חשבון אינפיניטסימלי מתקדם 1

הסיכומים של דינה

מבוסס על הרצאות ותרגולים מאת: פרופ' רז קופרמן
מר אורי שפירא

ירושלים 2007

תוכן עניינים

מרחבים מטריים

הגדרות ודוגמאות

<u>הגדרה</u>: **מרחב מטרי** הוא זוג (X,d) כאשר X קבוצה לא ריקה ו- $d: X\times X \to \mathbb{R}$ פונקציה כך שלכל $x,y,z\in X$ מתקיימות התכונות הבאות:

1. סימטריה: $d(x,y)=d(y,x)$
2. חיוביות: $0\le d(x,y)$ ושוויון אמ"מ $x=y$
3. אי שוויון המשולש: $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

לפונקציה d קוראים **מטריקה** על המרחב.

<u>דוגמאות</u>: ההוכחה שאכן מדובר במרחבים מטריים היא פשוטה ומושארת לקורא.

1. הקבוצות $\mathbb{C},\mathbb{R}$ הן מרחבים מטריים אם מגדירים $d(x,y)=|x-y|$. זוהי המטריקה הטבעית על מרחבים אלה וכאשר נאמר "$\mathbb{C}$ (או $\mathbb{R}$) כמרחב מטרי" ללא לציין מטריקה במפורש הכוונה תהיה למטריקה זו.
נשים לב שההגדרה $d(x,y)=|x-y|$ אפשרית משום שמדובר במרחבים מטריים (בפרט הם מרחבים נורמיים). אבל מלכתחילה אין דרישה שמרחב מטרי יהיה מרחב וקטורי.
2. תהי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטנית עולה ממש. אזי הקבוצה $X=F(\mathbb{R})$ עם המטריקה $d(x,y)=|F(x)-F(y)|$ היא מרחב מטרי.
3. $\mathbb{R}^n$ מרחב מטרי עם המטריקה האוקלידית שמוגדרת ע"י $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$. זו המטריקה הטבעית על $\mathbb{R}^n$ ומעתה כשנדבר על $\mathbb{R}^n$ כמרחב מטרי ללא לציין במפורש מטריקה מסויימת הכוונה תהיה למטריקה הטבעית.
4. לכל קבוצה X ניתן להגדיר מטריקה באופן הבא:
$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x=y\end{cases}$$
קל לראות שאכן מדובר במטריקה. מטריקה זו נקראת המטריקה הדיסקרטית והמרחב נקרא מרחב דיסקרטי. זו אינה מטריקה מעניינת במיוחד אך היא משמשת פעמים רבות לבניית דוגמאות נגדיות.
5. ניקח $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ עם המטריקה
$$d(\vec{a},\vec{b})=\begin{cases}2^{-\min\{i:a_i\neq b_i\}} & \vec{a}\neq\vec{b}\\ 0 & \vec{a}=\vec{b}\end{cases}$$
המרחק בין שתי סדרות קטן ככל שיש להן רישות משותפות ארוכות יותר. קל להוכיח שזו אכן מטריקה.

הגדרה: **מרחב נורמי** הוא זוג $\left(X,\| \ \|\right)$ כאשר X מרחב וקטורי ו- $\| \ \|:X\to\mathbb{R}$ פונקצייה שמקיימת את התכונות הבאות לכל $x,y\in X$:

1. חיוביות: $0\le\|x\|$ ושוויון אמ"מ $x=0$
2. הומוגניות: לכל סקלר t $\|tx\|=|t|\|x\|$
3. אי שוויון המשולש: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

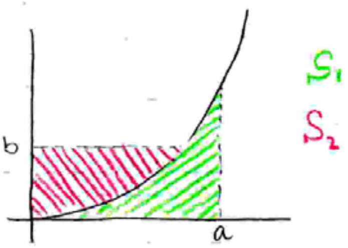
הפונקציה $\| \ \|$ נקראת **נורמה** על המרחב.

דוגמאות:

1. כל מרחב נורמי (מרחב מכפלה פנימית) הוא מרחב מטרי אם מגדירים $d(x,y)=\|x-y\|$.
מטריקה זו נקראת המטריקה המושרית ע"י הנורמה.
כמובן, לא כל מרחב מטרי הוא מרחב נורמי...
2. $\mathbb{C},\mathbb{R}$ מרחבים נורמיים עם הנורמה $\|x\|=|x|$.
3. לכל $1\le p$ מגדירים $l_p^n=\left(\mathbb{R}^n,\| \ \|_p\right)$ כאשר $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{1/p}$.
4. $l_\infty^n=\left(\mathbb{R}^n,\| \ \|_\infty\right)$ כאשר $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$.
5. אוסף הסדרות הממשיות האינסופיות שעבורן $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^\infty|x_i|^p\right)^{1/p}<\infty$ הוא מרחב נורמי שמסומן l_p.
6. $\mathfrak{C}[0,1]$ קבוצת כל הפוקנציות הרציפות מעל $[0,1]$ הוא מרחב נורמי תחת הנורמה המוגדרת ע"י $\|f\|_\infty=\max\limits_{0\le x\le1}\{|f(x)|\}$.

הערה: באופן טריוויאלי ברור שכל תת קבוצה של מרחב מטרי גם היא מרחב מטרי עם מטריקה שהיא המטריקה המקורית מצומצמת לתת הקבוצה.

אי שוויון יאנג: לכל $0\le a,b$ ולכל $1<p<\infty$ נגדיר $q=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$. אזי $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.



הוכחה א': נסתכל על גרף הפונקציה $y=x^{p-1}$ (כאן מוצג גרף קמור אבל קל להיווכח שההוכחה נכונה גם במקרה שהגרף קעור).
ברור שמתקיים $ab\le S_1+S_2$. אבל שטחים אלה אנחנו יכולים לחשב בקלות: $S_1=\int_0^a x^{p-1}dx=\left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a=\frac{a^p}{p}$ וכן

$$S_2=\int_0^b x^{\frac{1}{p-1}}dx=\left(\frac{1}{p-1}+1\right)^{-1}\left.x^{\frac{1}{p-1}+1}\right|_0^b=\frac{b^q}{q}.$$ ☺

הוכחה ב': יהיו $x=p\ln a,y=q\ln b$ (הם מוגדרים היטב משום ש- a,b חיוביים). אזי $e^{\frac{x}{p}}=e^{\frac{p\ln a}{p}}=e^{\ln a}=a$ ובאותו אופן $e^{\frac{y}{q}}=b$. תחת הגדרות אלה אנו רוצים להוכיח ש-

$$e^{\frac{1}{p}\cdot x+\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot y}=e^{\frac{x}{p}}\cdot e^{\frac{y}{q}}\le\frac{\left(e^{\frac{x}{p}}\right)^p}{p}+\frac{\left(e^{\frac{y}{q}}\right)^q}{q}=\frac{e^x}{p}+\frac{e^y}{q}=\frac{1}{p}\cdot e^x+\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot e^y$$

ידוע ש- $f(t)=e^t$ פונקציה קמורה ולכן לכל $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ ולכל $k\in[0,1]$ מתקיים

$$e^{kt_1+(1-k)t_2}=f\left(kt_1+(1-k)t_2\right)\le kf(t_1)+(1-k)f(t_2)=ke^{t_1}+(1-k)e^{t_2}$$

בפרט זה נכון עבור $t_1=x,t_2=y$ ו- $k=\frac{1}{p}$ (מאחר ש- $1<p<\infty$ מתקבל $0<k<1$) ואז

$e^{\frac{1}{p}\cdot x+\left(1-\frac{1}{p}\right)y}\le\frac{1}{p}\cdot e^x+\left(1-\frac{1}{p}\right)e^y$, אבל זה בדיוק מה שרצינו להוכיח. ☺

<u>אי שוויון הולדר</u>: יהיו $0\le x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$. אז לכל $1<p<\infty$ ו- $q=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\le\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

<u>הוכחה</u>: נשים לב ששני אגפי אי שוויון הומוגניים ב- x וב- y. לכן ניתן להניח ש- $\|x\|_p=\|y\|_q=1$. אז צריך להוכיח ש- $\sum_{i=1}^n x_iy_i\le 1$, אבל זה נובע מאי שוויון יאנג:

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\le\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i^p}{p}+\frac{y_i^q}{q}\right)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x_i^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n y_i^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$ ☺

<u>טענה</u>: לכל $1\le p$ $\|\ \|_p$ אכן נורמה.

<u>הוכחה</u>: החיוביות וההומוגניות ברורות. נראה שמתקיים אי שוויון המשולש. יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$.

אם $1<p<\infty$ נשתמש בתוצאות הקודמות:

$$\|x+y\|_p^p=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^p=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1}\overset{TI}{\le}$$

$$\overset{TI}{\le}\sum_{i=1}^n\left(|x_i|+|y_i|\right)|x_i+y_i|^{p-1}=\sum_{i=1}^n|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^n|y_i||x_i+y_i|^{p-1}\overset{Holder}{\le}$$

$$\overset{Holder}{\le}\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\|x+y\|_p^{p-1}$$

נחלק את שני האגפים ב- $\|x+y\|_p^{p-1}$ ונקבל את הדרוש.

אם $p=1$ זה ברור: $\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|\overset{TI}{\le}\sum_{i=1}^n\left(|x_i|+|y_i|\right)=\sum_{i=1}^n|x_i|+\sum_{i=1}^n|y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1$.

אם $p=\infty$ זה גם כן ברור:

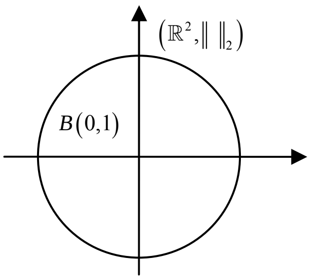
$$\|x+y\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\left\{|x_i+y_i|\right\}\overset{TI}{\le}\max_{1\le i\le n}\left\{|x_i|+|y_i|\right\}\le\max_{1\le i\le n}\left\{|x_i|\right\}+\max_{1\le i\le n}\left\{|y_i|\right\}=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty.$$ ☺

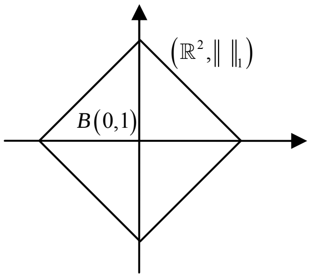
קבוצות מיוחדות במרחב מטרי

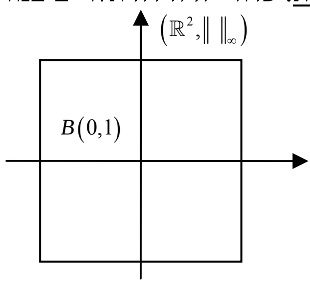
<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר את הקבוצות הבאות:

- **ספירה** ברדיוס a סביב הנקודה x - $S(x,a)=\{y\in X: d(y,x)=a\}$
- **כדור פתוח** ברדיוס a סביב הנקודה x - $B_o(x,a)=\{y\in X: d(y,x)<a\}$
- **כדור סגור** ברדיוס a סביב הנקודה הנקודה x - $B(x,a)=\{y\in X: d(y,x)\le a\}$

<u>דוגמאות</u>: כדורי היחידה תלויים בנורמה!!







<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. תת קבוצה $A\subset X$ תיקרא **חסומה** אם קיימים $0<r\in\mathbb{R}$ ו- $x\in X$ כך ש- $A\subset B(x,r)$. A תיקרא **פתוחה** ב- X אם לכל $x\in X$ קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש- $B_o(x,r)\subset A$. נסכים ש- $\varnothing$ קבוצה פתוחה ב- X.

<u>משפט</u>: בכל מרחב מטרי מתקיים:

1. כל חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה
2. כל איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה
3. כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה
4. קבוצה היא פתוחה אמ"מ היא איחוד של כדורים פתוחים

<u>הוכחה</u>:

1. יהיו $\{A_k\}_{k=1}^n$ קבוצות פתוחות ב- X. יהי $x\in\bigcap_{k=1}^n A_k$. קיימים $\{r_k\}_{k=1}^n$ כך ש- $B_o(x,r_k)\subset A_k$ לכל $1\le k\le n$. ניקח $0<r=\min_{1\le k\le n}\{r_k\}$. ברור ש- $B_o(x,r)\subset B_o(x,r_k)$ לכל $1\le k\le n$ ולכן $B_o(x,r)\subset\bigcap_{k=1}^n A_k$. כלומר $\bigcap_{k=1}^n A_k$ קבוצה פתוחה.
2. יהיו $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קבוצות פתוחות ב- X. יהי $x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$. קיים $0<r$ כך ש- $B_o(x,r)\subset A_\beta$ עבור $\beta\in I$ כלשהו. אבל $A_\beta\subset\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$. לכן $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ קבוצה פתוחה ב- X.
3. יהי $B_o(x,r)$ כדור פתוח ב- X. תהי $y\in B_o(x,r)$. נטען ש- $B_o(y,r-d(x,y))\subset B_o(x,r)$. ראשית נציין שברור ש- $0<r-d(x,y)$ שהרי לכל $y\in B_o(x,r)$ מתקיים $d(x,y)<r$. כעת, אם $z\in B_o(y,r-d(x,y))$ אז

$d(z,y)<r-d(x,y)$. אבל אז
$d(z,x)\le d(z,y)+d(y,x)<r-d(x,y)+d(y,x)=r$, כלומר $z\in B_o(x,r)$.

4. ($\Leftarrow$) נניח A פתוחה ב- X. אזי לכל $x\in A$ קיים r_x כך ש-$B_o(x,r_x)\subset A$. ואז $A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in A}B_o(x,r_x)$. אבל ברור ש-$\bigcup_{x\in X}B_o(x,r_x)\subset A$. לכן $\bigcup_{x\in X}B_o(x,r_x)=A$, כלומר A היא איחוד של כדורים פתוחים.
($\Rightarrow$) לפי סעיף (2) איחוד כלשהו של כדורים פתוחים הוא קבוצה פתוחה. לכם אם A היא איחוד של כדורים פתוחים אז A פתוחה. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. קבוצה $A\subset X$ תיקרא **סגורה** אם A^c פתוחה ב- X.

<u>טענה</u>: בכל מרחב מטרי מתקיים:
1. כל חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה
2. כל איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה
3. כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה

<u>הוכחה</u>:
1. נובע מהמשפט הקודם ומשימוש בכללי דה מורגן[1].
2. כנ"ל.
3. יהי $B(x,r)$ כדור סגור ב- X. נראה ש-$B(x,r)^c=\{y\in X:d(x,y)>r\}$ קבוצה פתוחה. נטען שאם $y\in\{y\in X:d(x,y)>r\}$ אז $B_o(y,d(y,x)-r)\subset B(x,r)^c$. ראשית, ברור ש- $0<d(y,x)-r$ שהרי לכל $y\notin B(x,r)$ מתקיים $r<d(y,x)$. כעת, יהי $z\in B_o(y,d(y,x)-r)$. אזי $d(z,y)<d(y,x)-r$. אבל אז
$d(x,z)\ge d(x,y)-d(y,z)>r$. כלומר $z\in B(x,r)^c$. ☺

<u>הערות</u>:
1. לכל (X,d) הקבוצות $X,\varnothing$ הן גם פתוחות וגם סגורות. $\varnothing$ פתוחה לפי ההגדרה ולכן $X=\varnothing^c$ סגורה. מצד שני גם X עצמו תמיד קבוצה פתוחה ולכן $\varnothing=X^c$ סגורה.
2. קיימות קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות, למשל קטעים חצי פתוחים חצי סגורים ב- $\mathbb{R}$. נסתכל על $[a,b)$. הקטע אינו פתוח כי עבור a לא קיים כדור פתוח $B_o(a,\varepsilon)$ כך ש-$B_o(a,\varepsilon)\subset[a,b)$. אבל הקטע גם אינו סגור משום שמסיבה דומה הקבוצה $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:x<a\vee x\ge b\}=(-\infty,a)\cup[b,\infty)$ אינה פתוחה.
3. חיתוך אינסופי של קבוצות פתוחות אינו בהכרח קבוצה פתוחה. למשל נסתכל על הסדרה $\left(\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$. ברור ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$ וזוהי כמובן קבוצה סגורה.

---

[1] כללי דה מורגן: בהינתן קבוצה A, משפחה לא ריקה $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ של קבוצות וקבוצ אינדקסים Γ כך ש- $I=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}I_\gamma$
אזי:
- $\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$
- $\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

4. באותו אופן איחוד אינסופי של קבוצות סגורות אינו בהכרח קבוצה סגורה. למשל נסתכל על הסדרה $\left(\left[\frac{1}{n},1\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$. זוהי סדרה של קבוצות סגורות ב- $\mathbb{R}$ אבל $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1\right]=(0,1]$ וזאת לא קבוצה סגורה.

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. כל יחידון $\{x\}\subset X$ הוא קבוצה סגורה ב- X.

<u>הוכחה</u>: נסתכל על $\{x\}^c$. אם $y\in\{x\}^c$ אז $y\neq x$ ולכן $0<d(x,y)$. ניקח $r=d(x,y)$. אז $B_o(y,r)\subset\{x\}^c$. ☺

<u>מסקנה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי כל קבוצה סופית A היא סגורה ב- X.

<u>הוכחה</u>: A היא סופית ולכן היא איחוד סופי של יחידונים, כלומר היא איחדו סופי של קבוצות סגורות. אבל איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה. ☺

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי בדיד. אזי כל $A\subset X$ היא גם פתוחה וגם סגורה.

<u>הוכחה</u>: ראינו שכל יחידון הוא סגור. אבל ברור גם שכל יחידון הוא פתוח, כי לכל $x\in X$ מתקיים $B_o\left(x,\frac{1}{2}\right)=\{x\}\subset\{x\}$. כל קבוצה A היא איחוד של יחידונים פתוחים ולכן היא פתוחה. אבל גם A^c היא איחוד של יחידונים פתוחים ולכן פתוחה. ולכן A סגורה. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. סדרה $(x_n)\subset X$ נקראת **מתכנסת** אם קיימת נקודה $x\in X$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$. במקרה זה נסמן $x=\lim_{n\to\infty}x_n$ או $x_n\to x$ ו- x נקרא **הגבול** של הסדרה.

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $(x_n)\subset X$ סדרה מתכנסת. אזי הגבול הוא יחיד.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $x_n\to x$ וגם $x_n\to x'$. נניח בשלילה ש- $x\neq x'$. ניקח $0<\varepsilon=\frac{d(x',x)}{2}$. קיים $N_x\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N_x<n$ מתקיים $d(x_n,x)<\frac{d(x',x)}{2}$ אבל גם קיים $N_{x'}\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N_{x'}>n$ מתקיים $d(x_n,x')<\frac{d(x',x)}{2}$. יהי $N=\max\{N_x,N_{x'}\}$. אזי לכל $N<n$ מתקיים גם $d(x_n,x)<\frac{d(x',x)}{2}$ וגם $d(x_n,x')<\frac{d(x',x)}{2}$. אבל זה לא יכול להיות. יהי $N<k$ כלשהו. אז $d(x,x')\le d(x,x_k)+d(x_k,x')<\frac{d(x,x')}{2}+\frac{d(x,x')}{2}=d(x,x')$. וזו סתירה. ☺

<u>משפט</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $A\subset X$ תת קבוצה. אזי A סגורה ב- X אמ"מ לכל סדרה מתכנסת $(x_n)\subset A$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}x_n\in A$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- A סגורה. תהי $(x_n)\subset A$ סדרה מתכנסת כך ש- $x_n\to x\in X$ נניח בשלילה ש- $x\notin A$, כלומר $x\in A^c$. אבל A^c קבוצה פתוחה. לכן קיים $0<\varepsilon$ כך ש- $B_o(x,\varepsilon)\subset A^c$. אבל עבור ε זה

קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $d(x_n,x)<\varepsilon$, כלומר $x_n\in B_o(x,\varepsilon)\subset A^c$, בסתירה לכך ש-$x_n\in A$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

($\Rightarrow$) נניח שלכל סדרה מתכנסת $(x_n)\subset A$ מתקיים $x_n\to x\in A$. נראה ש-A^c פתוחה. נניח שהיא אינה פתוחה. אזי קיים $y\in A^c$ כך שלכל $0<\varepsilon$ מתקיים $B_o(y,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$. נבנה סדרה באופן הבא: לכל $n\in\mathbb{N}$ נבחר $y_n\in B_o\left(y,\frac{1}{n}\right)\cap A$. אזי $0\le d(y_n,y)<\frac{1}{n}\to 0$, כלומר $y_n\to y$. אבל $(y_n)\subset A$ ואילו $y\notin A$. בסתירה להנחה. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $A\subset X$ תת קבוצה.

- **הפנים** של A מוגדר ע"י $A^\circ=\bigcup\limits_{\substack{B\subset A\\ B\text{ is open}}}B$.
- **הסגור** של A מוגדר ע"י $\overline{A}=\bigcap\limits_{\substack{B\supset A\\ B\text{ is closed}}}B$.
- **השפה** של A מוגדרת ע"י $\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ=\overline{A}\cap\left(A^\circ\right)^c$.

<u>הערות</u>:

1. הפנים הוא איחוד של קבוצות פתוחות ולכן הוא קבוצה פתוחה. ברור לפי ההגדרה שזו הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-A.
2. הסגור הוא חיתוך של קבוצות סגורות ולכן הוא קבוצה סגורה. ברור לפי ההגדרה שהסגור הוא הקבוצה הסדורה המינימלית שמכילה את A.
3. השפה היא חיתוך של שתי קבוצות סגורות ולכן היא קבוצה סגורה.

<u>דוגמה</u>: נסתכל על $\mathbb{R}$ כמרחב מטרי ועל תת הקבוצה $\mathbb{Q}$. לא קיימת קבוצה פתוחה על הישר אשר מוכלת ברציונליים ולכן $\mathbb{Q}^\circ=\varnothing$. מצד שני הקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את כל הממשיים היא $\mathbb{R}$ עצמה. לכן $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. מכאן השפה של הרציונליים היא $\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}\setminus\varnothing=\mathbb{R}$.

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A\subset X$ תת קבוצה. אזי A פתוחה וסגורה ב-X אמ"מ $\partial A=\varnothing$.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש-A פתוחה וסגורה. אזי $A=\overline{A}=A^\circ$. לכן $\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ=A\setminus A=\varnothing$.

($\Rightarrow$) נניח ש-$\partial A=\varnothing$. אם $\overline{A}=\varnothing$ אזי כמובן $A=\varnothing$ ולכן היא פתוחה וסגורה. אחרת, $\overline{A}=A^\circ$. אבל $A^\circ\subset A\subset\overline{A}$ ולכן $A^\circ=A=\overline{A}$ ומכאן ש-A פתוחה וסגורה. ☺

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A\subset X$ תת קבוצה. אזי הסגור של A הוא אוסף כל הנקודות שהן גבול של סדרה המוכלת ב-A.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $B=\left\{x\in X:\exists(x_n)\subset A\, x_n\to x\right\}$ ונראה ש-$\overline{A}=B$.

($\subset$) נראה ש-B קבוצה סגורה. יהי $x\in B^c$. נניח שלא קיים $0<\varepsilon$ כך ש-$B_o(x,\varepsilon)\cap B=\varnothing$. אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ ניקח $y_n\in B_o\left(x,\frac{1}{n}\right)\cap B$. ברור ש-$y_n\to x$ אבל B סגורה ולכן לא יכול להיות שהגבול של $(y_n)\subset B$ הוא $x\notin B$. מכאן ש-B סגורה. מצד שני, ברור ש-$A\subset B$ כי לכל $x\in A$ ניתן לקחת $x_n\equiv x$. כעת מהמינימליות של $\overline{A}$ נובע ש-$\overline{A}\subset B$.

($\supset$) יהי $x \in B$ ותהי $(x_n) \subset A$ כך ש- $x_n \to x$. ברור שגם $(x_n) \subset \bar{A}$ שהרי $A \subset \bar{A}$, אבל $\bar{A}$ סגורה ולכן $x \in \bar{A}$. כלומר $B \subset \bar{A}$. ☺

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי ויהיו $A,B \subset X$. אזי $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

<u>הוכחה</u>: יהי $x \in \overline{A \cap B}$. אזי קיימת סדרה $(x_n) \subset A \cap B$ כך ש- $x_n \to x$. בפרט $(x_n) \subset A$ ולכן $x \in \bar{A}$ וכן $(x_n) \subset B$ ולכן $x \in \bar{B}$. מכאן ש- $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. ☺

<u>הערה</u>: ההכלה בכיוון השני לא תמיד מתקיימת. למשל, נסתכל על $\mathbb{R}$ כמרחב מטרי ועל $A = [0,1), B = (1,2]$. ברור ש- $\overline{A \cap B} = \varnothing$ אבל $\bar{A} \cap \bar{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי לכל $x \in X$ ולכל $0 < r$ $B_o(x,r) \subset (B(x,r))^\circ$ ו- $\overline{B_o(x,r)} \subset B(x,r)$.

<u>הוכחה</u>: $B_o(x,r) \subset B(x,r)$ וכדור פתוח הוא קבוצה פתוחה. לכן לפי ההגדרה $B_o(x,r) \subset (B(x,r))^\circ$ ו- $\overline{B_o(x,r)} \subset B(x,r)$. ☺

<u>הערה</u>: מה שחשוב בטענה הקודמת הוא להבין שאין שוויונים (בניגוד לאינטואיציה האוקלידית שלנו). למשל, במרחב דיסקרטי (X,d) מתקיים $B_o(x,1) = \{x\}$ אבל $B(x,1) = X$ ולכן $(B(x,1))^\circ = X$ ו- $\overline{B_o(x,1)} = \{x\}$.

<u>טענה</u>: יהי (Y,d) תת מרחב מטרי של (X,d). אזי תת קבוצה $A \subset Y$ פתוחה ב- Y אמ"מ היא חיתוך של Y עם קבוצה פתוחה ב- X.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- $A \subset Y$ פתוחה ב- Y. אזי לפי משפט קודם Y היא איחוד של כדורים פתוחים ב- Y - $A = \bigcup_{\alpha \in I} B_o^Y(y_\alpha, r_\alpha)$. אבל

$B_o^Y(y_\alpha, r_\alpha) = \{y \in Y : d(y_\alpha, y) < r_\alpha\} = \{y \in X : d(y_\alpha, y) < r_\alpha\} \cap Y = B_o(y_\alpha, r_\alpha) \cap Y$.

כלומר $A = \bigcup_{\alpha \in I} (B_o(y_\alpha, r_\alpha) \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_o(y_\alpha, r_\alpha)\right) \cap Y$. והרי $\bigcup_{\alpha \in I} B_o(y_\alpha, r_\alpha)$ היא קבוצה פתוחה ב- X.

($\Rightarrow$) נניח ש- $A = B \cap Y$ כאשר B קבוצה פתוחה ב- X. יהי $x \in A$. אזי $x \in B$ ולכן קיים $0 < r$ כך ש- $B_o(x,r) \subset B$. אזי $B_o(x,r) \cap Y \subset B \cap Y$. אבל $B_o(x,r) \cap Y = \{y \in Y : d(x,y) < r\} = B_o^Y(x,r)$. ומכאן ש- $B_o^Y(x,r) \subset B \cap Y = A$, כלומר A פתוחה ב- Y. ☺

מרחבים מטריים קומפקטיים

<u>הגדרה</u>: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ נקרא **קומפקטי** אם לכל סדרה $\left(x_n\right)\subset X$ קיימת תת סדרה מתכנסת. תת קבוצה $K\subset X$ נקראת **קומפקטית** אם היא קומפקטית כמרחב מטרי מושרה $\left(K,d|_K\right)$.

<u>דוגמאות</u>:

1. כל קטע סגור $\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}$ הוא קבוצה קומפקטית. לפי משפט בולצאנו ויירשטראס לכל סדרה $\left(x_n\right)\subset\left[a,b\right]$ יש תת סדרה מתכנסת ב- $\mathbb{R}$ (שהרי הקטע חסום). מאחר שהקטע $\left[a,b\right]$ סגור הגבול הוא בעצמו בקטע.
2. כל קטע $\left(a,b\right)\subset\mathbb{R}$ אינו קבוצה קומפקטית. למשל לסדרה $x_n=a+\dfrac{1}{n}$ לא קיימת תת סדרה מתכנסת ב-$\left(a,b\right)$. ב- $\mathbb{R}$ הסדרה מתכנסת ומתקיים $x_n\to a$. לכן כל תתסדרה של $\left(x_n\right)$ מתכנסת גם היא לאותו גבול. אבל $a\notin\left(a,b\right)$, לכן בתוך הקטע הפתוח $\left(a,b\right)$ לא קיימת תת סדרה מתכנסת.
3. כל קבוצה סופית היא קומפקטית, שהרי בסדרה שקבוצת האיברים שלה סופית לפחות אחד מהאיברים חייב לחזור על עצמו אינסוף פעמים וזאת תהיה תת סדרה מתכנסת.

<u>טענה</u>: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב דיסקרטי. אזי $A\subset X$ קומפקטית אמ"מ A סופית.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$ תהי $A\subset X$ קומפקטית. ונניח בשלילה ש-A אינסופית. יהי $x_1\in A$ כלשהו. נמשיך באינדוקציה. נניח שבחרנו $x_1,...,x_k\in A$ כך שלכל $i\neq j$ $x_i\neq x_j$. A אינסופית ולכן יש בה אינסוף איברים שונים. לכן קיים $x_{k+1}\in A$ כך ש-$x_{k+1}\neq x_i$ לכל $1\le i\le k$. באופן הזה בנינו סדרה $\left(x_n\right)\subset A$. מאחר שכל איברי הסדרה הם שונים לכל $i\neq j$ מתקיים $d\left(x_i,x_j\right)=1$. לכן לא יכולה להיות קיימת תת סדרה מתכנסת של A, בסתירה להנחת הקומפקטיות.

$(\Rightarrow)$ כבר אמרנו זאת בדוגמה (3). ☺

<u>טענה</u>: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהיינה $\left\{K_i\right\}_{i=1}^{n}$ קבוצות קומפקטיות. אזי $\bigcup_{i=1}^{n}K_i$ קבוצה קומפקטית.

<u>הוכחה</u>: תהי $\left(x_n\right)\subset\bigcup_{i=1}^{n}K_i$ סדרה. קיים $1\le j\le n$ כך שאינסוף מאיברי הסדרה נמצאים ב- K_j. כלומר קיימת תת סדרה $\left(x_{n_k}\right)\subset K_j$. אבל K_j קבוצה קומפקטית ולכן קיימת תת סדרה מתכנסת $x_{n_{k_l}}\to x\in K_j$. אבל $\left(x_{n_{k_l}}\right)$ תת סדרה של $\left(x_n\right)$. כלומר מצאנו תת סדרה של $\left(x_n\right)$ שמתכנסת ל- $x\in K_j\subset\bigcup_{i=1}^{n}K_i$. ☺

<u>טענה</u>: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהי $K\subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי K סגורה וחסומה.

<u>הוכחה</u>:

תהי $\left(x_n\right)\subset K$ סדרה מתכנסת. כל תת הסדרות שלה מתכנסת לאותו גבול, נניח $x_n\to x$. אבל בגלל הקומפקטיות של K מתקיים $x\in K$. לכן K סגורה.

כדי להראות ש-K חסומה יש להראות שקיים $x \in X$ וקיים $0 < r$ כך ש-$K \subset B(x,r)$. נניח בשלילה שלכל $x \in K$ ולכל $0 < r$ מתקיים $K \not\subset B(x,r)$. יהי $a \in K$ כלשהו כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $K \not\subset B(a,n)$ ולכן קיימת נקודה $x_n \in K$ כך ש-$d(a,x_n) \geq n$. לכל $x \in X$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(a,x) + d(x,x_n) \geq d(a,x_n) \geq n$. לכן אין תת סדרה של (x_n) המתכנסת ל-x בניגוד להנחת הקומפקטיות. לכן K חסומה. ☺

<u>הערה</u>: אם קבוצה היא סגורה וחסומה זה לא בהכרח אומר שהיא קומפקטית. למשל, במרחב דיסקרטי כל קבוצה $A \subset X$ היא סגורה וחסומה (למשל ע"י $B(x,2)$ עבור $x \in A$ כלשהו). אבל ראינו שקבוצה במרחב דיסקרטי היא קומפקטית אמ"מ היא סופית וזה לא בהכרח נכון.

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב קומפקטי. אזי תת קבוצה $K \subset X$ היא קומפקטית אמ"מ היא סגורה.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) ראינו בטענה הקומת שכל קבוצה קומפקטית היא סגורה.
($\Rightarrow$) נניח ש-K סגורה. תהי $(x_n) \subset K$. בפרט $(x_n) \subset X$, אבל X קומפקטי ולכן קיימת תת סדרה (x_{n_k}) כך ש-$x_{n_k} \to x \in X$. אבל $(x_{n_k}) \subset K$ ו-K סגורה. לכן $x \in K$. מכאן ש-K קומפקטית. ☺

<u>משפט</u>: נסתכל על $\mathbb{R}^m$ כמרחב מטרי. כל $A \subset \mathbb{R}^m$ היא קומפקטית אמ"מ היא סגורה וחסומה.
<u>הוכחה</u>:
($\Leftarrow$) את הכיוון הזה כבר ראינו בטענה קודמת.
($\Rightarrow$) נניח ש-A סגורה וחסומה. אזי קיים $0 < M$ כך שלכל $x = (x^1,...,x^m) \in A$ מתקיים $|x^j| < M$ לכל $1 \leq j \leq m$. תהי $(x_n) = ((x_n^1,...,x_n^m)) \subset A$. ע"י הפעלה חוזרת ($m$ פעמים – פעם לכל קואורדינטה) של משפט בולאנו ויירשטראס ניתן לבחור תת סדרה (x_{n_k}) כך ש-$x_{n_k}^j \to x^j$ לכל $1 \leq j \leq m$. נגדיר $x = (x^1,...,x^m)$. אזי $d(x_{n_k},x) \leq m \cdot \max_{1 \leq j \leq m} |x_{n_k}^j - x| \to 0$. לכן $x_{n_k} \to x$ ב-$\mathbb{R}^m$. אבל בגלל הסגירות $x \in A$, כלומר A קומפקטית. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי ויהיו $a \in X$, $A,B \subset X$. נגדיר את המרחק בין a ל-A ואת המרחק בין A ל-B ע"י:

$$d(a,A) = \inf_{z \in A} d(a,z)$$
$$d(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y)$$

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי ויהיו $A,B \subset X$ תת קבוצות זרות, סגורות ולפחות אחת מהן קומפקטית. אזי $0 < d(A,B)$.
<u>הוכחה</u>: בה"כ A קומפקטית. ברור ש-$0 \leq d(A,B)$. נניח בשלילה ש-$d(A,B) = 0$. אזי $\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y) = 0$. לכן קיימות סדרות $(x_n) \subset A, (y_n) \subset B$ כך ש-$d(x_n,y_n) \to 0$. אבל A קומפקטית ולכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x \in A$. אבל $d(x_{n_k},y_{n_k}) \to 0$ כי זו תת סדרה של סדרה מתכנסת ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות חייב להיות גם $y_{n_k} \to x$. אבל B סגורה ולכן $x \in B$ בסתירה לכך ש-$A \cap B = \emptyset$. ☺

דוגמה: נסתכל על הקבוצות $A=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ ו- $B=\left\{\left(x,\frac{1}{x}\right):0<x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathbb{R}^2$. ברור ש- $A\cap B=\varnothing$. אבל בכל זאת מתקיים $d(A,B)=0$. זה לא בא בסתירה לטענה הקודמת משום שאף אחת מהקבוצות אינה קומפקטית, שהרי הן אינן חסומות.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. אוסף $\mathcal{F}$ של תת קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של X נקרא **כיסוי** של X אם $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=X$. כיסוי נקרא **סופי** אם יש בו מספר סופי של קבוצות. כסוי נקרא **פתוח** אם לכל $\alpha\in I$ A_α פתוחה ב- X. **תת כיסוי** הוא אוסף חלקי של $\mathcal{F}$ שמכסה את X.

דוגמה: נסתכל $\mathbb{R}$ כמרחה מטרי. אזי $\mathcal{F}=\{(n-1,n+1):n\in\mathbb{N}\}$ הוא כיסוי פתוח של $\mathbb{R}$, אבל כל תת אוסף סופי של $\mathcal{F}$ אינו כיסוי של $\mathbb{R}$, שהרי כל הקבוצות בכיסוי חסומות ואילו $\mathbb{R}$ אינו חסום.

למה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ויהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח. קיים $0<\varepsilon$ כך שכל כדור $B_o(x,\varepsilon)$ מוכל באחת מהקבוצות המכסות.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים כדור $B_o\left(x_n,\frac{1}{n}\right)$ שאינו מוכל באף קבוצה A_α. X קומפקטי, אז תהי (x_{n_k}) תת סדרה כך ש- $x_{n_k}\to x\in X$. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי לכן קיים $\alpha\in I$ כך ש- $x\in A_\alpha$. אבל A_α פתוחה אז קיים $0<r$ כך ש- $B_o(x,r)\subset A_\alpha$. קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$ וגם $d(x_n,x)<\frac{r}{2}$. לכן $B_o\left(x_n,\frac{1}{n}\right)\subset B_o(x,r)\subset A_\alpha$ בסתירה להנחה. ☺

למה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. אזי לכל $0<\varepsilon$ קיים כיסוי סופי של X בעזרת כדורים פתוחים ברדיוס ε.

הוכחה: יהי $x_1\in X$ כלשהו. אם $B_o(x_1,\varepsilon)=X$ סיימנו. אחרת, קיימת נקודה $x_2\in\left(B_o(x_1,\varepsilon)\right)^c$. אם $B_o(x_1,\varepsilon)\cup B_o(x_2,\varepsilon)=X$ סיימנו. אחרת נמשיך באותו אופן. אם התהליך נגמר אז סיימנו. אחרת נקבל סדרה $(x_n)\subset X$ כך שלכל $i\neq j$ $d(x_i,x_j)\geq\varepsilon$ ואז לא ייתכן שיש לה תת סדרה מתכנסת בסתירה להיות X קומפקטי. לכן התהליך חייב להיות סופי. ☺

הערה: הכיוון השני אינו בהכרח נכון. למשל את הקטע $(0,1)$ ניתן לכסות ע"י מספר סופי של קטעים באורך ε אבל הוא אינו קומפקטי.

משפט היינה בורל: יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי שלוש התכונות הבאות שקולות:

1. X קומפקטי
2. לכל כיסוי פתוח $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קיים תת כיסוי סופי
3. לכל אוסף של קבוצות סגורות $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך שכל חיתוך סופי של איברים מהאוסף אינו ריק, מתקיים ש- $\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$ אינו ריק.

הוכחה:

$(3 \Leftrightarrow 2)$ בשלב זה F_α מסמל קבוצה סגורה ו- J מסמל קבוצה סופית.

$$\forall\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha^c = X \Rightarrow \exists J\subset I\ s.t\bigcup_{\alpha\in J}F_\alpha^c = X$$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\left(\bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha^c\right)^c = \varnothing \Rightarrow \exists J\subset I\ s.t\left(\bigcup_{\alpha\in J}F_\alpha^c\right)^c = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha = \varnothing \Rightarrow \exists J\subset I\ s.t\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow\quad \forall\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\forall J\subset I\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha \neq \varnothing \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha \neq \varnothing$$

$(3 \Leftarrow 1)$ תהי $(x_n)\subset X$ סדרה כלשהי. נתבונן בתת הקבוצות $A_n=\{x_n,x_{n+1},...\}\subset X$. ברור שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $A_{n+1}\subset A_n$. לכן אם $n<m$ אז $A_n\cap A_m = A_m$. באותו אופן קל לראות שכל חיתוך סופי אינו ריק. אבל $A_n\subset\overline{A_n}$ ולכן גם כל חיתוך סופי של הסגורים אינו ריק. מהנתון נובע ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\neq\varnothing$, כלומר קיים $x\in\overline{A_n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. לכן לכל $k\in\mathbb{N}$ קיימת נקודה $x_{n_k}\in A_k$ כך ש- $d\left(x_{n_k},x\right)<\frac{1}{k}$ ולכן $x_{n_k}\to x$. כלומר מצאנו תת סדרה מתכנסת. לכן X קומפקטי.

$(2 \Leftarrow 1)$ נניח ש- X קומפקטי ו- $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח. מלמה קודמת קיים $0<\varepsilon$ כך שלכל כדור $B_o(x,\varepsilon)$ קיים $\alpha\in I$ כך ש- $B_o(x,\varepsilon)\subset A_\alpha$. מלמה אחרת קיימות נקודות $a_1,...,a_n$ כך ש- $X=\bigcup_{i=1}^{n}B_o(a_i,\varepsilon)\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_{\alpha_i}\subset X$. ☺

<u>הגדרה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. תת קבוצה $A\subset X$ נקראת **צפופה** אם $\bar{A}=X$.

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A\subset X$. אזי A צפופה אמ"מ כל קבוצה פתוחה ב- X חותכת את A.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$ נניח שקיימת $B\subset X$ פתוחה כך ש- $A\cap B=\varnothing$. ב- B קיימת נקודה פנימית כלשהי x. מאחר שזו נקודה פנימית לא יכולה להיות סדרה ב- A שמתכנסת ל- x. אבל $x\in X=\bar{A}$. וזאת סתירה.

$(\Rightarrow)$ נראה שלכל $x\in X$ קיימת $(x_n)\subset A$ כך ש- $x_n\to x$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נסתכל על הכדור הפתוח $B_o\left(x,\frac{1}{n}\right)$. לפי ההנחה בכל אחת מאלה יש נקודה $x_n\in A$. וברור ש- $x_n\to x$. ☺

<u>הגדרה</u>: מרחב מטרי (X,d) נקרא **ספרבילי** אם הוא מכיל קבוצה צפופה בת מניה.

<u>טענה</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. אזי X ספרבילי.

<u>הוכחה</u>: לכל $k\in\mathbb{N}$ נבחר מספר סופי של נקודות $\{x_1^k,...,x_{n_1}^k\}$ כך ש- $X=\bigcup_{i=1}^{n_k}B_o\left(x_i^k,\frac{1}{k}\right)$. אזי הקבוצה $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_1^k,...,x_{n_k}^k\}$ בת מניה. נטען שקבוצה זו צפופה ב- X. יהי $x\in X$. נראה שלכל $0<\varepsilon$ קיים $y\in A$ כך ש- $d(x,y)<\varepsilon$ ומכאן ינבע שקיימת סדרה $(y_n)\subset A$ כך ש- $y_n\to x$,

כלומר $X=\overline{A}$. ואכן, יהי $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{2}{n}<\varepsilon$. קיים כדור פתוח $B_o\left(y,\frac{1}{n}\right)$ כך ש- $x\in B_o\left(y,\frac{1}{n}\right)$.

לכן $d\left(y,x\right)<\frac{2}{n}<\varepsilon$. ☺

<u>טענה</u>: תהי $\left(\left(X_n,\rho_n\right)\right)$ סדרה של מרחבים מטריים קומפקטיים כך ש- $\rho_n\left(x,y\right)\le 1$ לכל $x,y\in X_n$.

נגדיר $X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ ולכל $\left(x_n\right),\left(y_n\right)\in X$ $\rho\left(\left(x_n\right),\left(y_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\rho_n\left(x_n,y_n\right)$. אזי $\left(X,\rho\right)$ מרחב מטרי קומפקטי.

<u>הוכחה</u>:

ראשית יש להראות ש- $\left(X,\rho\right)$ מרחב מטרי, כלומר ש- $\rho:X\to\mathbb{R}$ מגדירה מטריקה על X.

- סימטריה: ברור מהסימטריה של ρ_n.
- חיוביות: ברור מההגדרה ש- $0\le\rho\left(\left(x_n\right),\left(y_n\right)\right)$. כמו כן ברור שאם $\left(x_n\right)=\left(y_n\right)$ אז $\rho_n\left(x_n,y_n\right)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $\rho\left(\left(x_n\right),\left(y_n\right)\right)=0$ וכן מאחר שהמחוברים אי שליליים כולם אם $\rho\left(\left(x_n\right),\left(y_n\right)\right)=0$ אז כל אחד מהמחוברים חייב להתאפס מה שבתורו מעיד על כך ש- $x_n=y_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ או $\left(x_n\right)=\left(y_n\right)$.
- אי שוויון המשולש: יהיו $\left(x_n\right),\left(y_n\right),\left(z_n\right)\in X$. אזי

$$d\left(\left(x_n\right),\left(z_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\rho_n\left(x_n,z_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left(\rho_n\left(x_n,y_n\right)+\rho_n\left(y_n,z_n\right)\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\rho_n\left(x_n,y_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\rho_n\left(y_n,z_n\right)=d\left(\left(x_n\right),\left(y_n\right)\right)+d\left(\left(y_n\right),\left(z_n\right)\right)$$

כעת נראה שהמרחב קומפקטי.

תהי $\left(\vec{x}^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}\subset X$ סדרה. לכל $k\in\mathbb{N}$ נסמן את הקואורדינטות $\vec{x}^{(k)}=x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)},\dots$. נשים לב שלכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים ש- $\left(x_i^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}\subset X_i$ סדרה במרחב קומפקטי.

תהי $\left(k_m^1\right)_{m=1}^{\infty}$ סדרה עולה של טבעיים כך ש- $\left(x_1^{k_m^1}\right)_{m=1}^{\infty}\subset X_1$ מתכנסת ל- $y_1\in X_1$. נמשיך באינדוקציה. נניח שמצאנו $\left(k_m^1\right)_{m=1}^{\infty},\dots,\left(k_m^n\right)_{m=1}^{\infty}$ סדרות עולות ממש של טבעיים כך שלכל $1\le i<n$ $\left(k_m^{i+1}\right)$ תת סדרה של $\left(k_m^i\right)$ ולכל $1\le i\le n$ $x_i^{k_m^i}\xrightarrow[m\to\infty]{}y_i\in X_i$. X_{n+1} מרחב קומפקטי ולכן לסדרה $\left(x_{n+1}^{k_m^n}\right)\subset X_{n+1}$ יש תת סדרה מתכנסת $x_{n+1}^{k_m^{n+1}}\xrightarrow[m\to\infty]{}y_{n+1}$. את התהליך הזה ניתן לעשות כל מספר גדול ככל שיהיה (אך סופי) פעמים.

נספח א' – סיכום הגדרות

נספח ב' – סיכום משפטים, טענות ולמות

נספח ג' – משפטים מרכזיים ותמציות הוכחות

אינדקס