① 24.10.06
אינפי

אדמיניסטרציה

המרצה: רז קופרמן (והוא אדיר - כל מי שלו יודע)

כל מי שרוצה יתפוס אותו (בקשר למשהו שלא הבין או משהו שהבין יותר מדי) מומלץ לשלוח אי מייל או להתקשר לקבוע.

מנצ'סטר 303 טל' 6584159 raz@math.huji.ac.il

המתרגלים - אורי שפירא ועדו סאט - בקיאים בחומר ומתרגלים טובים.

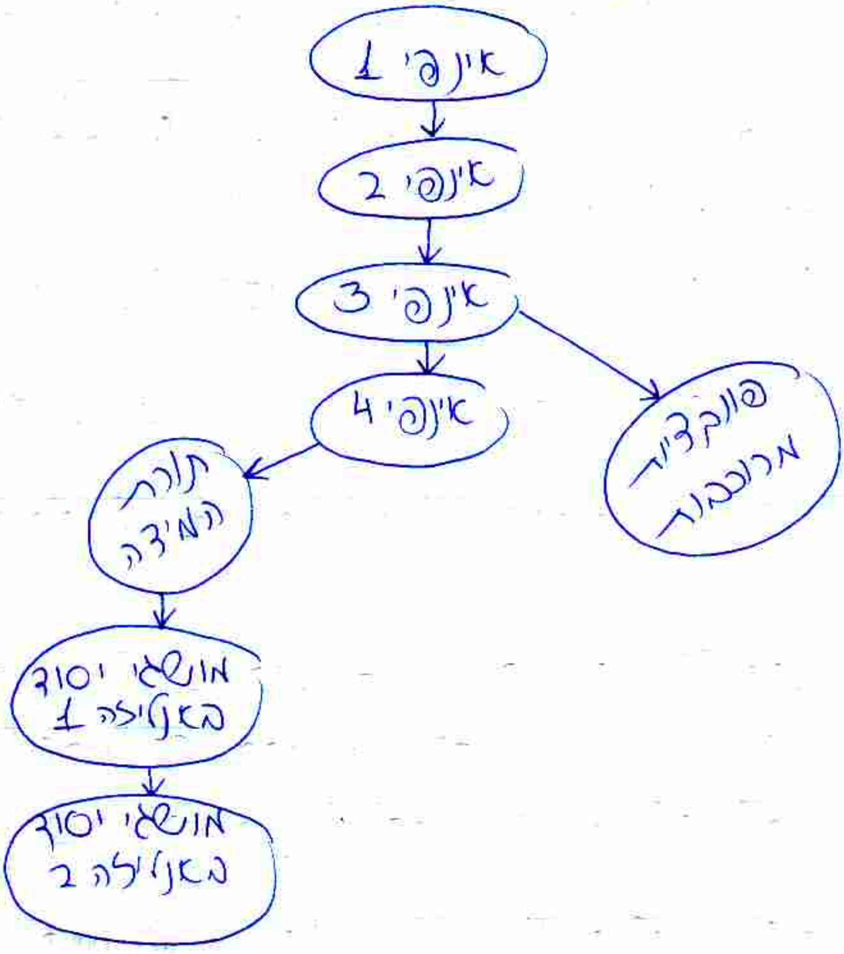
תרגילים - זה קורס לא קל ותרגילים זה דבר קריטי! זה קורס שלא ניתן לעבור בלי לעשות תרגילים באופן שוטף.
בקורס הזה חובה להגיש תרגילים! ינתנו כ- 13 תרגילים ומתוכם חובה להגיש לפחות 9 תרגילים והם "יקבעו" 15% מהציון הסופי.
בכל תרגיל יש הרבה תרגילים וחלקם מסומנים להגשה.

אתר הקורס - המתרגלים מקווים שעד סוף השבוע יהיה אתר ב-owl. אם הם לא יעשו את זה - רז יארגן את האתר בעצמו.

ספרים -

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם / יורם לינדנשטראוס ..
ספר מאוד מאוד טוב מבחינת סדר ופורמליות והוא מספק שיש שם שגיאה. החסרונות - בעיקר ברמת המראה החיצוני, אפילו גופנים. ורע לה. חוץ מזה הוא קצת יבש אבל נחפה על זה בהרצאות ובתרגילים. מאוד מומלץ ללכת לקרוא, למרות שבהרצאה מן הסתם נכסה הכל.

הקורס שלנו הוא חלק משרשרת קורסי האנליזה.



מי שעובר את כל המסכת הזאת סביר שיודע אנליזה במידה סבירה. יחד עם התכנים עולה רמת ההפשטה של החומר. משפטים פירושם כלליות ומכאן שעוצמת המשפטים גדלה. החסרון הוא שאולי הדברים פחות אינטואיטיביים ואנליזה דורש פיתוח אינטואיציה חדשה. רב מאוד יתאים לעבורנו בלה.

מה לומדים באינפי 3?

1 - מרחבים מטריים (הגדרות, טופולוגיה נקודתית במרחבים מטריים, קומפקטיות, שלמות, פונקציות מא מרחבים מטריים, סדרות של פונקציות)

2 - העתקות בין $\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$ (דיפרנציאביליות ....)

3 - מסילות ואינטגרציה לאורך מסילות

4 - נתיים רשימת הזמן

(6) מרחבים מטריים

באופן כללי במתמטיקה מרחב זה תמיד קבוצה עם איזשהן תכונות.

הגדרה: מרחב מטרי הוא זוג (X, d) כאשר X קבוצה לא ריקה ו- $d: X \times X \to \mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת:

1. סימטריה $d(x,y) = d(y,x)$ לכל $x, y \in X$
2. חיוביות $0 \le d(x,y)$ כאשר $d(x,y) = 0$ אמ"מ $x = y$.
3. אי שוויון המשולש $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ לכל $x,y,z \in X$

הפונקציה d נקראת המטריקה של X

ל- d יש אינטרפרטציה כמרחק ורק אנחנו נתייחס אליה מאזשיו. התכונות של המטריקה d באמת מתלכדות עם התכונות האינטואיטיביות של מרחק בגאומטריה אוקלידית רגילה, אז אכן יש היגיון באינטרפרטציה הזאת.

דוגמאות:

1. $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ הם מרחבים מטריים אם מגדירים $d(x,y) = |x-y|$ ברור שזו אכן מטריקה. ומעתה כשנאמר $\mathbb{C}$ (או $\mathbb{R}$) כמרחב מטרי יהיה ברור שזו המטריקה המדוברת.
אגב, כאן הגדרנו $d(x,y) = |x-y|$ וזה אפשרי כי $\mathbb{R}$ ו- $\mathbb{C}$ הם מרחבים וקטוריים (אז יש שם חיסור) אבל מלכתחילה ממש אין דרישה שמרחב מטרי יהיה גם מרחב וקטורי.
2. אם $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה ממש ומציבים את $\mathbb{R}$ בפונקציה מתקבלת הקבוצה $X = F(\mathbb{R})$ אפשר להגדיר $d(x,y) = |F(x) - F(y)|$. הסימטריה והחיוביות טריוויאליות ונותר אי שוויון המשולש. ואכן

$$d(x,z) = |F(x) - F(z)| = |F(x) - F(y) + F(y) - F(z)| \le$$
$$\le |F(x) - F(y)| + |F(y) - F(z)| = d(x,y) + d(y,z)$$

אז זו אכן מטריקה!

③ $\mathbb{R}^n$ מרחב מטרי עם המטריקה האוקלידית שמוגדרת ע"י

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

גם כאן קל לראות שזו מטריקה (למעשה הוכחנו את זה באלגברה לינארית). זאת המטריקה הטבעית על $\mathbb{R}^n$ ומעתה אם נאמר $\mathbb{R}^n$ מרחב מטרי מבלי לציין מטריקה נתכוון למטריקה האוקלידית.

④ X - שטח כדור הארץ

d - המרחק הגאודזי (מי שלא יודע מה זה - זה ממש לא משנה)

⑤ לכל קבוצה X הפונקציה

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

מגדירה מטריקה שנקראת המטריקה הדיסקרטית (הוכחה טריוויאלית).
זאת מטריקה מאוד משעממת מהבחינה שהיא לא מספרת שום דבר מעניין על מבנה המרחב. היא משמשת בעיקר לבניית דוגמאות נגדיות.

⑥ כל מרחב נורמי הוא מרחב מטרי כאשר $d(x,y)=\|x-y\|$
עבור מרחב נורמי כמרחב מטרי המטריקה נשמרת תחת הזזה

$$d(x+z,\ y+z)=d(x,y)$$

וכן

$$d(\lambda x,\ \lambda y)=|\lambda|\, d(x,y)$$

הערה חשובה: לא כל מרחב מטרי הוא מרחב נורמי!

דוגמאות למרחבים נורמיים

① $\mathbb{C},\ \mathbb{R}$ הם מרחבים נורמיים עם אותה מטריקה כמו קודם

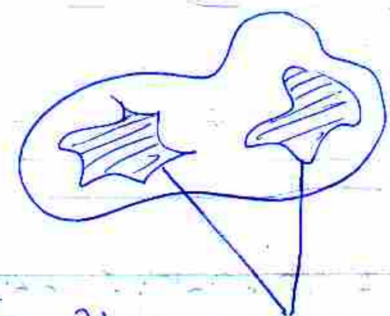
② $\mathbb{R}^n$ לכל $1\le p$ $\|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (מרחב ℓ_p^n)
$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$ היא נורמה (הוכחה בתרגול)

③ $\mathbb{R}^n$ עם $\|\cdot\|_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$
הוא מרחב נורמי שמסומן ℓ_∞^n.

(4) אוסף כל הסדרות הממשיות האינסופיות שעבורן
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty$$
הוא מרחב נורמי (תחת הנורמה $\|\cdot\|_p$) שמסומן ℓ_p.

(5) $C[0,1]$ קבוצת הפונקציות הרציפות מ-$[0,1]$ הוא מרחב נורמי תחת
$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$$
ועבור $f,g \in C[0,1]$ המטריקה המושרית היא
$$d(f,g) = \max_{0\le x\le 1} |f(x)-g(x)|$$

הערה חשובה: הנה קבוצה שהיא מרחב מטרי עם מטריקה d



הנה תת קבוצה של המרחב הזה.

כמובן ניתן לצמצם את d לתת הקבוצה הזאת וברור ש-d עדיין מגדירה מטריקה על תת הקבוצה - הרי לא פגענו בסימטריה וגם לא בחיוביות וגם לא באי שוויון המשולש.

אז באופן טבעי וישר ביותר כל תת קבוצה של מרחב מטרי גם היא מרחב מטרי עם המטריקה המצומצמת אליו.

טופולוגיה של מרחבים מטריים

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי.

ספירה ברדיוס a סביב הנקודה x = $\{y\in X : d(y,x) = a\}$

כדור פתוח ברדיוס a סביב הנקודה x : $B_0(x,a) = \{y\in X : d(y,x) < a\}$

כדור סגור ברדיוס a סביב הנקודה x = $B(x,a) = \{y\in X : d(y,x) \le a\}$

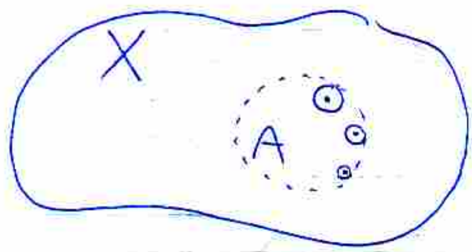
זאת הגדרה פורמלית לחלוטין ואל לנו לקשר אותה לכדורים והספירות שאנחנו מכירים מ-$\mathbb{R}^3$ עם המטריקה האוקלידית

דוגמה עבור מרחב דיסקרטי:

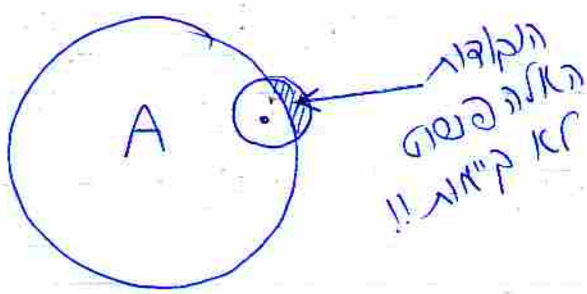
$$B_0(x,a) = \begin{cases} \{x\} & a \le 1 \\ X & a > 1 \end{cases}$$

הגדרה תת קבוצה $A \subseteq X$ תיקרא <u>חסומה</u> אם היא מוכלת באיזשהו כדור סגור ב- X.

הגדרה: (מאוד חשובה ומרכזית בפרק הזה) תת קבוצה $A \subseteq X$ תיקרא <u>פתוחה</u> אם לכל $x \in A$ קיים $0 < r$ כך ש- $B_0(x,r) \subseteq A$



הפתיחות היא תמיד ביחס לעולם חיצוני כלשהו. לכן, אם העולם שלנו הוא X אז X תמיד פתוח.
זה קצת מבלבל כי אמרנו שתת קבוצה A של מרחב מטרי X היא גם מרחב מטרי. האם A פתוחה? אז קודם אנחנו צריכים לשאול את עצמנו אם אנחנו מסתכלים על A כחלק מהיקום כולו X ואז צריך להוכיח שמתקיימת ההגדרה של קבוצה פתוחה. ואם אנחנו בוחרים להסתכל על A ככל היקום כולו את A פתוחה. הרי זה לא יכול להיות אחרת. כי אם A זה כל היקום אז אין נקודות חיצוניות שיפגעו לנו את ההגדרה.



מוסכמה: הקבוצה הריקה $\emptyset$ היא תמיד פתוחה.

משפט: במרחב מטרי:

① כל חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה

② כל איחוד (לאו דווקא בן מנייה) של קבוצות פתוחות הינו קבוצה פתוחה

③ כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה

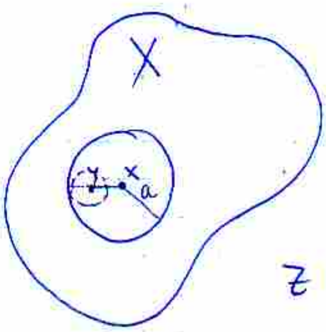
④ קבוצה היא פתוחה אמ"מ היא איחוד של כדורים פתוחים

הוכחה:

① יהיו $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ קבוצות פתוחות. נראה ש- $A=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ קבוצה פתוחה.

אם $A=\emptyset$ אז היא פתוחה בהגדרה. אחרת, נניח ש- $A\neq\emptyset$.
מכיוון שכל ה-A_k פתוחות אז לכל $x\in A$ נוכל למצוא $0<r_k$ כך ש- $B_0(x,r_k)\subseteq A_k$. ניקח $r=\min_{1\le k\le n} r_k$. אז לכל k
$B_0(x,r)\subseteq A_k$ $\Leftarrow$ $B_0(x,r)\subseteq A$ $\Leftarrow$ A פתוחה.

② $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קבוצות פתוחות. נראה ש- $A=\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ פתוחה.
אבל זה טריוויאלי: אם $x\in A$ קיים $\beta\in I$ כך ש- $x\in A_\beta$
ומכיוון ש- A_β פתוחה קיים $0<r$ כך ש- $B_0(x,r)\subseteq A_\beta\subseteq A$
$\Leftarrow$ A פתוחה.



③ נתבונן בכדור הפתוח $B_0(x,a)$.
תהי $y\in B_0(x,a)$, כלומר $d(x,y)\lneq a$
נראה ש- $B_0(y,a-d(x,y))\subseteq B_0(x,a)$.
טוב, אבל זה מיידי ממש. לכל $z\in B_0(y,a-d(x,y))$
מתקיים $d(z,y)\lneq a-d(x,y)$ ואז

$$d(z,x)\le d(z,y)+d(y,x) < a-d(x,y)+d(y,x) = a$$

כלומר $d(z,x)<a$ $\Leftarrow$ $z\in B_0(x,a)$

$\Leftarrow$ $B_0(x,a)$ קבוצה פתוחה.

(5) 25.10.06

אינפי'

יום הולדת שמח לשמואל

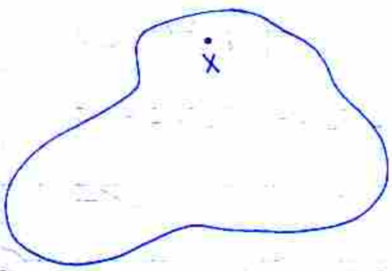
המשך הוכחת המשפט (אתמול):

(4) קבוצה היא פתוחה אמ"מ היא איחוד של כדורים פתוחים.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) טריוויאלי כי הוכחנו שכדור פתוח הוא קבוצה פתוחה וכן שאיחוד קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

($\Rightarrow$) יש להוכיח שאם $A \subseteq X$ קבוצה פתוחה אז היא ניתנת להצגה כאיחוד של כדורים פתוחים.



לכל $x \in A$ קיים $0 < r(x)$ כך ש- $B_0(x,r(x)) \subseteq A$. וכעת זה ממש פשוט:

$$A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B_0(x,r(x)) \subseteq A$$

כי כמובן כל יחידון מוכל בכדור $\{x\} \subseteq B_0(x,r(x))$

כי כל הכדורים מוכלים ב-A

הערה חיתוך אינסופי של קבוצות פתוחות הוא ממש לא בהכרח קבוצה פתוחה, והנה הדוגמה הכי נדושה בעולם:

ב-$\mathbb{R}$ נסתכל על סדרת הקטעים הפתוחים $\{(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$

ואז $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \{0\}$

והקבוצה $\{0\}$ איננה פתוחה!! למעשה היא סגורה אבל לא נאמר את זה כי עוד לא למדנו מה זה קבוצה סגורה.

הגדרה קבוצה A במרחב מטרי נקראת <u>סגורה</u> אם המשלים A^c קבוצה פתוחה.

טענה (שנובעת באופן מיידי ממה שהוכחנו ומחוקי דה-מורגן)

- כל חיתוך (כלשהו) של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה
- כל איחוד <u>סופי</u> של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

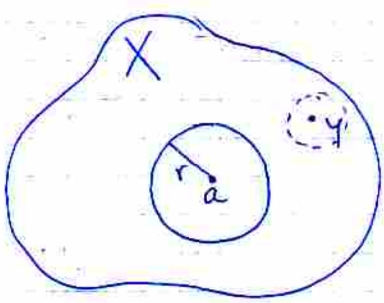
הערות

1. $X, \emptyset$ גם פתוחות וגם סגורות (המחשבה שאם משהו אינו פתוח אז הוא סגור היא מחשבה שאנחנו דורשים להפטר ממנה וגם נראה דוגמאות נוספות בהמשך)
למה זה רק? הגדרנו את $\emptyset$ כפתוחה וגם ציינו שע"פ ההגדרה X תמיד פתוחה. אבל $X^c=\emptyset$ ו- $\emptyset^c=X$ אז שתיהן גם סגורות.

2. יחידונים הם תמיד סגורים:
יהא $x\in X$ ו- $y\neq x$ (כלומר $y\in\{x\}^c$). אז y הוא מרכזו של הכדור הפתוח $B_0(y,d(x,y))\subseteq\{x\}^c$
$\Leftarrow$ $\{x\}^c$ קבוצה פתוחה. ☺

3. כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי סגורה (כי היא איחוד סופי של יחידונים. דהה!)

4. כל כדור סגור הוא קבוצה סגורה:
אם $y\in(B(a,r))^c$ אז $d(y,a)>r$
ולכן $B_0(y,d(y,a)-r)\subseteq(B(a,r))^c$
$\Leftarrow$ $(B(a,r))^c$ קבוצה פתוחה. ☺



5. במרחב בדיד כל קבוצה היא גם פתוחה וגם סגורה.
הוכחה: כל יחידון פתוח וסגור וזה ברור: דבר ראשון כל יחידון הוא סגור, אבל הוא גם פתוח כי $B_0(x,\frac{1}{2})=\{x\}\subseteq\{x\}$. ☺
ועכשיו, כל קבוצה A היא איחוד של יחידונים (פתוחים) $\Leftarrow$ פתוחה.
המשלים של כל קבוצה A פתוח מאותה סיבה $\Leftarrow$ סגורה.

הגדרה סדרה $(x_n) \subseteq X$ נקראת <u>מתכנסת</u> אם קיימת נקודה $x \in X$, כך ש- $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ (כמו התכנסות רגילה ב- $\mathbb{R}$)

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_\varepsilon$ $d(x_n, x) \le \varepsilon$.

במקרה זה נסמן $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ וגם $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

x נקרא <u>הגבול של הסדרה</u>.

הערה אם סדרה מתכנסת לגבול, אז הגבול הוא יחיד.

<u>הוכחה</u>: בשלילה, נניח $x_n \longrightarrow x$, $x_n \longrightarrow y$, $x \neq y$. אז לפי ההגדרה

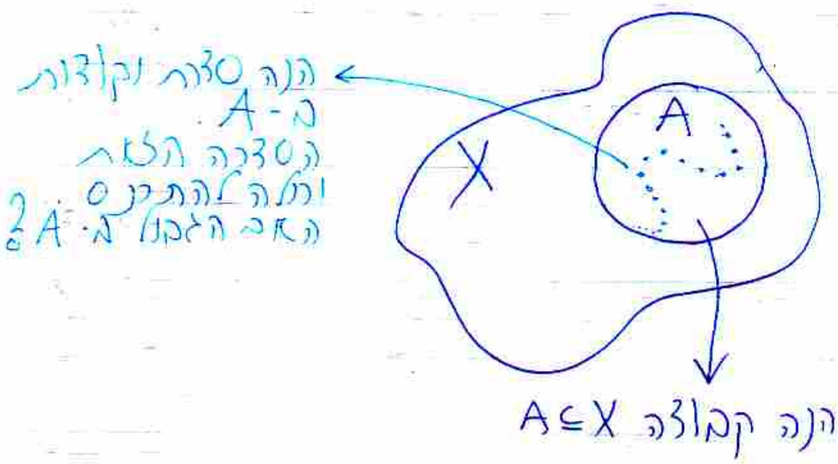
לכל $\varepsilon > 0$ קיים n כך ש $d(x_n, x) \le \varepsilon$, $d(x_n, y) \le \varepsilon$.

ואז $0 \le d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y) \le 2\varepsilon$

$\Leftarrow$ $d(x,y) = 0$ $\Leftarrow$ $x = y$. סתירה.

הנה משהו חשוב שלי:

הנה מרחב מטרי



משפט תת-קבוצה A במרחב מטרי (X,d) היא סגורה אמ"מ לכל סדרה $(x_n) \subseteq A$ המתכנסת ל- $x \in X$ מתקיים $x \in A$.

הוכחה

$(\Leftarrow)$ נניח ש- A סגורה ונתונה סדרה A (x_n) ומתכנסת ל- $x \in X$. (נניח בשלילה) ש- $x \notin A$, כלומר $x \in A^c$.

A סגורה $\Leftarrow$ A^c קבוצה פתוחה. $\Leftarrow$ ניתן לעטוף את x בכדור שלא חותך את A, אבל אם כך הוא לא יכול להיות הגבול.

נרשום את זה פורמלית: מכיוון ש- A^c פתוחה, קיים כדור פתוח $B_0(x,r) \subseteq A^c$ $\Leftarrow$ לכל $y \in A$ מתקיים $d(y,x) \ge r$

$\Leftarrow$ x אינו גבול של נקודות ב- A. סתירה!

($\Rightarrow$) נניח ש-A התכונה שאם $(x_n)\subseteq A$ מתכנסת ל-$x\in X$ אז $x\in A$. נראה ש-A סגורה. מספיק להראות ש-A^c פתוחה.
נניח בשלילה ש-A^c אינה פתוחה. כלומר קיימת נקודה $x\notin A$ רק שלכל n טבעי $A\cap B_0(x,\frac{1}{n})$ אינו ריק! לכל n טבעי נבחר x_n בחיתוך הנ"ל. מכיוון ש-$d(x,x_n)<\frac{1}{n}$ נקבל $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\notin A$, בסתירה להנחה על הקבוצה A. ☺

זה אפיון מאוד חשוב של קבוצות סגורות!!

$\boxed{\text{הגדרה}}$ תהי $A\subseteq X$. הפנים של A המסומן ע"י A° הוא האיחוד של כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב-A (הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת ב-A)
הסגור של A המסומן ע"י $\bar{A}$ הוא החיתוך של כל הקבוצות הסגורות המכילות את A (הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A)

$\boxed{\text{דוגמה}}$ $X=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Q}$.
$A^\circ=\emptyset$ כי אין קבוצה פתוחה על הישר שמוכלת ב-$\mathbb{Q}$
$\bar{A}=\mathbb{R}$ כי הקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את $\mathbb{Q}$ היא $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{טענה}}$ הסגור של A הוא אוסף כל הנקודות שהן גבול של סדרות המוכלות ב-A.
הוכחה: נגדיר $B=\{x\in X: \exists (a_n)\subseteq A\ a_n\to x\}$ ונראה ש-$\bar{A}=B$.
($\supseteq$) צריך להראות שאם $x\in B$ אז x שייך לכל קבוצה סגורה שמכילה את A. אם זה לא נכון, אז קיימת קבוצה סגורה C רק ש-$A\subseteq C$ אבל $x\notin C$ $\Leftarrow$ x שייך לקבוצה הפתוחה C^c
$\Leftarrow$ קיים כדור פתוח $B_0(x,r)$ שנמצא ב-C^c $\Leftarrow$ $B_0(x,r)\cap A=\emptyset$
$\Leftarrow$ לא קיימת סדרה ב-A שמתכנסת ל-x, בסתירה לכך ש-$x\in B$.
($\subseteq$) נניח בשלילה: $x\in B$, אז קיימת סדרה $(x_n)\subseteq A$ ו-$x_n\to x$.
מכיוון שגם $(x_n)\subseteq \bar{A}$ ו-$\bar{A}$ סגורה, אז $x\in\bar{A}$ $\Leftarrow$ $B\subseteq\bar{A}$

(7)

(⊆) תת טענה: B קבוצה סגורה. אם $x\notin B$ אז בהכרח קיים רדיוס סביב x שאף נקודה בו אינה גבול של סדרה ב-A (אחרת היה אפשר לבנות באינדוקציה סדרה המתכנסת ל-x).

(תזכורת לטענה הראשית. כמובן $A\subseteq B$ (כי $\forall x\in A$ אפשר לקחת את הסדרה הקבועה)! B היא סגורה שמכילה את A.

לכן מהמינימליות של $\bar{A}$ נובע ש- $\bar{A}\subseteq B$.

הגדרה השפה של A שמסומנת ע"י ∂A היא כל הנקודות בסגור שאינן בפנים: $\partial A=\bar{A}\setminus A^{\circ}=\bar{A}\cap(A^{\circ})^{c}$

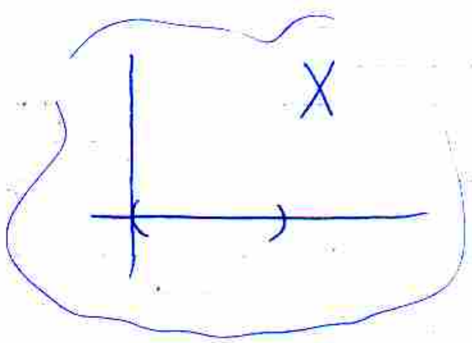
מסקנה מההגדרה מאחר שהשפה היא חיתוך של שתי קבוצות סגורות היא עצמה גם כן קבוצה סגורה.

טענה אם (Y,d) תת מרחב של (X,d) אז קבוצה $A\subseteq Y$ היא פתוחה ב-Y אמ"מ היא חיתוך של Y עם קבוצה פתוחה ב-X.

הערה קבוצה פתוחה ב-Y היא לאו בהכרח פתוחה ב-X.

למשל - X - מישור $\mathbb{R}^2$, Y - הציר

A - הקבוצה $(0,1)$



A כמובן פתוחה ב-Y

אבל אינה פתוחה ב-X.

למעשה היא אינה פתוחה ואינה סגורה שם! אבל ממש אין בעיה להציג את A כחיתוך של Y עם קבוצה פתוחה ב-X. למשל עיגול ברדיוס $\frac{1}{2}$ שמרכזו $(\frac{1}{2},0)$ חיתוך עם ציר ה-x נותן לנו את A.

הוכחה: יהי $x\in Y$. $B_0(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$ כדור פתוח ב-X.

$Y\cap B_0(x,r)=\{y\in Y: d(x,y)<r\}$ כדור פתוח ב-Y, בפרט קב' פתוחה ב-Y.

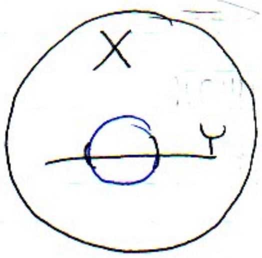
אם A פתוחה ב-Y נוכל להביע כאיחוד כדורים פתוחים ב-Y

$$A=\bigcup_{y\in A}B_0(y,r(y))=\bigcup_{y\in A}\{z\in Y: d(z,y)<r(y)\}=$$
$$\bigcup_{y\in A}\left(\{z\in X: d(z,y)<r(y)\}\cap Y\right)=Y\cap\bigcup_{y\in A}\{z\in X: d(z,y)<r(y)\}$$

31.10.06
איפי

חזרה משיעור שעבר: $Y\subseteq X$ תת מרחב מטרי

$A\subseteq Y$ פתוחה ב-Y אמ"מ היא חיתוך של קבוצה פתוחה ב-X עם Y.



הוכחה: תהי $A\subseteq Y$ פתוחה ב-Y.
אזי היא ניתנת להצגה כאיחוד של כדורים פתוחים ב-Y (לפי משפט קודם):

$$A=\bigcup_{y\in A}\{z\in Y: d(z,y)<r(y)\}=$$
$$=\bigcup_{y\in A}\left(\{z\in X: d(z,y)<r(y)\}\cap Y\right)=$$
$$=\underbrace{\left(\bigcup_{y\in A}\{z\in X: d(z,y)<r(y)\}\right)}_{\text{איחוד של כדורים פתוחים ב-}X\text{ ולכן קבוצה פתוחה}}\cap Y$$

איחוד של כדורים פתוחים ב-X ולכן קבוצה פתוחה.

בכיוון השני, תהי $A\subseteq X$ פתוחה ב-X ונגדיר $B=A\cap Y\subseteq Y$. נראה ש-B פתוחה ב-Y:
בהינתן $x\in B$ קיים $0<r$ כך ש-$\{z\in X: d(x,z)<r\}\subseteq A$ (כי A פתוחה ב-X). ואז

$$Y\cap\{z\in X: d(x,z)<r\}\subseteq Y\cap A=B$$
$$\Rightarrow \{z\in Y: d(x,z)<r\}\subseteq B$$
$$\Leftarrow B \text{ פתוחה ב-} Y.$$

קומפקטיות

הגדרה: מרחב מטרי (X,d) נקרא $\boxed{\text{קומפקטי}}$ אם לכל סדרה $(x_n)\subseteq X$ קיימת תת סדרה מתכנסת.

קבוצה $K\subseteq X$ נקראת $\boxed{\text{קומפקטית}}$ אם היא קומפקטית כמרחב מטרי מושרה $(K, d|_K)$.

טענה: איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות הוא קומפקטי.

הוכחה: תהי $(x_n)\subseteq \bigcup_{i=1}^{d} K_i$ כאשר K_i קבוצה קומפ' לכל $1\le i\le d$.

$\Leftarrow$ קיים $1\le i\le d$ ותת סדרה $(x_{n_k})\subseteq K_i$.

מכיוון ש- K_i קומפקטית, קיימת תת סדרה

$x_{n_{k_m}}\longrightarrow x\in K_i\subseteq \bigcup_{i=1}^{d} K_i$ $\Leftarrow$ האיחוד קומפקטי.

הערה:

1. כל קבוצה סופית היא קומפקטית
2. קבוצה במרחב דיסקרטי היא קומפקטית אמ"מ היא סופית.
3. ממשפט בולצאנו-ויירשטראס* נובע שקטע סגור ב- $\mathbb{R}$ הוא קומפקטי. (זה שזה אמור להיות בקטע סגור זה לא קשור ל- BW, אלא מהדרישה שההתכנסות תהיה לנקודה בתוך הקבוצה עצמה).

טענה: קבוצה קומפקטית $K\subseteq X$ היא סגורה וחסומה.

הוכחה: תהי K קומפקטית.

סגירות לכל סדרה $(x_n)\subseteq K$ קיימת תת סדרה $x_{n_k}\longrightarrow x\in K$.
בפרט, אם (x_n) סדרה מתכנסת (ב- X) הגבול שלה (שהוא גם הגבול של כל תת הסדרות שלה) נמצא ב- K.
הוכחנו שקבוצה היא סגורה אם היא מכילה את כל הגבולות של סדרות מתכנסות המוכלות בה.

חסימות נניח ש- $K\subseteq X$ אינה חסומה. קיימת נקודה $a\in X$ כך ש- $K\nsubseteq B_0(a,n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ (אם הייתה נקודה שזה דווקא כן מול אלו בדיוק ההגדרה של חסימות).

* משפט בולצאנו-ויירשטראס: לכל סדרה חסומה ב- $\mathbb{R}$ יש תת סדרה מתכנסת.

לכן קיימת $x_1 \in K$ כך ש- $d(a,x_1) > 1$

לכן קיימת $x_2 \in K$ כך ש- $d(x_2,a) > d(x_1,a)+1$

$$\Rightarrow d(x_2,x_1) + d(x_1,a) \ge d(x_2,a) > d(x_1,a)+1$$

$$\Rightarrow d(x_2,x_1) > 1$$

וכך באופן אינדוקטיבי ניתן לבנות סדרה אינסופית (x_n) כך שלכל $i\neq j$ $d(x_i,x_j) > 1$ ואז כמובן לא יכול להיות שיש לה תת סדרה מתכנסת.

אנטי-דוגמאות

- סגירות וחסימות לא גוררת קומפקטיות

X מרחב דיסקרטי. הוא סגור (כמו כל מרחב).
הוא גם חסום כי לכל $x \in X$ $X = B_o(x,2)$
אבל לא כל מרחב דיסקרטי הוא קומפקטי (ראינו שרק אם סופי)

<u>טענה:</u> אם X מרחב קומפקטי, $K \subseteq X$ קומפקטית אמ"מ היא סגורה.

<u>הוכחה:</u> תהי K סגורה, $(x_n) \subseteq K$. מכיוון ש-X קומפקטי, קיימת תת סדרה $x_{n_k} \longrightarrow x \in X$.
מכיוון ש-K סגורה, מתקיים $x \in K$.
$\Leftarrow$ לכל סדרה ב-K יש תת סדרה מתכנסת ב-K, כלומר K קומפקטית.
את הכיוון השני כבר הוכחנו (קומפקטיות $\Leftarrow$ סגירות).

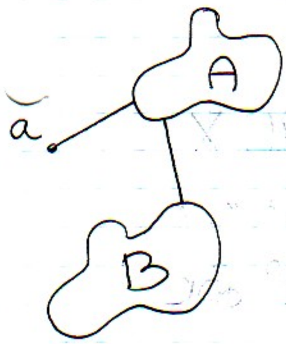
<u>משפט:</u> בולצאנו-ויירשטראס ב-$\mathbb{R}^m$

כל $A \in \mathbb{R}^m$ קומפקטית אמ"מ היא סגורה וחסומה.

<u>הוכחה:</u> תהי $A \in \mathbb{R}^m$ סגורה וחסומה. קיים $M>0$ כך שלכל $x=(x^1,\dots,x^m) \in A$ מתקיים $|x^j|<M$ לכל $1 \le j \le m$.

מהינתן סדרה $x_n=(x_n^1,\dots,x_n^m)$, ע"י הפעלה חוזרת של BW ב-$\mathbb{R}$ ניתן לבחור תת סדרה x_{n_k} כך ש-$x_{n_k}^j \longrightarrow x^j$ לכל j. אם נגדיר $x=(x^1,\dots,x^m)$ אז $d(x_{n_k},x)\le m\cdot\max|x_{n_k}^j-x^j| \Rightarrow d(x_{n_k},x)\longrightarrow 0$ (התכנסות ב-$\mathbb{R}^m$ שקולה להתכנסות איבר איבר).
אז יש התכנסות ב-$\mathbb{R}^m$ ובגלל הסגירות ההתכנסות היא בתוך A.

הגדרה: (X,d) מרחב מטרי ו- $A,B\subseteq X$, $a\in X$

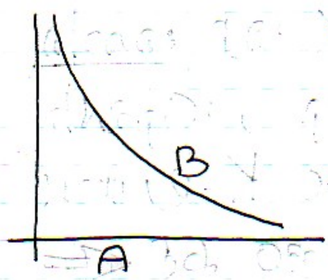


$$d(a,A)=\inf_{z\in A} d(a,z)$$

$$d(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} d(x,y)$$

טענה: יהיו $A,B\subseteq X$ זרות, סגורות ולפחות אחת מהן קומפקטית. אז $0<d(A,B)$.

אנטי דוגמה:

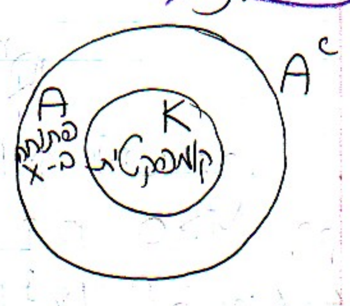


$A=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$
$B=\{(x,\frac{1}{x}): 0<x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$

כמובן $A\cap B=\emptyset$. אך אף אחת מהן אינה קומפקטית משום שאינן חסומות. אבל כמובן $d(A,B)=0$ (כי $\frac{1}{x}\to 0$).

מסקנה:

K ו-A^c סגורות, זרות ואחת מהן קומפקטית $\Rightarrow d(K,A^c)>0$.



הוכחה

בה"כ נניח ש- A קומפקטית.

נניח בשלילה ש- $d(A,B)=0$.

$\Leftarrow$ קיימות סדרות $(x_n)\subseteq A$, $(y_n)\subseteq B$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$. מכיוון ש- A קומפקטית קיימת תת סדרה $x_{n_k}\longrightarrow x\in A$. אז

$$d(y_{n_k},x)\le d(x_{n_k},y_{n_k})+d(y_{n_k},x)\longrightarrow 0$$

$\Leftarrow$ $y_{n_k}\longrightarrow x$

מכיוון ש- B סגורה מתקיים $x\in B$ בסתירה לכך ש- A ו- B זרות.

הגדרה: (X,d) מרחב מטרי.

אוסף $\mathfrak{A}$ של תת קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של X נקרא כיסוי של X אם $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = X$

כיסוי נקרא סופי אם יש בו מספר סופי של תת קבוצות.

כיסוי נקרא פתוח אם כל ה- A_α פתוחות ב-X.

תת כיסוי הוא אוסף חלקי של $\mathfrak{A}$ שמכסה את X.

דוגמה $X=\mathbb{R}$ $\quad \mathfrak{A}=\{(n-1,n+1):n\in\mathbb{Z}\}$

$\mathfrak{A}$ הוא כיסוי פתוח של $\mathbb{R}$.

<u>אבל</u> כל תת אוסף של $\mathfrak{A}$ לא יהיה כיסוי של $\mathbb{R}$.

(11) 1/11/06
אינפי 3

היום מתבצע ניסוי - אני כותבת בכתב קטן.

קומפקטיות

* קומפקטיות זה במידה רבה המושג שהכי קרוב למרחב עם מספר סופי של איברים. יש להם הרבה תכונות משותפות.

משפט: Heine-Borel

יהי (X,d) מרחב מטרי. שלושת התכונות הבאות שקולות:

(i) X קומפקטי

(ii) לכל כיסוי פתוח $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קיים תת כיסוי סופי (שאלה בכלל לא טריוויאלי)

(iii) לכל אוסף של קבוצות סגורות $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך שכל חיתוך סופי של איברים מהאוסף אינו ריק, מתקיים ש- $\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$ אינו ריק.

<u>הוכחה:</u>

(ii)⟺(iii)

$$\forall \underset{\text{סגורות}}{\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}} : \quad \bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha^c = X \Rightarrow \exists \underset{\text{סופית}}{J\subseteq I} \quad \bigcup_{\alpha\in J}F_\alpha^c = X$$

הפעלת משלים ⟺

$$\forall \underset{\text{סגורות}}{\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}} : \quad \Big(\bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha^c\Big)^c = \emptyset \Rightarrow \exists \underset{\text{סופית}}{J\subseteq I} \quad \Big(\bigcup_{\alpha\in J}F_\alpha^c\Big)^c = \emptyset$$

דה-מורגן ⟺

$$\forall \underset{\text{סגורות}}{\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}} : \quad \bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha = \emptyset \Rightarrow \exists \underset{\text{סופית}}{J\subseteq I} \quad \bigcap_{\alpha\in J}F_\alpha = \emptyset$$

שלילה והיפוך כיוון ⟺

$$\forall \underset{\text{סגורות}}{\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}} : \quad \forall \underset{\text{סופית}}{J\subseteq I} \ \bigcap_{\alpha\in J}F_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha \neq \emptyset$$

(iii)⇐(i)

תהי $(x_n)\subseteq X$ סדרה כלשהי. נתבונן בתת הקבוצות $A_n=\{x_n,x_{n+1},\dots\}$. זוהי סדרה יורדת של תת קבוצות (כלומר $A_{n+1}\subseteq A_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$)

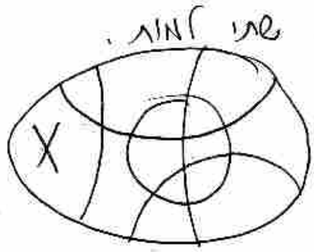
אם $m>n$ אז $A_m\cap A_n=A_m$. באינדוקציה כל חיתוך סופי אינו ריק.

אבל $A_n\subseteq\overline{A_n}$ ובוודאי תכונה זו נכונה גם לסגורים של הקבוצות. ולכן לפי (iii) נקבל ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\neq\emptyset$. כלומר קיים $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\{x_n,x_{n+1},\dots\}}$, כלומר $x\in\overline{A_n}$ לכל n.

⇐ לכל k קיימת נקודה $x_{n_k}\in A_k$ כך ש- $d(x_{n_k},x)<\frac{1}{k}$ ⇐ $x_{n_k}\to x$, כלומר לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת ⇐ X קומפקטי! (צריך לדאוג ש- $n_k<n_{k+1}$ אבל זה כמובן אפשרי).

הפסקה מהורחת המשפט. נוכיח שתי למות.

הנה מרחב עם כיסוי פתוח:



האם אני יכולה לקחת כדור בגודל כלשהו, לשים אותו בכל מקום ב-X ולהבטיח שהוא מוכל בלפחות אחת מהקבוצות הפתוחות? ואולי תלוי בגודל של הכדור ובמה התכוונו בכיסוי. אבל מסתבר שבמרחב קומפקטי זה תמיד אפשרי.

① <u>למה</u>: אם X קומפקטי, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח. קיים $\varepsilon>0$ כך שכל כדור $B_0(x,\varepsilon)$ מוכל באחת מהקבוצות המכסות.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שלא קיים ε כזה. $\Leftarrow$ לכל n טבעי קיים כדור $B_0(x_n,\frac{1}{n})$ שאינו מוכל באף קבוצה A_α.

X קומפקטי $\Leftarrow$ ל-(x_n) יש גבול חלקי x.

מכיוון ש- $X=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$, קיים $\alpha\in I$ כך ש-$x\in A_\alpha$. מכיוון ש-A_α פתוחה קיים $r>0$ כך ש-$B_0(x,r)\subset A_\alpha$. קיים n מספיק גדול כך ש-$d(x_n,x)<\frac{r}{2}$ וגם $\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$. מכאן נובע ש- $B_0(x_n,\frac{1}{n})\subseteq B_0(x,r)\subseteq A_\alpha$ בסתירה לכך שלכל n $B_0(x_n,\frac{1}{n})$ אינו מוכל באף A_α.

② <u>למה</u>: אם X מרחב קומפקטי אז לכל $\varepsilon>0$ ניתן לכסות את X בעזרת מספר סופי של כדורים ברדיוס ε.

(הכיוון השני אינו נכון. למשל את (M,ρ) אפשר לכסות עם ε, אבל קבוצה זה אינו קומפקטי)

(זה מספיק כי מרחב דיסקרטי ונניח חסום אבל אי אפשר לכסות אותו עם מספר סופי של כדורים ברדיוס קטן מ-1).

<u>הוכחה</u>: ניקח $B_0(x_1,\varepsilon)$ עבור $x_1\in X$. אם $X=B_0(x_1,\varepsilon)$ המשפט נכון. אחרת קיימת $x_2\in(B_0(x_1,\varepsilon))^c$. נמשיך כך הלאה. ואז או שהתהליך סופי סיימנו או שמתקבלת סדרת נקודות שהמרחק בין כל זוג בה גדול מ-ε ולכן לא תיתכן סדרה חלקית מתכנסת בסתירה לכך ש-X קומפקטי.

נחזור להוכחה כולה:

<u>$(i)\Rightarrow(ii)$</u>

X קומפקטי, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי. למה 1 $\Leftarrow$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל כדור $B_0(x,\varepsilon)$ קיים α כך ש- $B_0(x,\varepsilon)\subseteq A_\alpha$.

שלב 2 ⇐ ניתן לבחור מספר סופי של נקודות $(a_1,\dots,a_n)$ כך ש-
$X \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_0(a_i,\varepsilon) = X$.
⇐ $\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ הוא תת כיסוי סופי.

משפט היינה-בורל אומר שקומפקטיות סדרתית שקולה לקומפקטיות של כיסויים. ההגדרה הסדרתית היא המקורית אבל עם השנים יצא שמשתמשים יותר בכיסויים.

<u>דוגמה</u>: ידוע שהקטע $(0,1)$ אינו קומפקטי. מדוע? למשל לסדרה $x_n=\frac{1}{n}$ אין תת סדרה מתכנסת. אבל ממשפט היינה בורל ניתן לסתור את הקומפקטיות ע"י שנבנה כיסוי פתוח שלא ייתכן שיש לו תת כיסוי סופי. (נסתכל על כל הקטעים $\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}) : n\in\mathbb{N}\}$ - זהו כמובן כיסוי של $(0,1)$, אבל אם נסיר אפילו קבוצה אחת הנקודה $\frac{1}{n+1}$ לא תהיה בכיסוי.

<u>הגדרה</u>: קבוצה A במרחב מטרי X נקראת <u>צפופה</u> אם $\bar{A}=X$.
ברור שזה שקול לכך שכל קבוצה פתוחה ב-X חותכת את A.

<u>דוגמה</u>: $\mathbb{Q}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$.

<u>הגדרה</u>: מרחב מטרי נקרא ספרבילי אם הוא מכיל תת קבוצה בת מניה צפופה.

<u>דוגמה</u>:
- $\mathbb{R}$ ספרבילי כי הוא מכיל את $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}^n$ ספרבילי כי הוא מכיל את $\mathbb{Q}^n$.

<u>משפט</u>: אם מרחב קומפקטי אז הוא ספרבילי.
<u>הוכחה</u>: נבחר מספר סופי של נקודות $\{x_1^1,\dots,x_{n_1}^1\}$ כך ש- $X=\bigcup_{i=1}^{n_1} B_0(x_i^1,1)$
נוסיף לנקודות אלו מספר סופי של נקודות $\{x_1^2,\dots,x_{n_2}^2\}$ כך ש- $X=\bigcup_{i=1}^{n_2} B_0(x_i^2,\frac{1}{2})$
וכך ממשיכים לבנות באופן אינדוקטיבי קבוצה בת מניה של נקודות.
קבוצה בת מניה כזו צפופה ב-X: בהינתן $x\in X$ ובהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n}<\varepsilon$. בקבוצת הנקודות שבנינו קיימת נקודה y שהיא מרכזו של כדור $x\in B_0(y,\frac{1}{n})$ ⇐ $d(x,y)<\frac{1}{n}$ ⇐ x בסגור של הקבוצה הנ"ל.

פונקציות רציפות
מעל מרחבים מטריים

<u>הגדרה</u>: יהיו (X,d), (Y,ρ) מרחבים מטריים. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת <u>רציפה בנקודה</u> $a\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,a)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$.

פונקציה תיקרא <u>רציפה בקבוצה</u> אם היא רציפה בכל נקודה בה.

זה שקול (כמובן) להגדרה הבאה: f רציפה ב-a אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $f(B_0(a,\delta))\subseteq B_0(f(a),\varepsilon)$.

<u>דוגמאות</u>:

① (X,d) מרחב מטרי, $a\in X$. נגדיר $f:X\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=d(x,a)$.
נטען ש-f רציפה בכל x כלשהו. בהינתן $\varepsilon>0$, נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז
אם $d(y,x)<\varepsilon$ אז $|f(y)-f(x)|=|d(y,a)-d(x,a)|\le d(x,y)<\varepsilon$

② X מרחב דיסקרטי, Y כלשהו. אז כל פונקציה $f:X\to Y$ היא רציפה.
כי בפשטות לכל ε נבחר $\delta=\frac{1}{2}$.

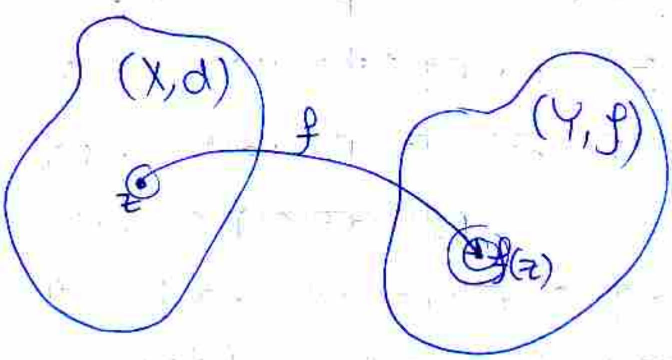
<u>משפט</u>: $f:X\to Y$ רציפה ב-$a\in X$ אמ"מ לכל סדרה $x_n\to a$ מתקיים $f(x_n)\to f(a)$.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$ נניח ש-f רציפה ב-a ותהי $x_n\to a$. בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-
$f(B(a,\delta))\subset B(f(a),\varepsilon)$ אזי קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ $x_n\in B(a,\delta)$
$\Leftarrow f(x_n)\in B(f(n),\varepsilon) \Leftarrow f(x_n)\to f(a)$.

(13) 7/11/06
אינפי

פונקציות רציפות בין מרחבים מטריים



<u>הגדרה</u>
f רציפה ב-a אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-
אם $d(x,a)<\delta$
אז $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$.

<u>משפט</u>: f רציפה ב-a אמ"מ לכל סדרה (x_n) שמתכנסת ל-$a\in X$, הסדרה $(f(x_n))$ מתכנסת ל-$f(a)\in Y$.

<u>הוכחה</u>: (המשך)
נניח "רציפות סדרתית" ונניח בשלילה ש-f אינה רציפה ב-a.
אז קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x_δ כך ש-$d(x_\delta,a)\le\delta$ אבל $\rho(f(x_\delta),f(a))>\varepsilon$. בפרט קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים x_n כך ש-$d(x_n,a)\le\frac{1}{n}$ וגם $\rho(f(x_n),f(a))>\varepsilon$.
אז קיבלנו $x_n\to a$ אבל $f(x_n)\not\to f(a)$ בסתירה להנחה
$\Leftarrow$ f רציפה ב-a

<u>משפט</u>: תהי f פונקציה מ-(X,d) ל-(Y,ρ). שלוש הטענות הבאות שקולות:
1. f רציפה ב-X.
2. לכל $A\subseteq Y$ פתוחה ב-Y, $f^{-1}(A)$ (הקבוצה המקורית) פתוחה ב-X.
3. לכל $A\subseteq Y$ סגורה ב-Y, $f^{-1}(A)$ סגורה ב-X.

<u>הוכחה</u>:
השקילות בין (2) ו-(3) נובעת מהזהות המיידית להוכחה $f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$.

נניח ש-(2) נכון ותהא A קבוצה סגורה.

נראה ש- $f^{-1}(A)$ סגורה.

$$f^{-1}(A) = f^{-1}((A^c)^c) = (f^{-1}(A^c))^c$$

$\Leftarrow$ A סגורה $\Leftarrow$ A^c פתוחה $\Leftarrow$ לפי ההנחה $f^{-1}(A^c)$ פתוחה

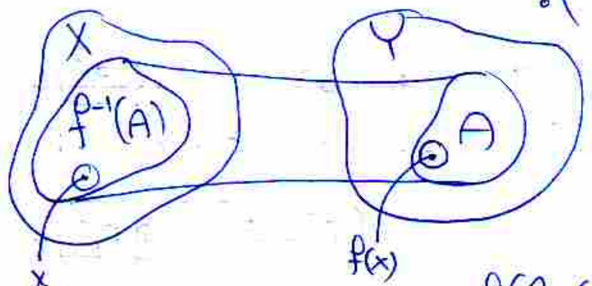
$\Leftarrow$ $(f^{-1}(A^c))^c$ סגורה $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ סגורה.

באותו אופן מוכיחים את הכיוון השני.

- נוכיח ש-(1) גורר (2):

f רציפה ונראה שאם A פתוחה ב-Y אז $f^{-1}(A)$ פתוחה ב-X.

יהא $x \in f^{-1}(A)$ (כלומר $f(x) \in A$).



A פתוחה ולכן קיים $\varepsilon > 0$

כך ש- $B_0(f(x), \varepsilon) \subseteq A$.

מכיוון ש-f רציפה, קיים $\delta > 0$ כך

ש- $f(B_0(x,\delta)) \subseteq B_0(f(x),\varepsilon) \subseteq A$

$\Leftarrow$ $B_0(x,\delta) \subseteq f^{-1}(A)$. מה שמסומן בצהוב זה מדויק

מה שמוכיח ש- $f^{-1}(A)$ פתוחה.

- נותר להוכיח ש-(2) גורר (1)

נתון שהמקור של כל פתוחה הוא קבוצה פתוחה ונראה

ש-f רציפה בכל $\in X$.

לכל ε הקבוצה $f^{-1}(B_0(f(x), \varepsilon))$ פתוחה ב-X

ובמובן מכילה את x. $\Leftarrow$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$B_0(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B_0(f(x),\varepsilon))$ $\Leftarrow$ ע"י הפעלת f על שני

האגפים נקבל $f(B_0(x,\delta)) \subseteq B_0(f(x),\varepsilon)$. ומה שמסומן

בצהוב זה מדויק מה שמוכיח ש-f רציפה ב-x.

לכן f רציפה ב-X.

אנטי דוגמה:

נתבונן בפונקציה הקבועה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=17$
אז $f((0,1))=\{17\}$. הפונקציה כמובן רציפה, אבל
התמונה של הקבוצה הפתוחה $(0,1)$ היא הקבוצה הסגורה $\{17\}$.

הגדרה: אם $f:X\to Y$ ו- $g:Y\to Z$ מגדירים הרכבה
$g\circ f$ שהיא פונקציה $X\to Z$ ע"י
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

טענה: הרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.
הוכחה: נשים לב ש- $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ ולכן המקור
של כל קבוצה פתוחה ב- Z היא קבוצה פתוחה ב- X.

תכונות משנה שעברה:
אם $f,g:X\to\mathbb{R}$ רציפות אז
$$\left.\begin{matrix} f+g \\ f-g \\ f\cdot g \end{matrix}\right\} \text{רציפות}$$
ואם $g\geq m>0$ אז גם f/g רציפה.

אפשר להוכיח את זה רק: $x\mapsto(f(x),(x))$ העתקה רציפה $X\to\mathbb{R}^2$
ו- $(x,y)\mapsto(x+y)$ העתקה רציפה $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ואז
להשתמש בהרכבה.

טענה: אם $f:X\to Y$ רציפה ו- $K\subseteq X$ קומפקטית, אז
$f(K)\subseteq Y$ קומפקטית.
הוכחה: ניקח $(y_n)\subseteq f(K)$. ניתן לבנות סדרה $(x_n)\subseteq K$
כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $y_n=f(x_n)$ (הסדרה (x_n) לאו דווקא יחידה,
אבל זה ממש לא משנה). מאחר ש- K קומפקטית קיימת
תת סדרה (x_{n_k}) אשר מתכנסת ל- $x\in K$. מכיוון ש- f
רציפה $(y_{n_k})=(f(x_{n_k}))$ מתכנסת לגבול $f(x)\in K$.
$\Leftarrow$ $f(K)$ קומפקטית.

מסקנה: במרחב קומפקטי קבוצות סגורות מועתקות לקבוצות סגורות. (ע"י פונקציה רציפה)

טענה: פונקציה רציפה $f: X \to \mathbb{R}$ מעל מרחב קומפקטי מקבלת מינימום ומקסימום.

הוכחה: מהטענה הקודמת $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית ובפרט סגורה. מאינפי 1 ידוע ש פונקציה מקבלת ערכים קיצוניים על קטע סגור.

הגדרה: $f: (X,d) \to (Y,\rho)$ נקראת רציפה במידה שווה (uniformly continuous) אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,y)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(y))<\epsilon$
(ב פונקציה רציפה במ"ש היא בפרט רציפה).

הגדרה: פונקציה נקראת Hölder-רציפה מדרגה $\alpha>0$ אם קיים $k>0$ כך ש- $\rho(f(x),f(y)) \le k[d(x,y)]^{\alpha}$
בפרט פונקציה נקראת ליפשיצית אם היא Hölder-רציפה מדרגה $\alpha=1$

טענה: פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית היא רציפה במ"ש.

הוכחה: נניח בשלילה ש-f אינה רציפה במ"ש. כלומר קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימות נקודות (x_n,y_n) המקיימות $d(x_n,y_n)\le\frac{1}{n}$ וגם $\rho(f(x_n),f(y_n))>\epsilon$
מכיוון ש-X קומפקטית, קיימת תת סדרה (x_{n_k},y_{n_k}) כך ש $x_{n_k}\to x$ ו- $y_{n_k}\to y$. מכיוון ש- $d(x_{n_k},y_{n_k})\to 0$ אז $x=y$
וגם מכיוון ש-f רציפה אז $f(x_{n_k})\to f(x)$, $f(y_{n_k})\to f(y)$

$$\rho(f(x_n),f(y_n)) \le \rho(f(x_n),f(x)) + \rho(f(y),f(y_n)) \longrightarrow 0$$

כי ρ רציפה.

סתירה!

(15) 8.11.06
אינפי

רציפות במ"ש

הערה: אם f חח"ע ועל הפונקציה f^{-1} מוגדרת (כי תמונה של קבוצות, זה בכלל לא קשור למרחבים מטריים וכו').

הגדרה: העתקה חח"ע ועל $f: X\to Y$ נקראת **הומאומורפיזם** (homeomorphism) אם f ו-f^{-1} רציפות.
(מובן מאליו שאם f הומאומורפיזם אז f^{-1} הומאומורפיזם)
שני מרחבים (X,d), (Y,g) נקראים **הומאומורפיים** אם קיים הומאומורפיזם $f: X\to Y$.

הערה: הומאומורפיות מגדירה יחס שקילות בין מרחבים מטריים.
אם נסמן הומאומורפיות $X\sim Y$ אז כמובן מתקיימות 3 התכונות הדרושות.
- רפלקסיביות $X\sim X$ - העתקת הזהות
- סימטריות $X\sim Y \Rightarrow Y\sim X$
- טרנזיטיביות $X\sim Y, Y\sim Z \Rightarrow X\sim Z$ - תכונת הרכבה

הערה: f הומאומורפיזם אם f חח"ע ועל ו-$f(A)$ פתוחה אמ"מ A פתוחה (מה שאומר ש-f ו-f^{-1} רציפות)

חוץ מזה הומאומורפיזם משמר תכונות טופולוגיות (מושג הזה בשבילנו זה רק פתיחות, סגירות וקומפקטיות)

דוגמאות:

(1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ו-$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ מרחבים מטריים הומאומורפיים.
זה לא טריוויאלי. זה שלקחנו אותה קבוצה זה בכלל לא גורר הומאומורפיות, כי לכאורה המבנה שלהם שונה.
במקרה זה ההומאומורפיזם הוא העתקת הזהות $i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x$
לא קשה להוכיח שזה נכון.

(2) המרחבים $(a,b),(c,d)\subseteq\mathbb{R}$ הומאומורפיים ע"י

$$f: x \longmapsto c+\frac{x-a}{b-a}(d-c)$$

(3) (a,b) הומאומורפי ל- $\mathbb{R}$:

ראשית לפי (2) $(a,b)\sim(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

ואז $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ הומאומורפי ל- $\mathbb{R}$ ע"י $f: x\mapsto \tan x$

<u>טענה</u>: תהא $f: X\to Y$ חח"ע, על ורציפה.
אם X מרחב קומפקטי אז f הומאומורפיזם.
הוכחה: מכיוון ש- X מרחב קומפקטי, אז לכל $K\subseteq X$
סגורה מתקיים K קומפקטית.
מכיוון ש- f רציפה אז $f(K)\subseteq Y$ קומפקטית ובפרט
סגורה. אם f מעתיקה סגורות לסגורות אז
f^{-1} רציפה.

איך מוכיחים ששני מרחבים אינם הומאומורפיים?
לכאורה צריך לבחון את כל ההעתקות ביניהם ולבדוק
שהן אינן הומאומורפיזמים. אבל זה לא נשמע מעשי
כל כך ובצדק. אלא מה? הומאומורפיזם משמר
תכונות טופולוגיות. אז למשל, אם X קומפקטי
ו- Y אינו, אז X ו- Y אינם הומאומורפיים.

<u>דוגמאות</u>:

(1) $\mathbb{R}$ אינו הומאומורפי למרחב דיסקרטי (X,d)
אם היה הומאומורפיזם אז הקבוצה הקומפקטית $[0,1]$
מועתקת לקבוצה אינסופית $f([0,1])$ אבל במרחב דיסקרטי
קבוצה אינסופית אינה קומפקטית!

(2) $(0,1)$ אינו הומאומורפי ל- $[0,1]$
שהרי $(0,1)$ אינו קומפקטי ואילו $[0,1]$ דווקא כן.

③ $[0,1]$ אינו הומאומורפי ל- $[0,1]\times[0,1]$ (תרגיל)

④ $\mathbb{R}^m$ אינו הומאומורפי ל $\mathbb{R}^n$ $(n\neq m)$ (לא תרגיל - זה קשה מאוד Invariance of Domain, Brouwer, 1912)

התכנסות של סדרות של פונקציות למרחבים מטריים

הגדרה: סדרה של פונקציות (f_n) מ- (X,d) ל- (Y,ρ) נקראת מתכנסת נקודתית ל- f אם לכל $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n(x),f(x))=0$$

לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $N=N(x,\varepsilon)$ כך ש- $\rho(f_n(x),f(x))<\varepsilon$ לכל $n>N$.

הסדרה (f_n) מתכנסת ל- f במידה שווה אם ניתן לבחור N כנ"ל שאינו תלוי ב- X. כלומר

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\rho(f_n(x),f(x))=0$$

הערה: $\rho(f_n(x),f_m(x))\le\rho(f_n(x),f(x))+\rho(f_m(x),f(x))$

התכנסות במ"ש גוררת קיום תכונת קושי

$$\lim_{m,n\to\infty}\sup_{x\in X}\rho(f_n(x),f_m(x))=0$$

במקרה הפרטי שבו $Y=\mathbb{R}$ נראה שקיום תכונת קושי מספיק כדי שתהיה התכנסות במידה שווה.

דוגמאות:

① $f_n:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ (עם המטריקה הדיסקרטית) המוגדרת ע"י $f_n: k\mapsto\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$

ברור ש- $f_n\to 0$ אבל ההתכנסות אינה במידה שווה שהרי $\sup_{k\in\mathbb{N}} d(f_n(k),0(k))=1$

(2) $f_n:[0,1)\to[0,1)$ המוגדרת ע"י $f_n: x \mapsto x^n$

אז לכל $x\in[0,1)$ $|f_n(x)-0| = x^n \longrightarrow 0$

אז (f_n) מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס.

אבל, אין התכנסות במ"ש שהרי $\sup_{0\le x<1}|f_n(x)-0| = 1$

(3) נתבונן על אותה סדרת פונקציות אבל על קטע אחר. $f_n:[0,1]\to[0,1]$ $f_n(x) = x^n$.

אז כמובן (f_n) מתכנסת לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

וגם כאן אין התכנסות במידה שווה.

אז באופן טבעי נשאלת השאלה - האם יש קשר בין התכנסות במ"ש לרציפות? והתשובה היא - כן

משפט: $f_n:(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסות נקודתית לפונקציה f. אם ההתכנסות היא במידה שווה אז f רציפה.

אם f_n רציפות במ"ש ומתכנסות במ"ש אז הגבול רציף במ"ש

* אין שום שפנים שבאים מעולם אחר
ברכה הפרמן

הוכחה:

- צריך להראות ש-f רציפה בכל $x\in X$.

תהי סדרה (x_m) כך ש- $x_m\to x$.

נראה ש- $f(x_m)\to f(x)$ אזי

$$\rho(f(x_m),f(x)) \le \rho(f(x_m),f_n(x_m)) + \rho(f_n(x_m),f_n(x)) + \rho(f_n(x),f(x))$$

בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\rho(f_n(y),f(y))\le\frac{\varepsilon}{3}$ לכל y.

לאחר שבחרנו n כנ"ל, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m>N$

$\rho(f_n(x_m),f_n(x))\le\frac{\varepsilon}{3}$ - בגלל הרציפות של f_n.

$\Leftarrow$ $\rho(f(x_m),f(x)) \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, כלומר f רציפה ב-X.

- צריך להראות ש-f רציפה במידה שווה.
לכל $x,y\in X$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\rho(f(x),f(y)) \le \rho(f(x),f_n(x)) + \rho(f_n(x),f_n(y)) + \rho(f_n(y),f(y))$$

בהינתן $\varepsilon>0$ קיים n כך ש-$\sup_{z\in X}\rho(f_n(z),f(z)) \le \varepsilon/3$
(נובע מההתכנסות במידה שווה). מכיוון ש-f_n (אחת
מסוימת) רציפה במ"ש, קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,y)<\delta$
אז $\rho(f_n(x),f_n(y)) \le \frac{\varepsilon}{3}$ ואז סה"כ $\rho(f(x),f(y)) \le \varepsilon$
כלומר f רציפה במ"ש.

11

טענה: אם (f_n) רציפות ומתכנסות במ"ש אז לכל סדרה
(x_n) שמתכנסת ל-x $f_n(x_n)\longrightarrow f(x)$

אנטי דוגמא:

$f_n:[0,1]\to[0,1]$ $\quad f_n: x\longmapsto x^n$ $\quad x_n = 1-\frac{1}{n}$

$$f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} \ne 1 = f(1)$$

הכל נראה טוב ויפה חוץ מזה שאין התכנסות במ"ש,
אז אין שום סיבה שזה יעבוד.

הוכחה:

$$\rho(f_n(x_n),f(x)) \le \rho(f_n(x_n),f(x_n)) + \rho(f(x_n),f(x)) \le$$
$$\le \underbrace{\sup_y \rho(f_n(y),f(y))}_{\text{מתכנס לאפס בגלל ההתכנסות במ"ש.}} + \underbrace{\rho(f(x_n),f(x))}_{\text{מתכנס לאפס בגלל שפונקציית הגבול } f \text{ היא רציפה (מתוך גבול של סדרת פונקציות רציפות שמתכנסות במ"ש)}}$$

הגדרה: $f_n:(X,d)\to\mathbb{R}$. נאמר שהטור $S=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$
קיים אם סדרת הסכומים החלקיים $S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$
מתכנסת נקודתית לפונקציה S.

משפט (מבחן M של ויירשטראס Weierstrass):
תהא f_n סדרת פונקציות (רציפות) $(X,d)\to\mathbb{R}$
אם קיימת סדרת מספרים חיוביים (M_n) כך ש-
$\sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$, ! $\sup_{x\in X}|f_n(x)|\le M_n$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$
מתכנס במ"ש (והגבול רציף).

הוכחה: נגדיר $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$
לכל x הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט (למה?)
מאינפי 1 $\left(\sum|f_n(x)|\le\sum|\sup f_n(x)|\le\sum M_n<\infty\right)$
⇐ קיימת פונקציה $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
נותר רק להוכיח במידה שווה.

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(x)|\le$$
$$\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\sup_X|f_k(x)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k$$

$$\Rightarrow \sup_X|S(x)-S_n(x)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k$$

נשאיף את n לאינסוף והגבול אפס כי זה זנב של טור מתכנס. ⇐ ההתכנסות במ"ש.

(18) 14.11.06
איפי'

קריטריון M של וירשטרס

תהי סדרת פונקציות (f_n) $f_n: X\to \mathbb{R}$ אם $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \le M_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$ אז $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ מתכנס במידה שווה ל- S.
בפרט, אם f_n פונקציות רציפות אז S רציפה.

טענה: $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המתכנסות במידה שווה לגבול f על $[a,b]$. אז

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

הוכחה: ראשית נציין שהאינטגרלים מוגדרים היטב משום שכל f_n וגם f רציפות ולכן אינטגרביליות על הקטע סגור. וגם שאר ההוכחה פשוט מאד:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right| \le$$
$$\le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \le (b-a)\sup_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|$$

והרי בגלל ההתכנסות במידה שווה $\sup_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)| \longrightarrow 0$

משפט: תהיינה f_n פונקציות גזירות $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ומתקיים
(i) קיימת נקודה $c\in[a,b]$ בה הסדרה $f_n(c)$ מתכנסת
(ii) סדרת הנגזרות (f_n') מתכנסת במ"ש לגבול g
אז f_n מתכנסת במ"ש לגבול f ומתקיים $f'=g$.

הערה: הדרך הטבעית היא להגדיר $f(x)=f(c)+\int_c^x g(t)\,dt$ ולהוכיח ש $f_n\to f$ במ"ש. אבל זו בעיה כי אף אחד לא הבטיח לנו ש- g אינטגרבילית. אם f_n' היו גזירות ברציפות אז זו באמת הייתה אחלה דרך להוכיח את זה.

הוכחה: צריך להוכיח תחילה ש- (f_n) סדרה מתכנסת במ"ש. לצורך כך נשתמש בקריטריון קושי:

$$|f_n(x)-f_m(x)| = |f_n(x)-f_m(x)-f_n(c)+f_m(c)+f_n(c)-f_m(c)| \le$$

$$\le |(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(c)| + |f_n(c)-f_m(c)| \le$$

$$= |x-c|\,|(f_n'-f_m')(\xi)| + |f_n(c)-f_m(c)|$$

משפט ערך הביניים

$$\Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)| \le (b-a)\sup_{y\in[a,b]}|f_n'(y)-f_m'(y)| + |f_n(c)-f_m(c)|$$

אם עכשיו אגף ימין לא תלוי ב- x לכן

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)| \le (b-a)\sup_{y\in[a,b]}|f_n'(y)-f_m'(y)| + |f_n(c)-f_m(c)|$$

אבל, $|f_n(c)-f_m(c)| \longrightarrow 0$ כי $(f_n(c))$ מתכנסת ואפשר להשתמש בתנאי קושי.

$\sup_{y\in[a,b]}|f_n'(y)-f_m'(y)| \longrightarrow 0$ כי (f_n') מתכנסת במידה שווה ואפשר להשתמש בתנאי קושי.

$\Leftarrow$ (f_n) מקיימת את תנאי קושי להתכנסות במ"ש.

אז נקרא לגבול f - $f_n \to f$ במ"ש.

נותר להוכיח ש- f גזירה וכן $g = f'$.

נתון x - בין a,b, נוכיח ש- f גזירה ב- x וש- $f'(x) = g(x)$. נגדיר

$$\varphi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & h \neq 0 \\ g(x) & h = 0 \end{cases}$$

אם נוכיח ש- φ רציפה ב- $h=0$ אז נקבל ש- f גזירה ב- x ו- $f'(x) = g(x)$.

כדי להוכיח ש- φ רציפה נראה שהיא גבול במידה שווה של סדרת פונקציות רציפות.

(19)

הגיון: למדו להסתכל על הסדרה

$$\varphi_n(h) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} & h \neq 0 \\[2ex] f_n'(x) & h = 0 \end{cases}$$

ברור שלכל $n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(h)$ פונקציה רציפה (כי עבור $h \neq 0$ זה נובע מאריתמטיקה של פונקציות רציפות ואילו עבור $h=0$, הרי f_n גזירות).

ברור גם ש$\varphi_n(h) \longrightarrow \varphi(h)$ נקודתית. אנחנו רוצים להראות שההתכנסות היא במידה שווה.

$$|\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| = \begin{cases} \dfrac{(f_n - f_m)(x+h) - (f_n - f_m)(x)}{h} & h \neq 0 \\[2ex] |f_n'(x) - f_m'(x)| & h = 0 \end{cases} =$$

$$\underset{\text{משפט ערך הביניים}}{=} \begin{cases} |(f_n' - f_m')(\xi)| & h \neq 0 \\ |f_n'(x) - f_m'(x)| & h = 0 \end{cases} \leq \sup_{\xi} |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$$

ולכן מאחר שאגף ימין אינו תלוי ב-h:

$$\sup_h |\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| \leq \sup_{\xi} |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \xrightarrow[m,n \to \infty]{} 0$$

בגלל ההתכנסות במ"ש

$\Leftarrow$ φ_n מתכנסים במ"ש ל-φ

$\Leftarrow$ φ רציפה

$\Leftarrow$ f גזירה ב-x ! $f'(x) = g(x)$.

מסקנה: שני המשפטים האחרונים תקפים לגבי טורים
- אם (f_n) סדרת פונקציות רציפות על $[a,b]$ כך שהטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש אז

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx$$

- אם (f_n) סדרת פונקציות גזירות כך שהטור $\sum f_n'$ מתכנס במ"ש אם הטור $\sum f_n$ מתכנס לפחות בנקודה אחת. אז

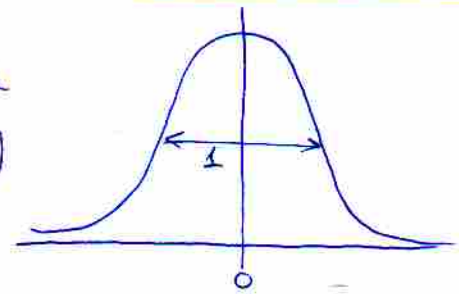
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

משפט דיני:
(f_n) סדרת פונקציות ממשיות רציפות על מרחב מטרי קומפקטי (X,d). נתון ש- f_n מתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה f באופן מונוטוני (ירוד לזכור שבכל נקודה המונוטוניות בכיוון אחר). אז (f_n) מתכנסת ל- f במידה שווה.

הוכחה: נניח בשלילה ש- (f_n) אינה מתכנסת במ"ש.
$\Leftarrow$ קיים ε וקיימות סדרת נקודות (x_k) ותת סדרה (f_{n_k}) כך ש- $|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|>\varepsilon$
מה.מונוטוניות של f_n ל- f נובע שלכל $m<n_k$
$|f_m(x_k)-f(x_k)|>\varepsilon$.
מכיוון ש- X קומפקטי קיימת תת סדרה (x_{k_ℓ}) המתכנסת לגבול $x\in X$.
לכל $m<n_{k_\ell}$ $|f_m(x_{k_\ell})-f(x_{k_\ell})|>\varepsilon$
נשאיף את ℓ לאינסוף ונשתמש בעובדה ש- f_m, f פונקציות רציפות. $\Leftarrow$ $|f_m(x)-f(x)|\geq\varepsilon$ לכל m
בסתירה להנחה ש- (f_m) מתכנסת נקודתית ל- f ב- X.

מסקנה: אם (f_n) סדרת פונקציות ממשיות רציפות אי-שליליות על מרחב קומפקטי (X,d) והטור $\sum f_n$ מתכנס נקודתית לפונקציה רציפה S אזי ההתכנסות היא במ"ש.

השכלה כללית (= לא למבחן)



אם (a_k) סדרה של משתנים מקריים נורמליים $N(0,1)$ ונגדיר

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\, a_k$$

אם היינו מסתכלים רק על $\sum \frac{\sin kx}{k}$ לא היינו יכולים להפעיל את מבחן M של ויירשטראס כי הוא חסום ע"י $\sum \frac{1}{k}$ וזה לא מתכנס!

אלא מה? a_k יכולים להיות כל מיני - חיוביים, שליליים, קטנים, גדולים. ואפשר להוכיח שכמעט תמיד הטור $S_n(x)$ מתכנס במידה שווה, <u>אבל</u> פונקציית הגבול אינה גזירה באף נקודה.

הדבר הזה נקרא תנועת Brown ויש תורה שלמה שמתעסקת בזה!

(21) 15.11.06

ומהווה דבר שמתאזנות

משפט דיני: יהי X מרחב קומפקטי ו-(f_n) סדרת פונקציות רציפות $f_n: X \to \mathbb{R}$ המתכנסת נקודתית ומונוטונית לפונקציה רציפה. אזי (f_n) מתכנסת במ"ש ל-f.

הוכחה חלופית: בהינתן $\varepsilon>0$ ו-$x\in X$ קיים $N(x,\varepsilon)$ כך שלכל $n>N(x,\varepsilon)$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ - זה בגלל ההתכנסות הנקודתית.

תזכורת

בגלל הרציפות, בהינתן $\varepsilon>0$ ו-$x\in X$ קיים $\delta(x,\varepsilon)>0$ כך שלכל y כך ש-$d(x,y)<\delta$ מתקיים
$$|f_{N(x,\varepsilon)}(x)-f_{N(x,\varepsilon)}(y)|<\varepsilon \quad \text{ו} \quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$
אפשר לרשום את X כאיחוד של כדורים פתוחים:
$$X=\bigcup_{x\in X} B_0(x,\delta(x,\varepsilon))$$
האוסף $\{B_0(x,\delta(x,\varepsilon)):x\in X\}$ הוא כיסוי פתוח של המרחב X.
אבל X קומפקטי ולכן לפי משפט היינה בורל קיים אוסף סופי $\{x_i\}_{i=1}^m$ כך ש- $X=\bigcup_{i=1}^m B_0(x_i,\delta(x_i,\varepsilon))$
ניקח $N=\max_{1\le i\le m} N(x_i,\varepsilon)$. לכל $y\in X$ קיים $1\le k\le m$ כך ש-$y\in B_0(x_k,\delta(x_k,\varepsilon))$. לכל $n>N$ מתקיים אזי:
$$|f_n(y)-f(y)| \underset{\text{מונוטוניות}}{\le} |f_{N(x_k,\varepsilon)}(y)-f(y)| \le$$
$$\le |f_{N(x_k,\varepsilon)}(y)-f_{N(x_k,\varepsilon)}(x_k)|+|f_{N(x_k,\varepsilon)}(x_k)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(y)|<3\varepsilon$$
$\Leftarrow$ ההתכנסות היא במ"ש.

הגדרה: יהא K מרחב מטרי קומפקטי. נסמן ב-$C(K)$ את אוסף הפונקציות הממשיות הרציפות על K.
על אוסף זה נגדיר את נורמת המקסימום
$$\|f\|_\infty=\max_{x\in K}|f(x)|$$

הערה: נורמת המקסימום מוגדרת היטב משום שפונקציה רציפה על מרחב קומפקטי מקבלת מקסימום.

הערות:

① $C(K)$ מרחב וקטורי מעל הממשיים: אם $f,g \in C(K)$ ו- $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ אז באופן טבעי
$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$$

② צריך להראות ש- $\|\cdot\|_\infty$ מגדיר נורמה אבל זה ממש מובן מאליו.

③ לכן $C(K)$ מרחב מטרי עם מטריקה שמושרית מהנורמה
$$d(f,g)=\|f-g\|_\infty=\max_{x\in K}|f(x)-g(x)|$$

④ אם (f_n) מתכנסת ל- f ב- $C(K)$ אז
$$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\max_{x\in K}|f_n(x)-f(x)|=0$$
כלומר אם יש התכנסות של (f_n) ל- f ב- $C(K)$ אז יש התכנסות של (f_n) ל- f במ"ש ב- K.

<u>שאלה לקהל:</u> אם K קומפקטי גורר $C(K)$ קומפקטי?

<u>תשובה:</u> לא! כי ל- $f_n(x)=x^n$ על $[0,1]$ אין תת סדרה מתכנסת ב- $C(K)$!

<u>שאלה לקהל:</u> האם $A\subseteq C(K)$ סגורה וחסומה היא בהכרח קומפקטית?

<u>תשובה:</u> לא! למשל $A=\{f\in C(K): d(f,0)\le 1\}$

<u>הגדרה:</u> אוסף פונקציות $A\subset C(K)$ נקרא רציף במידה אחידה (equi-continuous) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $f\in A$ לכל $x,y\in K$ כך ש $d(x,y)<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$

* מה שמיוחד כאן הוא שאפשר לבחור את אותו ה-δ לכל הפונקציות שלה עוד יותר. חלק מרציפות במידה שווה. זה לא מובן מאליו כי למספר סופי של פונקציות תמיד אפשר לקחת את ה-δ המינימלי. אבל מה אם האוסף הוא אינסופי?

(22)

משפט Arzelà - Ascoli: קבוצה $A \subseteq C(K)$ היא קומפקטית אמ"מ היא סגורה, חסומה ורציפה במידה אחידה.

דוגמה: $K=[0,1]$ ו- $A \subset C(K)$ אוסף הפונקציות, $\|f\|_\infty \le M_1$ $\to A\subset B(0,M_1)$ והפונקציות גזירות ברציפות $\|f'\|_\infty \le M_2$. זהו אוסף סגור וחסום

$$|f(x)-f(y)| \le M_2|x-y|$$

לכל $0<\varepsilon$ אם נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{M_2}$ אז אם $|x-y|<\delta$

אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$B(0,M_1) \subset C(K)$. אם $f\in \bar{A}$ לכל $0<\varepsilon$ קיימת $g\in A$

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-g(x)| + |g(x)-g(y)| + |g(y)-f(y)| < 2\varepsilon + M_2|x-y|$$

הוכחת המשפט: נוכיח רק את הכיוון הקשה:

נניח ש $A\subset C(K)$ סגורה, חסומה ורציפה במידה אחידה.

בפרט, קיים M כך ש- $\max_{x\in K}|f(x)|\le M$ לכל $f\in A$

תהי (f_n) סדרה ב- A. מכיוון ש- K קומפקטית היא ספרבילית אז קיימת סדרת נקודות $(x_n)\subset K$ שהיא צפופה, כלומר $\overline{\{x_n\}}=K$

נתבונן בסדרה $(f_n(x_1))$ - זו סדרה חסומה של מספרים ממשיים ולכן יש לה תת סדרה $(f_n^{(1)})$ המתכנסת בנקודה x_1.

נתבונן בסדרה $(f_n^{(1)}(x_2))$ - שוב כמו קודם קיימת לה תת סדרה $(f_n^{(2)})$ שמתכנסת ב- x_2 ובוודאי גם ב- x_1.

ובאינדוקציה, בצעד ה- k תהיה קיימת תת סדרה $(f_n^{(k)})$ אשר מתכנסת בנקודות $x_1,\dots,x_k$.

נוצר לנו מן מטריצה ריבועית שכזו:

$$\begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & \dots \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & \dots \\ \vdots & & & \\ f_1^{(k)} & f_2^{(k)} & f_3^{(k)} & \dots \end{array}$$

נתבונן בסדרה $(f_n^{(n)})$. לכל k טבעי $(f_n^{(n)})$ תת סדרה של $f_n^{(k)}$ החל ממקום מסוים ולכן מתכנסת ב- x_k.

~~בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ מהגדרת ההתכנסות במידה אחידה. בהינתן $x\in K$ קיים x_k מהסדרה הצפופה המקיים $d(x_k,x)<\delta$. ועכשיו נשתמש בקושי~~

$$\cancel{|f_n^{(n)}(x)-f_m^{(m)}(x)| \le |f_n^{(n)}(x)-f_n^{(n)}(x_k)| + |f_n^{(n)}(x_k)-f_m^{(m)}(x_k)| + |f_m^{(m)}(x_k)-f_m^{(m)}(x)| \le 2\varepsilon + |f_n^{(n)}(x_k)-f_m^{(m)}(x_k)|}$$

כאן קרה בלבול כי לפרט לא הסתדרו העניינים.

מה שהיינו רוצים להראות הוא שלכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n>N$ ולכל $x\in K$ $|f_n^{(n)}(x)-f_m^{(m)}(x)|<3\varepsilon$ כלומר שמתקיים תנאי קושי להתכנסות במ"ש.

רק להבין את הפתרון: בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ (מהרציפות במידה אחידה). ניתן לכסות את K בעזרת מספר סופי ℓ של כדורים ברדיוס δ סביב נקודות $x_{n_1},\dots,x_{n_\ell}$ מהאוסף הצפוף.

לכל נקודה x_{n_i} קיים N_i כך שלכל $m,n>N_i$ מתקיים $|f_n^{(n)}(x_{n_i})-f_m^{(m)}(x_{n_i})|<\varepsilon$.

נבחר $N=\max\limits_{1\le i\le \ell} N_i$. לכל $x\in K$ (נמצא בכדור $B_o(x_{n_i},\delta)$!)

$$|f_n^{(n)}(x)-f_m^{(m)}(x)| \le \underbrace{|f_n^{(n)}(x)-f_n^{(n)}(x_{n_i})|}_{<\varepsilon \text{ בגלל רציפות במידה אחידה}} + \underbrace{|f_n^{(n)}(x_{n_i})-f_m^{(m)}(x_{n_i})|}_{<\varepsilon \text{ בגלל שכך נבחר } N} + \underbrace{|f_m^{(m)}(x_{n_i})-f_m^{(m)}(x)|}_{<\varepsilon \text{ בגלל רציפות במידה אחידה}}$$

$$< 3\varepsilon$$

(23) 21.11.06
אינפי'

היום יוסי מחליף את רז. בהצלחה!

היום נדבר על נושא שהוא בתוך המסגרת של מרחבים מטריים אבל הוא לא המשך ישיר של arzelà-ascoli

מה שאנחנו לומדים כאן הוא הרחבה של אינפי 1. אנחנו מגדירים התכנסות באופן אבסטרקטי ומקבלים הרבה משפטים אנלוגיים למה שכבר למדנו.

שלמות

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. סדרה $(x_n)\subseteq X$ תיקרא סדרת קושי אם מתקיים תנאי קושי שהוא:
לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n>N$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

הערה: בממשיים, אנחנו יודעים מאינפי 1, שסדרת קושי אמ"מ היא סדרת קושי. האם זה נכון באופן כללי?

טענה: תהי (x_n) סדרה מתכנסת. אזי (x_n) סדרת קושי.

הוכחה: זה נובע באופן ישיר מאי-שוויון המשולש:

$$d(x_n,x_m)\le d(x_n,x)+d(x,x_m)\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0$$

דוגמא: נסתכל על הקטע $(0,1)$ כמרחב מטרי.
הסדרה המוגדרת ע"י $x_n=\frac{1}{n}$ היא סדרת קושי:

$$d(x_n,x_m)=|x_n-x_m|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|=\frac{|n-m|}{nm}\le\frac{\max(n,m)}{nm}=$$
$$=\frac{1}{\min(n,m)}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0$$

אבל לא קיים $x\in(0,1)$ כך ש- $x_n\to x$.

טענה: תהי (x_n) סדרת קושי ב-X ונניח שיש לה תת סדרה מתכנסת. אזי (x_n) מתכנסת.

הערה: נזכור איך הוכחנו את משפט קושי באינפי 1: הוכחנו שסדרת קושי היא סדרה חסומה. מ-BW יש לה תת סדרה מתכנסת ומשם עשינו בדיוק את מה שאנחנו הולכים לעשות עכשיו.

הוכחה: נניח ש-$x_{n_k} \to x \in X$ ונוכיח ש-$x_n \to x$.

יהי $\epsilon > 0$. קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n_k$ $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$.

קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n, m$ $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$.

יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$N_2 < n$. נבחר n_k כך ש-$\max(N_1, N_2) < n_k$ ואז מאי שוויון המשולש נקבל

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

הגדרה: מרחב מטרי (X, d) ייקרא **שלם** אם כל סדרת קושי ב-X מתכנסת.

דוגמאות:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - עם המטריקה הרגילה - מרחב שלם - לפי אינפי 1
2. $((0,1), |\cdot|)$ לא שלם. - ר' דוגמה בעמוד הקודם
3. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ לא שלם. אפשר לבנות סדרה של רציונליים $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ כך ש-$q_n \to \sqrt{2}$. ב-$\mathbb{R}$ זוהי סדרת קושי (כי היא מתכנסת) והרי אין הבדל במטריקה בין $\mathbb{Q}$ ל-$\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ זו סדרת קושי גם ב-$\mathbb{Q}$. אבל $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, אז (q_n) לא מתכנסת ב-$\mathbb{Q}$.
4. נא לא לבלבל בין שלמות לבין סגירות! הקטע $(0,1)$ במרחב וקטורי הוא סגור (כי כל המרחב תמיד סגור) אבל כבר אמרנו מספר פעמים ש-$(0,1)$ אינו שלם!

יחד עם זאת, אם (X,d) מרחב מטרי שלם ו- $Y\subseteq X$
אזי Y סגורה אמ"מ (Y,d) מרחב מטרי שלם.
זה טריוויאלי, שהרי אם (y_n) סדרת קושי ב- Y
אז היא סדרת קושי גם ב- X ולכן מתכנסת ב- X.
אבל Y סגורה אז הגבול ב- Y, כלומר (Y,d) שלם.
הכיוון השני עוד יותר טריוויאלי.

5) אם (X,d) מרחב קומפקטי אזי X שלם - זה בגלל שבמרחב קומפקטי לכל סדרה, ובפרט לכל סדרת קושי, יש תת סדרה מתכנסת ואז לפי טענה קודמת סדרת הקושי מתכנסת.

6) שלמות אינה אינווריאנט טופולוגי, כלומר היא אינה נשמרת תחת הומאומורפיזם.
למשל, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. ידוע שזה הומאומורפיזם אבל $\mathbb{R}$ שלם ואילו $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ אינו שלם!

<u>הגדרה:</u> (חשובה מאוד!)

א) מרחב נורמי שלם נקרא **מרחב בנך** (Banach)

ב) מרחב מכפלה פנימית שלם נקרא **מרחב הילברט** (Hilbert)

<u>הערות:</u>

א) מרחב נורמי הוא מרחב וקטורי שמוגדרת עליו נורמה ובפרט הוא מרחב מטרי עם המטריקה המושרית מהנורמה.

ב) מרחב מכפלה פנימית הוא מרחב נורמי שמוגדרת עליו מכפלה פנימית. לכן כל מרחב הילברט הוא בפרט מרחב בנך.

<u>דוגמה:</u>

יהי (K,d) מרחב קומפקטי. נגדיר $C(K)=\{f:K\to\mathbb{R} : f \text{ רציפה}\}$ ונגדיר נורמה על $C(K)$ ע"י

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)| \underset{\text{כי } K \text{ קומפקטי}}{=} \max_{x\in K}|f(x)|$$

נזכר ש- $C(K)$ מרחב בנך. אז נראה ש- $C(K)$ שלם:

(f_n) היא סדרת קושי אמ"מ

$$0 = \lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty = \lim \sup_{x\in K} |f_n(x) - f_m(x)|$$

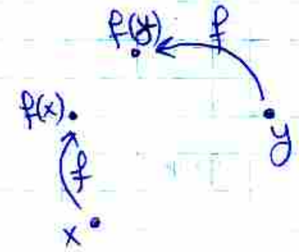
כלומר, (f_n) סדרת קושי אמ"מ היא מקיימת את קריטריון קושי להתכנסות במ"ש. ידוע משפט שאם $(f_n)\subseteq C(K)$ מתכנסת במ"ש ל- f אזי $f\in C(K)$.

וזה מסיים את העניין.

משפט ההעתקה המכווצת

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי. $f:X\to X$ תיקרא העתקה מכווצת אם קיים $0<\lambda<1$ כך ש-

$$d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y)$$



משפט ההעתקה המכווצת:

יהי (X,d) מרחב מטרי שלם. $f:X\to X$ העתקה מכווצת. אזי קיימת נקודה $x\in X$ יחידה שעבורה $f(x)=x$, כלומר x נקודת שבת יחידה.

אינטואיציה: בגלל שההעתקה מכווצת כל שאנחנו מפעילים אותה כל נקודות הן הולכות ומתקרבות אחת לשניה, בסוף אין לאן להתכווץ יותר.

הערה: יש דוגמאות נגדיות שממחישות שכל אחד מהתנאים הוא הכרחי.

הוכחה: נראה ש- f רציפה: יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{\lambda}$ ואז לכל $x,y\in X$ כך ש- $d(x,y)<\delta$ מתקיים

$$d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y) < \lambda\delta = \varepsilon$$

אז היא אפילו רציפה במידה שווה.

עתה, תהי $x_0 \in X$ שרירותית ונגדיר סדרה (x_n) באופן אינדוקטיבי:

$$x_n = \begin{cases} f(x_0) & n=1 \\ f(x_{n-1}) & n>1 \end{cases}$$

נראה ש-(x_n) סדרת קושי.

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \underset{\text{כיווץ}}{\le} \lambda d(x_n, x_{n-1})$$

ועכשיו באינדוקציה $d(x_{n+1}, x_n) \le \lambda^n d(x_1, x_0)$

כעת, לכל $n>m$ נקבל בעזרת אי שוויון המשולש:

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_{n-1}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \le$$
$$\le d(x_1, x_0)\left[\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^m\right] \le$$
$$\le d(x_1, x_0) \sum_{k=m}^{\infty} \lambda^k = d(x_1, x_0) \cdot \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

ולכן באמת סדרת קושי.

מהיות X מרחב שלם, קיימת $x \in X$ כך ש-$x_n \to x$.

נראה ש-$f(x) = x$:

$$f(x) = f(\lim x_n) \overset{\text{רציפות}}{=} \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n = x$$

לסיום, נראה את היחידות של x:

אם בשלילה $x \ne y$ ומתקיים $f(x)=x$, $f(y)=y$. אז

$$0 \underset{\text{כי הן שונות}}{<} d(x,y) = d(f(x), f(y)) \underset{\text{מהכיווץ}}{\le} \lambda d(x,y) < d(x,y)$$

וזאת סתירה!

דוגמאות:

(1) יהי $p>1$. $x = \sqrt{p+\sqrt{p+\sqrt{p+\dots}}}$ מה זה?

נגדיר סדרה (x_n) ע"י
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \sqrt{p+x_n} \end{cases}$$

x הוא בעצם $\lim x_n$ (אם הוא קיים בכלל).

נגדיר העתקה: $\varphi(x) = \sqrt{p+x}$ ואז $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

$\underset{K}{\varphi:[0,2p]} \circlearrowleft$ שהרי φ מונוטונית, ו-$\varphi(0) = \sqrt{p} \in K$

ו-$\varphi(2p) = \sqrt{3p} < 2p$. $(K, |\cdot|)$ הוא מרחב שלם.

לפי משפט ערך הביניים קיימת $x<\xi<y$ כך ש-
$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|\varphi'(\xi)|\cdot|x-y|$$
אבל:
$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+p}}\le\frac{1}{2\sqrt{p}}\le\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\quad|\varphi(x)-\varphi(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|$$
כלומר φ מכווצת עם $\lambda=\frac{1}{2}$.
לפי משפט ההעתקה המכווצת קיים $x\in K$ כך ש-
$$\varphi(x)=x=\lim x_n$$
עכשיו גם אפשר לחשב את x
$$x=\varphi(x)=\sqrt{p+x}$$
$$\Rightarrow\quad x^2=p+x$$
לפי משפט ההעתקה המכווצת הפתרון אמור להיות יחיד, אז אחד מהפתרונות של המשוואה הריבועית הוא יהיה מחוץ ל- K.
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4p}}{2}$$
לכן $x=\dfrac{1+\sqrt{1+4p}}{2}$ והפתרון השני אינו נמצא ב- K.

(2) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה. נניח שקיימים קבועים $0<\lambda_1<\lambda_2<\infty$ כך ש-
$$0<\lambda_1\le f'(x)\le\lambda_2<\infty$$
כלומר הפונקציה עולה כל הזמן אבל לא יתרגזו מהר. נניח שרוצים לפתור את המשוואה $f(x)=0$. אין דרך אנליטית לעשות את זה (מהכרח) אבל זה הרי בורר קיים. אז מה עושים? עושים פתרון נומרי עם מחשב שנותן x כזה ש- $f(x)$ ממש ממש קרוב לאפס. וזה מספיק טוב לכל אפליקציה מעשית.

(26)

משפט ההעתקה המכווצת מאפשר לנו לבנות סדרה x_n שמתכנסת ל-x הלא הדרוש, וכבה מחשבים קירובים.
נתבונן בפונקציה $\varphi(x) = x - \alpha f(x)$ ואשר $\alpha \neq 0$ ממשי.
ואכן $0 = f(x)$ אמ"מ $\varphi(x) = x$ וזה מזמין אותנו להשתמש במשפט ההעתקה המכווצת.
כמו בדוגמה הקודמת, מתקיים

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)||x-y|$$

נמצא α רק ש- $|\varphi'(x)| \le \lambda < 1$ לכל x.

$$\varphi'(x) = 1 - \alpha f'(x)$$

⇐ אם נבחר $\alpha = \frac{1}{2\lambda_2}$ נקבל:

$$\frac{1}{2} = 1 - 2\lambda_2 \le 1 - \alpha f'(x) \le 1 - \alpha\lambda_1 < 1$$

כלומר $|\varphi'(x)| \le 1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} < 1$

⇐ לפי משפט ההעתקה המכווצת $x = \lim x_n$ כאשר $x_{n+1} = \varphi(x_n)$! - x_0 שרירותית.
אז כותבים במחשב תוכנית רקורסיבית שמפעילה את φ עד שמתקבלת תוצאה שאנחנו מרוצים ממנה.
הבעיה כאן רק היא שמשפט ההעתקה המכווצת לא נותן הערכה לקצב ההתכנסות.

(3) משוואה דיפרנציאלית היא משוואה שהנעלם שלה הוא פונקציה $y(t)$.
נניח שנתונה משוואה דיפרנציאלית עם אילוץ

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

היינו רוצים לדעת אם יש למשוואה פתרון.
בשבוע זה יש משפט יפה שהפירוש שלו מאחורי הדלת.

משפט פיקארד (Picard)

תהי $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה רק שלא y $f(x,y)$ רציפה כפונקציה של x לכל x $f(x,y)$ רציפה כפונקציה של y. כלומר קיים $\infty > L$ רק ש-
לכל $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le L|y_2-y_1|$
אזי קיים $a>0$ רק שעבורו קיים פתרון למשוואה הדיפרנציאלית

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

מקטע $K=[t_0-a,t_0+a]$ y -! יחידה.

הערה: y פתרון למשוואה הדיפרנציאלית אמ"מ

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$$

הוכחה: נבחר a שרירותי. נגדיר ב-$\mathcal{C}(K)$ $\varphi(x)$ ע"י:
לפונקציה $z=z(t)\in\mathcal{C}(K)$ נגדיר

$$\varphi(z)(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,z(s))\,ds$$

נראה ש-a מסוים מספיק קטן φ מכווצת
ונסיים. $\mathcal{C}(K)$ מרחב מטרי שלם ולכן קיימת ל-φ נקודת שבת יחידה וזה מה שפותר את המשוואה.

$$\|\varphi(z_1)-\varphi(z_2)\|_\infty=\sup_{t\in K}\left|\int_{t_0}^{t}(f(s,z_1(s))-f(s,z_2))\,ds\right|\le$$

$$\le\sup_{t\in K}\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,z_1(s))-f(s,z_2(s))|\,ds\right| \underset{\text{ליפשיץ}}{\le}$$

$$\le\sup_{t\in K}\left|\int_{t_0}^{t}L\cdot|z_1(s)-z_2(s)|\,ds\right|\le$$

$$\le L\cdot\sup_{t\in K}\left|\int_{t_0}^{t}\sup_{s\in K}(z_1(s)-z_2(s))\,ds\right|=$$

L לא תלוי ב-s

$$=L\cdot\|z_1-z_2\|_\infty\cdot\left|\int_{t_0}^{t}ds\right|\le L\|z_1-z_2\|_\infty\cdot a$$

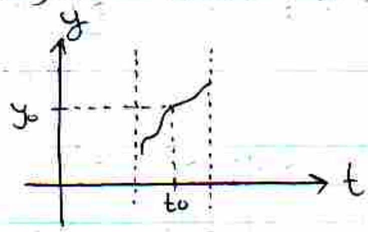
$\Leftarrow$ a צריך להיות כזה ש- $a<\frac{1}{L}$ ואז φ מכווצת.

(27) 22.11.06
איפי

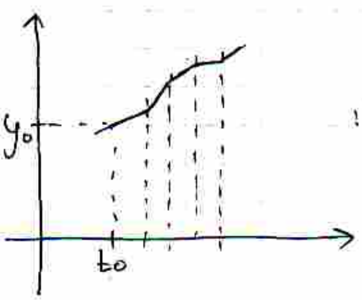
השיעור הקודם נגמר באפליקציה של משפט ההעתקה המכווצת למשפט מרכזי שעוסק במשוואות דיפרנציאליות רגילות.

נתונה משוואה דיפרנציאלית עם תנאי קצה:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(y(t), t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$



המשפט אומר שבתנאים מסויימים - כלומר אם f פונקציה (חלקה מספיק, אז קיימת סביבה של t_0 ובה יש פיתרון למשוואה אם נוסיף עוד תנאים אז גם הפתרון הוא יחיד.



אפשר להוכיח את משפט פיקארד גם בדרך אחרת:
זה נעשה בעזרת הבניה של אוילר. הרעיון הוא כזה:
אנחנו יודעים את $y(t_0)$ ולכן יודעים גם את $y'(t_0)$
ואז אפשר ללכת על המשיקה קדימה ואם הקירוב מספיק טוב אז נקבל את $y(t_0+\Delta t)$ ואז גם אנחנו יודעים את $y'(t_0+\Delta t)$ וככה מתקדמים הלאה. אז אוילר חשב שאם Δt מספיק קטן אז יהיה טוב...

הערה: כל מרחב מטרי לא שלם ניתן להשלמה (באופן טבעי)
(ראה איך משלימים את $\mathbb{Q}$ אבל זה כללי לגמרי.)
(נסתכל על הקבוצה של סדרות הקושי ב- $\mathbb{Q}$ ונגדיר מטריקה

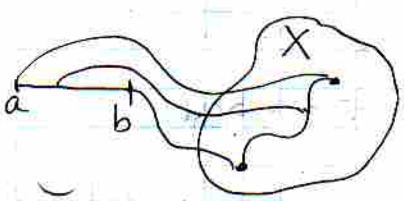
$$d((x_1,\dots,x_n,\dots),(y_1,\dots,y_m,\dots)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$$

מהקבוצה הזו נגדיר מחלקות שקילות שמה שמאפיין אותן הוא שלכל (x_n) ו- (y_n) בכל מחלקה $d((x_n),(y_n))=0$.
ואז לא קשה להראות שמחלקות השקילות הללו בתוספת המטריקה d הוא מרחב מטרי שלם וזו ההשלמה הטבעית.

בזאת אנו מכריזים על סיום פרק המרחבים המטריים ונעבור למשהו קונקרטי יותר.

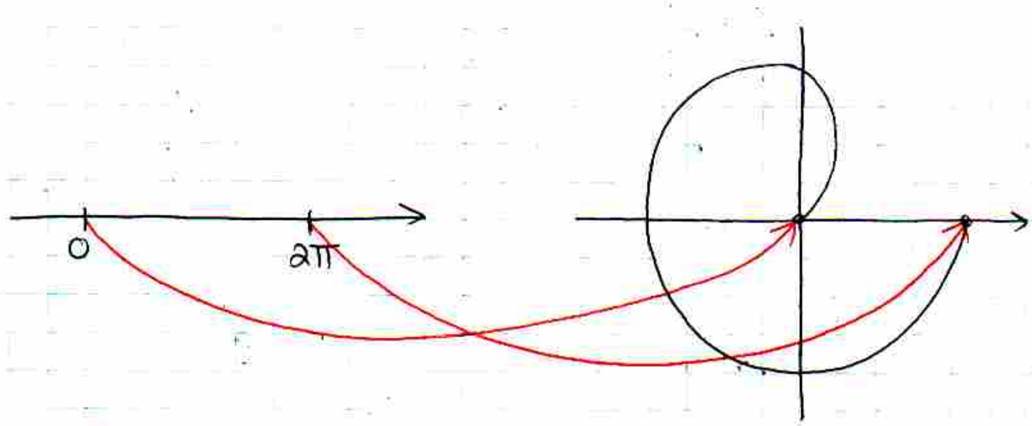
מסילות paths

הגדרה: מסילה במרחב מטרי X היא פונקציה רציפה מקטע סגור $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ לתוך X.



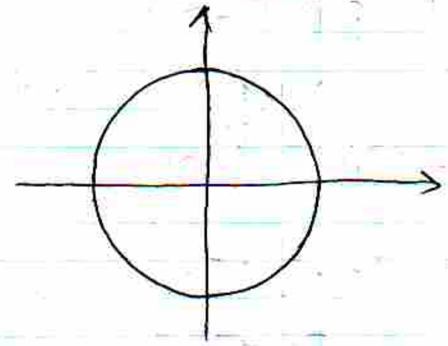
מסילה נקראת פשוטה אם f חח"ע
מסילה נקראת סגורה אם $f(a)=f(b)$
מסילה נקראת פשוטה וסגורה אם היא חח"ע למעט בקצוות.

דוגמה: $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ $\quad f: t\mapsto (t\cos t, t\sin t)$



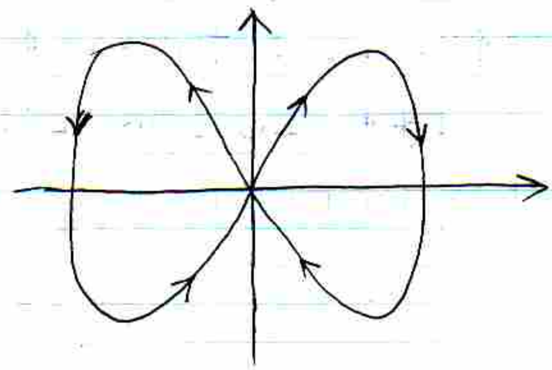
זוהי מסילה פשוטה.

דוגמה: $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ $g: t\mapsto(\cos t,\sin t)$



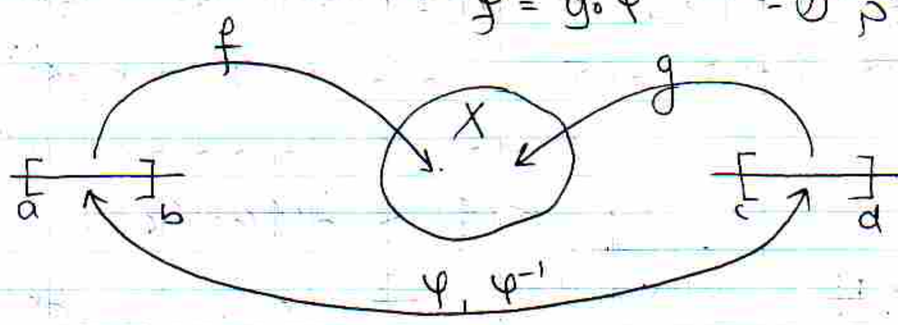
מסילה פשוטה סגורה

דוגמה: $h:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ $h:t\mapsto(\sin t,\sin 2t)$



מסילה סגורה אך לא פשוטה סגורה.

הגדרה: שתי מסילות $f:[a,b]\to X$ ו- $g:[c,d]\to X$ נקראות שקולות אם קיימת פונקציה רציפה ועולה ממש ועל $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ (מה שאומר שגם קיימת פונקציה φ^{-1} מכיוון ההפוך עם אותן תכונות) כך ש- $f=g\circ\varphi$



הגדרה: תהיינה $f:[a,b]\to X$, $g:[c,d]\to X$ מסילות המקיימות $f(b)=g(c)$. נגדיר שרשור של ההעתקות $g*f:[a,b+d-c]\to X$ באופן הבא:

$$(g*f)(t)=\begin{cases} f(t) & a\le t\le b \\ g(t+c-b) & b<t\le b+d-c\end{cases}$$

הגדרה: מסילה $f:[a,b]\to X$ כאשר X מרחב (נורמי) נקראת **קטע** אם היא שקולה למסילה $g:[0,1]\to X$ מהצורה $g(t)=tx+(1-t)y$ עבור $x,y\in X$.

מסילה נקראת **פוליגונלית** אם היא שרשור סופי של קטעים.

סימון: אם $f:[a,b]\to X$ ו- $[c,d]\subseteq[a,b]$ אזי $f|_{[c,d]}$ יסמן את הצמצום של f לקטע $[c,d]$.

הגדרה: תהא $f:[a,b]\to X$ מסילה. נגדיר

$$\ell(f)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d(f(t_i),f(t_{i-1})) : \{t_i\}_{i=0}^{n} \text{ חלוקה של } [a,b]\right\}$$

אם הנ"ל סופי נאמר שהמסילה בעלת אורך ונקרא ל- $\ell(f)$ **אורך המסילה**.

הערות:

1. אורך של מסילה הוא אי-שלילי (זה מובן מאליו כי זה חסם עליון של ערכים אי-שליליים)
2. אם תמונה של המסילה אינה נקודה בודדת האורך בהכרח חיובי (כי קיימת $a<t<b$ כך ש- $f(t)\neq f(a)$ או $f(t)\neq f(b)$ ואז $d(f(a),f(t))>0$ או $d(f(b),f(t))>0$ שזה אומר שמצאנו חלוקה שעבורה הסכום חיובי ולכן גם החסם העליון חיובי)
3. $\ell(f)\geq d(f(a),f(b))$
4. אם $A=\{t_i\}_{i=1}^{n}$, $B=\{s_i\}_{i=1}^{m}$ ו- $B\supseteq A$ אז אם נגדיר $L(f,A)=\sum_{i=1}^{n} d(f(t_i),f(t_{i-1}))$ אז לפי אי-שוויון המשולש $L(f,A)\leq L(f,B)$
5. למסילות שקולות אורך זהה. יהיו f,g,φ כך ש- $f=g\circ\varphi$

$$\ell(f)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d(f(t_i),f(t_{i-1})) : \{t_i\}_{i=1}^{n} \text{ is a partition}\right\}=$$
$$=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d(g(\varphi(t_i)),g(\varphi(t_{i-1}))) : \{t_i\}_{i=1}^{n} \text{ is a partition}\right\}=$$
$$=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} d(g(s_i),g(s_{i-1})) : \{s_i\}_{i=1}^{n} \text{ is a partition of } [c,d]\right\}=$$
$$=\ell(g)$$

(6) נתבונן ב- $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ $\quad f: t\mapsto \sin t$

התמונה היא הקטע $[0,1]$ אבל $\ell(f)=2$!

למה: כי f הולכת עד 1 ואז חוזרת חזרה ל- 0.

אז היא עוברת על $[0,1]$ פעמיים!

משפט: $f:[a,b]\to X$, $g:[c,d]\to X$, $f(b)=g(c)$

אז $\ell(g*f)=\ell(f)+\ell(g)$

הוכחה: נניח ש- $A=\{t_i\}_{i=0}^{n}$ חלוקה של $[a,b+d-c]$

$A\cup\{b\}$ ניתן להציג כאיחוד חלוקות B ו- C של $[a,b]$ ו- $[c,d]-(c-b)$ בהתאמה. ואז

$$L(g*f,A)\le L(g*f,A\cup\{b\}) = L(f,B)+L(g,C)$$

$$\Rightarrow \sup_A L(g*f,A) \le \sup_B L(f,B) + \sup_C (\ ,C)$$

כלומר $\ell(g*f)\le \ell(f)+\ell(g)$

מצד שני, לכל חלוקה B של $[a,b]$ ו- C של $[c,d]$

מתאימה חלוקת איחוד של $[a,b+d-c]$ ובאותו אופן

$$L(f,B)+L(g,C)\le L(g*f,A)$$

(30) 28.11.06
אינפי

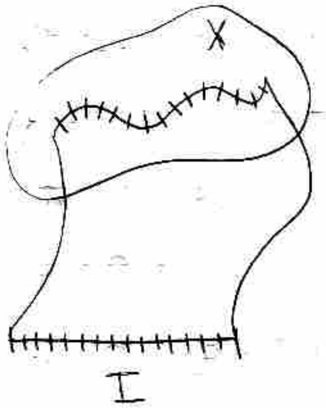
מסילות

אורך של מסילה - יש מסילה $f: I \to X$ ואנחנו רוצים להגדיר את האורך שלה.

$\mathcal{P}(I)$ - קבוצת החלוקות של I

לכל $A \in \mathcal{P}(I)$ נגדיר $|A|$ = מספר הנקודות בחלוקה.

לכל $f: I \to X$ ולכל $A \in \mathcal{P}(I)$ נגדיר

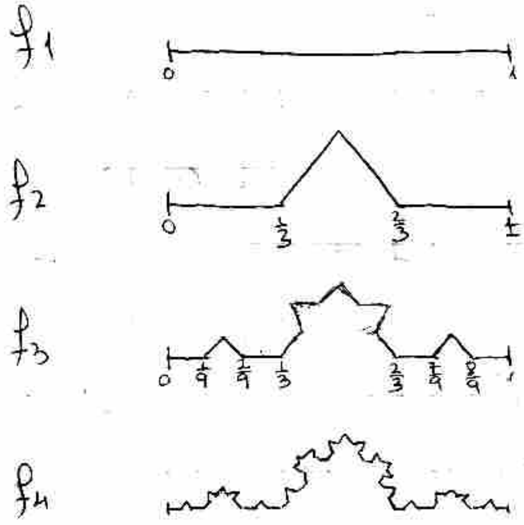


$$L(f,A) = \sum_{i=1}^{|A|} d(f(t_i), f(t_{i-1}))$$

אם $\ell(f) = \sup_{A \in \mathcal{P}(I)} L(f,A)$ סופי נאמר שהאורך של f הוא $\ell(f)$.

דוגמא לא תמיד האורך קיים:

לאמשל עקומת קוך: נגדיר סדרת מסילות $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2_2$



וכן הלאה...

אפשר להראות ש (f_n) מתכנסת במידה שווה לכן $\lim f_n = f$ פונקציה רציפה, וגם לא קשה להראות ש- $\ell(f) = \infty$.

<u>טענה</u> תהא $f:[a,b]\to X$ מסילה מעל אורך סופי.
נגדיר $S(t)=\ell(f|_{[a,t_0]})$ אזי
① $S(t)$ מונוטונית עולה
② $S(t)$ רציפה
③ אם f אינה קבועה על אף קטע אז $S(t)$ עולה ממש.

<u>הוכחה</u>
① אם $a\le t_1<t_2\le b$ אז $f|_{[a,t_2]}=f|_{[t_1,t_2]}*f|_{[a,t_1]}$

$$S(t_2)=\ell(f|_{[t_1,t_2]})+S(t_1)\ \ge\ S(t_1)$$

② תהא t נקודה כלשהי מהקטע $[a,b]$. נוכיח ש- S רציפה משמאל ב-t (הרציפות מימין אנלוגית). בהינתן $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה A של הקטע $[a,t]$ כך ש- $L(f|_{[a,t]},A)>S(t)-\frac{\varepsilon}{2}$
בנוסף מכיוון ש- f העתקה רציפה, קיימת נקודה $u\in[t_{n-1},t]$ כך ש $d(f(u),f(t))<\frac{\varepsilon}{2}$

$$S(u)\ge d(f(t_1),f(t_0))+\dots+d(f(t_{n-2}),f(t_{n-1}))+d(f(t_{n-1}),f(u))>$$
$$>d(f(t_1),f(t_0))+\dots+d(f(t_{n-2}),f(u))+d(f(u),f(t))-\frac{\varepsilon}{2}\ge$$
$$\ge L(f|_{[a,t]},A)-\frac{\varepsilon}{2}>S(t)-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $\varepsilon>0$ קיימת נקודה $u<t$ כך ש $S(u)>S(t)-\varepsilon$
$\Leftarrow$ לכל $r\in(u,t)$ $\quad S(r)\in(S(t)-\varepsilon,\ S(t))$
$\Leftarrow$ S רציפה משמאל ב-t.

③ אם $t_1<t_2$ והמסילה אינה קבועה בשום קטע, לכן קיימת $t_1<u<t_2$ כך ש- $f(u)\ne f(t_1)$ או $f(u)\ne f(t_2)$

$$\ell(f|_{[t_1,t_2]})\ge d(f(t_1),f(u))+d(f(u),f(t_2))>0$$
$$\Leftarrow\quad S(t_2)=S(t_1)+\ell(f|_{[t_1,t_2]})>S(t_1)$$

☺

© מסילות גזירות ב- $\mathbb{R}^n$

<u>הגדרה</u>: מסילה $f: I\to\mathbb{R}^n$ $f(t)=(f_1(t)\dots f_n(t))$ תיקרא
גזירה בנקודה t אם הגבול

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

קיים. במקרה זה נסמן את הגבול ב- $f'(t)$.

ההגדרה שקולה לכך שקיים $f'(t)\in\mathbb{R}^n$ כך ש-

$$\left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'(t)\right\|\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

ואת זה גם אפשר לכתוב באופן מפורש:
קיים $f'(t)=(f_1'(t),\dots f_n'(t))$ כך ש-

$$\lim_{h\to 0}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i(t+h)-f_i(t)}{h}-f_i'(t)\right)^2}=0$$

אבל התכנסות ב- $\mathbb{R}^n$ שקולה להתכנסות רכיב רכיב:

$$X_k=(X_{k1}\dots X_{kn})\longrightarrow(X_1\dots X_n)=X$$

אמ"מ $X_{k_i}\to X_k$ לכל $1\le i\le n$.

$\Leftarrow$ המסילה גזירה אמ"מ לכל $1\le i\le n$ הגבול הבא קיים

$$(*)\ \lim_{h\to 0}\frac{f_i(t+h)-f_i(t)}{h}$$

אבל את הגבול הזה אנחנו כבר מכירים מאינפי 1.
הרכיב ה- i הוא פונקציה $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ והגבול $(*)$ <u>הוא הנגזרת</u>
של f_i ב- t, <u>כלומר</u> $f_i'(t)$
אז אם $f(t)=(f_1(t),\dots;f_n(t))$ אז

$$f'(t)=(f_1'(t)\dots;f_n'(t))$$

נאמר ש- f <u>גזירה ברציפות</u> אם $f'(t)$ (והיא העתקה
רציפה, כלומר f' מסילה.

משפט: אם $f: I \to \mathbb{R}^n$ מסילה גזירה ברציפות, אז $S(t)$ פונקציה גזירה ומתקיים $S'(t) = \|f'(t)\|$

מסקנה: אם $f: I \to \mathbb{R}^n$ מסילה גזירה ברציפות, אז

$$\ell(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

הוכחת המסקנה:

$$\ell(f) = S(b) = \int_a^b S'(t)\, dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

דוגמה: $f(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t)$$
$$\|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$
$$\Rightarrow \ell(f) = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$$

למעשה מספיק שהמסילה תהיה גזירה ברציפות למקוטעין כדי שהנוסחה לאורך תעבוד כי בסוף נציג אותה כתור שרשור של מסילות גזירות ברציפות ואז האורך הוא סכום הערכים.

הערה: פונקציה יכולה להיות גזירה אבל לא ברציפות, ואם רוצים את זה באופן 2:

$$f(t) = \begin{cases} (t, t^2 \sin\frac{1}{t}) & t \neq 0 \\ (0,0) & t = 0 \end{cases}$$

הוכחת המשפט: נוכיח ש- S גזירה מימין בנקודה t (באופן אנלוגי גם משמאל) לכל $0<h$

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \frac{1}{h} \ell(f|_{[t,t+h]})$$

$$\frac{1}{h}\ell\left(f|_{[t,t+h]}\right) \geq \frac{1}{h} d\left(f(t+h), f(t)\right) = \frac{1}{h}\|f(t+h) - f(t)\| = \left\|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\|$$

$$\Leftarrow \liminf_{h\to 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \geq \|f'(t)\|$$

מצד שני, לכל חלוקה A של הקטע $[t, t+h]$ מתקיים

$$\frac{1}{h} L(f|_{[t,t+h]}, A) = \sum_{i=1}^m \frac{d(f(t_i), f(t_{i-1}))}{h} = \sum_{i=1}^m \frac{\|f(t_i) - f(t_{i-1})\|}{h} =$$

משפט ערך הממוצע

$$= \sum_{i=1}^m \frac{(t_i - t_{i-1})}{h} \|(\underbrace{f_1'(t_{i-1} + \theta_{i1}(t_i - t_{i-1}))}_{\xi_1}, \ldots, \underbrace{f_n'(t_{i-1} + \theta_{in}(t_i - t_{i-1}))}_{\xi_n})\| \leq$$

(32)

$$\le \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i - t_{i-1}}{h} \max_{\substack{\xi_1 \ldots \xi_n \in \\ \in [t,t+h]}} \|(f_1'(\xi) \ldots f_n'(\xi))\|$$

המקס' קיים בגלל
הרציפות של
הנגזרות על קטע
קומפקטי.

סה"כ הראנו ש-

$$\frac{1}{h} L(f|_{[t,t+h]}, A) \le \max_{\{\xi_i\} \in [t,t+h]} \|(f_1'(\xi_1) \ldots f_n'(\xi_n))\|$$

ניקח sup על החלוקות (זה אפשרי כי אגף ימין לא תלוי ב- A) ונקבל

$$\frac{1}{h} \ell(f|_{[t,t+h]}) \le \max_{\xi} \|f_1'(\xi_1) \ldots f_n'(\xi_n)\|$$

ניקח $h \to 0^+$ ואז

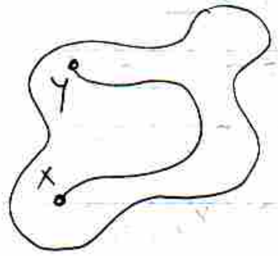
$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \le \|f'(t)\|$$

$\Leftarrow$ ממשפט הסנדוויץ' $s'(t) = \|f'(t)\|$ ☺

(24) 29.11.06
איפי

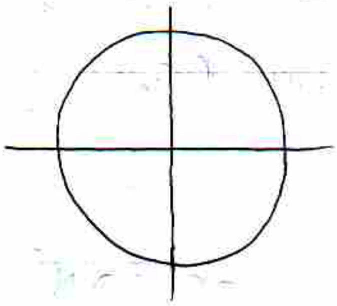
מסילות

הגדרה: מרחב מטרי X ייקרא קשיר מסילתית (path connected) אם לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה $f:I\to X$ רק ש- $f(0)=x$, $f(1)=y$.



כלומר, כל שתי נקודות ניתן לחבר ע"י מסילה.

דוגמאות:



① מעגל היחידה S^1. יהיו $x=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ $y=(\cos\beta,\sin\beta)$

הה העתקה $f:I\to S^1$ המוגדרת ע"י

$$f(t)=(\cos(t\beta+(1-t)\alpha),\ \sin(t\beta+(1-t)\alpha))$$

היא העתקה רציפה, כלומר מסילה ומקיימת $f(0)=x$, $f(1)=y$.

⇐ מעגל היחידה הוא קשיר מסילתית.

② $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ אינו קשיר מסילתית.

זה די ברור אינטואיטיבית כי בגלל שאין אפס אי אפשר לחבר נקודות חיוביות עם שליליות.

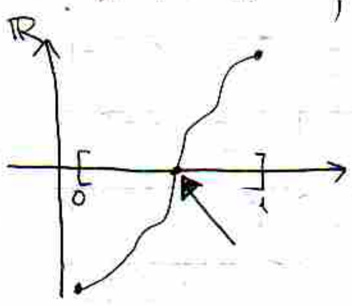
נוכיח פורמלית.

נניח שהייתה קיימת מסילה $f:I\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ המחברת את הנקודה (-1) לנקודה $(+1)$.

טענה: f העתקה רציפה גם כפונקציה $I\to\mathbb{R}$.

הוכחה: טריוויאלי.

אז $f:I\to\mathbb{R}$ רציפה ומתקיים $f(0)=-1$, $f(1)=1$



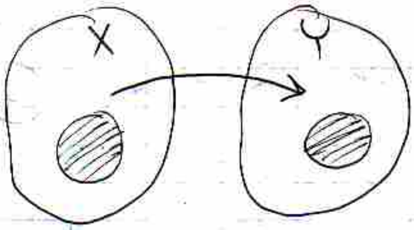
לפי משפט ערך הביניים f חייבת לחצות את האפס, בניגוד להנחה שהתמונה של f מוכלת ב $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

משפט: X,Y מרחבים מטריים ו- X קשיר מסילתית. $f:X\to Y$ רציפה. אז $f(X)\subseteq Y$ קשיר מסילתית.

מסקנה: קשירות מסילתית היא שמורה טופולוגית (=תכונה הנשמרת תחת הומאומורפיזם).

הוכחת המשפט: בהינתן $y_1,y_2\in f(X)$ קיימות $x_1,x_2\in X$ (לאו דווקא יחידות) כך ש- $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$.
מכיוון ש- X קשירה מסילתית קיימת מסילה $\varphi: I\to X$ כך ש- $\varphi(0)=x_1$, $\varphi(1)=x_2$. נתבונן בהרכבה $f\circ\varphi$.
זו הרכבה של פונקציות רציפות ולכן היא רציפה מ- I ל- $f(X)$ ומתקיים $f\circ\varphi(0)=f(\varphi(0))=y_1$, $f\circ\varphi(1)=f(\varphi(1))=y_2$.

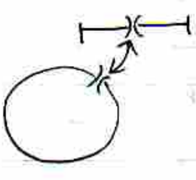
למה: אם X,Y מרחבים מטריים ו- $f:X\to Y$ הומאומורפיזם ו- $A\subseteq X$. אז f משרה הומאומורפיזם בין $X\setminus A$ ל- $Y\setminus f(A)$.



הוכחה: ברור שזו פונקציה חח"ע ועל בפרט. אז מספיק להוכיח ש- $f|_{X\setminus A}$ העתקה רציפה אל $Y\setminus f(A)$.
ואכן, אם (x_n) סדרה מתכנסת ב- $X\setminus A$ (כלומר יש לה גבול $x\in X\setminus A$). מכיוון שזו סדרה מתכנסת גם ב- X, אז $f(x_n)\to f(x)$ ו- $f(x)\in Y\setminus f(A)$. כלומר מרציפות סדרתית $f|_{X\setminus A}$ רציפה.

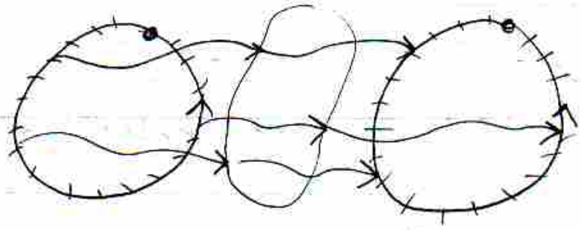
טענה: הקטע I אינו הומאומורפי ל- S^1.

הוכחה: נניח בשלילה קיום הומאומורפיזם $f: I\to S^1$.
אם x נקודה פנימית של I, (נובע מהלמה) ש- f משרה הומאומורפיזם מ- $I\setminus\{x\}$ לתוך $S^1\setminus\{f(x)\}$. אבל לא ייתכן קיום הומאומורפיזם מ- $I\setminus\{x\}$ שאינו קשיר מסילתית ל- $S^1\setminus\{f(x)\}$ שכן קשיר מסילתית.



הגדרה: שתי מסילות סגורות $f,g:I\to X$ "יקראו" **הומוטופיות** אם קיימת העתקה רציפה $H:I^2\to X$ כך שלכל s קבוע $H(t,s)$ מסילה סגורה ופונקציה של t ו- $H(t,0)=f(t)$, $H(t,1)=g(t)$.

דוגמא:



טענה: הומוטופיה מגדירה יחס שקילות בין מסילות.

הוכחה:

* רפלקסיביות - f הומוטופית ל- f ע"י $H(t,s)=f(t)$
* סימטריות - אם f הומוטופית ל- g אז יש הומוטופיה $H(t,s)$ מ- f ל- g אז $H(t,1-s)$ הומוטופיה מ- g ל- f.
* טרנזיטיביות - אם H_1 הומוטופיה מ- f ל- g ו- H_2 הומוטופיה מ- g ל- h נגדיר

$$H_3(t,s)=\begin{cases} H_1(t,2s) & 0\le s\le \frac{1}{2} \\ H_2(t,2s-1) & \frac{1}{2}<s\le 1 \end{cases}$$

זו פונקציה רציפה $I^2\to X$, לכל s קבוע $H_3(t,s)$ מסילה סגורה ו-

$$H_3(t,0)=H_1(t,0)=f(t)$$
$$H_3(t,1)=H_2(t,1)=h(t)$$

כלומר H_3 הומוטופיה בין f ל- h.

טענה: מסילות סגורות שקולות הן הומוטופיות

הוכחה: $f,g: I\to X$ שקולות אם קיימת העתקה רציפה מונוטונית ועל $\varphi: I\to I$ כך ש- $g=f\circ\varphi$.

$H(t,s)=f((1-s)t+s\varphi(t))$ זו פונקציה רציפה וכן

$H(t,0)=f(t)$, $H(t,1)=f(\varphi(t))=g(t)$.

הגדרה: מרחב בו כל שתי מסילות סגורות הן הומוטופיות נקרא פשוט קשר (simply connected)

הערה: ההעתקה הקבועה לתוך נקודה היא מסילה סגורה.
$\Leftarrow$ במרחב פשוט קשר כל מסילה ניתנת לכיווץ רציף לכל נקודה במרחב.

דוגמא: במרחב נורמי כל קבוצה קמורה היא פשוטת קשר.
$f,g: I\to A\subseteq X$ אז נגדיר

$$H(t,s)=(1-s)f(t)+s\cdot g(t)$$

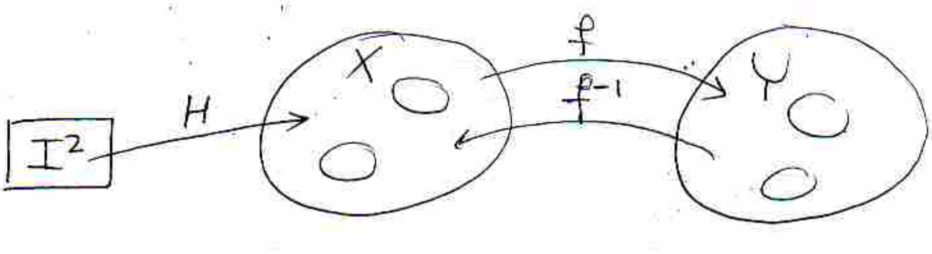
$H: I^2\to A$ רציפה ומקיימת את הדרוש.

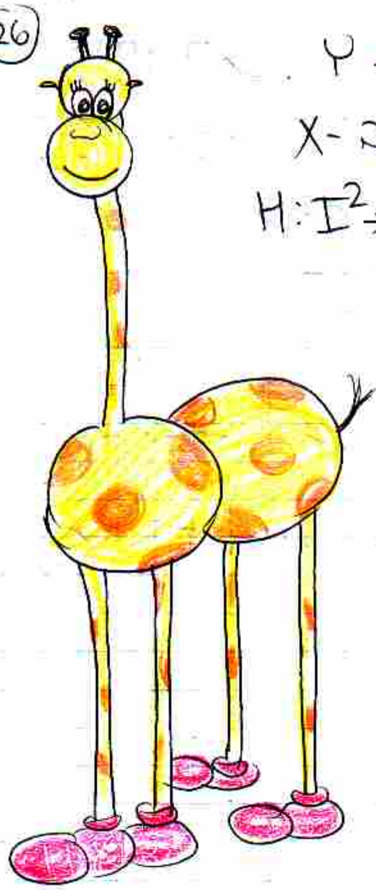
טענה: מרחב פשוט קשר קשיר מסילתית

הוכחה: נתבונן במסילות הסגורות $f(t)=x$ ו- $g(t)=y$
מכיוון שהמרחב פשוט קשר קיימת הומוטופיה $H: I^2\to X$
כך ש- $H(t,0)=x$, $H(t,1)=y$. נגדיר $h(s)=H(0,s)$
זו פונקציה רציפה $I\to X$ שמקיימת $h(0)=x$, $h(1)=y$.
כלומר הצלחנו לחבר את x ו- y עם מסילה.

משפט: פשוטת קשר היא תכונה טופולוגית.

הוכחה: נניח $f: X\to Y$ הומיאומורפיזם ו- X פשוט קשר.





תהיינה $h,g: I\to Y$ מסילות סגורות ב-Y.
$\Leftarrow$ $f^{-1}\circ g$, $f^{-1}\circ h$ מסילות סגורות ב-X
מכיוון ש-X פשוט קשר קיימת פונקציה $H: I^2\to X$
כך ש-$H(t,0)=f^{-1}(g(t))$ ו- $H(t,1)=f^{-1}(h(t))$
נגדיר $\tilde{H}(t,s)=f(H(t,s))$ (twiddle)
זו העתקה רציפה $I^2\to Y$.

$$\tilde{H}(t,0)=f(H(t,0))=f(f^{-1}(g(t)))=g(t)$$
$$\tilde{H}(t,1)=f(H(t,1))=f(f^{-1}(h(t)))=h(t)$$

$\Leftarrow$ $\tilde{H}$ הומוטופיה בין g ל-h.

טענה: I^2 אינו הומאומורפי ל-I^3

הוכחה: נניח $f: I^2\to I^3$ הומאומורפיזם.
אז f משרה הומאומורפיזם $I^2\setminus\{x\}\longrightarrow I^3\setminus\{f(x)\}$
אבל $I^2\setminus\{x\}$ פשוט קשר - ואילו $I^3\setminus\{f(x)\}$
אינו פשוט קשר (ההוכחה לא אבר (span ש הכדור).

קבוצות בעלות מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$

הגדרה: תיבה מלבנית ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה מהצורה
$$A=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n\times b_n]$$
כאשר לכל $1\le j\le n$ מתקיים $a_j<b_j$.
נגדיר נפח תיבה: $V(A)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$
קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תיקרא בעלת מידה אפס (נסמן $\mu(A)=0$)
אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרת תיבות מלבניות $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש-
$A\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ וכן $\sum_{k=0}^{\infty}V(A_k)<\varepsilon$.

דוגמאות:

① נקודה $\{x\}$ היא מקבוצה אפס ב $\mathbb{R}^n$.
בהינתן $\varepsilon>0$ ניקח את התיבה

$$A=[x_1-\delta,x_1+\delta]\times\ldots\times[x_n-\delta,x_n+\delta]$$

זו תיבה שמכילה את $\{x\}$. אז $V(A)=(2\delta)^n$
אם נבחר את $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ אז $V(A)=\varepsilon$.

② $A=[0,1]\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ $\mu(A)=0$

קבוצות ב-$\mathbb{R}^n$ בעלות מידה אפס

טענה

(א) אם A קבוצה בעלת מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$ אז לכל $B\subseteq A$ $\mu(B)=0$

(ב) אם $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ קבוצות בעלות מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$ אז $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=0$

הוכחה

(א) טריוויאלי, כי כל כיסוי שמכסה את A מכסה גם את B.

(ב) מכיוון ש-A_k בעלת מידה אפס, לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרת תיבות $(B_{km})_{m=1}^{\infty}$ כך ש-$\bigcup_{m=1}^{\infty}B_{k,m}\supseteq A_k$ אבל $\sum_{m=1}^{\infty}V(B_{km})\le\frac{\varepsilon}{2^k}$.

$\Leftarrow$ $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}B_{km}\supseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ וגם $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}V(B_{km})\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$.

דוגמה $\mu(\mathbb{Q})=\mu\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\right)=0$

מסקנה תהא $f:I\to\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$ מסילה בעלת אורך. אזי התמונה של f בעלת מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$, כלומר

$$\mu(\{f(t):t\in I\})=0$$

הוכחה נגדיר את פונקציית האורך $s(t)=\ell(f|_{[0,t]})$

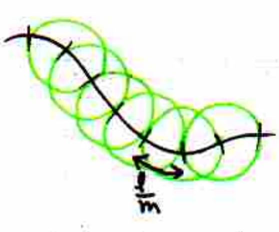
נתון ש-$s(1)=\ell(f)=\ell<\infty$.

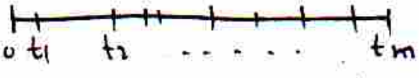
בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר m מספיק גדול כך ש-$\frac{(2\ell)^n}{m}<\varepsilon$

ונחלק את המסילה $0=t_0<t_1<\dots<t_m=1$

כך ש-$\ell\left(f|_{[t_{j-1},t_j]}\right)=\frac{\ell}{m}$ לכל $1\le j\le m$

זה אפשרי מכיוון ש-$s(t)$ רציפה.



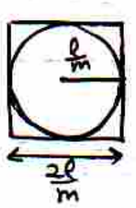


לכל $1\le j\le m$ נבנה כדור סגור

$$B_j=B\left(f(t_j),\frac{\ell}{m}\right)$$

נשים לב ש-$\{f(t):t_{j-1}\le t\le t_j\}\subseteq B_j$ ובנוסף, לכל j $B_j\subseteq C_j$

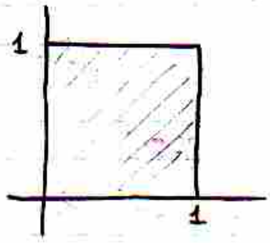
כאשר C_j קובייה שאורך צלעותיה $\frac{2\ell}{m}$.



ואז $\{f(t):t\in I\}\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}B_j\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}C_j$

$$\sum_{j=1}^{m}V(C_j)=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2\ell}{m}\right)^n=\frac{(2\ell)^n}{m}\cdot\frac{1}{m^{n-2}}\le\frac{\varepsilon}{m^{n-2}}\le\varepsilon$$

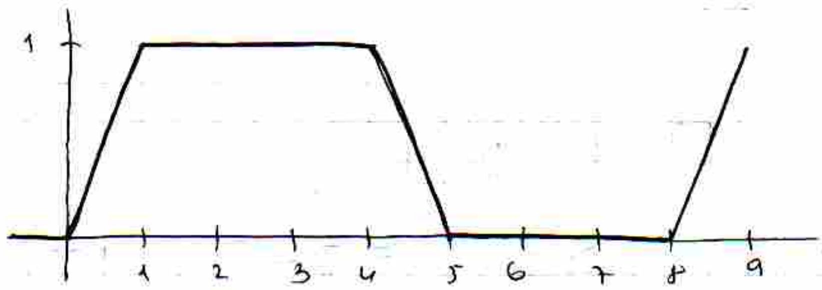
עקום Peano



זוהי דוגמה למסילה ב: $\mathbb{R}^2$ שתמונתה אין מידה אפס.
מסלה $I \to \mathbb{R}^2$ שתמונתה מכסה את כל I^2.
למה זה לא סותר את המשפט? אנחנו נראה שמסילה שנגדיר תהיה אין אורך!
נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R} \to [0,1]$

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 1 & 1<x\le 4 \\ 5-x & 4\le x\le 5 \\ 0 & 5\le x\le 8 \\ f(x-8) & 8<x \end{cases}$$

המשכה מחזורית //



נגדיר העקומה $t \longmapsto (x(t),y(t))$ כך:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(8^k t)}{2^k}$$

$$y(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(8^k t+2)}{2^k}$$

טענות משנה
1) $t \mapsto (x(t),y(t))$ העקומה רציפה
2) כל העקומה בריבוע היחידה
3) כל העקומה של ריבוע היחידה

הוכחה
1) לכל x $|f(x)|\le 1$ וכן f רציפה. לכן $x(t),y(t)$ מתכנסים
במ"ש לפי קריטריון M של ויירשטראס כי התכנסות במ"ש
(עם השוואה עם $\sum\frac{1}{2^k}$). $\Leftarrow$ ההתכנסות וגם לפונקציה
רציפה.
2) טריוויאלי.

③ יהא $(x_0,y_0)\in I^2$. נראה שקיים $t_0\in I$
רק ש- $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$.
אבל כל מספר ניתן להציג בצורה בינרית, אז לבחור
$(x_0,y_0)\in I^2$ זה כמו לבחור שתי סדרות בינריות.

$$x_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k} \qquad a_k,b_k\in\{0,1\}$$
$$y_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k}$$

נטען ש- t_0 הדרוש הוא

$$t_0=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{8^k}$$

כאשר

$$\xi_k=\begin{cases}5 & a_k=0 \quad b_k=0 \quad \Rightarrow f(\xi_k)=0\\ 7 & a_k=0 \quad b_k=1 \quad \Rightarrow f(\xi_k)=0\\ 3 & a_k=1 \quad b_k=0 \quad \Rightarrow f(\xi_k)=1\\ 1 & a_k=1 \quad b_k=1 \quad \Rightarrow f(\xi_k)=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(\xi_k)=a_k \qquad f(\xi_k+2)=b_k$$

$$x(t_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f\left(8^k\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\xi_\ell}{8^\ell}\right)}{2^k}=\sum\frac{a_k}{2^k}=x_0$$

$$f\left(8^k\sum\frac{\xi_\ell}{8^\ell}\right)=f\Big(\xi_k+\underbrace{\sum_{\ell<k}8^{k-\ell}\xi_\ell}_{\text{כאן זה אפשר להתעלם כי זה כפולות של 8}}+\underbrace{\sum_{\ell>k}\frac{\xi_\ell}{8^{\ell-k}}}_{\text{מספר קטן מ-1 כיוון הצגה של שבר בבסיס 8}}\Big)=f(\xi_k)=a_k$$

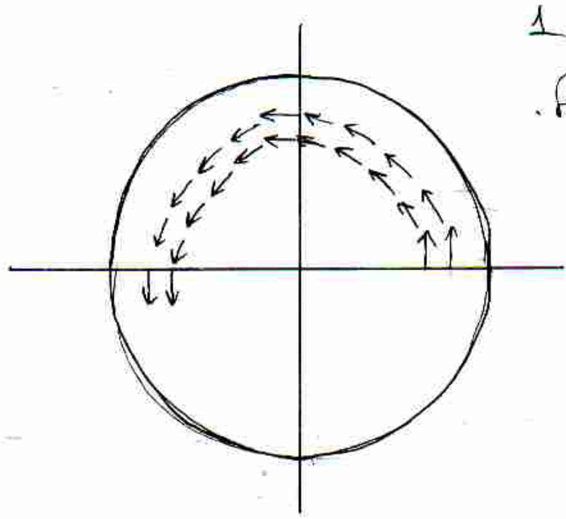
באותו אופן מקבלים ב- $y(t_0)$.

אינטגרל של שדה וקטורי לאורך מסילה

הגדרה $A \subseteq \mathbb{R}^n$. שדה וקטורי על A הוא פונקציה $f: A \to \mathbb{R}^n$

דוגמה $f: D^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} , \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$



בכל נקודה אורך הוקטור 1
וכיוונו בכיוון המשיק למעגל.

שדה וקטורי הוא בעצם n פונקציות $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = (f_1(x_1,\dots,x_n), \dots, f_n(x_1,\dots,x_n))$$

מסילה היא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

הגדרה $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי.
$\gamma : I \to A$ מסילה גזירה. נגדיר

$$\int_\gamma f \, d\gamma = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) \, dt$$

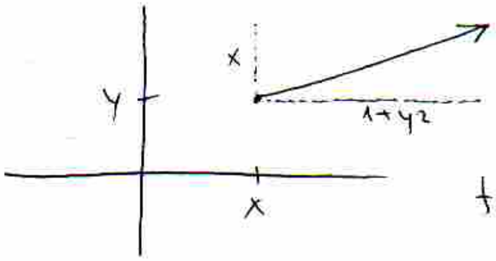
(מהנחה שאגף ימין מוגדר.)

* באותו אופן מוגדר גם על קטע $[a,b]$

הערה היה אפשר להסתפק במסילות בעלות השתנות חסומה, ולהשתמש
במקום באינטגרל Reimann באינטגרל Steijltes-Reimann

דוגמה נתבונן בשדה וקטורי ב $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (1+y^2, x)$$



נסמן את השדה הוקטורי לאורך המסילה

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t\in[0,2\pi)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\gamma_1'(t) = -\sin t \qquad \gamma_2' = \cos t$$

$$f_1(x,y) = 1+y^2 \qquad f_2(x,y) = x$$

$$f_1(\gamma(t)) = 1+\sin^2 t$$

$$f_2(\gamma(t)) = \cos t$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,d\gamma = \underbrace{\int_0^{2\pi}(1+\sin^2 t)(-\sin t)\,dt}_{=0} + \int_0^{2\pi}\cos t\cdot\cos t = \pi$$

$=0$ משיקולי אנטי-סימטריה.

(39) 6.12.06
אינפי

אתמול דיברנו על עקום פאנו.
אפשר להציע להשתמש בהעתקה שבהינתן מספר ממשי בהצגה עשרונית מעביר אותו לשני מספרים ממשיים - האחד מורכב מהספרות במקומות הזוגיים. ואחד המורכב מהספרות במקומות האי-זוגיים.

$$f: 0.972145608\ldots \longmapsto (0.92468\ldots,\ 0.7150\ldots)$$

הבעיה עם ההעתקה הזאת היא שהיא לא רציפה. למשל,

$a_n: 0.51, 0.501, 0.5001, \ldots \longrightarrow 0.5$

$b_n: 0.49, 0.499, 0.4999, \ldots \longrightarrow 0.5$

אבל $f(a_n) \to (0.5, 0)$ ואילו $f(b_n) \to (0.5, 1)$.

מה שכן טוב בהעתקה הזו הוא שהיא ממחישה את קנטור מההרצאה שהקבוצות $[0,1]$ ו $[0,1]^2$ איזומורפיות.

<u>אינטגרל של שדה וקטורי לאורך מסילה</u>

<u>הגדרנו</u>: $f: A \to \mathbb{R}^n$ ו $\gamma:[a,b] \to A$ גזירה. אז

$$\int_\gamma f\cdot d\gamma = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_j(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

<u>הערה</u>: למעשה המסילה צריכה לקיים תכונה חלשה יותר - השתנות חסומה. אבל את זה אנחנו לא לומדים.
מה שכן אפשר לעשות הוא להרחיב את הגדרת האינטגרל לאורך מסילה עבור מסילות גזירות למקוטעין ע"י הגדרתם תחת שרשור.

<u>תכונות</u>:

(1) לינאריות:

$$\int_\gamma (\alpha f+\beta g)\,d\gamma = \alpha\int_\gamma f\cdot d\gamma + \beta\int_\gamma g\,d\gamma$$

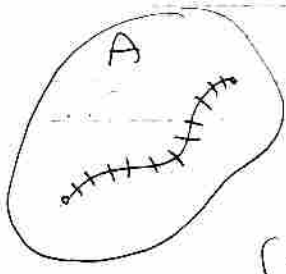
② אם γ_1,γ_2 מסילות מצורות הניתנות לשרשור אז
$$\int_{\gamma_2*\gamma_1} f\,d\gamma = \int_{\gamma_1} f\cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} f\cdot d\gamma$$

③ אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ נגדיר מסילה $\tilde\gamma:[-b,-a]\to\mathbb{R}^n$ (twiddle)
ע"י $\tilde\gamma(t)=\gamma(-t)$ אזי
$$\int_{\tilde\gamma} f\,d\tilde\gamma = -\int_{\gamma} f\,d\gamma$$

$$\int_{\tilde\gamma} f\,d\tilde\gamma = \sum_{j=1}^{n}\int_{-b}^{-a} f_j(\tilde\gamma(t))\tilde\gamma_j'(t)\,dt =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\int_{-b}^{-a} f_j(\gamma(-t))(-\gamma_j'(t))\,dt = \quad (s=-t)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\int_{b}^{a} f_j(\gamma(s))(+\gamma_j'(s))\,ds =$$
$$= -\sum_{j=1}^{n}\int_{a}^{b} f_j(\gamma(s))\gamma_j'(s)\,ds = -\int_{\gamma} f\,d\gamma$$

<u>אינטואיציה</u>

שדות וקטוריים משמשים בפיסיקה לתאור כוחות. למשל, השדה החשמלי או השדה הכבידתי.



היינו רוצים לדעת את העבודה שעושה כוח לאורך מסלול. וזה בדיוק האינטגרל לאורך מסילה!

$$\int_{\gamma} f\,d\gamma = \sum_{j=1}^{n}\int_{a}^{b} f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)\,dt \approx$$

$\Delta t_\ell = t_\ell - t_{\ell-1}$

$$\left(\text{ניתן לקרב מכל סוג שנרצה}\right) \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{N} f_j(\gamma(t_\ell))\underbrace{\gamma_j'(t_\ell)\Delta t_\ell}$$
$$\underbrace{\gamma_j(t_\ell)-\gamma_j(t_{\ell-1})}_{(\Delta\gamma_\ell)_j} + O(\Delta t_\ell^2) \quad (\text{מפיתוח טיילור}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\underbrace{\langle f(\gamma(t_\ell)), \Delta\gamma_\ell\rangle}_{\text{מכפלה סקלרית}}$$

אהה! אז קיבלנו שהעבודה לאורך מסלול היא (בקירוב) סכום של עבודות על קטעים קטנים. אז נשאיף את אורך הקטעים לאפס ונקבל שוויון ממש.

<u>טענה:</u> $f: A \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי.
ויהיו $\gamma_1: [a,b] \to A$, $\gamma_2: [c,d] \to A$ גזירות ושקולות. אזי

$$\int_{\gamma_1} f\,d\gamma = \int_{\gamma_2} f\,d\gamma$$

<u>הוכחה:</u> המסילות שקולות אז $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ כאשר
$\varphi: [a,b] \to [c,d]$ גזירה.

$$\int_{\gamma_1} f \cdot d\gamma = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_j(\gamma_1(t))(\gamma_1')_j(t)\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_j(\gamma_2(\varphi(t)))(\gamma_2')_j(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$(\varphi(t)=s) = \sum_{j=1}^{n} \int_c^d f_j(\gamma_2(s))(\gamma_2')_j(s)\,ds = \int_{\gamma_2} f\,d\gamma$$

<u>הגדרה</u> שדה וקטורי $f: A \to \mathbb{R}^n$ (A קשירה מסילתית).
f ייקרא <u>שדה משמר</u> אם לכל מסילה γ הערך של
$\int_\gamma f\,d\gamma$ תלוי רק בנקודות הקצה של γ.

<u>טענה</u> f שדה משמר אמ"מ לכל מסילה גזירה סגורה γ מתקיים

סימון רק שזה אינטגרל לאורך מסילה סגורה $\longrightarrow \oint_\gamma f \cdot d\gamma = 0$

<u>הוכחה:</u>
נניח f שדה משמר. ותהא $\gamma: I \to A$ גזירה סגורה.
נכתוב $\gamma = \gamma_2 * \gamma_1$. כאשר $\gamma_1: [0,\frac{1}{2}] \to A$, $\gamma_2: [\frac{1}{2},1] \to A$
נגדיר $\tilde{\gamma}_2: [\frac{1}{2},1] \to A$ ע"י $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(1-t)$ ואז

$$\int_\gamma f\,d\gamma = \int_{\gamma_1} f\,d\gamma + \int_{\gamma_2} f\,d\gamma = \int_{\gamma_1} f\,d\gamma - \int_{\tilde{\gamma}_2} f\,d\gamma = 0$$

כי ל- γ_1 ול- $\tilde{\gamma}_2$ אותן נקודות קצה.
הכיוון ההפוך בעצם מתקבל מהתנאי הפורק של האמור לעיל.
(עיר רק שלגבי הכיוון הראשון, יכולנו לומר שמסילה הנתונה
אותן נקודות קצה כמו למסילה הקבועה שהיא רק נקודת הקצה

והאינטגרל עליה כמובן אפס. אבל לזה אמור להיות תלוי רק בנקודות הקצה
לכן גם האינטגרל לאורך המסילה שלנו יהיה אפס.

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

״תזכורות״

נגזרת חלקית -

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_j) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j+h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

אם כל n הנגזרות של f בנקודה x קיימות נגדיר

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = \text{הגרדיאנט של } f \text{ ב-} x$$

nabla
(מהמילה "נֶבֶל")

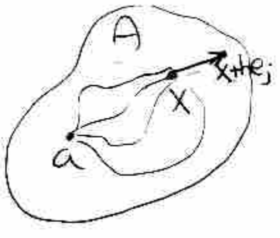
אם הגרדיאנט של f קיים ורציף בנקודה x נאמר ש- f דיפרנציאבילית בנקודה x.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

אם הנגזרות המעורבות רציפות אז סדר הגזירה אינו משנה.

<u>משפט</u>: A תחום פתוח קשיר מסילתית ב- $\mathbb{R}^n$. $f: A \to \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי רציף. אז f משמר אמ"מ קיימת פונקציה $g: A \to \mathbb{R}$ כך ש- $f = \nabla g$.

הוכחה: נניח ש- f משמר. נבחר באופן שרירותי נקודה $a \in X$.
נגדיר לכל $x \in A$ $\quad g(x) = \int_\gamma f \cdot d\gamma$
כאשר $\gamma: I \to A$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = x$.



(מי אמר שקיימת γ מסילה כזאת? ובכן, זה מחוץ למסגרת הקורס אבל אנחנו מקבלים שזה אפשרי).
זה מוגדר היטב כי f שדה משמר (והאינטגרל תלוי רק בקצוות).

$$\frac{g(x+he_j) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_\gamma f\, d\gamma$$

כאשר $\gamma: [0,1] \to A$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = x + he_j$,

שוב, אנחנו יכולים לבחור מסילה כרצוננו אז ניקח

$$\gamma(t) = x + h t e_j$$

$$\Rightarrow \gamma_\ell(t) = x_\ell + h t e_j \delta_{j\ell}$$

$$\frac{g(x+he_j)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_\gamma f\, d\gamma =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{\ell=1}^{n}\int_0^1 f_\ell(x+hte_j)\cdot h\cdot \delta_{j\ell}\, dt =$$

$$= \int_0^1 f_j(x+hte_j)\, dt$$

אבל $f_j(x+\theta h e_j) \xrightarrow[h\to 0]{} f_j(x)$

בכיוון השני, נניח ש- $f=\nabla g$ עבור g גזירה ברציפות

נראה שלכל מסילה סגורה $\oint_\gamma f\cdot d\gamma = 0$.

בהינתן מסילה סגורה γ נגדיר $h(t)=g(\gamma(t))$

$\gamma(0)=\gamma(1) \Rightarrow h(0)=h(1)$.

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_j}(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt = \sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)$$

$$\int_\gamma f\, d\gamma = \sum_{j=0}^{n}\int_0^1 f_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt = \int_0^1 h'(t)dt = h(1)-h(0) = 0$$

$\Leftarrow$ f משמר.

אם $f=\nabla g$ אז f נקרא <u>הפונקציה פוטנציאל</u>.

אם f שדה משמר גזיר ברציפות (כלומר, כל n^2 הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות),

$$f_i = \frac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$f_j = \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$$

$\Leftarrow$ שדה משמר גזיר ברציפות מקיים $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

שדה f המקיים תכונה זו נקרא <u>שדה משמר מקומית</u>.

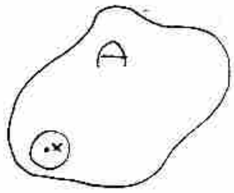
(שדה משמר גזיר ברציפות הוא משמר מקומית).

נשארת השאלה עם הכיוון השני אם נכון. כלומר אם שדה
משמר מקומית האם הוא גם משמר?

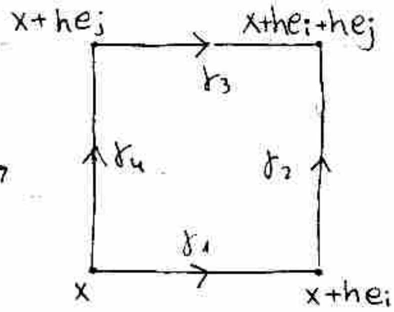
(42) 12.12.06
אינפי

שדות משמרים

הוכחה תופית לכך ששימור + גזירות ברציפות $\Rightarrow$ שימור מקומי:



אנחנו חיים בתחום פתוח A. לכן לכל $x\in A$ קיים $h>0$ כך ש $B(x,2h)\subset A$.



σ הריבוע הזה נמצא בתוך $B(x,2h)$ ולכן בתוך A.

$$\gamma_1(t) = x + the_i \qquad \gamma_1'(t) = he_i$$
$$\gamma_2(t) = x + he_i + the_j \qquad \gamma_2'(t) = he_j$$
$$\gamma_3(t) = x + the_j \qquad \gamma_3'(t) = he_j$$
$$\gamma_4(t) = x + he_j + the_i \qquad \gamma_4'(t) = he_i$$

השדה משמר ולכן

$$\int_{\gamma_1} f\,d\gamma + \int_{\gamma_2} f\,d\gamma = \int_{\gamma_3} f\,d\gamma + \int_{\gamma_4} f\,d\gamma$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x+the_i)\,h\delta_{i,k}\,dt = h\int_0^1 f_i(x+the_i)\,dt$$

חישוב דומה לשאר המרוכבים אניב

$$\Rightarrow\quad h\int_0^1 f_i(x+the_i)\,dt + h\int_0^1 f_j(x+he_i+the_j)\,dt =$$
$$= h\int_0^1 f_j(x+the_j)\,dt + h\int_0^1 f_i(x+he_j+the_i)$$

נחלק את שני האגפים ב- h^2 ונקבל

$$\int_0^1 \frac{f_j(x+he_i+the_j)-f_j(x+the_j)}{h}\,dt = \int_0^1 \frac{f_i(x+he_j+the_i)-f_i(x+the_i)}{h}\,dt$$

לפי משפט ערך הביניים קיים $0<\theta,\tilde{\theta}<1$ כך ש-

$$\int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+the_j+\theta he_i)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+the_i+\tilde{\theta}he_j)\,dt$$

משפט ערך הביניים לאינטגרל:
אם f רציפה אז $\int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)(b-a)$
עבור $a<\xi<b$ כלשהו:

קיימות $0<\xi,\tilde{\xi}<1$ כך ש-

$$1\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+\theta he_i+\xi he_j) = 1\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+\tilde{\theta} he_j+\tilde{\xi} he_i)$$

נשאיף את h לאפס ונקבל $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

אש״ב (11)

באופן טבעי, נשאלת השאלה האם שימור מקומי גורר שימור.
באופן טבעי גם התשובה היא לא.

דוגמה: נגדיר שדה וקטורי על $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ע״י

$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

נראה ש-f משמר מקומית, כלומר $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

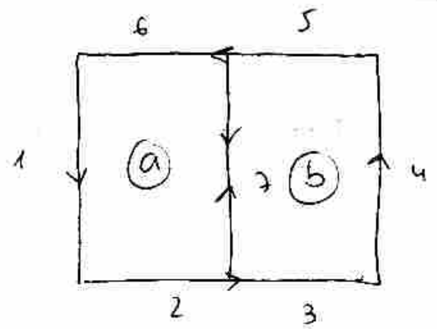
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

אז השדה אכן משמר מקומית.
נטען שהוא אינו משמר. נחשב את האינטגרל של f
לאורך מעגל היחידה $\gamma(t)=(\cos t, \sin t)$ $t\in[0,2\pi]$

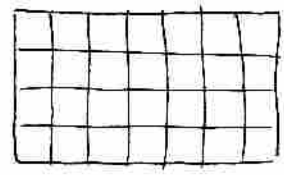
$$\int_\gamma f\,d\gamma = \int_0^{2\pi}\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t)\,dt + \int_0^{2\pi}\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = 2\pi$$

קיבלנו שהאינטגרל לאורך מסילה סגורה אינו מתאפס.
$\Leftarrow$ השדה אינו משמר!

למה השדה הזה לא משמר?



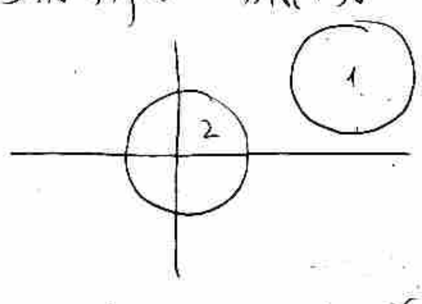
אם עושים אינטגרל על מסילה a ועוד על מסילה b אפשר לראות שבגלל 7 המסלולים בכיוונים הפוכים אבל האינטגרלים עליה מתאזנים מה"כ האינטגרל על הריבוע הגדול הוא סכום האינטגרלים על a ועל b. אפשר להכליל את זה לכל כמות של מלבנים. אבל אם באמצע יש חור זה לא עובד



כי אין מה שיאזן חלק מהאינטגרלים - שליד החור. מקרה שני המסילה עוברת מסביב לחור שיש בתחום...

<u>טענה</u>: יהא f שדה וקטורי משמר מקומית על תחום פתוח וקשר מסילתית A. γ_1, γ_2 מסילות סגורות וגזירות ב-A. אם קיימת הומוטופיה H בין γ_1 ל-γ_2 כך ש-H גזירה ברציפות פעמיים. אז $\int_{\gamma_1} f d\gamma = \int_{\gamma_2} f d\gamma$

<u>הערה</u>: זו לא סתירה לדוגמה הקודמת, כי המעגלים



אינם הומוטופיים. בגלל החור בראשית אי אפשר לעבור ביניהם בצורה רציפה. ואז האינטגרל על מעגל 1 יהיה אפס (כי אין בתוכו חורים).

<u>הוכחה</u>:

מהנתון קיימת פונקציה $H: I^2 \to A$ כך ש-H גזירה פעמיים ברציפות. לכל $0 < s < 1$ $H(t,s)$ מסילה סגורה כפונקציה של t ו- $H(t,0) = \gamma_1(t)$, $H(t,1) = \gamma_2(t)$.

$$J(s)=\int_{H(t,s)} f\,d\gamma=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 f_j(H(t,s))\frac{\partial H_j}{\partial t}\,dt$$

$$J'(s)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial s}f_j(H(t,s))\cdot\frac{\partial H_j}{\partial t}+f_j(H(t,s))\underbrace{\frac{\partial^2 H_j}{\partial s\,\partial t}}\right]dt=$$

מאחר הגזירה ברציפות
פעמיים אפשר להחליף סדר גזירה

אינטגרציה בחלקים (*)

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial s}f_j(H(t,s))\frac{\partial H_j}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}f_j(H(t,s))\frac{\partial H_j}{\partial s}\right]dt=$$

כלל השרשרת

$$=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial s}\cdot\frac{\partial H_j}{\partial t}-\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial H_j}{\partial s}\right]dt=0$$

בפשוט (פתח) שני סכומים ויוצא אותו
ביטוי עם סימן הפוך.

הראנו שהאינטגרל לאורך המסילה אינו תלוי ב-s,
בפרט הוא שווה עבור $s=1$ ו- $s=0$.

$$(*)\quad\int_0^1 f_j(H(t,s))\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}H_j(t,s)\,dt=$$

$$=\cancel{f_j(H(t,s))\frac{\partial}{\partial s}H_j(t,s)\Big|_0^1}-\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}f_j(H(t,s))\frac{\partial}{\partial s}H_j(t,s)$$

$$H(1,s)=H(0,s)$$

☺

<u>מסקנה:</u> אם f <u>שדה משמר מקומי</u> בתחום פשוט קשר אז f משמר.
<u>הוכחה:</u> תהא γ מסילה סגורה. בהגדרה היא הומוטופית למסילה
קבועה (נקודה) ואינטגרל של שדה לאורך מסילה קבועה היא אפס.

☺

<u>מסקנה:</u> $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ אינו פשוט קשר (ההוכחה בעזרת
הדוגמה הקודמת.

(44)

חשבון דיפרנציאלי של העתקות
בין מרחבים נורמיים סוף ממדיים

<u>תזכורת:</u> X מרחב נורמי n ממדי אם קיימים $x_1,\dots,x_n \in X$ כך ש- $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ אמ"מ $a_i = 0$ לכל $1 \le i \le n$ אבל אין $x_1,\dots,x_{n+1}$ עם תכונה זו.

<u>הגדרה:</u> יהיו X, Y מרחבים סוף ממדיים. העתקה $T: X \to Y$ נקראת לינארית אם

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

<u>הגדרה:</u> ל- $T: X \to Y$ לינארית נגדיר

$$\|T\|_{X,Y} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

$\|\cdot\|_X$ - הנורמה של X

$\|\cdot\|_Y$ - הנורמה של Y

<u>הערות:</u>

0) הסימונים $\|\,\|_X$, $\|\,\|_Y$, $\|\,\|_{X,Y}$ בלתי נסבלים. אז נשתמש רק ב- $\|\,\|$ והכוונה תהיה ברורה.

1) $$\sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in X}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in X}} \|Ty\| = \|T\|$$

2) $$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \|T\| \implies \|Tx\| \le \|T\| \|x\|$$

3) לאוסף ההעתקות הלינאריות $T: X \to Y$ (שנורמן ודאי סופי.) קוראים $Hom(X,Y)$

4) $Hom(X,Y)$ מרחב לינארי:

$$(T+S)x = Tx + Sx$$
$$(\alpha T)x = \alpha(Tx)$$

5) $Hom(X,Y)$ מרחב נורמי עם הנורמה $\|\cdot\|_{X,Y}$

התכונות ההומוגניות ברורות. צריך להראות רק את אי שוויון ה-Δ.

$$\|T+S\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T+S)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx + Ty\| \le$$
$$\le \sup_{\|x\|=1} (\|Tx\| + \|Ty\|) \le \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| + \sup_{\|x\|=1} \|Ty\| = \|T\| + \|S\|$$

6) $I \in Hom(X,X)$

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

(45) 13.12.06
אינפי

חשבון דיפרנציאלי של העתקות בין מרחבים נורמיים סוף ממדיים

מרחבים וקטוריים נורמיים

X מרחב וקטורי, $u_1,\dots,u_n\in X$ בסיס, אז לכל $x\in X$
קיימת הצגה יחידה $x=\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$.
זה מגדיר איזומורפיזם בין כל מרחב וקטורי n ממדי מעל $\mathbb{R}$
לבין $\mathbb{R}^n$:

$$X \ni x=\sum a_i u_i \longleftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

מרחב וקטורי הוא **נורמי** אם מגדירים עליו נורמה $\|\cdot\|$.
שתי נורמות $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ נקראות **שקולות** אם קיימים $c,C>0$
כך שלכל $x\in X$ $c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1$
כל נורמה מגדירה **מטריקה** $d(x,y)=\|x-y\|$
מתקיים $x_k\to x$ אמ"מ $\lim_{k\to\infty}\|x_k-x\|=0$
תרגיל קל: $\|\cdot\|_1\sim\|\cdot\|_2$ אמ"מ ($x_k\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x$ אמ"מ $x_k\xrightarrow{\|\cdot\|_2}x$)
ואנחנו לא מוכיחים את זה, אבל זה נכון - במרחב סוף ממדי כל הנורמות שקולות.

$T:X\to Y$ כאשר X,Y נורמיים, נקראת **לינארית** אם
לכל $x,y\in X$ לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$
מגדירים $Hom(X,Y)=\{T:X\to Y : T \text{ is linear}\}$ - אוסף כל
ההעתקות הלינאריות מ-X ל-Y.
לכל $T\in Hom(X,Y)$ נגדיר $\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$
ונסמן $L(X,Y)=\{T\in Hom(X,Y) : \|T\|<\infty\}$.
$Hom(X,Y)$ הוא מרחב וקטורי. $L(X,Y)$ הוא
תת מרחב וקטורי שלו. יתר על כן, זהו מרחב נורמי תחת
$\|\cdot\|$ שהגדרנו.
כאשר X,Y ממדים סופי אז $Hom(X,Y)=L(X,Y)$,
כלומר תמיד $\|T\|<\infty$

טענה: $T \in Hom(X,Y)$ רציפה אמ"מ $\|T\| < \infty$.

הוכחה:

($\Rightarrow$) נניח ש-T נורמה סופית. נניח ש- $x_k \longrightarrow x$ ב- X. אזי

$$\|Tx_k - Tx\| = \|T(x_k - x)\| \underset{\downarrow}{\le} \|T\|\|x_k - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

הנחנו אתמול.

לכן T רציפה.

($\Leftarrow$) נניח ש-T רציפה. עבור $\varepsilon = 1$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\|x\| \le \delta$ אז $\|Tx\| \le 1$

לכל $\|x\| = 1$ מתקיים

$$\|Tx\| = \|T(\delta x)\| \cdot \frac{1}{\delta} \le 1 \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$

$$\Longrightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \le \frac{1}{\delta}$$

כלומר $\|T\| < \infty$.

(:

מוגדרות לאדנו שאם X, Y, Z מרחבים וקטוריים ; $T \in Hom(X,Y)$, $S \in Hom(Y,Z)$ אז $S \circ T \in Hom(X,Z)$

טענה: אם T, S חסומה אז $S \circ T$ חסומה וגם,

$$\|S \circ T\| \le \|S\|\|T\|$$

הוכחה: לכל $\|x\| = 1$ מתקיים

$$\|(S \circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| \le \|S\|\|Tx\| \le \|S\|\|T\|\|x\| =$$
$$= \|S\|\|T\|$$

$$\Leftarrow \quad \|S \circ T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(S \circ T)x\| \le \|S\|\|T\|$$

(:

הערה $L(X,Y)$ מרחב נורמי, בפרט הוא מרחב מטרי, אז אפשר לדבר על התכנסות של אופרטורים לינאריים.

$$T_k \longrightarrow T \iff \lim_{k\to\infty} \|T_k - T\| = 0$$

אנחנו רוצים להגדיר נורמה על X. בשביל זה נרצה
להגדיר מכפלה פנימית עליו.

כל $x\in X$ נזהה עם n-יה $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, $x=\sum_{i=1}^n a_ie_i$

אם יש לנו מכפלה פנימית $(\cdot,\cdot)$ רק ש- $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$
(אומר וקטורי הבסיס הסטנדרטיים אורתונורמליים)
אז מהבילינאריות של מכפלה פנימית נובע שאם
$x=\sum a_ie_i$, $y=\sum b_ie_i$ אז

$$(x,y)=\sum_i\sum_j a_ib_j(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

ולכן נגדיר את הנורמה האוקלידית

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

יהיו X,Y מרחבים נורמיים ויהיו $e_1,\dots,e_n$ בסיס
ל-X ו- $f_1,\dots,f_m$ בסיס ל-Y.
יהי $T\in Hom(X,Y)$ אופרטור לינארי. רצה לדעת איך T
פועל על X מספיק להגדיר איך הוא פועל על
וקטורי הבסיס $e_1,\dots,e_n$. נניח ש-

$$Te_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}(T)f_i$$

אזי מהלינאריות של T, לכל $x=\sum_{j=1}^n c_je_j\in X$ נובע

$$Tx=T\Big(\sum_{j=1}^n c_je_j\Big)=\sum_{j=1}^n c_jT(e_j)=\sum_{j=1}^n c_j\sum_{i=1}^m a_{ij}(T)f_i=$$
$$=\sum_{i=1}^m\Big[\sum_{j=1}^n a_{ij}(T)c_j\Big]f_i$$

$$T:\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a_{11}(T) & \cdots & a_{n1}(T)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}(T) & & a_{mn}(T)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

אז כל $T:X\to Y$ אפשר לזהות עם מטריצה
$(a_{ij}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

מסקנה: $T_k \to T$ אמ"מ $a_{ij}(T_k) \to a_{ij}(T)$

הוכחה: $(\Rightarrow)$ נניח שלכל $1 \le i \le m$ ולכל $1 \le j \le n$

$$a_{ij}(T_k) \longrightarrow a_{ij}(T)$$

$$\|T_k - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_k - T)x\| = \sup_{\{c_i : \sum c_i^2 = 1\}} \|(T_k - T)\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| =$$

$$= \sup_{\{c_i : \sum c_i^2 = 1\}} \|\sum_{i=1}^{n} c_i (T_k - T) e_i\| = \sup_{\{c_i : \sum c_i^2 = 1\}} \|\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} [a_{ji}(T_k) - a_{ji}(T)] f_j\| =$$

$$= \sup_{c_i} \|\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i [a_{ji}(T_k) - a_{ji}(T)]\right] f_j\| =$$

$$= \sup_{c_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i (a_{ji}(T_k) - a_{ji}(T))\right]^2} \le$$

קושי שוורץ $\le \sup_{c_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\cancel{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right) \sum_{i=1}^{n} (a_{ji}(T_k) - a_{ji}(T))^2} =$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_{ji}(T_k) - a_{ji}(T))^2} \xrightarrow[\text{כי כל אחד מהמחוברים מתכנס.}]{} 0$$

$(\Leftarrow)$ נניח $T_k \to T$ נשים ♡ שמתקיים

$$(f_\ell, Te_i) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}(T) f_j , f_\ell\right) = a_{\ell i}(T)$$

$$\Rightarrow \quad |a_{ij}(T_k) - a_{ij}(T)| = |(f_i, (T_k - T)e_j)| \le$$

$$\le \|f_i\| \|(T_k - T)e_j\| \le \|f_i\| \|T_k - T\| \|e_j\| \longrightarrow 0$$

☺

דוגמה: $X = \mathbb{R}^n$ עם הנורמה ℓ_∞^n $\quad \|x\| = \max|x_i|$

$Y = \mathbb{R}^m$ עם הנורמה ℓ_∞^m

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ מטריצות $m \times n$. $\quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \max_i |x_i| = 1}} \max_{1 \le i \le m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

נאמר ש- $T \in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ <u>הפיכה</u> אם קיימת $S \in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ כך ש- $S\circ T = I = T\circ S$.
במקרה זה נסמן $S=T^{-1}$.

ידוע שכל הטענות הבאות שקולות:
- T הפיכה
- $\ker T=\{0\}$
- T על
- $\det T\neq 0$

את תת הקבוצה של הטרנספורמציות ההפוכות ב- $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ מסמנים ב- $GL(\mathbb{R}^n)$.

<u>טענה:</u>
1) הדטרמיננטה היא העתקה רציפה מ- $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ל- $\mathbb{R}$
2) $GL(\mathbb{R}^n)$ קבוצה פתוחה ב $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$
3) ההעתקה $T\mapsto T^{-1}$ היא רציפה ב- $GL(\mathbb{R}^n)$.

<u>הוכחה</u>
1) נובע מכך ש- $T\mapsto \det T$ היא הרכבה של $T\mapsto \{a_{ij}(T)\}_{i,j}$ עם פונקציה פולינומיאלית. ושתי אלה רציפות.
2) $GL(\mathbb{R}^n)=\{T\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) : \det T\neq 0\} =$
$= \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$. לפי (1) det רציפה. $\Leftarrow$ $GL(\mathbb{R}^n)$ פתוחה.
3) לפי נוסחת קרמר $T^{-1} = \frac{\text{פולינום ב-}a_{ij}(T)}{\det T}$
זו מנה של פונק' רציפות והמכנה אינו מתאפס. לכן T^{-1} רציפה.

העתקות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$

עד כה דיברנו על ההעתקות הלינאריות $Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. ראינו שבמקרה הסוף ממדי $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ והגדרנו נורמה $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ שיחד איתה $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ מרחב נורמי.

אבל העתקות לינאריות זה רק חלק קטן מה העתקות בעולם.
הנה העתקה לא לינארית:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 \sin x_2 \\ \cosh(x_1/x_2) \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$$

נגזרת של $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

תזכורת: במקרה ש- $m = 1 = n$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

לא ברור איך אפשר להכליל את זה באופן מיידי למרחבים ממימד גבוה.

האם ידועה הגדרה חליפית לנגזרת של $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
- כן! אמרנו ש- f דיפרנציאבילית בנקודה x אם קיים מספר ממשי a כך ש- $f(x+h) - f(x) - ah = o(h)$
כלומר

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{|h|} = 0$$

ניתן לחשוב על a כאיבר ב- $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ועכשיו כבר ברור איך אפשר להכליל את ההגדרה הזאת למקרה הכללי.

הגדרה פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ תיקרא **דיפרנציאבילית** ב- $x\in\mathbb{R}^n$
אם קיימת $T\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ כך ש-

$$(*)\quad \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)-Ty}{\|y\|}=0$$

טענה אם f דיפרנציאבילית ב-x אז T (מההגדרה) יחידה.

הוכחה נניח בשלילה שקיימות $T,S\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ כך שההגדרה מתקיימת לשתיהן.

$$\frac{(T-S)y}{\|y\|}=\frac{[f(x+y)-f(x)-Sy]}{\|y\|}-\frac{[f(x+y)-f(x)-Ty]}{\|y\|}$$

נתון שכאשר $y\to 0$ אגף ימין מתאפס.

לכל y על כדור היחידה ולכל $0<t$ $\quad y=\frac{y}{\|y\|}=\frac{ty}{\|ty\|}$

$$\frac{(T-S)(ty)}{\|ty\|}=\frac{f(x+ty)-f(x)-S(ty)}{\|ty\|}-\frac{f(x+ty)-f(x)-T(ty)}{\|ty\|}$$

כאשר $t\to 0$ אגף ימין שואף לאפס.

$$\Rightarrow (T-S)\frac{y}{\|y\|}=0\quad\Rightarrow\quad \|T-S\|=0$$

אבל $\|T-S\|=0$ אמ"מ $T=S$.

נסמן את ה-T הנ"ל $Df(x)$ (הנגזרת של f בנקודה x).
$Df(x)\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$; ול-$y\in\mathbb{R}^n$ $\;Df(x)(y)\in\mathbb{R}^m$.
אז בעצם $Df:\mathbb{R}^n\to Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.
למקרה של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\;f'(x)\in Hom(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $f':\mathbb{R}\to Hom(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Df היא העתקה מהמרחב המטרי $\mathbb{R}^n$ למרחב המטרי $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ $\Leftarrow$ קיים מושג רציפות.

להגדרה (*) של גזירות קוראים גזירות במובן Fréchet
להגדרה ה"נאיבית" מאינפי 1 קוראים גזירות במובן Gâteaux

דוגמאות

① $f: x \longmapsto Tx$ כאשר $T \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

אז $Df(x) = T$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-Ty}{\|y\|} = 0$$

וזה כמובן נכון כי בגלל הלינאריות המונה שווה זהותית אפס.

② $f: x \longmapsto \vec{a} \in \mathbb{R}^m$ פונקציה קבועה.

אז $Df(x) = 0 \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-0\cdot y}{\|y\|} = 0$$

ושוב, כמובן בגלל שהפונקציה קבועה אז המונה שווה זהותית לאפס.

טוב, אז לחשב נגזרת מהגדרה זה טוב ויפה, אבל זה לא כל כך נוח. אנחנו רוצים נוסחה!

מההגדרה כמובן מתקיים

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-Df(x)(y)}{\|y\|} = 0$$

בפרט, אם $\|y\|=1$ אם נציב ty כאשר $t>0$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+ty)-f(x)-tDf(x)y}{t} = 0.$$

$$\Rightarrow Df(x)y = \underbrace{\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+ty)-f(x)}{h}} \longleftarrow$$ מאוד חשוב

זה קצב השינוי של f כשמתקדמים בכיוון y - הנגזרת הכיוונית של f בנקודה x בכיוון y

אגף שמאל לינארי ב-y $\Leftarrow$ אגף ימין לינארי ב-y וזה משהו בכלל לא טריוויאלי ונכון רק בגלל הדיפרנציאביליות של f.

$\Leftarrow$ אם $y \neq 0$

$$Df(x)\frac{y}{\|y\|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(x+t\frac{y}{\|y\|}\right)-f(x)}{\frac{t}{\|y\|}\cdot\|y\|}$$

$$\Rightarrow Df(x)y = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-ty)-f(x)}{-t} =$$

$$= -Df(x)(-y) = Df(x)y$$

<u>טענה</u> אם f דיפרנציאבילית ב-x אז ל-$Df(x)$ הצגה

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

<u>הוכחה</u>

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f_i(x+te_j)-f_i(x)}{t}$$

$$\Rightarrow (e_i, Df(x)e_j) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}, e_i\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f_i(x+te_j)-f_i(x)}{t} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

<u>דוגמאות</u>

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x)\end{pmatrix}$ $\quad Df(x)\in Hom(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(x)\end{pmatrix} \qquad Df(x): y \longmapsto y\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(x)\end{pmatrix}$$

(2) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$ $\quad Df(x)\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

$$Df(x): y \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} := (\nabla f(x), y)$$

(3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^2+x_2\\x_1+x_2^2\end{pmatrix}$

בהנחה ש-f דיפרנציאבילית

$$D_f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 & 1\\ 1 & 2x_2\end{pmatrix}$$

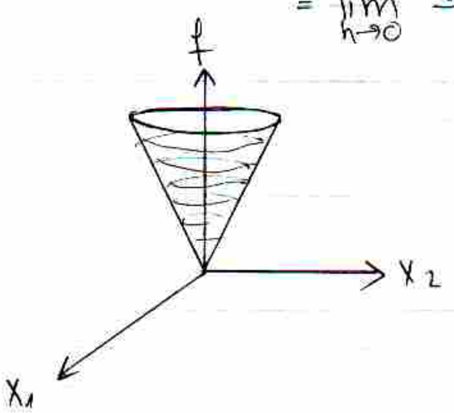
(4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

נטען ש-f אינה דיפרנציאבילית ב-$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

לו הייתה דיפרנציאבילית הנגזרות החלקיות היו קיימות

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+he_1)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$ - לא קיים



זה גם לא מפתיע למעשה
שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית
בראשית כי יש שם שפיץ

טענה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-X

אמ"מ כל אחד מהרכיבים $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $1\le j\le m$ דיפרנציאבילי ב-X.

הוכחה

($\Rightarrow$) נניח שכל הרכיבים דיפרנציאביליים $\Leftarrow$ קיימות m העתקות $T_j\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ כך ש-

$$\lim_{y\to 0}\frac{f_j(x+y)-f_j(x)-T_j y}{\|y\|} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{f_1(x+y)-f_1(x)-T_1 y}{\|y\|}\\ \vdots \\ \frac{f_m(x+y)-f_m(x)-T_m y}{\|y\|}\end{pmatrix} \xrightarrow[y\to 0]{} \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{1}{\|y\|}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x+y) \\ \vdots \\ f_m(x+y)\end{pmatrix}}_{f(x+y)} - \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x)\end{pmatrix}}_{f(x)} - \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix} y\right] = 0$$

$\Leftarrow$ f דיפרנציאבילית
וזה נגזרת [illegible]

$$Df(x) = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}$$

(51) 20.12.06
אינפי'

אתמול הוכחנו שאם f דיפרנציאבילית אז

$$D_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

נשארה השאלה: נניח שקיימות כל הנגזרות החלקיות, האם זה אומר ש- f דיפרנציאבילית?

אתמול הוכחנו ש- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית אמ"מ לכל $j=1,\dots,m$ $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית.
האמת היא שהוכחנו רק את הכיוון ($\Leftarrow$) אבל הכיוון השני ברור. פשוט צריך לקחת את ההוכחה של הכיוון שהוכחנו ולכתוב אותה בסדר הפוך.

בכל אופן, כמו שאנחנו אמורים לזכור מאינפי' 2, קיום נגזרות חלקיות לא מבטיח דיפרנציאביליות. אבל...

<u>משפט:</u> אם כל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ קיימות ורציפות בנקודה $x \in \mathbb{R}^n$ אז f דיפרנציאבילית ב-x.
<u>הוכחה:</u> נניח שקיימות הנגזרות החלקיות. (נסמן)

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$$

צריך להראות ש-

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-Ty}{\|y\|} = 0$$

(כי זו ההגדרה של דיפרנציאביליות ב- x).

אבל התכנסות ב-$\mathbb{R}^m$ שקולה להתכנסות איבר-איבר.

$\Leftarrow$ צריך להראות שלכל $j=1,\dots,m$ מתקיים

$$\lim_{y\to 0}\frac{f_j(x+y)-f_j(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\,y_i}{\|y\|}=0$$

טוב, מעשה אנחנו נעשה בדיוק מה שעשינו באינפי 2 כשהוכחנו את המשפט הזה

נשים ❤ שאפשר לרשום

$$\begin{aligned}
&f_j(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)-f_j(x_1,\dots,x_n)=\\
&=f_j(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)-f_j(x_1+y_1,\dots,x_{n-1}+y_{n-1},x_n)+\\
&+f_j(x_1+y_1,\dots,x_{n-1}+y_{n-1},x_n)-f_j(x_1+y_1,\dots,x_{n-2}+y_{n-2},x_{n-1},x_n)+\\
&+\dots+\\
&+f(x_1+y_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

נהדר! כל שורה כאן זהה בכל הארגומנטים חוץ מאחד

$\Leftarrow$ ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים החד-ממדי.

קיימים $\theta_1,\dots,\theta_n$ כך ש-

$$\begin{aligned}
&f_j(x+y)-f_j(x)=\\
&=\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x_1+y_1,\dots,x_{n-1}+y_{n-1},x_n+\theta_n y_n)\,y_n+\\
&+\frac{\partial f_j}{\partial x_{n-1}}(x_1+y_1,\dots,x_{n-1}+\theta_{n-1}y_{n-1},x_n)\,y_{n-1}+\\
&+\dots+\\
&+\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 y_1,x_2,\dots,x_n)\,y_1=\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\underbrace{(x+\theta\cdot y)}_{\text{סכום ומכפלה איבר-איבר}}\,y_i
\end{aligned}$$

סה"כ מה קיבלנו?

$$\frac{f_j(x+y)-f_j(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\cdot y_i}{\|y\|} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+\theta y)-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right]}_{\text{זה שואף לאפס כי הנחנו שהנגזרות החלקיות רציפות באפס}} \underbrace{\frac{y_i}{\|y\|}}_{\text{חסום ע"י 1}}$$

סה"כ כל הסכום (הסופי!!) הזה שואף לאפס.

$\Longleftarrow$ קיבלנו מה שרצינו.

Yey!

<u>אנטי-דוגמה</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \dfrac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} & x\neq 0\end{cases}$$

ברור שזו פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}^2$.

נראה גם שהנגזרות החלקיות קיימות בכל $\mathbb{R}^2$ אבל הפונקציה אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f\binom{h}{0}-f\binom{0}{0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3/h^2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f\binom{0}{h}-f\binom{0}{0}}{h} = 0$$

אז הנגזרות החלקיות קיימות בראשית.

לא זאת הבעיה כי גם כאן אנחנו טוענים שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית בראשית.

אילו f הייתה דיפרנציאבילית ברגשית היינו מקבלים

$$\frac{f\binom{0+y_1}{0+y_2} - f\binom{0}{0} - (1,0)\binom{y_1}{y_2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \longrightarrow 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\frac{y_1^3}{y_1^2+y_2^2} - y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \longrightarrow 0$$

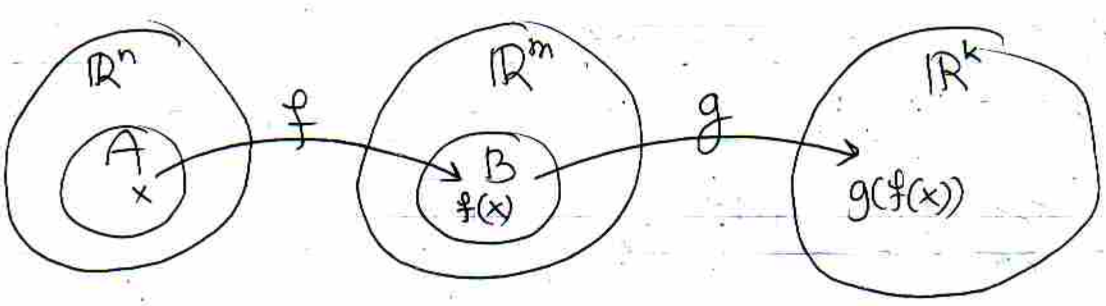
$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_1^3 - y_1(y_1^2+y_2^2)}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}} = \frac{-y_1 y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}} \longrightarrow 0$$

אבל הנ"ל לא נכון, למשל אם $y_1 = y_2 \longrightarrow 0$
לא מתקבל גבול 0.

$\Leftarrow$ לא יכול להיות שהפונקציה דיפרנציאבילית ברגשית.

גזירת של הרכבה



$A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה

$B \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה

$x \in A^0$ [כלומר נקודה פנימית של A), $f(x) \in B^0$

$f: A \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-x.

$g: B \to \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ב-$f(x)$.

אזי $g\circ f$ דיפרנציאבילית ב-x ומתקיים

$$\underbrace{D_{g\circ f}(x)}_{Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = \underbrace{Dg(f(x))}_{Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^k)} \cdot \underbrace{Df(x)}_{Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$$

זה מסתדר לפחות מבחינת הממדים.

<u>הוכחה</u>: נתון ש-f דיפרנציאבילית ב-x. אז

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-Df(x)y}{\|y\|} = 0$$

כלומר

$$(*)\quad f(x+y)-f(x)-Df(x)y = r(y)$$

כאשר $r(y)=o(\|y\|)$

נתון גם ש-g דיפרנציאבילית ב-$f(x)$ לכן

$$(**)\quad g(f(x)+z)-g(f(x))-Dg(f(x))z = s(z)$$

כאשר $s(z)=o(\|z\|)$.

צריך להראות שמתקיים

$$\frac{1}{\|y\|}\left[(g\circ f)(x+y)-(g\circ f)(x)-Dg(f(x))\cdot Df(x)y\right] \to 0$$

אז נראה את זה.

$$g(f(x+y))-g(f(x))-Dg(f(x))Df(x)y =$$

$$\overset{(*)}{=} g(f(x)+Df(x)y+r(y))-g(f(x))-Dg(f(x))Df(x)y =$$

$$\overset{(**)}{=} g(f(x))+Dg(f(x))(Df(x)y+r(y))+s(Df(x)y+r(y))-g(f(x))-Dg(f(x))Df(x)y =$$

בצמצום איברים $= Dg(f(x))r(y)+s(Df(x)y+r(y))$

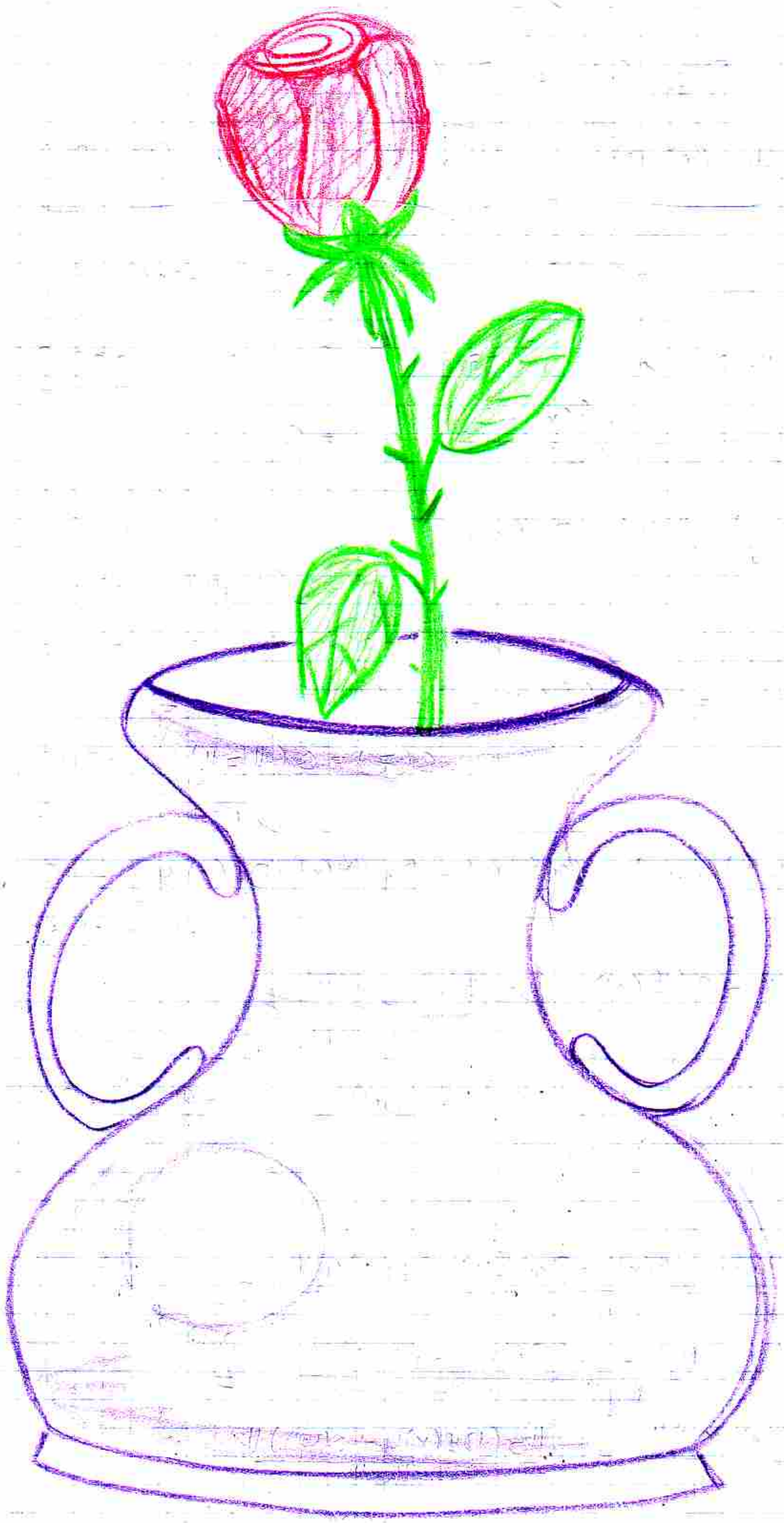
$$\Rightarrow \frac{\|g(f(x+y))-g(f(x))-Dg(f(x))Df(x)y\|}{\|y\|} =$$

$$= \frac{\|Dg(f(x))r(y)+s(Df(x)y+r(y))\|}{\|y\|} \overset{\text{א"ש משולש}}{\le}$$

$$\le \frac{\|Dg(f(x))r(y)\|}{\|y\|} + \frac{\|s(Df(x)y+r(y))\|}{\|y\|}$$

$\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$

$$\le \|Dg(f(x))\|\cdot\frac{\|r(y)\|}{\|y\|} + \frac{\|Df(x)y+r(y)\|}{\|y\|}\cdot\frac{\|s(Df(x)y+r(y))\|}{\|Df(x)y+r(y)\|}$$



$$\|Dg(f(x))\| \cdot \frac{\|r(y)\|}{\|y\|} \longrightarrow 0 \quad \Leftarrow \quad r(y) = o(\|y\|)$$

$$\frac{\|Df(x)y + r(y)\|}{\|y\|} \le \|Df(x)\| \frac{\|y\|}{\|y\|} + \frac{\|r(y)\|}{\|y\|} \to \|Df(x)\|$$ $\Leftarrow$ הביטוי הזה חסום.

$$\frac{\|s(Df(x)y + r(y))\|}{\|Df(x)y + r(y)\|} \to 0 \quad \Leftarrow \quad s(z) = o(\|z\|)$$

$\Leftarrow$ סה"כ ט הסכום שואף לאפס.

__דוגמה:__

$$f: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos x_1 \cdot \cos x_2 \\ \cos x_1 \cdot \sin x_2 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

$$g \circ f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \cos^2 x_1 \cdot \cos^2 x_2 + 2\cos^2 x_1 \sin^2 x_2 + 3\sin^2 x_1$$

$$Df \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x_1 \cos x_2 & -\cos x_1 \sin x_2 \\ -\sin x_1 \sin x_2 & \cos x_1 \cdot \cos x_2 \\ \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dg \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (2x_1 , 4x_2 , 6x_3)$$

$$Dg\left(f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (2\cos x_1 \cos x_2 , 4\cos x_1 \sin x_2 , 6\sin x_1)$$

$$Dg\circ f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-\sin 2x_1 \cdot \cos^2 x_2 - \sin 2x_1 \sin^2 x_2 + 3\sin 2x_1 , \; -\cos^2 x_1 \sin 2x_2 + \cos^2 x_1 \sin 2x_2)$$

אפשר לבדוק שאכן $Dg\circ f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Dg(f(x))Df(x)$.

מקובל לרשום את כלל השרשרת גם בצורה הבאה:

$$y = f(x)$$
$$z = g(y)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_k}$$

<u>הגדרה:</u> תהא $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית בנקודה X.

$$\det Df(x) = J_f(x)$$

היעקוביאן של f בנקודה X.

<u>דוגמה:</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקת הזהות $Df(X) = I$

$$J_f(x) = \det I = 1$$

$$Dg\circ f(x) = Dg(f(x))\, Df(x)$$

$$Jg\circ f(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$$

בפונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ידוע שאם $\sup_x |f'(x)| \le M$ אז

$$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$$

נרצה שיתקיים $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ אם $\sup \|Df(x)\| \le M$ אז

$$\|f(x) - f(y)\| \le M\|x-y\|$$

בפרט, אם $Df(x) \equiv 0$ אז הפונקציה קבועה.

אין זמן לעשות את זה אז נעשה את זה בשבוע הבא.

(55) 26.12.06
אינפי'

תזכורת 8

הגדרנו דיפרנציאביליות של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ בנקודה x
אם קיים אופרטור לינארי $Df(x)$ כך שמתקיים

$$\lim_{y\to 0}\frac{\|f(x+y)-f(x)-Df(x)y\|}{\|y\|}=0$$

אפשר לחשוב על Df $\quad Df:\mathbb{R}^n\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$
(הפונקציה הזאת (כפונקציה של $x\in\mathbb{R}^n$) לא מהכרח לינארית כלל)

ראינו שאם f דיפרנציאבילית ב-x ברציפות אז $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ קיימות ורציפות וזה גם תנאי מספיק לדיפרנציאביליות של f ב-x.

מסמנים $C^1(A,\mathbb{R}^m)$ - משפחת הפונקציות הדיפרנציאביליות ברציפות מ-$A\subseteq\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$.

נגזרת שנייה לה מושג מאוד טבעי במקרה של פונקציות במשתנה אחד.. מה עם המקרה הכללי?
אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ אז הנגזרת היא

$$Df:\mathbb{R}^n\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m).$$

זאת העתקה בין שני מרחבים וקטוריים סוף ממדיים לכן אפשר להתאים לה נגזרת:

$$D^2f\equiv D_{Df}:\mathbb{R}^n\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$$

מכאן ההכללה נראית ברורה. אבל מה זה היצור הזה?
אם $x\in\mathbb{R}^n$ אז $D^2f(x)\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$
ואם $y\in\mathbb{R}^n$ אז $D^2f(x)y\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$
ואם $z\in\mathbb{R}^n$ אז $D^2f(x)yz\in\mathbb{R}^m$

אבל צריך לזה הגדרה שנשתמש בה...

<u>הגדרה:</u> $f\in C^k(A,\mathbb{R}^m)$ כאשר $A\subset\mathbb{R}^n$
אם כל הנגזרות המעורבות החלקיות קיימות ורציפות

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}$$

<u>למה:</u> $h:I\to\mathbb{R}^m$ מסילה גזירה ברציפות רק ש- $\sup_{t\in I}\|h'(t)\|=M$. אזי $\|h(1)-h(0)\|\le M$

<u>הוכחה:</u> נגדיר פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ ע"י

$$f(t)=\langle h(t)-h(0),\ h(1)-h(0)\rangle=\sum_{j=1}^{m}(h_j(t)-h_j(0))(h_j(1)-h_j(0))$$

אבל $f'(t)=\langle h'(t),h(1)-h(0)\rangle$

ומאי שוויון קושי שוורץ-

$$|f'(t)|\le\|h'(t)\|\,\|h(1)-h(0)\|\le$$
$$\le M\|h(1)-h(0)\|$$

ממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $\xi\in(0,1)$ כך ש-

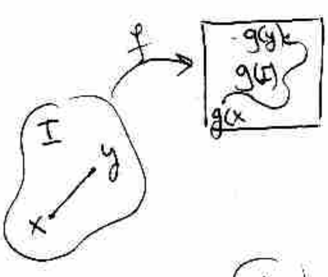
$$f(1)-f(0)=f'(\xi)$$

$$\Rightarrow\ \|h(1)-h(0)\|^2=f'(\xi)\le|f'(\xi)|\le M\|h(1)-h(0)\|$$

אם $h(1)-h(0)$ 0 ברור שהמשפט נכון, אחרת, נחלק ונקבל $\|h(1)-h(0)\|\le M$

☺

<u>מסקנה:</u> תהי $g:A\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ויהיו $x,y\in A$ כך ש $I=\{ty+(1-t)x:0\le t\le 1\}\subseteq A$. אם $\sup_{x\in I}\|Dg(x)\|=M$ אז $\|g(y)-g(x)\|\le M\|x-y\|$



<u>הוכחה:</u> נגדיר $h:I\to\mathbb{R}^m$ ע"י $h(t)=g(\overbrace{ty+(1-t)x}^{f(t)})$

$\Leftarrow$ $D_h(t)=D_g(f(t))\cdot D_f(t)=D_g(f(t))(y-x)$

$$\|D_h(t)\|\le\|D_g(f(t))\|\,\|y-x\|\le M\|y-x\|$$

מהלמה $\|g(y)-g(x)\|=\|h(1)-h(0)\|\le M\|y-x\|$.

☺

״החוק המצעצע של הקורס״

רז קלפרמן
2006

מוטיבציה:

$$g(x,y) = e^y\cos(y^3+xy^2+x^2)+e^x\sin(xy)-1 = 0$$

באופן סתום מוגדרת פונקציה $f : x \longmapsto y$

$$g(x,f(x)) = 0$$

f לא בהכרח מוגדרת על $\mathbb{R}$

f לא בהכרח חד-ערכית

ייתכן שקיים תחום $A \subseteq \mathbb{R}$ שעליו f מוגדרת חד-ערכית.
במקרה זה $g(x,y)=0$ מגדירה באופן סתום
פונקציה $A \to \mathbb{R}$.

<u>למה:</u> $f \in C^1(A,\mathbb{R}^m)$ והקטע I שמחבר את $x,y \in A$
מוכל ב- A. אז לכל $a \in A$

$$\|f(y)-f(x)-Df(a)(y-x)\| \le \|y-x\| \sup_{w\in I} \|Df(w)-Df(a)\|$$

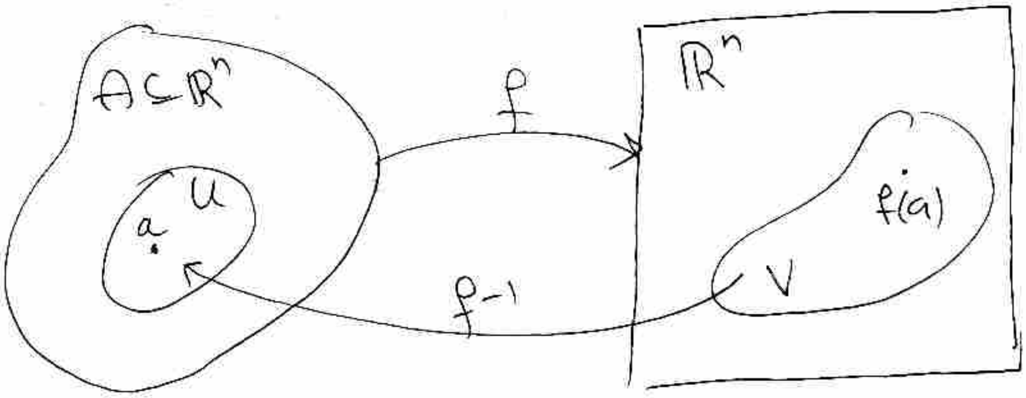
<u>הוכחה:</u> נגדיר $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ע"י $g(x) = f(x) - Df(a)x$

$\Leftarrow \quad Dg(x) = Df(x) - Df(a)$

מהטענה הקודמת: $\|g(y)-g(x)\| \le \|y-x\| \sup_{w\in I} \|Dg(w)\|$ ☺

<u>משפט הפונקציה ההפוכה</u>

<u>נניח</u> $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $f \in C^1(A,\mathbb{R}^n)$. תהי $a \in A^\circ$
כך ש- $J_f(a) \neq 0$.
אזי קיימות סביבות $a \in U \subseteq A$ ו- $f(a) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$
כך ש- f <u>חח"ע</u> מ- U <u>על</u> V, כלומר קיימת $f^{-1} : V \to U$
ו- $f^{-1} \in C^1(V,U)$.



<u>הערה</u>: המשפט טוען ש- f^{-1} קיימת וגזירה.

אם קיימת פונקציה הופכית גזירה $f(f^{-1}(y)) = y$

$$\Rightarrow D_f(f^{-1}(y))\, D_{f^{-1}}(y) = I$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}}(y) = [D_f(f^{-1}(y))]^{-1}$$

במקרה הפרטי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקבל $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$

שזה אנחנו כבר מכירים.

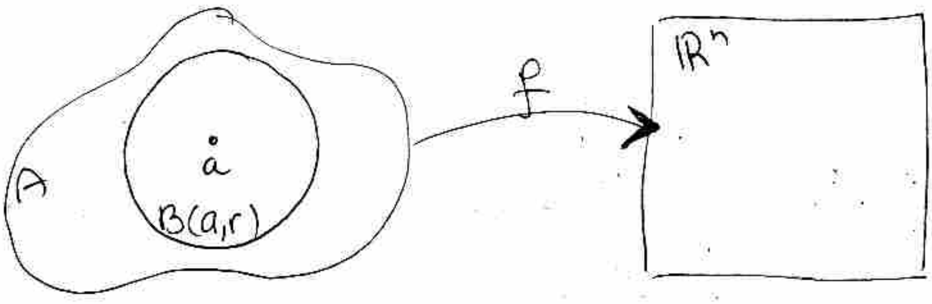
<u>הוכחה</u>: נתון $J_f(a) = \det D_f(a) \neq 0$

$\Leftarrow$ $[D_f(a)]^{-1}$ קיים.

מכיוון ש- f גזירה ברציפות $D_f(x)$ רציפה ב- a.

$\Leftarrow$ קיים כדור $B(a,r)$ כך שאם $x\in B(a,r)$ אז

$$\|D_f(x) - D_f(a)\| \le \frac{1}{2\|[D_f(a)]^{-1}\|}$$



<u>שלב 1</u> נוכיח ש- f חח"ע ב- $B(a,r)$, כלומר

לכל $x,y\in B(a,r)$; $x\neq y$ אז $f(x)\neq f(y)$.

מהלמה נובע ש-

$$\|f(x)-f(y)-D_f(a)(x-y)\| \le \|x-y\|\frac{1}{2\|[D_f(a)]^{-1}\|}$$

$$\|f(x)-f(y)\| \geq \|Df(a)(x-y)\| - \|f(x)-f(y)-Df(a)(x-y)\| \geq$$

$$\geq \|Df(a)(x-y)\| - \|x-y\| \frac{1}{2\|[Df(a)]^{-1}\|} =$$

$$= \frac{1}{\|[Df(a)]^{-1}\|}\left[\|[Df(a)]^{-1}\| \, \|Df(a)(x-y)\| - \frac{1}{2}\|x-y\|\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{\|[Df(a)]^{-1}\|}\left[\|[Df(a)]^{-1} Df(a)(x-y)\| - \frac{1}{2}\|x-y\|\right] \geq$$

$\|A\|\,\|B\| \geq \|AB\|$

$$\geq \frac{\|x-y\|}{2\|[Df(a)]^{-1}\|}$$

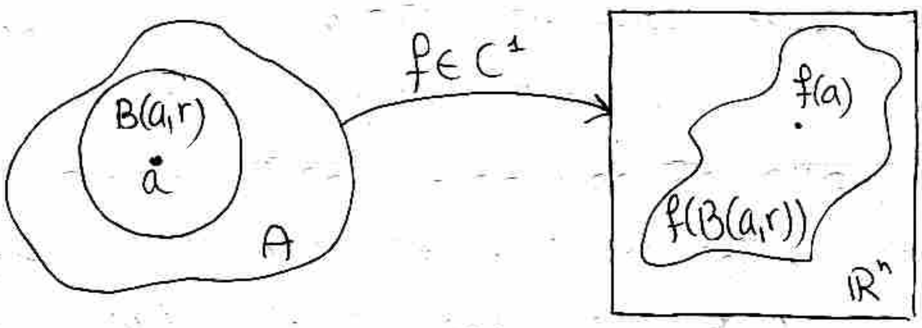
$\Leftarrow$ f חח"ע ב $B(a,r)$

(58) 27.12.06
אינפי

משפט הפונקציה ההפוכה

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. אם $a \in A^\circ$
וכן ש- $J_f(a) \neq 0$ אז קיימות סביבות פתוחות $a \in U \subseteq A$
ו- $f(a) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ כך שקיימת $f^{-1}: V \to U$
ו- $f^{-1} \in C^1(V, U)$.

אתמול השתמשנו בעובדה ש- $J_f(a) \neq 0$ וברציפות של
$Df(x)$ ב-a כדי לבנות כדור מסביב ל-a



(*) הוכחנו שלכל $x, y \in B(a,r)$ מתקיים $\|f(x)-f(y)\| \geq \frac{\|x-y\|}{2\|(D_f(a))^{-1}\|}$
כלומר ההעתקה $f: B(a,r) \to \mathbb{R}^n$ חח"ע.

<u>שלב ב'</u>: להראות ש- $D_f(x)$ הפיכה בכל $B(a,r)$.
יהי $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$. אז לפי טענה קודמת

$$\|D_f(x)\,y\| = \left\| \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hy)-f(x)}{h} \right\| =$$

כי הנורמה רציפה ⇐ אפשר להחליף גבול ונורמה

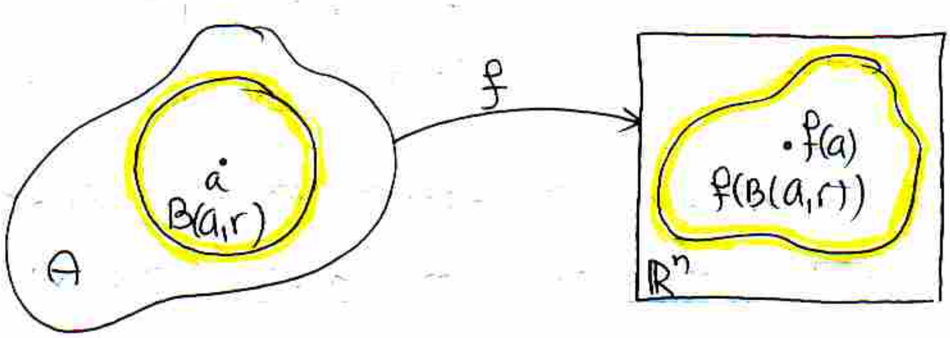
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+hy)-f(x)\|}{|h|} \geq$$

$$\overset{(*)}{\geq} \lim_{h\to 0} \frac{|h|\|y\|}{2|h|\|(D_f(a))^{-1}\|} = \frac{\|y\|}{2\|(D_f(a))^{-1}\|} > 0$$

כי נתון ש- $y \neq 0$.

$\Leftarrow$ $D_f(x)$ הפיכה.

שלב ג' נוכיח ש- $f(B_0(a,r))$ מכילה כדור פתוח $B_0(f(a),\frac{\varepsilon}{2})$ ואז ניקח $V=B_0(f(a),\frac{\varepsilon}{2})$
$U=f^{-1}(V)\cap B_0(a,r)$
ונקבל U,V המקיימים f חח"ע מ- U על V ומכאן קיימת f^{-1} חח"ע מ-V על U.



נסתכל על $\partial B(a,r)$. זוהי קבוצה סגורה וחסומה במרחב נורמי סוף ממדי לכן היא קומפקטית
אבל פונקציה רציפה מעבירה קבוצה קומפקטית לקומפקטית
$\Leftarrow$ $f(\partial B(a,r))$ קבוצה קומפקטית והיא אינה מכילה את $f(a)$ (מהגדרה וחח"ע של f).
$\Leftarrow$ קיים מרחק חיובי $0<\varepsilon$ בין $f(a)$ ל $f(\partial B(a,r))$
לכל $x\in\partial B(a,r)$ מתקיים $\|f(x)-f(a)\|\geq\varepsilon$.
נראה ש- $B_0(f(a),\frac{\varepsilon}{2})\subseteq f(B_0(a,r))$, או לחילופין לכל $w\in B_0(f(a),\frac{\varepsilon}{2})$ קיים $b\in B_0(a,r)$ כך ש- $w=f(b)$.
בהינתן w נגדיר פונקציה $h:B(a,r)\to\mathbb{R}$ ע"י $h(x)=\|f(x)-w\|^2$
זוהי פונקציה רציפה כי f רציפה וגם הנורמה רציפה.
היא מוגדרת על קבוצה קומפקטית לכן היא חייבת לקבל מינימום בקבוצה. כלומר קיימת נקודה $b\in B(a,r)$ כך ש- $\|f(b)-w\|^2\leq\|f(x)-w\|^2$ לכל $x\in B(a,r)$.
b אינה על השפה. כי אם היא הייתה אז
$$\sqrt{h(b)}=\|f(b)-w\|\geq\|f(b)-f(a)\|-\|f(a)-w\|>$$
$$>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}>\|f(a)-w\|=\sqrt{h(a)}$$
בסתירה להיות b נקודת מינימום.

אבל $h(x) = \sum_{j=1}^{n} (f_j(x) - w_j)^2$

וזו פונקציה גזירה ברציפות כי היא הרכבה של גזירות ברציפות.

$\Leftarrow$ לכל $1 \le k \le n$ חייב להיות $\frac{\partial h}{\partial x_k}(b) = 0$

(כי b נקודת מינימום).

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(b) = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(b)\,(f_j(b) - w_j) =$$

$$= 2\,D_f^t(b)\,(f(b) - W) = 0$$

אבל $D_f(b)$ אינה סינגולרית, וגם לא D_f^t.

$\Leftarrow$ חייב להתקיים $f(b) = W$ וסיימנו את שלב ג'.

<u>שלב ד1</u> נראה ש- f^{-1} ליפשיצית:

לכל $x,y \in V$ מתקיים

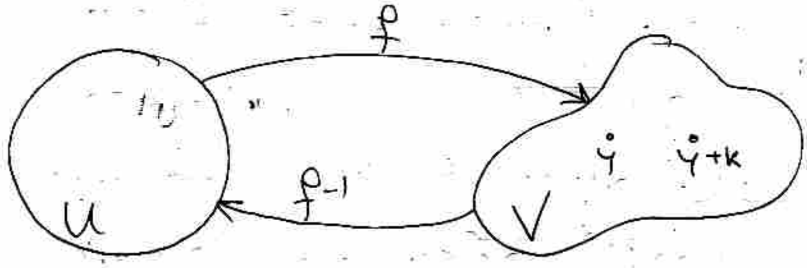
$$\|x-y\| = \|f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(y))\| \ge$$

$$\ge \frac{\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|}{2\,\|(D_f(a))^{-1}\|}$$

$$\Leftarrow \quad \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \le 2\,\|(D_f(a))^{-1}\| \cdot \|x-y\|$$

$\Leftarrow$ f^{-1} ליפשיצית ובפרט רציפה.

<u>שלב ד2</u> נראה ש- f^{-1} דיפרנציאבילית



נוכיח ש-

$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f(y) - [D_f(f^{-1}(y))]^{-1}k}{\|k\|} = 0$$

נגדיר $x = f^{-1}(y)$, $x+h = f^{-1}(y+k)$. $\Leftarrow$ $f(x) = y$, $f(x+h) = y+k$

$\Leftarrow$ $k = f(x+h) - f(x)$.

$$\left\|\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)-[Df(f^{-1}(y))]^{-1}k}{\|k\|}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{h-[Df(x)]^{-1}(f(x+h)-f(x))}{\|k\|}\right\| =$$

$$= \left\|[Df(x)]^{-1}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)-Df(x)h}{\|k\|}\right\| \le$$

$$\le \|[Df(x)]^{-1}\| \underbrace{\frac{\|f(x+h)-f(x)-Df(x)h\|}{\|h\|}}_{\text{זה שואף ל-0 מהדיפרנציאביליות של } f} \cdot \underbrace{\frac{\|h\|}{\|k\|}}_{\text{מוגבל מהליפשיציות}} \xrightarrow[k\to 0]{} 0$$

$$\|h\| = \|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)\| \le L\|k\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|h\|}{\|k\|} \le L$$

<u>שלב 3</u>: צריך להראות ש- f^{-1} גזירה ברציפות. ידוע

$$Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$$

כלומר $Df^{-1} = \text{הופכי} \circ Df \circ f^{-1}$

וזו הרכבה של פונקציות רציפות.

אתנחתא

<u>טענה</u>: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה מסילתית. $f: A\to\mathbb{R}^m$

אזי f קבועה אמ"מ $Df\equiv 0$.

<u>הוכחה</u>: ראינו כבר שאם f קבועה אז $Df\equiv 0$.

נניח ש- $Df=0$. נבנה מסילה (גזירה) $\varphi: I\to A$ כך ש- $\varphi(0)=x$ $\varphi(1)=y$ ונגדיר $g(t)=f(\varphi(t))$.

$$Dg(t) = Df(\varphi(t))\cdot D\varphi(t) = 0$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t)\end{pmatrix} \Rightarrow g'(x) = Dg(x) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_m'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ g פונקציה קבועה $\Leftarrow$ $g(0)=g(1)$ $\Leftarrow$ $f(x)=f(y)$.

<u>מסקנה:</u> $f,g\in C^1(A,\mathbb{R}^m)$ $Df(x)=Dg(x)$ לכל $x\in A$ אז קיים $C\in\mathbb{R}^m$ כך ש- $f(x)=g(x)+C$

<u>הוכחה:</u> נסמן $h=f-g$. אז $D_h=0$

$\Leftarrow$ h קבועה.

עבור פונקציות אמיתיות $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ידוע שקיים $\xi\in(a,b)$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

זה משפט הערך הממוצע. זה שקול להגיד ש- קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$

האם זה נכון גם לפונקציות $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$?

האם עבור $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ לכל x,y קיים $\theta\in(0,1)$
$$f(x)-f(y)=Df(x+\theta(y-x))\cdot(x-y) \ ?$$

לא! זה נכון רק עבור $m=1$.

תרגיל: איך עושים איש שלג מ-2 מ"א שלג ?

<u>דוגמה נגדית:</u>

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$
$$f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix}$$

$$Df(t)=f'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix}$$

ניקח $t_1=0$, $t_2=2\pi$

$$\Rightarrow f(t_2)-f(t_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\pi\end{pmatrix}$$

אבל $Df(t)(t_2-t_1)=2\pi\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix}$

ועבור שום t לא יתקבל שוויון!

61 2/1/07
אינפי

משפט הערך הממוצע -

ראינו שלא ניתן להכליל את משפט הערך הממוצע למימדים גבוהים. למשל אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

$$f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix}$$

אז לא קיים θ כך שמתקיים,

$$f(2\pi)-f(0)=Df(2\pi+\theta(2\pi-0))\cdot(2\pi-0)$$

ובכל זאת יש מקרה פרטי שעבורו המשפט נכון.

<u>משפט הערך הממוצע</u>: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ו- $f\in C^1(A,\mathbb{R})$.
אם לכל $x,y\in A$ שהקטע המחבר אותם מוכל ב- A, קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש-

$$f(y)-f(x)=Df(x+\theta(y-x))(y-x)$$

<u>הוכחה</u>: נגדיר $g:I\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$g(t)=f(x+t(y-x))$$

$$\Rightarrow g'(t)=Dg(t)=Df(x+t(y-x))(y-x)$$

מאינפי 1 קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש-

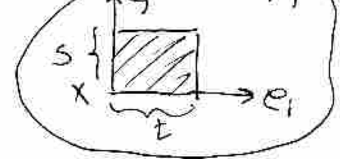
$$g(1)-g(0)=g'(\theta)(1-0)$$

וזה בדיוק מה שרצינו.

<u>משפט 8</u>: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. $f\in C^2(A,\mathbb{R})$. אז לכל $1\le i,j\le n$ מתקיים לכל $x\in A$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)$$

<u>הוכחה</u>: בהינתן $x\in A$ נבחר s,t כך שהמלבן שקודקודיו $x,\ x+te_i,\ x+se_j,\ x+se_j+te_i$ מוכל ב- A.



נגדיר $g(x) = f(x+te_i) - f(x)$

$$\Rightarrow \quad Dg(x) = Df(x+te_i) - Df(x)$$

לפי משפט הערך הממוצע קיים $\theta \in (0,1)$ כך ש-

$$g(x+se_j) - g(x) = D_g(x+\theta se_j)\cdot se_j =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial x_j}(x+\theta se_j)\cdot s$$

כי זה הרכיב היחיד שנשאר אחרי המכפלה ב- e_j.

$$g(x+se_j) - g(x) = s\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\theta se_j + te_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\theta se_j)\right] =$$

משפט הערך הממוצע $= s\cdot t\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\theta se_j + \tilde{\theta} te_i) =$

הגדרת g $= f(x+te_i+se_j) - f(x+se_j) - f(x+te_i) + f(x)$

קיבלנו שבהינתן x,s,t קיימים $\theta, \tilde{\theta} \in (0,1)$ כך ש-

$$\frac{\frac{f(x+te_i+se_j) - f(x+se_j)}{t} - \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}}{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\theta se_j + \tilde{\theta} te_i)$$

נניח ש-s קבוע וניקח $t \to 0$ ונקבל

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+se_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\theta se_j)$$

(כי הנגזרת רציפה)

ועכשיו נשאיף את $s \to 0$ ונקבל

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

משפט טיילור רב מימדי

תהי $f\in C^{k+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש-

$$\begin{aligned} f(x+y) = {} & f(x) + \\ & + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,y_i + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(x)\cdot y_i y_j + \dots + \\ & + \frac{1}{k!}\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(x)\,y_{i_1}\dots y_{i_k} + \\ & + \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_{k+1}=1}^{n}\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{k+1}}}(x+\theta y)\,y_{i_1}\dots y_{i_{k+1}} \end{aligned}$$

אפשר לרשום את זה בצורה קומפקטית יותר ע"י טנזורים

$$\begin{aligned} f(x+y) = {} & f(x) + D_f(x)y + \frac{1}{2}D_f^2(x)(y\otimes y) + \dots + \\ & + \frac{1}{k!}D_f^k(x)(\underbrace{y\otimes\dots\otimes y}_{k}) + \frac{1}{(k+1)!}D_f^{k+1}(x+\theta y)(\underbrace{y\otimes\dots\otimes y}_{k+1}) \end{aligned}$$

הוכחה: נגדיר $g:I\to\mathbb{R}$ ע"י $g(t)=f(x+ty)$

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(0)+\dots+\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)+\frac{1}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\theta)$$

$$g(1)=f(x+y) \qquad g(0)=f(x)$$

$$g'(t)=D_f(x+ty)y \qquad g'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,y_i$$

$$g'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ty)y_i$$

$$\Rightarrow g''(t)=\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\partial f}{\partial x_j\partial x_i}(x+ty)y_j \qquad g''(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(x)y_iy_j$$

וכן הלאה...

שיטת ניוטון

$f\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ומחפשים $r\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $f(r)=0$

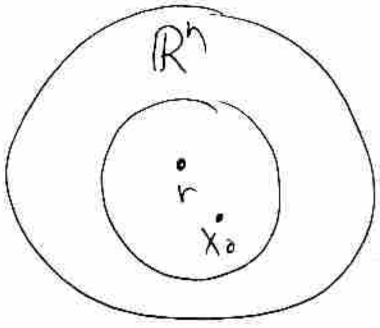
זה בעצם n משוואות ב- n נעלמים.

אף אחד לא הבטיח לנו שיש פתרון.

אבל נניח שקיים פתרון r ונניח

שמישהו אמר לנו ש- x_0 קרוב מאוד

ל- r.



$$f(x_0+y)=f(x_0)+D_f(x_0)y+\text{שארית}=0$$

אם השארית היא אפס ו- $D_f(x_0)$ הפיכה אז

$$y=-[D_f(x_0)]^{-1}f(x_0)$$

אבל לרוב כן יש שארית, אז זה לא מדויק. אז הניחוש

השני שלנו יהיה $x_1=x_0-[D_f(x_1)]^{-1}f(x_0)$

ובאופן כללי נבנה סדרה של ניחושים

$$x_{n+1}=x_n-[D_f(x_n)]^{-1}f(x_n)$$

הסדרה הזאת לא תמיד מתכנסת לפיתרון, אבל בתנאים

מסויימים היא מתכנסת ומהר מאוד.

נניח ש- $A\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. אז $\text{rank}A\le\min(n,m)$

נאמר של- A דרגה שלמה (full rank) אם $\text{rank}A=m$

(כלומר, העמודות פורשות את $\mathbb{R}^m$ $\Leftarrow$ A היא על).

<u>למה:</u> אם $A\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$; $\text{rank}A=m$ (ולכן $m\le n$) אז

קיימת העתקה $B\in Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ כך ש- $AB\in Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ הפיכה.

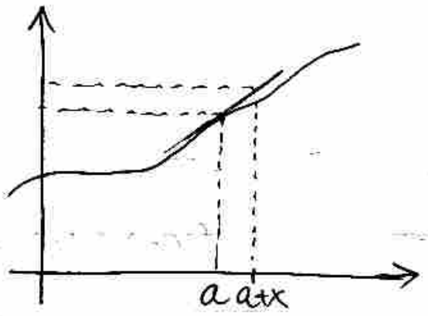
<u>הוכחה:</u> $\dim(\ker A)^{\perp}=m \Leftarrow \dim\ker A=n-m$

ניקח m וקטורים שפורשים את $(\ker A)^{\perp}\subseteq\mathbb{R}^n$ ונבנה את B מווקטורים

אלה. הטענה היא ש- AB הפיכה.

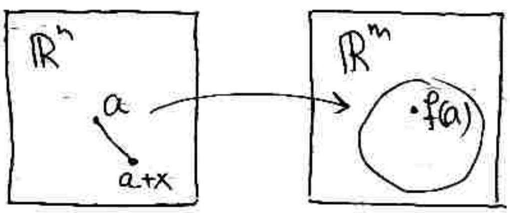
(63) 9/11/07
אינפי'

מה זה בעצם נגזרת?
נגזרת מספרת לנו באופן מקומי איך תזוזות במקור הופכות לתזוזות בתמונה.



$$a \longmapsto f(a)$$
$$a+x \longmapsto f(a)+f'(a)x$$
$$\downarrow$$
עד כדי $O(x)$.

מה קורה במרחבים ממדים גבוהים יותר?
גם שם קורה אותו דבר.

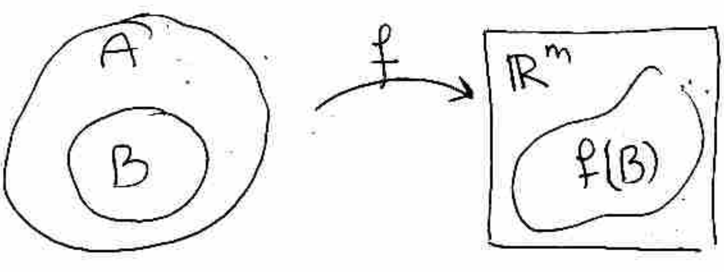


$$a+x \longmapsto f(a)+D_f(a)x$$

מה קורה כשהדרגה של הנגזרת מלאה? אז סביבה של a עוברת לסביבה של $f(a)$, אבל איכשהו באופן אינטואיטיבי יש לנו הרגשה שאם הדרגה לא מלאה אז יהיו כיוונים שלא נוכל להגיע אליהם...

משפט ההעתקה הפתוחה

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. $f\in C^1(A,\mathbb{R}^m)$, $m\le n$
לכל $x\in A$ מתקיים $\operatorname{rank} D_f(x)=m$.
אז f העתקה פתוחה, כלומר לכל $B\subseteq A$ פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$, $f(B)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}^m$.



אנטי-דוגמה 8

$Df(x) = 2x$ $\quad f: x \longmapsto x^2$ $\quad m=n=1$

$A=\mathbb{R}$

$$\operatorname{rank} Df(x) = \begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

אבל f אינה פתוחה משום ש- $f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$

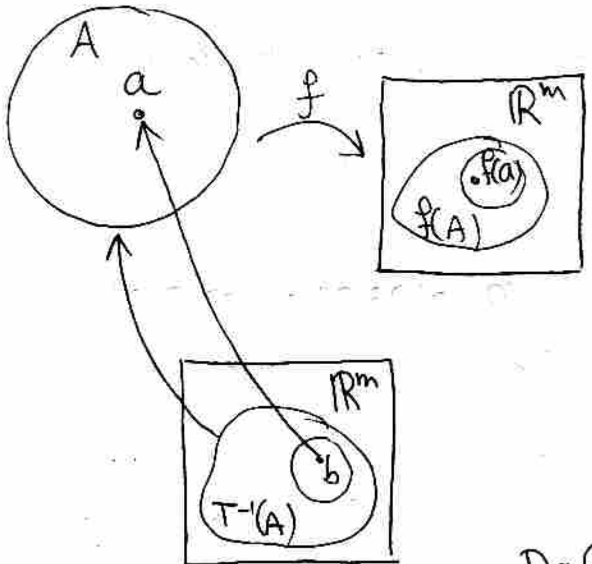
$\mathbb{R}$ פתוחה, $[0,\infty)$ אינה פתוחה

<u>הוכחת המשפט:</u> צריך להראות שלכל B פתוחה אם $a\in B$ אז $f(a)$ נקודה פנימית של $f(B)$.

זה נובע באופן ישיר מהלמה הבאה:

<u>למה:</u> $A\subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $f\in C^1(A,\mathbb{R}^m)$, $a\in A$ $\operatorname{rank} Df(a)=m$ אז $f(a)$ נקודה פנימית של $f(A)$.

<u>הוכחה:</u>



ראינו שאם $\operatorname{rank} Df(a) = m$

אז קיים אופרטור $T\in Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$

כך ש- $Df(a)\cdot T$ הפיך.

תהא $b\in T^{-1}(A)$ כך ש- $T(b)=a$.

נגדיר $g: T^{-1}(A)\to \mathbb{R}^m$ ע"י

$$g(x) = f(Tx)$$

$$Dg(b) = Df(Tb)\cdot T = Df(a)\,T$$

$$\Rightarrow J_g(b) \neq 0$$

ממשפט הפונקציה ההפוכה קיימות סביבות פתוחות של b ושל $f(a)$ כך ש- g חח"ע ועל ביניהן.

U זו הסביבה של b. אז $T(U)\subseteq A$ ולכן $\underbrace{f(T(U))}_{g(U)} \subseteq f(A)$

<u>תיקון להוכחה:</u>

$\operatorname{rank} Df(a) = m \Leftarrow$ קיים T כך ש- $Df(a)\cdot T$

הפיכה. נגדיר $S(x) = a + Tx$ $\quad S:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

נתבונן בקבוצה $S^{-1}(A)$ שמכילה את הראשית כי $S(0)=a$

נגדיר $g(x) = f(S(x)) =$

$= f(a+Tx)$

ואז $Dg(0) = Df(S(0))\cdot T = Df(a)\cdot T$

ומכאן ממשיכים כמו קודם.

<u>משפט הפונקציות הסתומות</u>

<u>דוגמאות:</u>

(1) $f(y,x) = y^5 x + \sin(\ln \frac{x}{y}) = 0$

משוואה אחת בשני נעלמים מגדירה פונקציה $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(תנו לי x ואני אתן את ה- y המתאים)

(2) באופן כללי $f_1(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m) = 0$

$\vdots$

$f_n(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m) = 0$

אלה n משוואות ב- $n+m$ נעלמים $f:\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$

וזה מגדיר באופן סתום פונקציה $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

(נותנים לה את ה-x-ים והיא מחזירה את ה-y-ים,

כי אז זה n משוואות ב- n נעלמים).

<u>משפט:</u> $A \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה $f \in C^1(B\times A, \mathbb{R}^n)$

$(b,a) \in B\times A$ כך ש- $f(b,a) = 0$! $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(b,a)$ מטריצה הפיכה.

אז קיימת סביבה U ב- $B\times A$ של (b,a) וקיימת סביבה

V ב- A של a וקיימת פונקציה $g \in C^1(V, B)$ כך ש-

$\forall (y,x)\in U \quad f(y,x) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$

__הוכחה:__

נגדיר $F: B\times A \to \mathbb{R}^{n+m}$ ע"י $F(y,x) = (f(y,x), x)$

ואז $F(b,a) = (0,a)$

אז

$$D_F(b,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J_F(b,a) = 1\cdots 1\cdot \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(b,a)\right) \neq 0$$

ממשפט הפונקציה ההפוכה קיימת סביבה U של (b,a)

וסביבה W של $(0,a)$ כך שההעתקה

$$F:(y,x) \longmapsto (f(x,y), x)$$

חח"ע, הפיכה ! - $F^{-1}: W \to U$ גזירה ברציפות.

ברור שההפכית נראית כך:

$$F^{-1}(z,x) = (h(z,x), x)$$

כאשר $h: W \to B$

אבל F^{-1} דיפרנציאבילית, לכן h דיפרנציאבילית.

נגדיר $V = \{x\in A : (0,x)\in W\}$

ונגדיר $g(x) = h(0,x)$

$$\begin{aligned} (y,x)\in U \;\; f(y,x)=0 &\iff (y,x)\in U \;\; F(y,x) = (0,x) \\ &\iff (0,x)\in W \;\; (y,x) = F^{-1}(0,x) \\ &\iff x\in V \;\; h(0,x) = y \\ &\iff x\in V \;\; y = g(x) \end{aligned}$$

וזה מה שהיה להוכיח

(65) 10.1.06
איפי'

משפט הפונקציות הסתומות

יש n משוואות ב- $n+m$ נעלמים.
ונניח נקודה ב- $\mathbb{R}^{n+m}$ שבה המשוואות מתקיימות ומתקיים
תנאי של הפיכות מטריצה של (נגזרות חלקיות)
$\Leftarrow$ n המשוואות מגדירות באופן מקומי העתקה
גזירה $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

אפריורי לא יודעים מהם ה-x-ים ומהם ה-y-ים. יש לנו
חופש לבחור אותם, אבל המטריצה צריכה להסתדר.

<u>דוגמה:</u>
$$\begin{cases} x^3 y t^3 + ytz + 3y^2 - 5 = 0 \\ z^3 + xt^2 - 2 = 0 \end{cases}$$
אלה שתי משוואות ב-4 נעלמים (x,y,z,t)
המשוואות מתקיימות ב- $x=y=z=t=1$.

נכתוב את המשוואות מחדש בשפה של המשפט.
$$f_1(x_1,x_2,y_1,y_2) = x_1^3 x_2 y_2^3 + x_2 y_2 y_1 + 3x_2^2 - 5 = 0$$
$$f_2(x_1,x_2,y_1,y_2) = y_1^3 + x_1 y_2^2 - 2 = 0$$

מעניין אותנו אם המטריצה הזאת סינגולרית:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} x_2 y_2 & 3x_1^3 x_2 y_2^2 + x_2 y_1 \\ 3y_1^2 & 2x_1 y_2 \end{pmatrix}(1,1,1,1) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -10$ $\Leftarrow$ המטריצה רגולרית
$\Leftarrow$ אפשר להשתמש במשפט.

קיימות שתי פונקציות $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך שבסביבה של $(1,1,1,1)$ מתקיים

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,y_1,y_2) &= 0 \\ f_2(x_1,x_2,y_1,y_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1,x_2) \\ y_2 &= g_2(x_1,x_2) \end{aligned}$$

* אם לפונקציה סביבה נתונה

זה משפט של קיום! הוא לא אומר לנו איך לחשב את הפונקציות האלו*! בתרגיל אנחנו נראה שאפשר לחשב את הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה הזאת אנליטית!

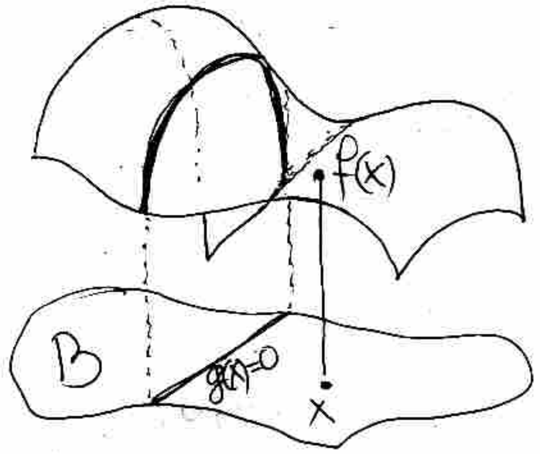
ו- g גזירה ברציפות בסביבה של $(1,1)$.

אפיון נקודות קיצון בעזרת כופלי לגרנז'

<u>מוטיבציה</u>: $B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ו $f\in C^1(B,\mathbb{R})$

ונניח $g_1,\dots,g_k\in C^1(B,\mathbb{R})$ כאשר $k+1\le n$.

נגדיר -



$$A=\{x\in B : g_i(x)=0\ \forall 1\le i\le k\}$$

(בהחלט יכול להיות ש- $A=\emptyset$).

<u>המטרה שלנו</u>: למצוא נקודות קיצון של $f|_A$.

דוגמה טריוויאלית: יש פונקציה מ- $\mathbb{R}^3$ ל- $\mathbb{R}$ ואנחנו רוצים למצוא את המקסימום שלה על שפת כדור. אז נשתמש ב- $g(\vec{x})=x^2+y^2+z^2-R^2$

דוגמה יותר קשורה למציאות: פונקציה הסתברותית על מרחב בן n איברים היא וקטור n ממדי של מספרים אי שליליים שסכומם 1. התחום שבו אנחנו חיים הוא $B=\{p\in\mathbb{R}^n : p_i\ge 0\}$

(66)

הסתברותנים משום מה (נראה) מתעניינים באיזו פונקציה שהם רוצים למקסם. האנתרופיה –

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

אנחנו רוצים למקסם את $H(p)$ תחת האילוץ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

כלומר במקרה זה $A = \{p \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$

$$\Downarrow$$

$$g(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i - 1$$

<u>משפט</u>: $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(B, \mathbb{R})$

כאשר $k+1 \leq n$. $A = \{x \in B : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$

אם a נקודת של $f|_A$ אז הדרגה של המטריצה

קיימת סביבה $V \subseteq B$ של a כך ש- $f(a) \geq \sup_{x \in V \cap A} f(x)$

$$\begin{array}{c} \\ k+1 \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right. (a) \\ \underbrace{\hphantom{\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n}}}_{n} \end{array}$$

הוא לכל היותר k (כלומר למטריצה הנו אין דרגה מלאה).

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שהדרגה היא $k+1$ (יותר לא יכול להיות כי $k+1 \leq n$). נתבונן בפונקציה $F: B \to \mathbb{R}^{k+1}$ שמוגדרת ע"י

$$F(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$$

הנחת השלילה היא בעצם - $D_F(a)$ דרגה מלאה. $\Leftarrow$

מה שמאפשר להפעיל את משפט ההעתקה הפתוחה (ו

שקיימת סביבה U של a כך ש- $\binom{0}{f(a)}$ נקודה פנימית
של $F(U)$ ו- a נקודת מקסימום שם.
$\Leftarrow$ יש סביבה של הנקודה הנ"ל שמוכלת ב- $F(U)$.
ב נקודה מהצורה $\binom{0}{t}$ כאשר $t>f(a)$ לא יכולה להיות
נקודה פנימית של $F(U)$ כי $f(a)$ מקסימום.
וזו סתירה!

מסקנה: אם $Dg_1(a),\dots,Dg_k(a)$ הם בלתי תלויים לינארית)
אז קיימים k מספרים ממשיים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ כך ש-

$$Df(a)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i Dg_i(a)$$

כופלי לגרנז'

$$\left.\begin{aligned} Df(a) &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i Dg_i(a)\\ g_1(a)&=0\\ &\vdots\\ g_k(a)&=0 \end{aligned}\right\}$$

$n+k$ משוואות
עבור $n+k$
נעלמים.

דוגמה: רוצים למקסם את $H(p)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i$
תחת האילוץ $g(p)=\sum_{i=1}^{n}p_i-1=0$.

$$D_H(p)=-(1+\log p_1,\ \dots,\ 1+\log p_n)$$

$$Dg(p)=(1,\ \dots,\ 1)$$

מחפשים $a=(a_1,\dots,a_n)$ ו- λ כך ש-

$$D_H(a)=\lambda\cdot Dg(a)$$

כלומר לכל $1\le i\le n$ $\quad -(1+\log a_i)=\lambda\cdot 1$
וגם $\sum_{i=1}^{n}a_i-1=0$

והדבר הזה פתיר.

$$-\log a_i = \lambda+1$$
$$\Rightarrow a_i = e^{-(1+\lambda)}$$

$$\Sigma a_i = 1 \Rightarrow a_i = \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \lambda = \log n - 1$$

אז התפלגות אחידה זו הסתברות שמקסמת את האנטרופיה.

<u>דוגמה:</u> $B=\{x\in\mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdots x_n$$
$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = x_1+\dots+x_n - 1$$

$$Df(x) = (x_2\dots x_n, x_1x_3\dots x_n, \dots, x_1x_2\dots x_{n-1})$$
$$Dg(x) = (1,\dots,1)$$

$\Leftarrow$ לכל $1\leq i\leq n$ $\prod_{j\neq i} x_j = \lambda$

$\Leftarrow$ כל ה-x_i-ים שווים, ולכן $\Sigma x_i = 1$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{n}$$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{n^n} = f(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$ זה המקסימום

של הקבוצה שהצגנו שלה. (טכנית צריך להוכיח את זה, אבל במקרה הזה, זה ברור)

כלומר $\frac{1}{n^n} \geq x_1\dots x_n$

לכל $0\leq x_i$ כך ש- $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

יהיו עכשיו $\{y_i\}$ מספרים חיוביים. נגדיר $x_i = \frac{y_i}{\sum_j y_j}$

עכשיו $x_i \geq 0$, $\Sigma x_i = 1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{n^n} \geq \frac{y_1\cdot y_2 \cdots y_n}{(\sum_j y_j)^n}$$

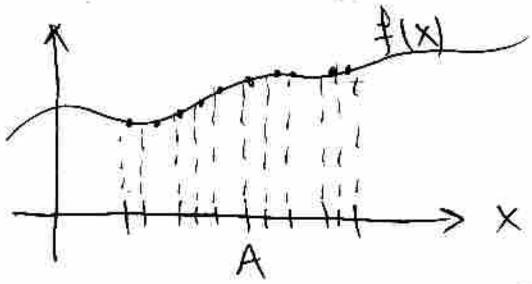
$$\Rightarrow \frac{\Sigma y_i}{n} \geq \sqrt[n]{y_1y_2\dots y_n}$$

אי שוויון הממוצעים!!

אינטגרציה ב- $\mathbb{R}^n$

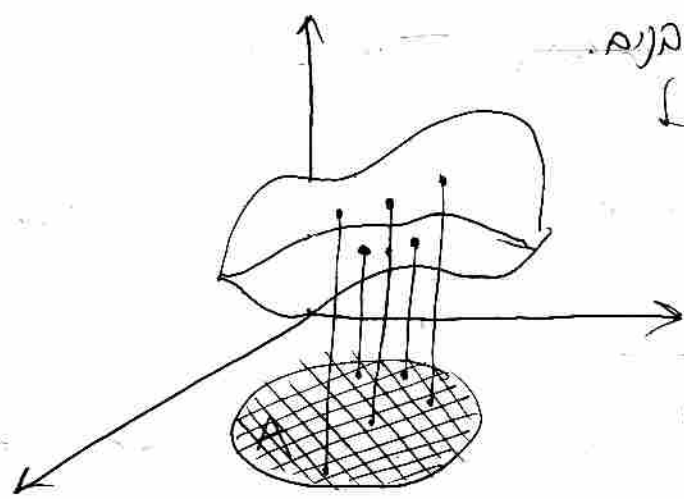
$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ו- $A\subseteq\mathbb{R}^n$. אנו רוצים לתת משמעות ל- $\int_A f(x)dx$.

נזכר מה היה לנו באינפי 2:



$$\int f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i$$

מתבקש להכליל את ההגדרה הנ"ל ל- $\mathbb{R}^n$.

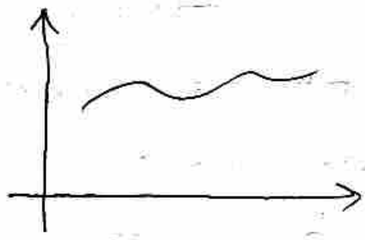


נחלק את A למלבנים.
נחבר את הערכים של f על המלבנים האלה.
נעדן את החלוקה ונקווה שמה שיוצא יש לו גבול

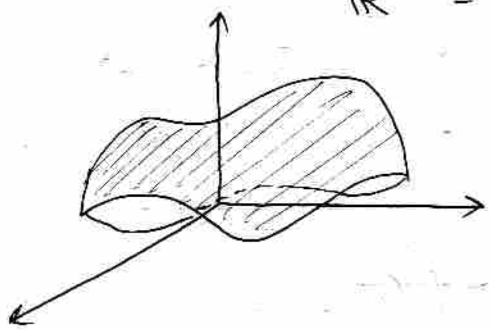
68 16.1.07
אינפי'

הרשימות של רז מופיעות באתר שלו
www.math.huji.ac.il\~razk
ניתן לשלוח לו אי מיילים עם הערות

נרחיב את מושג הגרדיאנט.
פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קל לנו לדמיין. יש ציר ה-x
ולכל נקודה מתאימה נקודה על ציר ה-y.



גם פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אנחנו יכולים לדמיין בקלות
יחסית כמשטחים ב-$\mathbb{R}^3$



אם $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ אז $Df(x)\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

$$Df(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

וזו הה העתקה הלינארית אפשר להפעיל על וקטורים

$$Df(x)y=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

אבל אפשר גם לכתוב את זה ככה:

$$Df(x)y=\langle\nabla f(x),y\rangle$$

כאשר $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}$.

תרגישו שאנחנו מסתכלים על הגרדיאנט כוקטור ולא כפונקציונל

אנחנו יכולים לשאול את עצמנו כל מיני שאלות.

- את הכיוון שבו f משתנה הכי מהר? כלומר מהו וקטור היחידה $\hat{y}$ שממקסם את

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\hat{y})-f(x)}{h} = Df(x)\hat{y} = \langle \nabla f(x), \hat{y} \rangle$$

וכמובן $\hat{y}$ שממקסם את זה הוא $\hat{y}$ כך ש $\nabla f(x) \parallel \hat{y}$

$\hat{y} = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ (בהנחה ש $\nabla f(x) \neq 0$).

אז הגרדיאנט של פונקציה בנקודה הוא וקטור שכיוונו בכיוון השינוי המקסימלי של הפונקציה.

נגדיר $M_f^\perp(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x), y \rangle = 0\}$ –

זה תת מרחב $(n-1)$-ממדי של $\mathbb{R}^n$.

ידוע שבכל נקודה x יש כיוון אחד שבו הפונקציה משתנה מקסימלית אבל בתת המרחב הניצב לו אז מקירוב מסדר ראשון הפונקציה לא משתנה.

נניח שיש לנו שתי פונקציות $f,g \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. $n \geq 3$.

נניח שיש לנו $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש $\nabla f(x) \neq 0$, $\nabla g(x) \neq 0$.

נסתכל על התת מרחבים

$$M_f^\perp(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) \perp y\}$$
$$M_g^\perp(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla g(x) \perp y\}$$

אם $M_f^\perp(x) \neq M_g^\perp(x)$ אז $M_f^\perp(x) \cap M_g^\perp(x)$ הוא מרחב $(n-2)$-ממדי

זהו מרחב ההזזות שלאורכן (מסדר ראשון) גם f וגם g אין משתנות.

* לא משתנה מסדר ראשון (פירושו) $\frac{f(x+y)-f(x)}{\|y\|} \to 0$

אם $y \in M_f^\perp(x) \cap M_g^\perp(x)$ אז לכל $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y \perp \lambda_1 \nabla f(x) + \lambda_2 \nabla g(x)$$

נרחיב את הנגזרת השנייה.
מה לה נגזרת ראשונה? זוהי פונקציה $Df: \mathbb{R}^n \to Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$
כך שמתקיים

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - Df(x)y}{\|y\|} = 0$$

אם f רציפה אז מתקיים

$$Df(x)y = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hy) - f(x)}{h}$$

נאמר ש-f גזירה פעמיים ב-x אם Df גזירה ב-x.
כלומר קיימת העתקה $D^2f \in Hom(\mathbb{R}^n, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$
כך ש-

$$\lim_{y\to 0} \frac{Df(x+y) - Df(x) - D^2f(x)y}{\|y\|} = 0$$

זה נראה בדרך מוזר אבל אין פה שום בעיה. Df היא פונקציה בין שני מרחבים וקטוריים אז אנחנו יכולים לגזור אותה בדיוק כמו פונקציה אחרת. ובאותו אופן כמו קודם אפשר לכתוב

$$D^2f(x)y = \lim_{h\to 0} \frac{Df(x+hy) - Df(x)}{h}$$

$D^2f(x)y$ היא העתקה לינארית. אפשר להפעיל אותה על וקטורים. לכל $z \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$D^2f(x)yz = \lim_{h\to 0} \frac{Df(x+hy)z - Df(x)z}{h}$$

$$\Rightarrow D^2f(x)e_ie_j = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+he_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

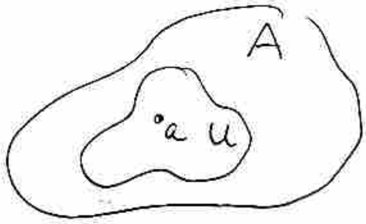
$$\Rightarrow D^2f(x)yz = \sum_{i,j=1}^{n} y_i z_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

במקרה ש $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$ נקרא ההסיאן Hessian של f.
$\nabla\nabla f(x)$

נרחיב על נקודות קיצון.

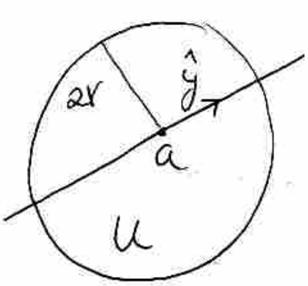
משמעות לפתר של נקודות קיצון השוות של הפונקציה צריך להיות קבוצה סגורה. אז נרחיב את הדיון שלנו לפונקציות ממשיות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

<u>הגדרה:</u> $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. $a\in A$ נקראת נקודת מקסימום מקומית אם קיימת סביבה פתוחה U של a כך ש- $f(a)=\sup_{x\in U} f(x)$



<u>טענה:</u> אם $a\in A$ נקודת מקסימום אז $Df(a)=0$.

<u>הוכחה:</u> צריך להראות שלכל $y\in\mathbb{R}^n$ $Df(a)y=0$. ינבע מכך ש- $Df(a)$ הוא אופרטור האפס.



קיים רדיוס $B_0(a,2r)$ בו f מקבלת מקסימום ב- a. לכל וקטור יחידה $\hat{y}$ נגדיר פונקציה $g:I\to\mathbb{R}$ כך:

$$g(t)=f(a+(2t-1)r\hat{y})$$

$g(t)$ מקבלת מקסימום ב- $\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $g'(\frac{1}{2})=0$. אבל

$$g'(\tfrac{1}{2})=Df(a)\cdot(2r\hat{y})$$

$\Leftarrow$ לכל וקטור יחידה $\hat{y}$ מתקיים $Df(a)\hat{y}=0$.

$\Leftarrow$ $Df(a)=0$.

<u>הגדרה:</u> מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ נקראת מוגדרת חיובית אם לכל $x\in\mathbb{R}^n$ $\langle x,Ax\rangle\geq 0$ עם שוויון אמ"מ $x=0$.

A נקראת מוגדרת חיובית למחצה (באופן החלש) אם ייתכן שוויון גם עבור $x\neq 0$.

באופן אנלוגי מגדירים מטריצה מוגדרת שלילית ומוגדרת שלילית למחצה.

משפט: $f\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (i) a נקודת מקסימום של f
אז $Df(a)=0$ ו- $D^2f(a)$ מטריצה מוגדרת
שלילית במובן חלש.
(ii) אם $Df(a)=0$ ו- $D^2f(a)$ שלילית במובן חזק
אז a נקודת מקסימום.

הוכחה:

(ii) משפט טיילור מספר לנו ש-

$$f(a+y)=f(a)+\underbrace{Df(a)}_{=0}y+\frac{1}{2}\underbrace{D^2f(a+\theta y)yy}_{\langle y,\nabla\nabla f(a+\theta y)y\rangle}$$

כלומר $f(a+y)=f(a)+\frac{1}{2}\langle y,D^2f(a+\theta y)y\rangle$

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $z\in B_0(0,\delta)$

$\|D^2f(a+z)-D^2f(a)\|<\varepsilon$ (לפי הרציפות)

יהי $y\in B_0(0,\delta)$. לכל $\hat{z}$ מתקיים

$$\langle\hat{z},D^2f(a+\theta y)\hat{z}\rangle=$$
$$=\langle\hat{z},D^2f(a)\hat{z}\rangle+\langle\hat{z},[D^2f(a+\theta y)-D^2f(a)]\hat{z}\rangle\le$$
$$\le\langle\hat{z},[D^2f(a+\theta y)-D^2f(a)]\hat{z}\rangle=$$
$$<\|\hat{z}\|\|D^2f(a+\theta y)-D^2f(a)\|\|\hat{z}\|\le\varepsilon$$

כי המחובר
הראשון שלילי
קושי שוורץ

אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $y\in B_0(0,\delta)$ אז

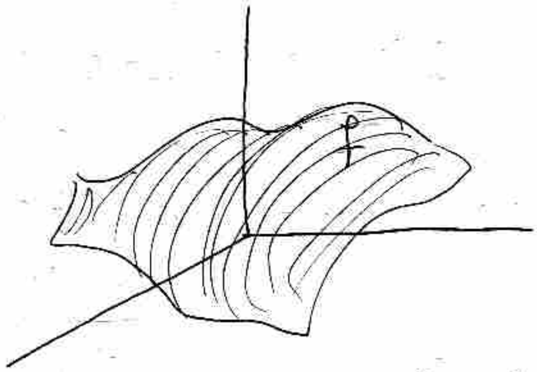
$$\left\langle\frac{y}{\|y\|},D^2f(a+\theta y)\frac{y}{\|y\|}\right\rangle<\varepsilon$$

(i) כבר הוכחנו ש- $Df(a)=0$. את החלק השני. ~~אז~~ נוכיח
בצורה דומה. יש לנו את $g(t)=f(a+(2t-1)r\hat{y})$.
מקסימום של $g(t)$ $\Leftarrow$ $g''(1/2)\le 0$.
אבל $g''(\frac{1}{2})=4r^2\langle\hat{y},D^2f(a)\hat{y}\rangle$
$\Leftarrow$ קיבלנו את מה שרצינו.

$$g'(t)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+(2t-1)r\hat{y})\cdot 2r\hat{y}_i$$
$$\Rightarrow g''(t)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+(2t-1)r\hat{y})\,2r\hat{y}_i\cdot 2r\hat{y}_j$$

כופלי לגרנז'.

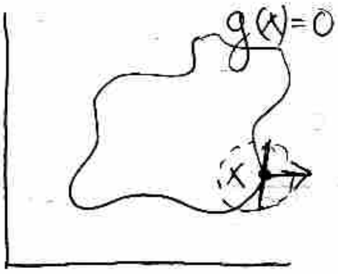
$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



אם מחפשים סתם נקודות קיצון
אז אנחנו יודעים מה לעשות -
מחפשים את מאפסים ואז בודקים
נגזרת שנייה וכן הלאה.

אבל אנחנו רוצים לחפש נקודות קיצון על
תת יריעה של $\mathbb{R}^n$ שבה מתקיים $\{x\in\mathbb{R}^n: g_1(x)=\dots=g_k(x)=0\}$

במקרה של $\mathbb{R}^2$ יהיה רק אילוץ אחד.



אנחנו רוצים שבכיוון שבו g לא משתנה
יש ל-f מקסימום.
אנחנו רוצים שלכל y כך ש $Dg(x)y=0$
יתקיים גם $Df(x)y=0$. שזה
אומר שקיים λ כך ש- $\nabla f(x)=\lambda\nabla g(x)$.

במקרים יותר כלליים אנחנו רוצים שאם $Dg_1(x)=\dots=Dg_k(x)=0$
אז $Df(x)=0$.
וזה יקרה רק אם $\nabla f(x)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla g_i(x)$

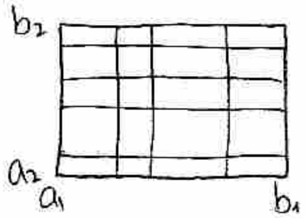
(71) 17.01.07
אינפי'

אינטגרציה ב- $\mathbb{R}^n$

<u>הגדרה:</u> <u>תיבה</u> ב- $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה מהצורה $A=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$
כאשר לכל $1\le i\le n$ $b_i>a_i$.

<u>נפח של</u> תיבה הוא $V(A)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

<u>חלוקה של</u> תיבה, P, היא חלוקה של כל אחד מהקטעים $[a_i,b_i]$
$a_i=t_i^0<t_i^1<\dots<t_i^{m_i}=b_i$



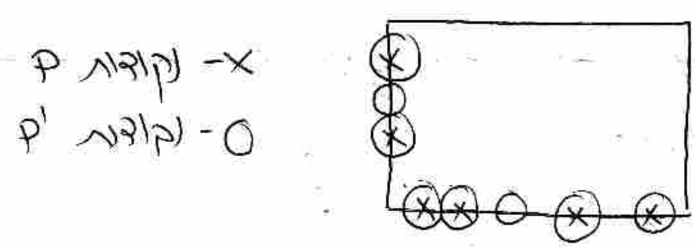
חלוקה P משרה על התיבה A חלוקה לתת-תיבות
$1\le i_j\le m_j$ $C_{i_1,\dots,i_n}\equiv[t_1^{i_1-1},t_1^{i_1}]\times\dots\times[t_n^{i_n-1},t_n^{i_n}]$
ברור שמתקיים $V(A)=\sum_{i_1,\dots,i_n}V(C_{i_1,\dots,i_n})$

נניח שיש $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. תהא P חלוקה של A המשרה חלוקה לתת תיבות $A_1,\dots,A_r$. מתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{r}A_i$.
נשים לב שאלה לאו תת תיבות זרות. הן סגורות ולחלק מהן יש שפה משותפת.

לכל תיבה A_j נגדיר $m_j=\inf_{x\in A_j}f(x)$, $M_j=\sup_{x\in A_j}f(x)$ (הם סופיים משום ש- f חסומה.)

נגדיר $s(f,P)=\sum_{j=1}^{r}m_jV(A_j)$ = הסכום התחתון של f ביחס לחלוקה P.
$S(f,P)=\sum_{j=1}^{r}M_jV(A_j)$ = הסכום העליון של f ביחס לחלוקה P.

אם P חלוקה של A, P' תיקרא <u>עידון</u> של P אם נקודות החלוקה של P' מכילות את נקודות החלוקה של P.



טענה (מונוטוניות): אם P' עידון של P אז

$$s(f,P) \le s(f,P') \le S(f,P') \le S(f,P)$$

(מי שזה לא מובן מאליו שיוכיח).

מסקנה מיידית: לכל שתי חלוקות P, P' $\quad s(f,P) \le S(f,P')$

הוכחה: ניקח עידון P'' של שתיהן והשאר ברור. ☺

נגדיר את האינטגרל התחתון של f מעל A:

$$\underline{\int}_A f(x)\,dx = \sup\{ s(f,P) : P \text{ חלוקה של } A\}$$

הסופרמום הזה סופי משום שהקבוצה חסומה ע"י כל אחד מהסכומים העליונים.

האינטגרל העליון של f מעל A:

$$\overline{\int}_A f(x)\,dx = \inf\{ S(f,P) : P \text{ חלוקה של } A\}$$

האינפימום הזה סופי משום שהקבוצה חסומה ע"י כל אחד מהסכומים התחתונים.

הגדרה: f תיקרא אינטגרבילית רימן על A אם $\underline{\int}_A f(x)dx = \overline{\int}_A f(x)dx$
ונסמן ערך משותף זה ב- $\int_A f(x)\,dx$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $f,g : A \to \mathbb{R}$ חסומות ואינטגרביליות. אז

(i) $f+g$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_A (f+g)dx = \int_A f dx + \int_A g dx$

(ii) לכל $c \in \mathbb{R}$ $\; c\cdot f$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_A (c\cdot f)dx = c\int_A f dx$

(iii) הפונקציה הקבועה 1 אינטגרבילית ו- $\int_A 1\,dx = V(A)$

(iv) אם $f(x) \ge 0$ לכל x אז $\int_A f dx \ge 0$.

הוכחה (הראשונה היא הטענה הלא טריוויאלית)

(i) לכל חלוקה P $\quad \inf_{x\in A_j}(f+g)(x) \ge \inf_{x\in A_j} f(x) + \inf_{x\in A_j} g(x)$.

$$\Rightarrow s(f,P) + s(g,P) \le s(f+g,P) \le S(f+g,P) \le S(f,P) + S(g,P)$$

$$\Rightarrow \underline{\int}_A f dx + \underline{\int}_A g(x)dx \le \underline{\int}_A (f+g)\,dx$$

$$\overline{\int}_A (f+g)dx \le \overline{\int}_A f dx + \overline{\int}_A g dx$$

אבל ההנחה ש- f,g אינטגרביליות ומכאן הטענה.

(ii) אם $c>0$ אז לכל P מתקיים

$$s(cf,P) \le cs(f,P)$$
$$S(cf,P) \le cS(f,P)$$

וממשיכים כמו קודם.

אם $c<0$ פשוט הכיוונים מתהפכים

$$s(cf,P) = cS(f,P)$$
$$S(cf,P) = cs(f,P)$$

$$\Rightarrow \sup_P s(cf,P) = \sup_P cS(f,P) = c\cdot\inf_P S(f,P)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_A}(cf)dx = c\overline{\int_A} f dx$$
$$\overline{\int_A}(cf)dx = c\underline{\int_A} f dx$$

(iii),(iv) - אותו דבר. ☺

<u>מסקנה:</u> אם $f(x)\le g(x)$ אז $\int_A f dx \le \int_A g(x)$

(אם שתיהן אינטגרביליות)

<u>הוכחה:</u> $\int_A f dx = \int_A[(f-g)+g]dx = \int_A g dx + \int_A (f-g)dx =$

$$= \int_A g dx - \underbrace{\int_A (g-f)dx}_{0\le g-f} \le \int_A g dx$$

☺

<u>מסקנה:</u> אם $|f(x)|\le M$ אינטגרבילית אז $\left|\int_A f(x)dx\right| \le M V(A)$

<u>הוכחה:</u> לפי הנתון $f(x)\le M$ $\Leftarrow$ $\int_A f dx \le \int_A M dx = M\cdot\int_A 1 dx =$

$$= MV(A)$$

אגף שני: $-M \le f(x)$ $\Leftarrow$ $\int_A f(x)dx \ge \int_A(-M)dx = -MV(A)$

$\Leftarrow$ $\left|\int_A f(x)dx\right| \le MV(A)$

☺

אז $\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f dx + \int_B f dx$

<u>טענה:</u> A,B תיבות רק ש- $A\cup B$ תיבה ו $A^\circ\cap B^\circ=\emptyset$

<u>הוכחה:</u> יהיו P_A, P_B חלוקות של A, B בהתאמה.

ניתן לבנות חלוקה P של $A\cup B$ המכילה את כל נקודות החלוקה של P_A ו- P_B רק ש- $A\cap P$ עידון של P_A ו $B\cap P$ עידון של P_B.

$$s(f, P_A) \le s(f, P\cap A)$$
$$S(f, P_B) \le S(f, P\cap B)$$
$$\Rightarrow s(f|_A, P_A) + s(f|_B, P_B) \le s(f,P) \le S(f,P) \le$$
$$\le S(f|_A, P_A) + S(f|_B, P_B)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_A} f dx + \underline{\int_B} f dx \le \sup_{P_A,P_B} s(f,P) \le \inf_{P_A,P_B} S(f,P) \le \overline{\int_A} f dx + \overline{\int_B} f dx$$

ומהנחה ש- f אינטגרבילית על A ועל B בנפרד מתקבל שוויון.

☺

__משפט__: $f: A \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אז f אינטגרבילית רימן.

__הוכחה__: מכיוון ש- A קומפקטית f חסומה ורציפה במידה שווה.

מהגדרה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $\|x-y\| < \delta$ אז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

נבחר חלוקה P כך שהקוטר* של כל תת תיבה A_j הוא לכל היותר δ.

$\Leftarrow$ לכל j $M_j - m_j \le \varepsilon$. $\Leftarrow$

* $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum (M_j - m_j) V(A_j) \le \varepsilon V(A)$$

$$\Rightarrow \inf_Q S(f,Q) \le S(f,P) \le s(f,P) + \varepsilon V(A) \le \sup_Q s(f,Q) + \varepsilon V(A)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_A} f dx \le \overline{\int_A} f dx \le \underline{\int_A} f dx + \varepsilon V(A)$$

וזה נכון לכל ε לכן יש שוויון.

☺

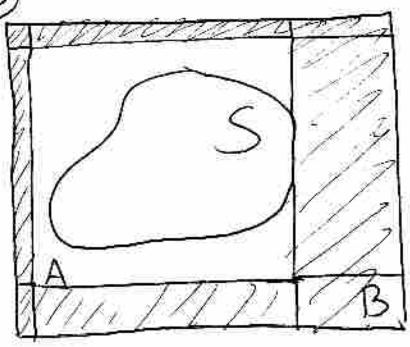
__משפט לבג__ Lebesgue: f חסומה אינטגרבילית רימן אמ"מ קבוצת נקודות אי הרציפות שלה בעלת מידה אפס.

(ללא הוכחה, למרות שהוא לא מאוד מסובך ומופיע בספר).

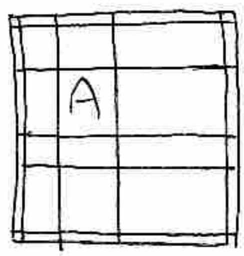
__הגדרה__: קבוצה חסומה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא בעלת נפח אם קיימת תיבה $S \subseteq A$ כך שהאינטגרל $V_A(S) = \int_A \chi_S dx$ (כאשר $\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x\in S \\ 0 & x\notin S\end{cases}$) קיים.

__הערה__: הגדרת הנפח של S אינה תלויה בבחירת A.

__הוכחה__: נניח $A \subseteq B$. (אחרת ניקח תיבה שמכילה את שתיהן ונקבל את מה שצריך מטרנזיטיביות השוויון).

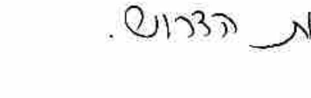


נחלק את B לתיבות כך ש-A היא אחת
מהתיבות שמתקבלות מהחלוקה.
(זה תמיד אפשרי).
האינטגרל על B שווה לסכום האינטגרלים
על התיבות שנוצרו.
הטענה היא שהאינטגרל על כל שאר התיבות (חוץ מ-A)
הוא אפס. וזה כמעט ברור, אלא שיכול להיות שהשפה של
S משותפת לכמה התיבות.
למה: $f:A\to\mathbb{R}$ חסומה. לכל $x\in A^\circ$ $f(x)=0$. אזי $\int_A f(x)dx=0$.
בהינתן ε נבחר שהחלוקה תהיה נקודות חלוקה
שנמצאות במרחק ε מהשפה.



אם הפונקציה חסומה אז התרומה של התיבות
שנוגעות בשפה לא יכולה להיות גדולה מדי.
(משאר התיבות כמובן מתקבל אפס כי יש בהן רק נקודות פנימיות).

הנפח של ה-$(n-1)$-מימדי של הדפנות הוא $F=a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(b_j-a_j)$



$$\varepsilon\cdot F\cdot\inf f\le s(f,P)$$
$$S(f,P)\le\varepsilon\cdot F\sup f$$

לכל ε

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה P כך ש- $-\varepsilon\le s(f,P)\le S(f,P)\le\varepsilon$
ניקח $\sup$ מצד שמאל ו- $\inf$ מצד ימין ונקבל את הדרוש.

(:

אינטגרל רימן

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה ותהי $f: A \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן חלוקה P של A הגדרנו סכום עליון וסכום תחתון

$$s(f,P)=\sum_{j=1}^{r} m_j V(A_j) \qquad S(f,P)=\sum_{j=1}^{r} M_j V(A_j)$$

כאשר $M_j=\sup_{x\in A_j} f(x)$ $\quad m_j=\inf_{x\in A_j} f(x)$

והגדרנו אינטגרל עליון ואינטגרל תחתון של הפונקציה

$$\overline{\int_A} f\,dx = \sup\{s(f,P) : P \text{ חלוקה}\}$$

$$\underline{\int_A} f\,dx = \inf\{S(f,P) : P \text{ חלוקה}\}$$

נאמר ש-f אינטגרבילית אם $\underline{\int_A} f dx=\overline{\int_A} f dx$.

ראינו שפונקציה רציפה היא אינטגרבילית רימן.

וכן ציינו את משפט לבג ללא הוכחה: אם f חסומה אז היא אינטגרבילית אמ"מ קבוצת נקודות אי הרציפות שלה הן ממידה 0.

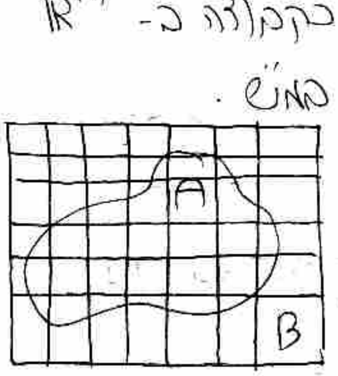
המסקנה היא שאם f,g אינטגרביליות אז $f\cdot g$ אינטגרבילית.

$S\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה נקראת בעלת נפח אם קיימת תיבה $S\subseteq A$ כך שהאינטגרל $V(S)=\int_A \chi_S\,dx$ כאשר $\chi_S(x)=\begin{cases}1 & x\in S\\ 0 & x\notin S\end{cases}$

עד כאן סיכום של השיעור הקודם.

<u>טענה:</u> תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית, ו-$f:A\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי לגרף של f $\{(x,f(x)) : x\in A\}$ יש מידה אפס כקבוצה ב-$\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>הוכחה:</u> f רציפה על קבוצה קומפקטית לכן רציפה במ"ש.



בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-

$$\|x-y\|\le\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\frac{\varepsilon}{V(B)}$$

תהי P חלוקה של B לתיבות (B_j) שקוטר כל אחת מהן קטן מ-δ. אזי

$$\{(x,f(x)) : x\in A\} \subseteq \bigcup_{B_j\cap A\neq\emptyset} B_j\times\left[\min_{x\in B_j\cap A} f(x),\ \max_{x\in B_j\cap A} f(x)\right]$$

סכום הנפחים $\le \sum_{B_j\cap A\neq\emptyset} V(B_j)\cdot\frac{\varepsilon}{V(B)} \le \frac{\varepsilon}{V(B)}\sum_{B_j} V(B_j) = \varepsilon$ אבל אכן

<u>הערה של נורית</u>: הטענה נכונה אם עבור פונקציה חסומה f שנקודות אי הרציפות שלה הן בקבוצה מידה אפס.

<u>הגדרה</u>: S קבוצה בעלת נפח. $f: S \to \mathbb{R}$. נאמר ש-f אינטגרבילית על S אם קיימת תיבה $S \subseteq A$ כך שהאינטגרל $\int_A f|_S \, dx$ קיים כאשר $f|_S = \begin{cases} f(x) & x \in S \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. במקרה זה נסמן את האינטגרל ב- $\int_S f\,dx$.

* צריך להוכיח שאם האינטגרל קיים עבור A מסויימת אז הוא קיים לכל תיבה המכילה את S והוא לא תלוי בבחירת התיבה.

<u>מסקנה</u>: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה. $f: A \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. $S \subseteq A$ בעלת נפח. אז $\int_S f\,dx$ קיים. מתקיים

$$\int_S f\,dx = \int_A f \cdot \chi_S \, dx$$

<u>טענה</u>: תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה בעלת נפח. ויהיו $B, C \subseteq A$ בעלות נפח. אזי

$$V(B \cup C) = V(B) + V(C) - V(B \cap C)$$

<u>הוכחה</u>: B, C בעלות נפח $\Leftarrow$ χ_B, χ_C אינטגרביליות על A. $\Leftarrow$ $\chi_B + \chi_C$, $\chi_B \cdot \chi_C$ אינטגרביליות על A.
$\Leftarrow$ $B \cap C$ בעלת נפח.

$$\chi_B + \chi_C - \chi_{B\cap C} = \chi_{B \cup C}$$

$$\Rightarrow \int_A \chi_{B\cup C}\,dx = \int_A \chi_B\,dx + \int_A \chi_C\,dx - \int_A \chi_{B\cap C}\,dx$$

<u>משפט Fubini</u>:

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות. $f: A \times B \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אזי

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_B \left[\overline{\int_A} f(x,y)\,dx \right] dy = \int_B \left[\underline{\int_A} f(x,y)\,dx \right] dy$$

<u>הערה</u>: אם לכל $y \in B$ $f(x,y)$ אינטגרבילית על A אז

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_B \left[\int_A f(x,y)\,dx \right] dy$$

כמובן גם אם ננסח באופן אנלוגי עבור שינוי סדר של A, B ו- x, y.

<u>הוכחה:</u> נתון ש-f אינטגרבילית על $A\times B$

⇐ קיימת חלוקה P כך ש- $S(f,P) - s(f,P) \le \varepsilon$.

P חלוקה של $A\times B$ היא מכפלה של חלוקות $P_A \times P_B$

P_B מחלקת את B לתת תיבות $B_1,\dots,B_r$. ו- P_A מחלקת ל- $A_1,\dots,A_k$

לכל $y\in B$ נגדיר

$$G(y) = \overline{\int_A} f(x,y)\,dx \qquad H(y) = \underline{\int_A} f(x,y)\,dx$$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} V(A_i\times B_j)\inf_{\substack{x\in A_i\\ y\in B_j}} f(x,y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} V(B_j)\sum_{i=1}^{k} V(A_i)\inf_{\substack{x\in A_i\\ y\in B_j}} f(x,y) \le$$

אי שוויון של סכום של אינפימה.

$$\le \sum_{j=1}^{r} V(B_j)\inf_{y\in B_j}\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{k} V(A_i)\inf_{x\in A_i} f(x,y)\right]}_{s(f(\cdot,y),P_A)} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{r} V(B_j)\inf_{y\in B_j} H(y) = s(H,P_B)$$

קיבלנו ש- $s(f,P) \le s(H,P_B)$ ובאותו אופן מראים ש-

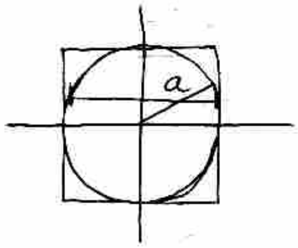
$S(f,P) \ge S(G,P_B)$. ⇐

$$\int_{A\times B} f\,dxdy - \varepsilon \le s(f,P) \le s(H,P_B) \le S(H,P_B) \le$$

$$\le S(G,P_B) \le S(f,P) \le \int_{A\times B} f\,dxdy + \varepsilon$$

מכיוון שזה נכון לכל $0<\varepsilon$ אז  של H מתקבל שהיא אינטגרבילית. אותו הדבר עושים ל- G וסיימנו.

דוגמה:



חישוב שטח של דסק ברדיוס a.

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a\}$$

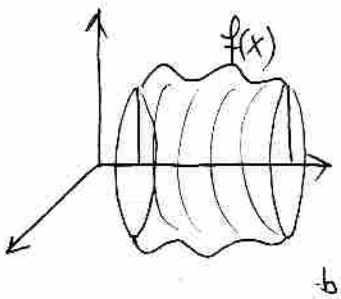
$$V(C)=\int_{[a,a]^2}\chi_C(x,y)\,dx\,dy=$$

פוביני $$=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-a}^{a}\chi_C(x,y)\,dx\right]dy$$

פיתגורס $$=\int_{-a}^{a}2\sqrt{a^2-y^2}\,dy \underset{\substack{y=a\sin\theta\\ dy=a\cos\theta\, d\theta}}{=} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot a\cos\theta\cdot d\theta=$$

$$=2a^2\cdot\tfrac{1}{2}\pi=\pi a^2$$

תרגיל: חישוב נפח של סיבוב body of revolution



$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underset{x\in[a,b]}{y^2+z^2\le f^2(x)}\right\}$$

$$V(C)=\int_{[a,b]\times[\ldots]}\chi_C\,dx\,dy\,dz=$$

פוביני $$=\int_a^b\Big[\underbrace{\int\chi_C(x,y,z)\,dy\,dz}_{\text{שטח של דיסק ברדיוס } |f(x)|}\Big]dx=\int_a^b\pi f^2(x)\,dx$$

המבחן - (ככ הנראה זה מה שיהיה)

3 חלקים -

א' - 2 מתוך 3

ב' - 2 מתוך 3

ג' - נכון / לא נכון + נימוק

משפטים - להבין את מעשי זו מוד כל מש"פ. צריך להבין מה קורה שם.

צריך לדעת (ו-כ-ל

לבנות את הסכומים של רימן.

לדעת לפתור את התרגילים.

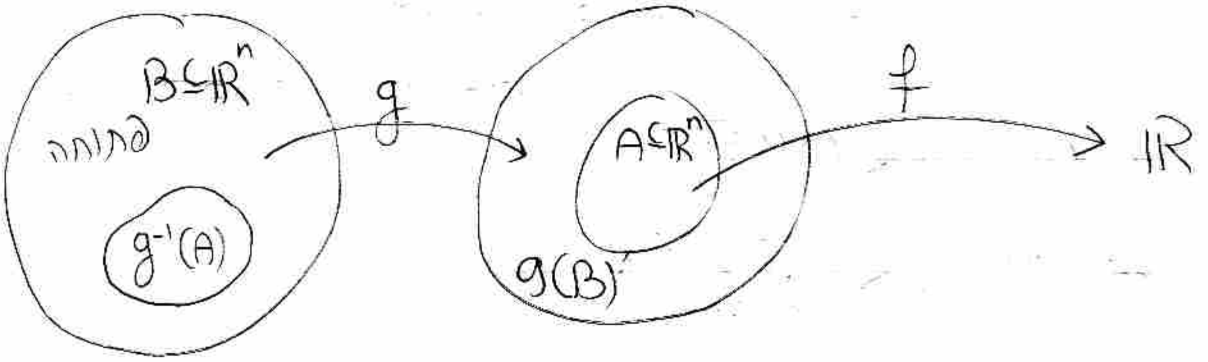
לאחר ההרצאות כל המודפס נכתבים במחברת אחת.

76 24.01.07
אינפי

* באתר של רז תופיע הודעה על שיעור חזרה.
* כשהוא יכתוב את המבחן הוא לא יסתכל על מבחנים של שנים קודמות. מהסתכלות קטנה הוא ימצא בדיוק את המבחן של שנה שעברה (כמו הקוף שמקליד את התנ"ך)

。 。 。

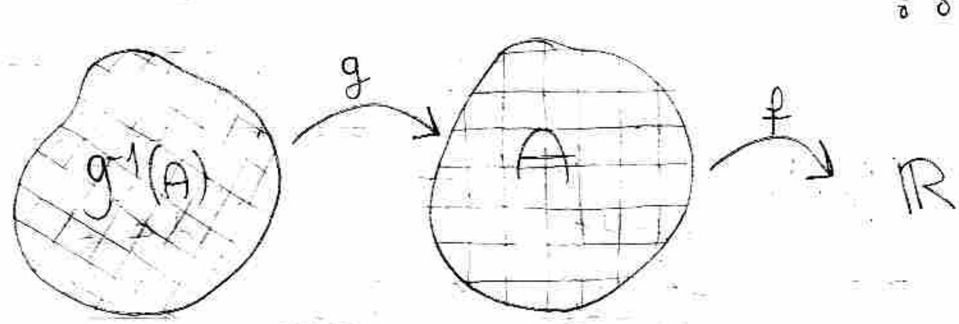
החלפת משתנים באינטגרציה רב-ממדית



f אינטגרבילית על A ו- g גזירה ברציפות וחח"ע וכן לכל $y \in B$ $J_g(y) \neq 0$. אזי

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(y))\,|J_g(y)|\,dy$$

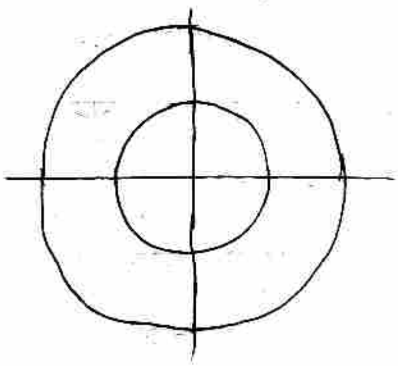
מה ???



$$\sum_j f(g(y_j))\,|J_g(y_j)|\,V(B_j) \qquad \sum_i f(x_i)\,V(A_i)$$

דוגמה:

$$f(x,y) = x^2+y^2 \qquad f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$A = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

$$\int_A f\,dx\,dy = ?$$

לפי מה שלמדנו עד כה צריך לחשב

$$\int_{-2}^{2}\left[\int_{-2}^{2}(x^2+y^2)\chi_A(x,y)\,dx\right]dy$$

זה פתיר אך מכוער להחריד!!!

נראה החלפת משתנים ובחירה מה דרך לעשות- להעביר לקואורדינטות פולריות.

$$g:\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$g^{-1}:\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2}\\ \arctan\frac{y}{x}\end{pmatrix}$$

$$g^{-1}(A) = \{(r,\theta) : 1 \le r \le 2\}$$

$$J_g(r,\theta) = \left|\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right| = r$$

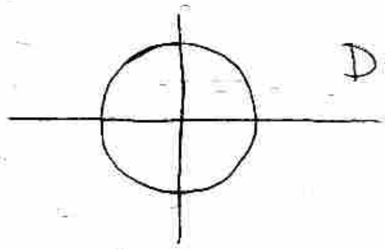
סומר $J_g(r,\theta)\neq 0$ לכמעט פרוגשית אמנם הינו מלאו
הכי לא מתחום האינטגרציה שלנו.
אז נותר רק לסכם:

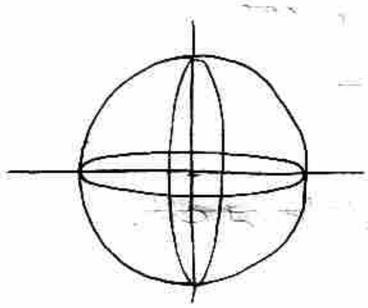
$$\int_{g^{-1}(A)} r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 r^3\,dr\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\theta = \frac{15\pi}{2}$$

חישוב נפח כדור

כדור חד ממדי D_1  נפחו 2

כדור דו ממדי D_2  נפחו π

כדור תלת-ממדי D_3  נפחו $\frac{4}{3}\pi$

היינו רוצים להמשיך ולחשב את הנפח של D_n לכל n.
נסמן ב- $V_n(a)$ את הנפח של הדיסקה ה- n ממדית ברדיוס a.

יודעים ש- $V_1(a)=2a,\quad V_2(a)=\pi a^2,\quad V_3(a)=\frac{4}{3}a^3$

קל להשתכנע שלכל $a\in\mathbb{R}$ $V_n(a)=V_n(1)\,a^n$
פשוט ניקח העתקה שמנפחת. היעקוביאן שלה יצא פי a^n.

אז נחשב -

$$D^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_1^2+\dots+x_n^2\le 1\}$$

$$\underbrace{V(D^n)}_{V_n(1)}=\int_{[-1,1]^n}\chi_{D^n}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=$$

$$\overset{\text{פוביני}}{=}\int_{[-1,1]}\underbrace{\left[\int_{[-1,1]^{n-1}}\chi_{D^n}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_{n-1}\right]}_{V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)=(1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}V_{n-1}(1)}dx_n$$

כי זו הכדור ב- $\mathbb{R}^{n-1}$ שבה
$x_1^2+\dots+x_{n-1}^2\le 1-x_n^2$
(כאשר x_n קבוע).

קיבלנו יחס רקורסיבי מעניין למדי

$$\frac{V_n(1)}{V_{n-1}(1)} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx$$

נותר רק לחשב את האינטגרל הזה.

נסמן $p_{n-1} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx$. תחת סימון זה:

$$V_n(1) = 2 p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$$

$$p_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n/2}\, dx \underset{x=\cos\theta}{=} + \int_0^{\pi} \sin^{n+1}\theta\, d\theta$$

$$p_0 = 2 \qquad p_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$p_n = \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) \sin^{n-1}\theta\, d\theta =$$

$$= p_{n-2} - \int_0^{\pi} \underbrace{[\sin^{n-1}\theta \cos\theta]}_{f'} \underbrace{\cos\theta}_{g}\, d\theta =$$

$$= p_{n-2} - \cancel{\frac{1}{n} \sin^{n}\theta \cos\theta \Big|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin^{n+1}\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow p_n = p_{n-2} - \frac{1}{n} p_n$$

$$\Rightarrow p_n \frac{n+1}{n} = p_{n-2} \Rightarrow \boxed{p_n = \frac{n}{n+1} p_{n-2}}$$

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \qquad V_3(1) = p_2 V_2(1) = \frac{4}{3}\pi$$

$$p_{2n} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$$

$$p_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}$$