האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

<u>בחינה בחשבון אינפיניטסימלי מתקדם (1) (80315)</u>

מועד א' תשס"ז – 6.2.07

שם המורה : פרופ' רז קופרמן   **משך הבחינה: 3 שעות**

נא לכתוב בעט על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.

<u>חלק א':</u>
יש לענות על **שתי** שאלות מתוך שלוש. כל שאלה שווה 20 נקודות.

√ 1. תהא A קבוצה במרחב מטרי (X,d).
א. הגדירו מהו הפנים של A (A°)
ב. הגדירו מהו הסגור של A $(\bar{A})$
ג. הגדירו מהי השפה של A (∂A)
ד. הוכיחו ש $x \in \partial A$ אם קיימות שתי סדרות $(y_n) \subset A^c$, $(x_n) \subset A$
כך ש- $x_n \to x$ ו- $y_n \to x$.

2. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sin y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

הוכיחו ישירות מהגדרת הדיפרנציאביליות ש- f דיפרנציאבילית בנקודה
$(x,y)=(1,0)$ (אין להשתמש במשפט הקובע כי קיום נגזרות חלקיות רציפות גורר
דיפרנציאביליות).

√ 3. יהא (X,d) מרחב מטרי.
א. הגדירו מהי קבוצה צפופה ב X
ב. תהא D קבוצה צפופה ב X. הוכיחו ש- X מרחב שלם אם כל סדרת קושי ב D
מתכנסת ב X.

<u>חלק ב':</u>
יש לענות על **שתי** שאלות מתוך שלוש. כל שאלה שווה 16 נקודות.

√ 4. א. הגדירו דיפרנציאביליות של פונקציה $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

ב. נתונה הפונקציה: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2-x \\ x^2-z^2 \\ x^2z+yx \end{pmatrix}$

הוכיחו שהיא דיפרנציאבילית על כל $\mathbb{R}^3$ וחשבו את נגזרתה.

ג. מצאו את היעקוביאן של הפונקציה $\underbrace{f\circ f\circ \dots\dots \circ f}_{51}$ בנקודה (1,0,1).

9/

5. א. הגדירו מהי מסילה ב $\mathbb{R}^n$, ומהי מסילה בעלת אורך.

ב. חשבו את אורכו של גרף הפונקציה $y = x^{3/2}$ בין הנקודה $x=0$ ו- $x=1$.

6. נתונות 2 משוואות:

$$u^2 + yv - xu = 0$$
$$v^2 + xv - yu = -1$$

הוכיחו שמערכת משוואות זו מגדירה את (x,y) כפונקציה של (u,v) בסביבת הנקודה $(x,y,u,v) = (2,0,2,-1)$.

ב. תהי g הפונקציה $g:(u,v) \mapsto (x,y)$ מהסעיף הקודם. חשבו את $D_g(2,-1)$.

<u>חלק ג'</u>:

יש לענות על **<u>כל</u>** השאלות. כל שאלה שווה 7 נקודות.

להלן 4 טענות. לגבי כל אחת מהן יש לקבוע האם היא נכונה או לא, ולנמק את תשובתכם בעזרת הוכחה קצרה או מתן דוגמא נגדית.

7. סדרת הפונקציות $f_n(x) = \cos\ nx, \quad n = 1,2,...$ היא אוסף פונקציות ממשיות, הרציפות במידה אחידה. ב $\mathbb{R}$.

8. יהא (X,d) מרחב מטרי. אם לכל n טבעי ניתן לכסות את X ע"י n כדורים פתוחים ברדיוס $1/n$ אז X מרחב קומפקטי.

9. יהא $f = (f_1, f_2, f_3)$ שדה וקטורי משמר ב $\mathbb{R}^3$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, עם פונקצית פוטנציאל ϕ. השדה הוקטורי $(\phi f_1, \phi f_2, \phi f_3)$ הוא שדה משמר.

10. ההעתקה $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 15$ היא העתקה פתוחה.

בהצלחה!

1) תהא $A\subseteq X$ ו-(X,d) מרחב מטרי.

(א) ~~[illegible]: A° - הקבוצה הפתוחה המקסימלית [illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

(א) הגדירו מהו הפנים של A (A°).

נגדיר: $A^\circ=\bigcup_{\substack{u\subseteq A\\ u\subseteq X \text{ פתוחה}}} u$. A° קבוצה פתוחה, כי היא איחוד פתוחות, מקסימלית (תחת יחס ההכלה) אשר מוכלת ב-A. (כי הקבוצה המקסימלית המתקבלת באיחוד).

(ב) הגדירו מהו הסגור של A ($\overline{A}$).

נגדיר: $\overline{A}=\bigcap_{\substack{F\supseteq A\\ F\subseteq X \text{ סגורה}}} F$. $\overline{A}$ זו היא קבוצה סגורה, כי היא חיתוך של קבוצות סגורות. $\overline{A}$ מינימלית תחת יחס ההכלה, אשר מכילה את A (כי הסגורה המינימלית המכילה את A אזי היא המתקבלת בחיתוך).

(1) הערה: הוכחנו בשיעור כי איחוד של קבוצות פתוחות הינו קבוצה פתוחה. בנוסף מכללי דה-מורגן, חיתוך סגורות הוא סגור. (הוכחה דדוקציה).

(ג) הגדירו מהי השפה של A (∂A).

נגדיר: $\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ$.

(ד) הוכיחו כי $x\in\partial A$ אם קיימות שתי סדרות, $x_n\subset A$, $y_n\subset A^c$, כך ש-$x_n\to x$, $y_n\to x$.

הוכחה: ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

נראה תחילה כי $x\in\overline{A}$: נניח כי $A\subseteq F\subseteq X$, F סגורה. אזי, ממשפט האפיון של קבוצה סגורה במרחב מטרי ($F\subseteq X$ סגורה אמ"מ לכל סדרה $(x_n)\subseteq F$, x_n מתכנסת ל-$x\in X$, $x\in F$), אם כן, נראה כי $x\in F$, ומתקיים כי $x\in\bigcap_{\substack{F\supseteq A\\ F\subseteq X \text{ סגורה}}} F$, לכן $x\in\overline{A}$.
הוכחה כדלהלן.

אם כן, F סגורה, $x_n\to x\in X$, ולכן $x\in F$ מן המשפט הנ"ל. לכן $x\in\overline{A}$.

אילו, בשלילה, $x\in A^\circ$, אזי, ישנו כדור פתוח $B_\varepsilon(x,\varepsilon)$, אשר מקיים: $B_\varepsilon(x,\varepsilon)\subseteq A^\circ$, כיוון ש-$A^\circ$ קבוצה פתוחה. לכן, לכל סדרה $(z_n)\subseteq X$ המתכנסת ל-x, עבור ה-ε, ישנו N כך ש-$N<n$ ⇐ $d(z_n,x)<\varepsilon$, ובפרט, $z_n\in A^\circ$ (כי $z_n\in B_\varepsilon(x,\varepsilon)$) ולכן, לכל

סדרה המתכנסת ל-$x\in A^\circ$, החל ממקום מסוים, $(z_n)\subseteq A^\circ$.

כיוון ש-$A^\circ\subseteq A$, ו-$y_n\to x$! ומהנחת השלילה, $x\in A^-$, נקבל כי y_n לכל n,
$(y_n)\subseteq A^\circ\subseteq A$. כלומר $y_n\in A$, בסתירה להנחה כי $(y_n)\subseteq X\setminus A$. לכן $x\in A^\circ$
לכן $x\in \bar{A}\setminus A^\circ$, לכן $x\in\partial A$, כנדרש.

<u>השלמת הוכחה:</u>

(1) $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ פתוחה, כאשר U_α פתוחות: נניח כי $x\in\bigcup U_\alpha$, אזי ישנו $\alpha\in I$ כך ש-$x\in U_\alpha$.
כיוון ש-U_α פתוחה, ישנו ε כך ש-$B(x,\varepsilon)\subseteq U_\alpha$. לכן: $B(x,\varepsilon)\subseteq U_\alpha\subseteq\bigcup U_\alpha$ לכן
$\bigcup U_\alpha$ פתוחה, כנדרש.

(2) במרחב מטרי (X,d), $F\subseteq X$ סגורה אמ"מ לכל $x_n\to x$, $(x_n)\subseteq F$, ~~מתקיים~~ $x\in F$.

* נניח כי F סגורה, $(x_n)\subseteq X$ מתכנסת ל-$x\in X$, ו-$x_n\subseteq F$! בשלילה, $x\in X\setminus F$.
F סגורה, לכן $X\setminus F$ פתוחה, לכן ישנו $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\subseteq X\setminus F$. x_n מתכנסת,
לכן כמעט לכל n, $x_n\in B(x,\varepsilon)\subseteq X\setminus F$. אבל אז $x_n\in F\cap(X\setminus F)$, סתירה. לכן $x\in F$.

* אם״כ, נניח כי לכל סדרה מתכנסת ל-x ! $(x_n)\subseteq F$, מתקיים $x\in F$. ~~ונניח~~
נניח בשלילה כי F איננה סגורה. אזי $X\setminus F$ איננה פתוחה. לכן ישנו $x_0\in X\setminus F$
כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $B_0(x_0,\frac{1}{n})\not\subseteq X\setminus F$. לכן
ניתן לבחור $B_0(x_0,\frac{1}{n})\cap F\neq\emptyset$ לכל n, לכן ניתן לבחור
x_n כזה בחיתוך. כך קיבלנו סדרה x_n, המתכנסת במרחב ל-x_0. אבל
$x_0\notin F$, בסתירה להנחה. לכן F סגורה, כנדרש.

3) יהיו (X,d) מרחב מטרי.

(א) הגדירו מהי קבוצה צפופה ב-X:

נאמר כי $A\subseteq X$ צפופה, אם $\bar{A}=X$.

(ב) נניח כי $D\subseteq X$ צפופה. עלינו להראות כי אם כל סדרת קושי ב-D מתכנסת ב-X, אזי X שלם.

נניח כי $(x_n)\subseteq X$ סדרת קושי. לכל $n\in\mathbb{N}$, ישנו $d_n\in D$ כך ש-$d(x_n,d_n)<\frac{1}{n}$, מצפיפות D ב-X (כי לכל $x\in X$ ישנה סדרה $d_n\subseteq D$ אשר מתכנסת ל-x, מצפיפות D ב-X)*

* (d_n) הנ"ל מהווה סדרת קושי, כי:

$$d(d_n,d_m)\underset{\uparrow}{\le} d(d_n,x_n)+d(x_n,x_m)+d(x_m,d_m)$$
אי"ש המשולש

כעת, אם $\varepsilon>0$ נתון, נבחר N כך ש-$\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{3}$ וגם N מקיים כי לכל $n,m>N$, $d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{3}$. ניתן לבחור כך כי (x_n) הינה סדרת קושי.

לכן: $d(x_n,d_n)<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{3}$, $d(x_m,d_m)<\frac{1}{m}<\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{3}$, $d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{3}$

לכן בסה"כ, $d(d_n,d_m)<\varepsilon$, לכן (d_n) מהווה סדרת קושי.

מההנחה, סק"ק ב-D מתכנסת ב-X, לכן $d_n\to x\in X$.

מתקיים: $x_n\to x$, כיוון ש: $d(x_n,x)\le d(x_n,d_n)+d(d_n,x)\longrightarrow 0$.

לכן x_n מתכנסת ל-$x\in X$, ולכן X מרחב שלם.

~~עזר: אם $A\subseteq X$ צפופה, אזי לכל $x\in X$ ישנה סדרה $a_n\subseteq A$ המקיימת $a_n\to x$!~~

~~הוכחה: $A\subseteq X$ צפופה, לכן $\bar{A}=X$. לכן, כל סגורה $F\subseteq X$ המכילה את A, מקיימת $F=X$.~~

טענה: עבור קבוצה כלשהי $A\subseteq X$, $\bar{A}=\{x\in X:\ \text{ישנה סדרה } x_n\subseteq A \text{ כך ש- } x=\lim x_n\}$.

הוכחה: נסמן את הקבוצה מימין ב-B. נשים לב ש-$A\subseteq B$, כי לכל $a\in A$, הסדרה הקבועה $x_n=a$ מתכנסת לa. כמו-כן, B סגורה, כי אם $(x_n)\subseteq B$ מתכנסת ל-$x\in X$, אזי לכל x_n ישנו $y_n\in A$ כך ש-$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$. נראה כי גם y_n מתכנסת ל-x, וזה יגרור ש-$x\in B$, מהגדרת הקבוצה.

$$d(y_n,x)\le d(y_n,x_n)+d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \implies x=\lim y_n$$

...ה המכילה את A, ולכן $\bar{A}\subseteq B$.

5) א- הגדירו מהי מסילה ב-$\mathbb{R}^n$, ומהי מסילה בעלת אורך.

<u>הגדרה:</u> ~~[illegible]~~ נאמר כי γ היא מסילה אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, העתקה רציפה.

2/2

~~[illegible]~~

עבור T, חלוקה של $[a,b]$, $T=\{a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\}$, נגדיר:

$$L(\gamma,T)=\|\gamma(t_1)-\gamma(t_0)\|+\|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\|+\dots+\|\gamma(t_n)-\gamma(t_{n-1})\|$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$$

נאמר כי γ בעלת אורך אם קיים $\sup_T L(\gamma,T)$
T חלוקה של הקטע $[a,b]$

ונסמן: $\ell(\gamma)=\sup_T L(\gamma,T)$.

6/6

ב- חשבו את אורכו של גרף הפונקציה $y=x^{\frac{3}{2}}$, בין הנקודות $x=0$ ו $x=1$.

נגדיר העתקה: $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, ע"י: $\gamma(t)=(t,t^{\frac{3}{2}})$. γ זו היא גרף הפונקציה $y=x^{\frac{3}{2}}$. γ הנ"ל מסילה, כיוון שהיא רציפה בכל רכיב.

כמו כן, γ גזירה ברציפות בקטע $[0,1]$ ו $\gamma'(t)=(1,\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}})$.

ראינו בשיעור טענה כי אם γ מסילה בעלת אורך גזירה ברציפות, המוגדרת על הקטע $[a,b]$, אז לכל $a\le t\le b$, $\ell(\gamma|_{[a,t]})=\int_a^t\|\gamma'(s)\|ds$.

נשים לב כי γ' ~~[illegible]~~ רציפה על קטע סגור, לכן גם $\|\gamma'\|$ רציפה על קטע סגור, לכן אינטגרבילית. כמו כן,

$$\|\gamma'(x)\|=\sqrt{(1)^2+(\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}=\sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+9x}=\frac{1}{2}(4+9x)^{\frac{1}{2}}.$$

8/8

$$\int_0^1\|\gamma'(x)\|dx=\int_0^1\frac{1}{2}(4+9x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(4+9x)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{27}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{(4+9x)^{\frac{3}{2}}}{27}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{(4+9)^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}}{27}$$

$$=\frac{(13)^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}}{27}=\int_0^1\|\gamma'(x)\|dx=\ell(\gamma).$$

על-מנת להראות הכלה בכיוון ההפוך, נניח כי $x\in B$ ו-$A\subseteq F$, סגורה כלש'.
נראה כי $x\in F$ ואז יגרור ש-$x\in\bar{A}$ (כי x נמצא בכל סגורה המכילה את A).
ואכן, כיוון ש-$x\in B$, ישנה סדרה $(a_n)\subseteq A$, כך ש-$x=\lim a_n$
לכן $a_n\subseteq F$. כיוון ש-F סגורה, מתקיים $x\in F$ (לפי משפט האפיון של
סגורות במרחב מטרי, ראינו בהרצאה והוכחנו בשאלה 1). לכן $\bar{A}\supseteq B$
ולכן $B=\bar{A}$.

כעת נותר רק להסביר מדוע לכל $x\in\bar{\Sigma}$ ישנה סדרה $D\subseteq\Sigma$ המתכנסת ל-x, אך
זה כבר ברור מהטענה הקודמת, כי $\Sigma=\bar{D}$ כולל $\bar{D}$ הוא אוסף כל הגבולות
החלקיים של איברים מ-D. וזה משלים את ההסבר.

4) א. הגדירו דיפרנציאביליות של פונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

נאמר כי f דיפרנציאבילית ב-$x\in\mathbb{R}^3$ אם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

כך ש-

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)-Ty}{\|y\|}=0$$

3/3

נאמר כי f דיפרנציאבילית על כל $\mathbb{R}^3$ אם לכל $x\in\mathbb{R}^3$ הנ"ל מתקיים *.

ב- נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(y^2-x,\ x^2-z^2,\ x^2z+yx)$.

הוכיחו שהיא דיפרנציאבילית על $\mathbb{R}^3$ וחשבו את נגזרתה.

טוענו כי אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ מקיימת כי $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ רציפה בסביבה של $a\in\mathbb{R}^n$, אז f

דיפרנציאבילית ב-a. כמו כן, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית אמ"מ לכל i, $g=(g_1,\dots,g_m)$

מתקיים כי g_i דיפרנציאבילית ב-a.

לכן די להראות כי $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{j=1}^{3}$ רציפות על $\mathbb{R}^3$, וזה יראה ש-f דיפרנציאבילית.

f_1 דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^3$ $\Leftarrow$ $\frac{\partial f_1}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}=0$

כי $\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}$ רציפות על $\mathbb{R}^3$

f_2 דיפרנציאבילית על $\mathbb{R}^3$ $\Leftarrow$ $\frac{\partial f_2}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}=-2z$

f_3 דיפרנציאבילית על $\mathbb{R}^3$ $\Leftarrow$ $\frac{\partial f_3}{\partial x}=2xz+y$, $\frac{\partial f_3}{\partial y}=x$, $\frac{\partial f_3}{\partial z}=x^2$

לכן f דיפרנציאבילית ב-$\mathbb{R}^3$.

כעת, נשים לב כי אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ גזירה ב-$x_0\in\mathbb{R}^n$, אז

$$D_f(x_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

4/4

לכן:

$$D_f(x_0,y_0,z_0)=\begin{pmatrix}-1 & 2y & 0\\ 2x & 0 & -2z\\ 2xz+y & x & x^2\end{pmatrix}$$

*: T הנ"ל אינה בהכרח נקבעת ביחידות על $\mathbb{R}^3$, והיא נקבעת לכל $x\in\mathbb{R}^3$

סעיף ג' במחברת מס' 2.

ג. נמצא את היעקוביאן של הפונקציה $f^{51} = \underbrace{f\circ\dots\circ f}_{51}$ בנקודה 1,0,1.

נזכר בכלל השרשרת: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$, f דיפ' ב-a,

g דיפ' ב-f(a), אזי $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ (המוגדרת ע"י $g\circ f(x) = g(f(x))$)

דיפרנציאבילית ב-a ו: $D_{g\circ f}(a) = D_g(f(a))\cdot D_f(a)$.

כמו-כן, מתקיים לכל $A,B\in M_3(\mathbb{R})$: $\det(A\cdot B)=\det(A)\det(B)$

לכן נקבל כי $\det(D_{g\circ f}(a)) = \det(D_g(f(a)))\cdot\det(D_f(a))$.

$f(1,0,1) = (-1,0,1)$, $f(-1,0,1) = (1,0,1)$

לכן:

$$\det\Big(D_{\underbrace{f\circ\dots\circ f}_{\text{51 פעמים}}}(1,0,1)\Big) = \det\Big(D_{\underbrace{f\circ\dots\circ f}_{\text{50 פעמים}}}(1,0,1)\Big)\cdot\det\big(D_f(f^{50}(1,0,1))\big)$$

נשים לב כי $f^2(1,0,1)=(1,0,1)$. (כשאנו מסמנים ב-f^k הרכבה של $f\circ\dots\circ f$ k פעמים)

$$\det(D_{f^2}(1,0,1)) = \det(Df(f(1,0,1)))\cdot\det(Df(1,0,1))$$

$$= \det(D_f(-1,0,1))\cdot\det(D_f(1,0,1)) = \det\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&0&2\\-2&-1&1\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&0&-2\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\det(D_f(-1,0,1))} (-1)\cdot(-2)\cdot 2 = 2\cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \det(D_{f^2}(1,0,1)) = 4$$

לכן באינדוקציה נקבל כי $4^k = \det(D_{f^{2k}}(1,0,1))$, ולכן

$$\det(D_{f^{51}}(1,0,1)) = \det(D_{f^{50}}(1,0,1))\cdot\det(D_f(1,0,1)) = 4^{25}\cdot\det\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&0&-2\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$= 4^{25}\cdot 2 = \boxed{2^{51} = J_{f^{51}}(1,0,1)}$$

9/9

10) הטענה $f(x)=x^3-3x^2+15$ העתקה פתוחה.

לא נכון! ל-f יש ~~מינימום~~ אקסטרמום מקומי ב $x=2$, כי $f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$ אמ"מ $x=0,2$. כמו-כן, $f''(x)=6x-6\neq 0$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

בנקודות $x=0,2$. לכן ניתן להתמקד ~~[illegible]~~ לסביבה מספיק

קטנה של 0, למשל ~~[illegible]~~ $(-1,1)$ אשר מועתקת לקבוצה

$(11,15]$ כלומר $f((-1,1))=(11,15]$, לכן f איננה פתוחה.

7) סדרת הפונקציות $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\cos nx$ היא אוסף פונקציות רציפות במידה אחידה.

לא נכון! עבור $\varepsilon=1$ ניתן למצוא x_n,y_n כך ש $d(x_n,y_n)=|x_n-y_n|<\frac{\pi}{2n}$ (לאיזה סדרה של פונקציות (f_n))

ופונקציה כך ש $|f_{n_k}(x_n)-f_{n_k}(y_n)|<1$ - עם שלה קיום מהצד מחוץ

עבור $\varepsilon=1$ ולכן סדרת הפונקציות איננה רציפה במידה אחידה.

ניקח: $x_n=0$, $y_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$. ~~אזי $f_n(x_n)=1$, $f_n(y_n)=0$~~

~~ולכן $|f_n(x_n)-f_n(y_n)|=1$ (אפילו, $|f_k(x_n)-f_k(y_n)|=1$, לכל k)~~

עיקרון

ניקח את תת הסדרה $(5n)$. אזי $f_{5n}(y_n)=\cos(\frac{5n}{n}\cdot\frac{\pi}{2})=0$, $f_{5n}(x_n)=1$

לכן עבור $\varepsilon=1$, לכל δ שנבחר, ניתן למצוא x_n y_n ~~[illegible]~~ כך ש

$d(x_n,y_n)<\delta$ עבור n מספיק גדול, וקיימת תת-סדרה (f_{n_k}) אשר

מקיימת: $|f_{n_k}(x_n)-f_{n_k}(y_n)|$ גדול $\Rightarrow$ (f_n) איננה רציפה במידה אחידה!

8) יהי (X,d) מרחב מטרי. אם לכל n טבעי ניתן לכסות את X ע"י n

כדורים פתוחים ברדיוס $\frac{1}{n}$, אזי X מרחב קומפקטי.

הטענה איננה נכונה!

נתבונן במרחב $X=(0,1)$. X זה אינו שלם, ולכן אינו קומפקטי.

לעומת זאת, X זה ניתן לכסוי ע"י n כדורים ברדיוס $\frac{1}{n}$, סביב הנקודות

$(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n})$ (בצירוף עוד אחד כדורים!)

9) יהיו $f=(f_1,f_2,f_3)$ שדה וקטורי משמר ב-$\mathbb{R}^3$, עם פונקציית פוטנציאל ϕ.

אזי $(\phi\cdot f_1, \phi\cdot f_2, \phi\cdot f_3)$ שדה משמר.

<u>הוכחה (טענה!).</u> נגדיר: $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $g(x,y,z)=\frac{1}{2}(\phi(x,y,z))^2$.

<u>מתקיים:</u>

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\phi(x,y,z)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z)=\phi(x,y,z)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z)$$

7

$$=\phi(x,y,z)\cdot f_1(x,y,z)=\phi\cdot f_1(x,y,z)$$

לפי כלל השרשרת: $x\mapsto x^2$, $(x,y,z)\mapsto\phi(x,y,z)$. באופן דומה

נקבל גם כי $\frac{\partial g}{\partial y}=\phi\cdot f_2(x,y,z)$; $\frac{\partial g}{\partial z}=\phi\cdot f_3(x,y,z)$

לכן g פונקציית פוטנציאל של ההעתקה $(\phi\cdot f_1,\phi\cdot f_2,\phi\cdot f_3)(x,y,z)$

לכן, ממשפט: שדה וקטורי משמר אמ״מ קיימת לו פונקציית פוטנציאל,

נקבל כי השדה הנ״ל משמר, כנדרש!