואה הלא הומוגנית $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 7$ יחד עם תנאי ההתחלה $a_0 = 1, a_1 = 2$. (**שאלה זו היא רשות אלא אם כן המרצה יתן בכיתה דוגמא לפתרון נוסחת נסיגה לא הומוגנית).**

4) נאמר שמילה היא חוקית אם אין אות שמופיעה בה פעמיים ברציפות. נניח שהא"ב שלנו הוא מגודל k. נסמן ב- b_n את מספר המילים החוקיות מאורך n ונסמן ב- a_n את מספר המילים החוקיות מאורך n שמתחילות ונגמרות באותה אות. למשל $a_1 = b_1 = k; a_2 = 0; b_2 = a_3 = k(k-1)$.

א. חשבו את b_n.

ב. הסבירו מדוע $a_n = b_{n-1} - a_{n-1}$.

ג. שימו לב שהתקבל נוסחת נסיגה לינארית לא הומוגנית – פתרו אותה ומצאו נוסחה מפורשת ל- a_n (אין חובה למצוא פונקציה יוצרת).

תרגיל 11 במתמטיקה דיסקרטית

1) מהו מספר הפונקציות מ- $\{1, 2, 3,\dots, m\}$ **__על__** $\{1, 2, \dots , n\}$ **?**

2) נסמן ב- $a_1 \dots a_n$ **סידור של המספרים** $\{1,\dots n\}$**. כמה סידורים כאלו מקיימים שלכל i>1 קיים j<i כך ש-** $|a_i - a_j| = 1$ **? הדרכה: נכתוב את הסידור איבר איבר. שימו לב שהחל מ-i=2 יש לנו לכל היותר שתי אפשרויות למספר** a_i**. הגדירו התאמה בין סידורים שמקיימים את התנאי לבין סדרות באורך (n-1) של** $\{1,-1\}$ **. הוכיחו שהתאמה זו היא חח"ע ועל וחשבו כמה סדרות כאלו יש.**

3) בהתמודדות בין א' וב' זכה כל מתמודד ב-n קולות. מה מספר הדרכים לספור את הקולות כך שבשלב כלשהו מועמד א' מוביל אבל אח"כ יש שלב בו ב' מוביל? (רמז: שקפו פעמיים).

4) הראיתם בתחילת הקורס שמספר קטלן ה n-י הוא מספר השילושים של מצולע קמור בעל n צלעות. בתרגיל זה נראה שמספר שרדר ה n-י הוא מספר החלוקות של מצולע קמור בעל n+1 צלעות על ידי אלכסונים שאינם נחתכים זה עם זה בחלק הפנימי של המצולע.
בהינתן מצולע P נקבע צלע אחת שלו ונקרא לה e. לכל חלוקה (לא דווקא שילוש) של המצולע על ידי אלכסונים שאינם נחתכים בתוך המצולע, נבנה עץ באופן רקורסיבי: e מוכלת בתת-מצולע יחיד בחלוקה שאנו מסתכלים עליה. נקרא לו Q. נניח ש-Q בעל k+1 צלעות. אם נמחק את e נישאר עם צורה שמורכבת משאר החלקים אליהם חלקנו את P וגם כמה צלעות של Q שבגלל מחיקת e אינן "נסגרות" לכלל מצולע. לכל צלע כזו נקרא "מצולע מנוון". אם כן לאחר מחיקת e יש לנו צורה שמורכבת ממספר חלקים ואולי גם כמה מצולעים מנוונים שביחד מספרם k (כי ל-Q היו k צלעות ללא e). השורש של העץ שלנו יהיה e. תתי העצים משמאל לימין של השורש, יהיו k החלקים (והמצולעים המנוונים) כאשר אנו עוברים על הצלעות של Q נגד כיוון השעון והחל מהצלע השכנה ל-e. השורש של כל תת-עץ כזה הוא הצלע שמשותפת לו ול-Q.

א. ציירו חלוקה כלשהי של מצולע קמור בעל 7 צלעות ובנו את העץ המתאים.
ב. הסבירו מדוע העלים של עץ חלוקה הם צלעות המצולע – כלומר אלכסון מהחלוקה אינו יכול להופיע בעץ כעלה.
ג. הסבירו מדוע פרט ל-e כל צלעות המצולע יופיעו בעץ חלוקה כעלים.
ד. מה אפשר להסיק מכך על הטווח של ההעתקה המעבירה חלוקות של מצולע בעל n+1 קודקודים לעצים לפי האלגוריתם שלמעלה?

ה. ציירו עץ עם 6 עלים ושלאף קודקוד בו אין בן יחיד ובנו את החלוקה המתאימה לו.
ז. בהינתן שתי חלוקות שונות הוכיחו שמתקבלים מהם עצים שונים. (הדרכה: האלגוריתם מאפשר למספר את המצולעים השונים שמופיעים בחלוקה. הסתכלו על המצולע הראשון ששונה בין שתי החלוקות).
ח. הסבירו מדוע לא ייתכן לקבל מחלוקה עץ שלאחד הקודקודים שלו יש בדיוק בן אחד.
ט. בהינתן עץ שאין לו קודקוד עם בן יחיד הציעו דרך לבנות על פיו חלוקה של מצולע. (הדרכה: אתם כבר יודעים שהעלים של העץ הם צלעות המצולע. כעת עליכם להבין –ולהוכיח זאת - באיזה סדר הם מופיעים בעץ. שאר הקודקודים בעץ (פרט לשורש) מתאימים לאלכסונים. הסבירו איך אפשר לדעת איפה להעביר את האלכסונים הללו ומדוע לא ייתכן ששני אלכסונים יחתכו בתוך המצולע).
י. הסבירו מדוע בהינתן שני עצים שונים נקבל שתי חלוקות שונות.
יא. הסיקו שמספר החלוקות של מצולעים בעלי n+1 צלעות הוא מספר שרדר ה-n.