מרחבים מטריים

- בשם מרחב מטרי יקרא זוג (X,d) כאשר X קבוצה לא ריקה כלשהי ! - $d: X^2 \to \mathbb{R}$ מקיימת שלכל $x,y,z \in X$:
  - סימטריה $d(x,y) = d(y,x)$
  - חיוביות $d(x,y) \geq 0$ ושוויון אמ"מ $x=y$
  - אי-שוויון המשולש $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

- בהינתן קבוצה כלשהי X אפשר לצייד אותה במטריקה הדיסקרטית:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

- מרחב נורמי הוא מרחב וקטורי X מעל שדה הממשיים ועליו מוגדרת פונקציה $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ הנקראת נורמה, בעלת התכונות הבאות: לכל $x,y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  - חיוביות $\|x\| \geq 0$ ושוויון אמ"מ $x=0$
  - הומוגניות $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
  - אי-שוויון המשולש $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- יהי (X,d) מרחב מטרי. בשם ספרה שמרכזה a ורדיוסה $r>0$ קוראים לקבוצת הנקודות $\{x \in X : d(a,x) = r\}$.

כדור פתוח שמרכזו a ורדיוסו $r>0$ הוא $B_0(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$

כדור סגור שמרכזו a ורדיוסו $r>0$ הוא $B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}$.

- קבוצה A במרחב מטרי נקראת חסומה אם היא מוכלת בכדור.

קבוצה A נקראת פתוחה אם כל נקודה $x \in A$ היא מרכזו של כדור פתוח (ברדיוס חיובי) המוכל ב-A. עפ"י הסכם הקבוצה הריקה $\emptyset$ פתוחה בכל מרחב מטרי.

קבוצה A נקראת סגורה אם המשלים שלה פתוח ב-X.

- סדרה (x_n) במרחב מטרי (X,d) תיקרא מתכנסת אם קיימת נקודה $x\in X$ שנקראת גבול הסדרה שמקיימת $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$

- תהי A קבוצה במרחב מטרי X. לאיחוד של כל הקבוצות הפתוחות ב-X המוכלות ב-A נקרא הפנים של A ונסמנו ב-$\mathring{A}$. זוהי הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב-A.
הסגור של A מסומן ע"י $\bar{A}$ הוא חיתוך כל הקבוצות הסגורות המכילות את A. $\bar{A}$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את A
השפה של A מסומנת ב-∂A היא קבוצת הנקודות שאינן נמצאות בפנים של A אך נמצאות בסגור של A כלומר $\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A}$.

- מרחב מטרי X יקרא קומפקטי אם לכל סדרה של נקודות בו יש תת-סדרה המתכנסת לנקודה ב-X. קבוצה חלקית K של מרחב מטרי X תיקרא קבוצה קומפקטית אם המטריקה המושרית מ-X ל-K הופכת את K למרחב קומפקטי.

- תהי A תת קבוצה לא ריקה במרחב מטרי X ותהי $a\in X$:
המרחק של a ל-A מוגדר ע"י $d(a,A)=\inf_{x\in A} d(a,x)$
יהיו F_1,F_2 קבוצות לא ריקות במרחב מטרי X.
המרחק בין F_1 ל-F_2 מוגדר ע"י $d(F_1,F_2)=\inf_{\substack{x\in F_1\\ y\in F_2}} d(x,y)$

- יהי X מרחב מטרי. כיסוי של X הוא אוסף של קבוצות כך שכל נקודה של X מופיעה לפחות באחת מקבוצות האוסף. כיסוי נקרא סופי אם הוא מורכב ממספר סופי של קבוצות. כיסוי נקרא פתוח אם כל הקבוצות בו פתוחות.

• תת קבוצה A במרחב מטרי X נקראת <u>צפופה</u> ב-X אם $\bar{A}=X$.
מרחב מטרי נקרא <u>ספרבילי</u> אם הוא מכיל קבוצה צפופה בת מניה.

• יהיו (Y,ρ), (X,d) מרחבים מטריים. פונקציה $f:X\to Y$ תיקרא <u>רציפה</u> בנקודה $x\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,z)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(z))<\varepsilon$.
פונקציה $f:X\to Y$ נקראת רציפה אם היא רציפה בכל נקודה ב-X.

• יהיו (Y,ρ), (X,d) מרחבים מטריים. אומרים שהעתקה $f:X\to Y$ היא <u>רציפה במידה שווה</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ אם $d(x,y)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$.

• אומרים שהעתקה $f:X\to Y$ מקיימת <u>תנאי הולדר</u> מסדר $0<\alpha\le 1$ אם קיים קבוע k כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים
$$\rho(f(x),f(y))\le k\,d(x,y)^\alpha$$
עבור $\alpha=1$ אומרים ש-f מקיימת <u>תנאי ליפשיץ</u>.

• העתקה $f:X\to Y$ בין מרחבים מטריים תקרא <u>הומאומורפיזם</u> אם היא חח"ע ועל כך, שגם היא וגם f^{-1} רציפות. אומרים על שני מרחבים שהם הומאומורפים אם קיים לפחות הומאומורפיזם אחד ביניהם.

• אומרים שסדרת פונקציות (f_n) ממרחב מטרי X למרחב מטרי Y <u>מתכנסת נקודתית</u> לפונקציה גבולית f אם לכל $x\in X$ $f_n(x)\to f(x)$. אומרים שסדרה (f_n) <u>מתכנסת במידה שווה</u> אם $\sup_{x\in X} d(f_n(x),f(x))\to 0$.

• <u>תנאי קושי להתכנסות במידה שווה</u>: לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n>N$ ולכל $x\in X$ $d(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon$. סדרת פונקציות המקיימת תנאי זה נקראת <u>סדרת קושי במידה שווה</u>.

- תהא (f_n) סדרה של פונקציות ממרחב מטרי X ל- $\mathbb{R}$. אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ <u>מתכנס במידה שווה</u> אם סדרת הפונקציות $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ מתכנסת במ"ש על X.

- יהי K מרחב מטרי קומפקטי. במרחב הווקטורי של פונקציות ממשיות רציפות על K נגדיר נורמה $\|\cdot\|$ ע"י $\|f\| = \max\{|f(x)| : x\in K\}$. מרחב נורמי זה מסומן ע"י $C(K)$.

- יהי K מרחב מטרי קומפקטי. האיברים בתת הקבוצה A של מרחב הפונקציות $C(K)$ (נקראים <u>רציפים במידה אחידה</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ רק שאם $d(x,x')<\delta$ אזי $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ לכל $f\in A$.

- יהי (X,d) מרחב מטרי. סדרה (x_n) תיקרא <u>סדרת קושי</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m>N$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

- מרחב מטרי (X,d) יקרא <u>שלם</u> אם כל סדרת קושי ב-X מתכנסת. מרחב נורמי שלם נקרא מרחב בנך.

מסילות

- פונקציה רציפה f מקטע סגור $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ למרחב מטרי X נקראת __מסילה__ ב-X. אם f חח"ע נקראת f __מסילה פשוטה__. __מסילה סגורה__ היא מסילה המקיימת $f(a)=f(b)$. __מסילה סגורה פשוטה__ היא מסילה סגורה חח"ע פרט לקצוות.

- שתי מסילות $f:[a,b]\to X$, $g:[c,d]\to X$ נקראות __שקולות__ אם קיימת פונקציה מונוטונית עולה במובן הצר רציפה ועל $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ כך שמתקיים $f=g\circ\varphi$.

- תהיינה $f:[a,b]\to X$, $g:[c,d]\to X$ מסילות. אם $f(b)=g(c)$ ניתן להגדיר באופן טבעי מסילה $h:[a,b+d-c]\to X$ שהיא __הדבקה__ של f ו-g ומסומנת $h=g*f$.

$$h(t)=\begin{cases} f(t) & t\in[a,b] \\ g(t-b+c) & t\in[b,b+d-c] \end{cases}$$

- __מסילה שהיא קטע__ במרחב נורמי X היא מסילה שקולה למסילה מהצורה $f(t)=tx+(1-t)y$ עבור $t\in[0,1]$ כאשר $x,y\in X$. __קו פוליגונלי__ הוא צירוף של מספר סופי של מסילות שהן קטע.

- תהי $f:[a,b]\to X$ מסילה במרחב מטרי (X,d). נסמן

$$\ell(f)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d(f(t_{i-1}),f(t_i)) \;:\; \{t_i\}_{i=0}^{n} \text{ חלוקה של } [a,b]\right\}$$

ל-$\ell(f)$ נקרא __אורך__ המסילה f. אם $\ell(f)$ סופי נאמר ש-f מסילה __בעלת אורך__.

- מסילה $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ היא __גזירה__ בנקודה $t\in(a,b)$ אם קיים הגבול $\lim_{h\to0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

אם קיים הגבול מסמנים אותו ב- $f'(t)$ וקוראים לו הנגזרת של f בנקודה t. נאמר ש-f __גזירה מימין__ בנקודה $t\in[a,b)$ אם קיים הגבול $\lim_{h\to0^+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

באופן דומה מוגדרת __גזירות משמאל__.

- נאמר שמסילה $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ <u>גזירה</u> אם היא גזירה ב- (a,b) והנגזרות החד צדדיות ב- a וב- b. נאמר ש- f <u>גזירה ברציפות</u> אם הנגזרת שלה רציפה ב- $[a,b]$. נאמר ש- f <u>גזירה (ברציפות) למקוטעין</u> אם היא צירוף של מסילות גזירות (ברציפות)

- קבוצה A במרחב מטרי X נקראת <u>קשירה מסילתית</u> אם לכל שתי נקודות $x,y\in A$ קיימת מסילה ב- A המתחילה ב- x ונגמרת ב- y.

- שתי מסילות סגורות במרחב מטרי X המוגדרות על אותו קטע $f,g:[a,b]\to X$ נקראות <u>הומוטופיות</u> אם קיימת פונקציה רציפה $H:[a,b]\times[0,1]\to X$ המקיימת:
  - לכל $s\in[0,1]$ קבוע $H(t,s)$ מסילה סגורה כפונקציה של t ב- $[a,b]$.
  - $H(t,0)=f(t)$; $H(t,1)=g(t)$ לכל $t\in[a,b]$.

- שתי מסילות סגורות f,g במרחב מטרי נקראות <u>הומוטופיות</u> אם קיימות מסילות f^*,g^* השקולות ל- f,g בהתאמה והמוגדרות על אותו קטע, רק ש- f^* הומוטופי ל- g^*.

- <u>תחום</u> במרחב מטרי הוא קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית. <u>מרחב פשוט קשר</u> הוא מרחב שבו כל שתי מסילות סגורות הומוטופיות זו לזו.

- קבוצה A במרחב נורמי נקראת כוכבית ביחס ל- $x_0\in A$ אם לכל $y\in A$ $[x_0,y]\subseteq A$. קבוצה נקראת <u>כוכבית</u> אם קיימת נקודה אחת לפחות שביחס אליה היא כוכבית.

- <u>תיבה סגורה</u> ב- $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה מהצורה $A=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ <u>נפח</u> התיבה A יוגדר ע"י $V(A)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$: קבוצה $B\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת <u>בעלת מידה אפס</u> אם לכל $\varepsilon>0$ יש סדרת תיבות $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $B\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty}V(A_k)<\varepsilon$

- תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^n$. שדה וקטורי ב- A הוא פונקציה $f: A \to \mathbb{R}^n$.

- יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$, f שדה וקטורי ב- A ו- $\gamma(t)$ מסלול $\gamma:[a,b] \to A$.
האינטגרל של השדה f לאורך המסילה $\gamma(t)$ מסומן ב- $\int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j \, dx_j$ ומוגדר
$$\int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j \, dx_j = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \, d\gamma_j(t)$$

- שדה וקטורי רציף f המוגדר על קבוצה פתוחה קשירה מסילתית $A \subseteq \mathbb{R}^n$
נקרא שדה משמר אם עבור מסלול ב- A שהן מסלות ארוך, ערך האינטגרל
$\int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j \, dx_j$ אינו תלוי במסלול γ אלא רק בקצוותיה.

- תהי A קבוצה פתוחה קשירה מסילתית ב- $\mathbb{R}^n$, ויהי f שדה וקטורי על A.
פונקציה דיפרנציאבילית $g: A \to \mathbb{R}$ נקראת פונקציית פוטנציאל עבור השדה
f אם מתקיים $\frac{\partial g}{\partial x_j} = f_j$ לכל $1 \le j \le n$

- שדה וקטורי גזיר ברציפות f המוגדר על קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ נקרא
משמר לוקאלית אם $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ לכל $1 \le i,j \le n$

חשבון דיפרנציאלי: מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$

- תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. הנורמה של T היא המספר

$$\|T\| = \max\{\|Tx\| : x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|=1\} = \max\{\|Tx\|/\|x\| : x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0\}$$

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי a נקודה פנימית של A. תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$. הפונקציה תקרא דיפרנציאבילית ב-a אם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש-

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)-Tx}{\|x\|}=0$$

(כלומר $f(a+x)=f(a)+Tx+r(x)$ כאשר $r(x)=o(\|x\|)$)

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי a נקודה פנימית של A. תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-a. הנגזרת של f ב-a מסומנת ב-$Df(a)$ והיא ההעתקה הלינארית T שמקיימת את הגדרת הדיפרנציאביליות

- פונקציה $f:A\to\mathbb{R}^m$ כאשר $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה היא גזירה ברציפות אם היא גזירה ב-A וההעתקה $Df:A\to Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ המתאימה את $a\in A$ ל-$Df(a)$ היא העתקה רציפה. לאוסף הפונקציות הגזירות ברציפות ב-A קוראים $C^1(A,\mathbb{R}^m)$

- תהי $f:A\to\mathbb{R}^n$ כאשר $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אם f גזירה ב-$a\in A$ היעקוביאן של f ב-a מוגדר ע"י $Jf(a)=\det Df(a)$

- תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ כאשר $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. אומרים ש-$f\in C^k(A,\mathbb{R}^m)$ אם כל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}$, $1\le j\le m$, $1\le i_1,\dots,i_k\le n$ קיימות ורציפות.
$f\in C^\infty(A,\mathbb{R}^m)$ אם $f\in C^k(A,\mathbb{R}^m)$ לכל $k\in\mathbb{N}$

מרחבים מטריים

- בכל מרחב מטרי X מתקיים:
  - חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח
  - איחוד אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות הוא פתוח
  - כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה
  - קבוצה היא פתוחה אמ"מ היא איחוד של כדורים פתוחים.

⇐ אנטי-דוגמא: חיתוך אינסופי אינו בהכרח קבוצה פתוחה:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$$

- קבוצה $G\subseteq\mathbb{R}^n$ היא פתוחה ביחס למטריקה הטבעית המושרית ע"י $\|\cdot\|_2$ אמ"מ היא פתוחה ביחס לכל אחת מהנורמות $\|\cdot\|_p$ עבור $1\le p\le\infty$.

- כל תת הקבוצות של מרחב דיסקרטי הן גם פתוחות וגם סגורות.

- כל איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
חיתוך של אוסף כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

- תהי (x_n) סדרה ב-(X,d) כך ש-$x_n\to x$. אזי
  - כל סידור אחר של (x_n) מתכנס אף הוא ל-x
  - כל תת סדרה (x_{n_k}) מקיימת $x_{n_k}\to x$
  - גבול של סדרה הוא יחיד.

- במרחב הנורמי $\mathbb{R}^n$ סדרה (x_n) מתכנסת אמ"מ היא מתכנסת לפי כל מטריקה שמושרית מ-$\|\cdot\|_p$ לכל $1\le p\le\infty$.

- קבוצה A במרחב מטרי X היא סגורה אמ"מ כל גבול של סדרת נקודות מתכנסת ב-A שייך אף הוא ל-A.

- יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$.
  - $\mathring{A}=A$ אמ"מ A פתוחה
  - $\bar{A}=A$ אמ"מ A סגורה
  - $X\setminus\mathring{A}=\overline{X\setminus A}$

- הסגור $\bar{A}$ של קבוצה A במרחב מטרי הוא קבוצת הנקודות שהן גבול של סדרה של נקודות מ-A.

- השפה ∂A של קבוצה A במרחב מטרי X היא קבוצת הנקודות x כך שכל כדור סביבן מכיל נקודה אחת לפחות של A ונקודה אחת לפחות של המשלים של A

- יהי Y תת מרחב של מרחב מטרי X. תת קבוצה A של Y פתוחה (סגורה) במרחב המטרי המושרה Y אמ"מ A היא חיתוך של Y עם קבוצה פתוחה (סגורה) במרחב X.

- איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות במרחב מטרי הוא קבוצה קומפקטית

$\Leftarrow$ אנטי דוגמא: איחוד אינסופי של קבוצות קומפקטיות לא מוכרח קומפקטי:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]=\mathbb{R}$$

- כל מרחב מטרי המכיל מספר סופי של נקודות הוא קומפקטי.

- קבוצה חלקית במרחב דיסקרטי היא קומפקטית אמ"מ היא סופית.

- קבוצה קומפקטית במרחב מטרי היא סגורה וחסומה.

$\Leftarrow$ אנטי דוגמא: ההפך אינו נכון: כל תת קבוצה במרחב דיסקרטי היא סגורה וחסומה אבל רק קבוצות סופיות הן קומפקטיות.

- קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית.

- קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אמ"מ היא סגורה וחסומה.

- יהי X מרחב מטרי ויהיו F_1, F_2 קבוצות סגורות, זרות ולא ריקות ב-X כך שלפחות אחת מהקבוצות היא קומפקטית. אזי $d(F_1,F_2)>0$.

$\Leftarrow$ אנטי דוגמא: הדרישה שאחת מהן קומפקטית נחוצה.

$A=\{(x,\frac{1}{x}) : x\in\mathbb{R}\}$ $B=\{(0,x) : x\in\mathbb{R}\}$

$\Rightarrow d(A,B)=0$

- אפיון היינה בורל: עבור מרחב מטרי X שלוש התכונות הבאות שקולות:
  - X קומפקטי
  - לכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי
  - לכל משפחה $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות סגורות ב-X מתקיים שאם החיתוך של כל תת משפחה סופית אינו ריק אז החיתוך של כל המשפחה אינו ריק.

- קבוצה K במרחב מטרי X היא קומפקטית אמ"מ לכל אוסף $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות פתוחות ב-X כך ש- $K\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$ יש תת קבוצה סופית J של I כך ש- $K\subseteq\bigcup_{\alpha\in J}G_\alpha$.

- מרחב מטרי הוא ספרבילי.

- כל פונקציה המוגדרת על מרחב דיסקרטי היא רציפה.

- לכל מרחב מטרי X, $f:X\to\mathbb{R}^n$ רציפה אמ"מ כל אחד מ-n הרכיבים של f הוא פונקציה רציפה מ-X ל-$\mathbb{R}$.

- יהיו X,Y מרחבים מטריים ותהי $a\in X$. התנאים הבאים שקולים:
  - f רציפה ב-a
  - לכל סדרה $(x_n)\subseteq X$ כך ש $x_n\to a$ מתקיים $f(x_n)\to f(a)$.

- תהי $f:X\to Y$ העתקה בין מרחבים מטריים. הטענות הבאות שקולות:
  - f רציפה
  - המקור של כל קבוצה פתוחה ב-Y הוא קבוצה פתוחה ב-X
  - המקור של כל קבוצה סגורה ב-Y הוא קבוצה סגורה ב-X

$\Leftarrow$ אנטי דוגמה: פונקציה רציפה לא בהכרח מעבירה קבוצה פתוחה לפתוחה: $f\equiv 0$ אז $f(\mathbb{R})=\{0\}$

- הרכבה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.

- אם $g,f:X\to\mathbb{R}$ רציפות אזי $g+f$ ו- $f\cdot g$ רציפות. הפונקציה $\frac{f}{g}$ רציפה בכל נקודה x שבה $g(x)\neq 0$.

- פונקציה רציפה בין מרחבים מטריים $f:X\to Y$ מעבירה קבוצה קומפקטית לקבוצה קומפקטית.

- אם X קומפקטי $f:X\to Y$ רציפה אז התמונה של קבוצה סגורה ב-X סגורה ב-Y.

- פונקציה רציפה ממרחב מטרי קומפקטי X ל-$\mathbb{R}$ מקבלת מקסימום ומינימום.

- פונקציה רציפה על מרחב קומפקטי רציפה שם במידה שווה.

- יהיו X מרחב מטרי קומפקטי, Y מרחב מטרי. $f:X\to Y$ חח"ע, רציפה ועל. אזי f הומאומורפיזם.

- טענה $f_n:X\to\mathbb{R}$. (f_n) מתכנסת במידה שווה אמ"מ היא סדרת קושי במידה שווה.

- תהי (f_n) סדרת פונקציות ממרחב מטרי X למרחב מטרי Y השואפת במ"ש לפונקציה f. אם כל ה-f_n רציפות בנקודה a אז גם הגבול f רציף בנקודה a. אם כל ה-f_n רציפות במ"ש על X אז גם f רציפה במ"ש על X.

- יהיו X,Y מרחבים מטריים. $f_n:X\to Y$ סדרת פונקציות המתכנסות במ"ש לפונקציה f. אם כל הפונקציות f_n רציפות בנקודה $x\in X$ אז לכל סדרה (x_n) כך ש- $x_n\to x$ מתקיים $f_n(x_n)\to f(x)$.

- קריטריון M של ויירשטראס: תהי (f_n) סדרת פונקציות ממרחב מטרי X ל-$\mathbb{R}$. אם $\sup_{x\in X}|f_k(x)|<M_k$ ו- $\sum_{k=1}^{\infty}M_k<\infty$ אזי $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במידה שווה.

- טענה $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות כך ש-(f_n) מתכנסת במ"ש ל-f. אזי
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

- תהי (f_n) סדרת פונקציות גזירות מ-$(0,1)$ ל-$\mathbb{R}$. אם קיימת $a<c<b$ כך שהסדרה $(f_n(c))$ מתכנסת וסדרת הנגזרות (f'_n) מתכנסת במידה שווה על (a,b) ל-g, אזי (f_n) מתכנסת במידה שווה לפונקציה f שמקיימת $f'=g$.

- יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור של פונקציות רציפות ממשיות על קטע $[a,b]$ המתכנס במ"ש. אזי $$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

- יהי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור של פונקציות ממשיות בעלות נגזרות f'_n בקטע (a,b) רק שטור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ מתכנס במידה שווה. נניח שקיימת $a<c<b$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ מתכנס. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש על (a,b), סכומו גזיר שם ומתקיים $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

- משפט דיני: תהא (f_n) סדרת פונקציות ממשיות רציפות שמוגדרות על מרחב קומפקטי K ומתכנסת לפונקציה רציפה f. אם לכל $x\in K$ סדרת המספרים $(f_n(x))$ מונוטונית אז הסדרה (f_n) מתכנסת במ"ש ל-f.

- תהא (f_n) סדרת פונקציות ממשיות אי שליליות המוגדרות על מרחב קומפקטי X. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לכל $x\in X$ וגבולו הוא פונקציה רציפה של x אז ההתכנסות היא במ"ש.

- משפט ארצלה-אסקולי: יהי K מרחב קומפקטי ותהי $A\subseteq C(K)$ סגורה וחסומה. אזי A קומפקטית אמ"מ A רציפה במידה אחידה.

- אם תת סדרה של סדרת קושי מתכנסת לגבול, גם הסדרה מתכנסת לגבול זה.

- אם (X,d) מרחב מטרי שלם; $Y\subseteq X$ אז Y מרחב שלם אמ"מ Y סגור ב-X.

- מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.

- לכל מרחב מטרי קומפקטי K המרחב $C(K)$ הוא מרחב מטרי שלם.

- משפט ההעתקה המכווצת: יהי X מרחב שלם ותהי $f: X \to X$ פונקציה המקיימת $d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x,y)$ לכל $x,y \in X$ עבור $\lambda < 1$ כלשהו קבוע. אזי ל-f יש נקודת שבת יחידה ב-X.

- יהי X מרחב מטרי שלם; $f: X \to X$ פונקציה שעבור k טבעי מסוים; $\lambda < 1$ קבוע מתקיים $d(f^k(x), f^k(y)) \le \lambda d(x,y)$ לכל $x,y \in X$. אזי ל-f יש נקודת שבת יחידה.

- משפט פיקארד: תהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה במלבן $[a-\alpha, a+\alpha] \times [b-\beta, b+\beta]$ שמקיימת בו תנאי ליפשיץ ב-y. אזי קיים $h > 0$ כך שיש פונקציה יחידה $y: [a-h, a+h] \to [b-\beta, b+\beta]$ שמקיימת

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in [a-h, a+h] \\ y(a) = b \end{cases}$$

מסילות

- למסילות שקולות אותו אורך
- תהיינה $f:[a,b]\to X$, $g:[c,d]\to X$ כך ש- $f(b)=g(c)$. אזי
$$\ell(g*f) = \ell(g)+\ell(f)$$
- תהי $f:[a,b]\to X$ מסילה בעלת אורך במרחב מטרי (X,d) ונסמן ב- $s(t)$ את אורך המסילה f מ-a עד t, כלומר $s(t)=\ell(f|_{[a,t]})$. אזי
  - $s(t)$ מונוטונית עולה
  - $s(t)$ רציפה
  - אם f אינה קבועה בשום קטע לא טריוויאלי $s(t)$ מונוטונית עולה במובן החזק.
- תהי $f:[a,b]\to X$ מסילה בעלת אורך במרחב מטרי X אשר אינה קבועה על אף קטע לא טריוויאלי. אזי קיימת מסילה $f^*:[0,\ell(f)]\to X$ כך שאורך המסילה f^* מ-0 עד s הוא בדיוק s לכל $s\in[0,\ell(f)]$.
- מסילה $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ הנתונה ע"י $f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))$ גזירה בנקודה $t\in(a,b)$ אמ"מ $f_1,\dots,f_n$ גזירות ב-t ואז מתקיים $f'(t)=(f_1'(t),\dots,f_n'(t))$
- תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה גזירה ברציפות, ויהי $s(t)=\ell(f|_{[a,t]})$. אזי $s(t)$ גזירה ומתקיים $s'(t)=\|f'(t)\|$ לכל $t\in[a,b]$.
- תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה גזירה ברציפות למקוטעין. אזי מתקיים
$$\ell(f)=\int_a^b \|f'(t)\|\,dt$$
- תמונה רציפה של קבוצה קשירה מסילתית במרחב מטרי היא קשירה מסילתית
- תהי A קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית במרחב נורמי X. אז לכל שתי נקודות ב-A יש קו פוליגונלי המקשר אותן.
- יחס ההומוטופיה הוא יחס שקילות.
- מסילות סגורות שקולות המוגדרות על אותו קטע הומוטופיות.

- מרחב מטרי פשוט קשר הוא קשר מסילתית

- מרחב מטרי הומאומורפי למרחב פשוט קשר הוא פשוט קשר.

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה בעלת מידה אפס ו- $B\subseteq A$, אזי גם B בעלת מידה אפס.
  - תהי $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{R}^n$ סדרת קבוצות בעלות מידה אפס. אזי $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ בעלת מידה אפס.

- עבור $n\geq 2$ תמונה של מסילה בעלת אורך ב- $\mathbb{R}^n$ היא בעלת מידה אפס.

- קיימת מסילה שתמונתה ריבוע היחידה ב- $\mathbb{R}^2$ (עקומת פאנו).

- תהי γ מסילה בעלת אורך ב- $\mathbb{R}^n$ ויהיו f,g שדות וקטוריים רציפים על תמונת γ. אזי לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$\int_\gamma\sum_{j=1}^{n}(\alpha f_j+\beta g_j)\,dx_j=\alpha\int_\gamma\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j+\beta\int_\gamma\sum_{j=1}^{n}g_j\,dx_j$$

- תהיינה γ^1,γ^2 מסילות בעלות אורך ב- $\mathbb{R}^n$ כך שהרכבת המסילות $\gamma^1*\gamma^2$ מוגדר. יהי f שדה וקטורי רציף על תמונת $\gamma^1*\gamma^2$. אזי
$$\int_{\gamma^1*\gamma^2}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j=\int_{\gamma^1}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j+\int_{\gamma^2}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j$$

- תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך. יהי f שדה וקטורי רציף על תמונת γ. תהי $\tilde{\gamma}(t)$ המסילה ההפוכה ל- $\gamma(t)$, כלומר $\tilde{\gamma}:[-b,-a]\to\mathbb{R}^n$ מוגדרת $\tilde{\gamma}(t)=\gamma(-t)$. אזי
$$\int_{\tilde{\gamma}}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j=-\int_{\gamma}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j$$

- יהיו $A\subseteq\mathbb{R}^n$, f שדה רציף על A ו- $\gamma^1:[a,b]\to A$, $\gamma^2:[c,d]\to A$ מסילות שקולות. אזי
$$\int_{\gamma^1}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j=\int_{\gamma^2}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j$$

- יהיו $A\subseteq\mathbb{R}^n$, f שדה וקטורי רציף על A ו- $\gamma:[a,b]\to A$ מסילה גזירה ברציפות. אזי
$$\int_{\gamma}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j=\int_a^b\langle f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt$$

- תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה בעלת אורך, ויהי f שדה רציף על תמונת γ. אזי
$$\left|\int_{\gamma}\sum_{j=1}^{n}f_j\,dx_j\right|\leq ML$$
כאשר L אורך המסילה ו- $M=\max\{\|f(\gamma(t))\|:t\in[a,b]\}$.

- תהי A קבוצה פתוחה קשירה מסילתית ב- $\mathbb{R}^n$ ויהי f שדה וקטורי רציף על A. אזי f משמר אמ"מ לכל מסילה γ ב-A שהיא בעלת אורך וסגורה מתקיים $\int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j dx_j = 0$.

- תהי A קבוצה פתוחה קשירה מסילתית ב- $\mathbb{R}^n$ ויהי f שדה וקטורי רציף על A. אזי השדה f משמר אמ"מ קיימת פונקציה דיפרנציאבילית $g:A\to\mathbb{R}$ שנגזרותיה החלקיות מקיימות $\frac{\partial g}{\partial x_j} = f_j$ לכל $1\le j\le n$.
אם קיימת g כנ"ל אז מתקיים $g(\gamma(b))-g(\gamma(a)) = \int \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ לכל מסילה בעלת אורך $\gamma:[a,b]\to A$.

- יהי f שדה וקטורי אשר מקבוצה פתוחה קשירה מסילתית ב- $\mathbb{R}^n$ ונניח שהשדה f גזיר ברציפות. אזי לכל $1\le i,j\le n$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

- יהי f שדה וקטורי משמר לוקלית מקבוצה פתוחה ב- $A\subseteq\mathbb{R}^n$. תהיינה γ^0, γ^1 מסילות סגורות בעלות אורך והומוטופיות ב- A אזי
$$\int_{\gamma_1}\sum_{j=1}^n f_j dx_j = \int_{\gamma_0}\sum_{j=1}^n f_j dx_j$$

- מקבוצה פשוטת קשר ב- $\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי משמר לוקלית הוא משמר.

חשבון דיפרנציאלי ב-$\mathbb{R}^n$ ו-$\mathbb{R}^m$

- תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אזי לכל $x\in\mathbb{R}^n$ $\|Tx\|\le\|T\|\|x\|$

- תהיינה $T\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $S\in Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k)$ העתקות לינאריות. אזי $S\circ T\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ ומתקיים $\|S\circ T\|\le\|S\|\|T\|$

- יהיו $\{e_j\}\subseteq\mathbb{R}^n$, $\{f_i\}\subseteq\mathbb{R}^m$ בסיסים אורתונורמליים ותהי $(a_{ij}(T))$ המטריצה המייצגת את $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לפי בסיסים אלה. אזי עבור סדרה $(T_k)\subseteq Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ מתקיים $T_k\to T$ אמ"מ $a_{ij}(T_k)\to a_{ij}(T)$ לכל $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$

- - הדטרמיננטה $\det T$ היא פונקציה רציפה ב-$Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.
  - קבוצת ההעתקות ההפיכות היא קבוצה פתוחה ב-$Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$
  - ההעתקה $T\mapsto T^{-1}$ היא פונקציה רציפה מקבוצת ההעתקות ההפיכות לעצמה.

- תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-a. אזי ההעתקה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ שמקיימת את ההגדרה היא יחידה.

- תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-a. אזי לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים
$$Df(a)x=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}$$

- תהיינה $g,h:A\to\mathbb{R}^m$ כאשר $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. אם g,h גזירות ב-$a\in A$ אז לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ הפונקציה $\alpha g+\beta h$ גזירה ומתקיים
$$D_{\alpha g+\beta h}(a)=\alpha D_g(a)+\beta D_h(a)$$

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ גזירה ב-$a\in A$. אזי f רציפה ב-a.

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ גזירה ב-$a\in A$. אם $f=(f_1,\dots,f_m)$ אזי הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ קיימות בנקודה a ומתקיים
$$Df(a)x=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי a נקודה פנימית של A. תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$. f גזירה ב-a אמ"מ כל רכיביה $f_1,\dots,f_m$ גזירים ב-a.

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^m$. נניח ש- $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le m$ קיימות ורציפות ב-A. אזי f גזירה בכל A.

- כלל השרשרת: יהיו $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $B\subseteq\mathbb{R}^m$, a נקודה פנימית של A כך ש- $f(a)$ נקודה פנימית של B. $f:A\to\mathbb{R}^m$ גזירה ב-a ו- $g:B\to\mathbb{R}^k$ גזירה ב-$f(a)$. אזי ההרכבה $g\circ f:A\to\mathbb{R}^k$ גזירה ב-a ומתקיים
$$D_{g\circ f}(a)=Dg(f(a))\circ Df(a)$$

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^m$. תהיינה $x,y\in A$ כך שהקטע I המחבר את x עם y מוכל ב-A. אם f גזירה ב-I ומתקיים $\sup\{\|Df(z)\|: z\in I\}=M<\infty$ אז $\|f(y)-f(x)\|\le M\|x-y\|$

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית ברציפות. אם $Jf(a)\neq 0$ עבור $a\in A$ אז קיימת קבוצה פתוחה $a\in U\subseteq A$ כך ש- $V=f(U)$ פתוחה, f מעתיקה את U חח"ע על V והפונקציה ההפוכה $f^{-1}:V\to U$ גם היא גזירה ברציפות.

- $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ו- $f:A\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ברציפות. תהיינה $u,v\in A$ כך שהקטע I המחבר ביניהן מוכל ב-A. אזי לכל $a\in A$
$$\|f(u)-f(v)-Df(a)(u-v)\|\le\|u-v\|\sup\{\|Df(x)-Df(a)\|: x\in I\}$$

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $f\in C^1(A,\mathbb{R}^m)$ כך ש- $\operatorname{rank}Df(x)=m$ לכל $x\in A$. אזי f העתקה פתוחה.

- תהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהי $f\in C^1(G,\mathbb{R}^m)$. אם בנקודה $a\in A$ מתקיים $\operatorname{rank}Df(a)=m$ אז $f(a)$ נקודה פנימית של $f(G)$.

- תהיינה $A \subseteq \mathbb{R}^n$; $B \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחות. תהי $f: B \times A \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, כך ש- $f(b,a)=0$ עבור $(b,a) \in B \times A$ מסוים. אם המטריצה $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(b,a)\right)$ הפיכה אז קיימות קבוצות פתוחות $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ המכילות את a, (b,a) בהתאמה, וקיימת פונקציה גזירה ברציפות $g: V \to B$ כך שעבור $(y,x) \in U$ מתקיים $f(y,x)=0$ אמ"מ $g(x)=y$.

- תהי B קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g_1, \dots, g_k$ פונקציות גזירות ברציפות מ- B ל- $\mathbb{R}$. נסמן $A = \{x \in B : g_i(x)=0 \ \forall 1 \le i \le k\}$. אם $a \in A$ ו- f מקבלת מקסימום או מינימום לוקלי ב- a, יחסית לערכי f ב- A בלבד אז דרגת המטריצה

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

קטנה מ- $k+1$ בנקודה a.

- תהי B קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$. תהיינה $f, g_1, \dots, g_k$ פונקציות גזירות ברציפות מ- B ל- $\mathbb{R}$. נסמן $A = \{x \in B : g_i(x)=0 \ \forall 1 \le i \le k\}$. אם a נקודת קיצון מקומית של f בתחום A והווקטורים $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$ בלתי תלויים לינארית אז קיימים קבועים $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ כך ש- $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(a)$.