① 23.10.06
ת. אינפי 3

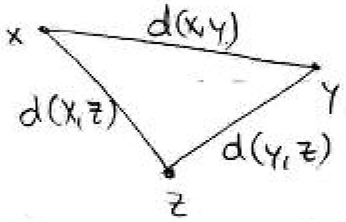
המתרגל - (היום רביע': עידו סמס)

המרצה - רז קופרמן והוא אדיר!
יהיה אתר ב- ושס וכל הדברים הפורמליים יהיו רשומים שם.
כל התרגילים והפתרונות יפורסמו באינטרנט. סיכומים יופיעו באינטרנט.

הפרק הראשון של הקורס נקרא מרחבים מטריים. נלמד היום קצת תאוריה ואז נפתור איזו דוגמה.

מרחבים מטריים

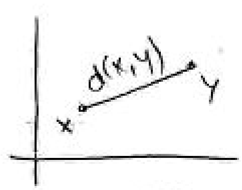
<u>הגדרה:</u> מרחב מטרי זה קבוצה X יחד עם פונקצית מרחק $d: X\times X \to \mathbb{R}$
($d(x,y)$ הוא המרחק בין x ל-y) שמקיימת את התכונות הבאות:
- סימטריות $d(x,y) = d(y,x)$
- חיוביות $0 \le d(x,y)$ ושוויון אמ"מ $x=y$
- אי שוויון המשולש $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$



<u>דוגמאות:</u>

① $\mathbb{R}$ עם הפונקציה $d(x,y) = |x-y|$

② $\mathbb{R}^2$ - $\mathbb{C}$ עם המטריקה (= פונק' מרחק) $d(x,y) = \|x-y\|$



$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

③ את דוגמה (2) ניתן להרחיב כמובן לכל מימד שהוא (וראינו את זה בעבר כבר באלגברה לינארית) - $\mathbb{R}^n$

אז המטריקה נקראת <u>המטריקה האוקלידית</u> והיא מוגדרת ע"י

$$d\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$\mathbb{R}^n$ יחד עם המטריקה האוקלידית נקרא <u>המרחב האוקלידי ה-n-ממדי:</u>

(4) כל קבוצה X יכולה להיות מרחב מטרי (באופן טריוויאלי) ע"י הגדרת <u>המטריקה הדיסקרטית:</u>

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$

בדיקה טריוויאלית מראה שזו אכן מטריקה.

(5) נסמן $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ - אוסף הסדרות של אפסים ואחדות

איבר ב-X הוא סדרה $\vec{a}=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כאשר $a_n\in\{0,1\}$

(נגדיר פונקציית מרחק $d(\vec{a},\vec{b})=2^{-\min\{i:\,a_i\neq b_i\}}$ אם $\vec{a}\neq\vec{b}$

מה זה??? עושים 2 בחזקת האינדקס המינימלי שעבורו איברי $\vec{a}$ ו-$\vec{b}$ שונים.

אם $\vec{a}=\vec{b}$ מגדירים $d(\vec{a},\vec{b})=0$.

המרחק הולך ונהיה קטן יותר ככל שהרישות של הסדרות מתלכדות.

האם זו אכן מטריקה?

- סימטריה ברורה כי הנוסחה סימטרית
- חיוביות גם כן ברורה מההגדרה
- אי שוויון המשולש: יהיו $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in X$. נראה ש-

$$d(\vec{a},\vec{c})\le d(\vec{a},\vec{b})+d(\vec{b},\vec{c})$$

אם שתיים מהנקודות שוות זה ברור לכן נניח שהנקודות שונות.

נסמן

$$m=\min\{i:\,a_i\neq c_i\}$$
$$n=\min\{i:\,a_i\neq b_i\}$$
$$k=\min\{i:\,b_i\neq c_i\}$$

אם בשלילה $d(\vec{a},\vec{c})>d(\vec{a},\vec{b})+d(\vec{b},\vec{c})$ אז מתקיים ש-

$d(\vec{a},\vec{c})>d(\vec{a},\vec{b})$ וגם $d(\vec{a},\vec{c})>d(\vec{b},\vec{c})$ כלומר $2^{-m}>2^{-n}$

וגם $2^{-m}>2^{-k}$. ולכן $m<n$ וגם $m<k$.

וכך אומר את הדבר הבא:

$$\boxed{\begin{matrix} a_1, \dots, a_{m-1}, \\ b_1, \dots, b_{m-1}, \\ c_1, \dots, c_{m-1}, \end{matrix}} \begin{matrix} a_m \\ b_m \\ c_m \end{matrix}$$

כל אלה שווים

אבל $m<n$ אזי $a_m = b_m$ ו- $m<k$ אזי $b_m = c_m$

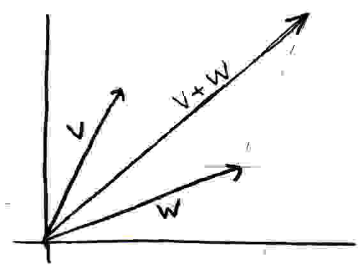
אבל זה סתירה להגדרה של m (בהיותו המינימלי רק ש- $a_i \neq c_i$. סתירה. ומכאן אי שוויון המשולש

$$d(\vec{a}, \vec{c}) \leq d(\vec{a}, \vec{b}) + d(\vec{b}, \vec{c})$$

$\Leftarrow$ $d(,)$ שהגדרנו הוא אכן מטריקה.

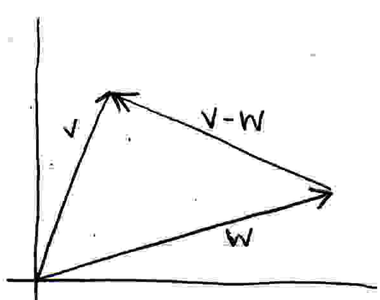
<u>הגדרה:</u> מרחב וקטורי (ממשי או מרוכב) V יחד עם פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המקיימת:

- חיוביות $\|v\| \geq 0$ ושוויון אמ"מ $v=0$.
- הומוגניות לכל סקלר α $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
- אי שוויון המשולש $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$



נקרא <u>מרחב נורמי</u>, ומסמנים $(V, \|\cdot\|)$

אם $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי אז הנוסחה $d(v,w) = \|v-w\|$ מגדירה מטריקה (וזה ממש קל להוכיח) על V והיא נקראת <u>המטריקה המושרית מהנורמה</u>.



הדוגמא שראינו של המרחב האוקלידי הוא בעצם דוגמא שמגיעה מהמרחב הנורמי $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

במרחב מטרי (X, d) מגדירים כדור סגור:

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x,y) \le r\}$$

מרכז הכדור

רדיוס הכדור

<u>דוגמאות:</u>

① אם (X,d) מרחב עם המטריקה הדיסקרטית אז

$$B(x, \tfrac{1}{2}) = \{x\}$$

$$B(x, 1) = X$$

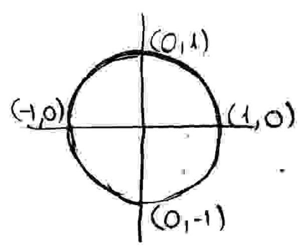
② במרחב הסדרות $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ עם המטריקה שהגדרנו אם $\vec{0} = 000\ldots$ אז

$$B(\vec{0}, 2^{-100}) = \{\text{אוסף הסדרות שמתחילות ב-99 אפסים}\}$$

אם $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי נסמן $B = B_1 = B(\vec{0}, 1)$

שזה בעצם $\{v \in V : \|v\| \le 1\}$ כדור היחידה.

למשל, כדור היחידה האוקלידי במישור נראה כך:



בשביל להבין נורמה במרחב כלשהו מספיק להבין איך נראה כדור היחידה כי שאר הווקטורים פשוט מתקבלים ע"י מתיחה (בהתאם להומוגניות).

בהינתן $\vec{0} \neq v \in V$ מתקיים $\left\|\frac{1}{\|v\|} v\right\| = \left|\frac{1}{\|v\|}\right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$

$\frac{v}{\|v\|}$ נקרא <u>הנרמול</u> של v. ואנחנו רואים שכדור היחידה קובע לחלוטין את הנורמה.

<u>תרגיל:</u> אפיינו את כל הקבוצות במישור $\mathbb{R}^2$ שהן כדור יחידה של איזשהי נורמה.

נגדיר משפחה של נורמות על $\mathbb{R}^n$ ונראה שהן באמת נורמות.

לכל $1 \le p < \infty$ ו- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

מגדירים גם $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\}$ (גם משאיפים את

p לאינסוף אז מתקבלת הנורמה $\|x\|_\infty$.

הוכחת תכונות הנורמה:

① חיוביות ברורה מההגדרה

② הומוגניות גם ברורה מההגדרה

③ הבעיה מתחילה באי שוויון המשולש. נחלק את זה למקרים.

עבור $p=1$: צריך להראות ש- $\|\vec{x}+\vec{y}\|_1 \le \|\vec{x}\|_1 + \|\vec{y}\|_1$

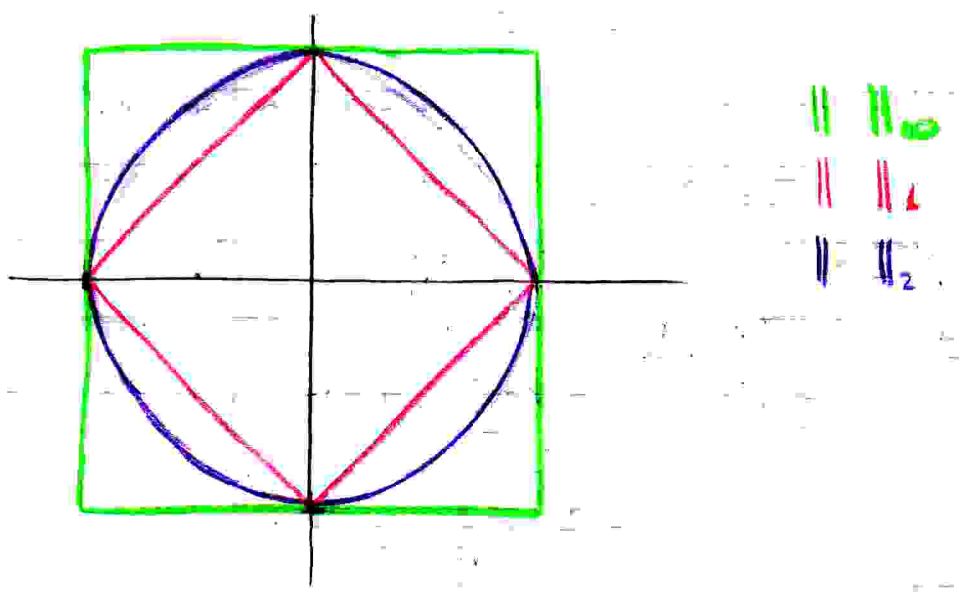
אבל זה ברור כי $\sum|x_i+y_i| \le \sum|x_i| + \sum|y_i| = \sum(|x_i|+|y_i|)$

ואי השוויון מתקיים מחובר מחובר

עבור $p=\infty$: צריך להראות ש- $\|\vec{x}+\vec{y}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_\infty + \|\vec{y}\|_\infty$

אבל זה ברור כי $\max\{|x_i+y_i|\} \le \max\{|x_i|+|y_i|\} \le \max\{|x_i|\}+\max\{|y_i|\}$

איך נראים כדורי היחידה במרחבים אלה? קל לראות שכך:



עכשיו נוכיח את אי שוויון המשולש עבור $\|\ \|_p$ עם $1<p<\infty$ בעזרת

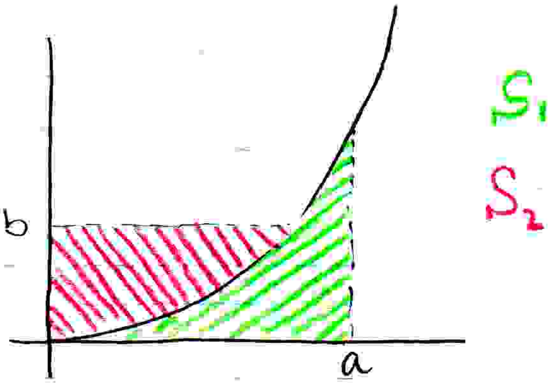
כמה אי שוויונים.

נגדיר $q = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{-1} = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$ ונקרא ל- q הצמוד של p. אז

מתקיים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

אי שוויון יאנג (Young): לכל $0\le a,b$ $\quad ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

הוכחה: נתבונן בגרף הפונקציה $y=x^{p-1}$



כמובן $ab \le S_1+S_2$

$$S_1=\int_0^a x^{p-1}dx=\frac{x^p}{p}\Big|_0^a=\frac{a^p}{p}$$

$$S_2=\int_0^b x^{\frac{1}{p-1}}dx=\left(\frac{1}{p-1}+1\right)^{-1}x^{\left(\frac{1}{p-1}+1\right)}\Big|_0^b=\frac{b^q}{q}$$

בשביל שנוח הנחנו שהגרף קמור אבל קל לראות שזה עובד גם במקרים אחרים

עכשיו נוכיח את אי-שוויון הולדר (Holder) האומר שאם $x_1,\dots,x_n$ ו- $y_1,\dots,y_n$ אי שליליים אז

$$(*)\qquad \sum x_iy_i \le \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum y_i^q\right)^{1/q}$$

וזה בדיוק אי שוויון קושי שוורץ כאשר $p=q=2$.

נשים ♡ שאגפי (*) הומוגניים לכפל בסקלר חיובי של כל אחד מהוקטורים $\vec{x},\vec{y}$. ננרמל את $\vec{x}$ ואת $\vec{y}$ (כלומר נכפול ב- $\frac{1}{\|x\|_p}$ וב- $\frac{1}{\|y\|_q}$).

כלומר $\tilde{y}=\frac{y}{\|y\|_q}$ ו- $\tilde{x}=\frac{x}{\|x\|_p}$ ומספיק שנוכיח $\sum \tilde{x}_i\tilde{y}_i\le 1$

כאשר ידוע ש- $\|\tilde{y}\|_q=\|\tilde{x}\|_p=1$. (כלומר $x=\tilde{x}$ ו- $y=\tilde{y}$. ואז

$$\sum x_iy_i \underset{\text{יאנג}}{\le} \sum\left(\frac{x_i^p}{p}+\frac{y_i^q}{q}\right)=\frac{1}{p}\underbrace{\sum x_i^p}_{1}+\frac{1}{q}\underbrace{\sum y_i^p}_{1}=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\underset{\text{כי הם צמודים}}{=}1$$

כעת נוכיח את אי שוויון המשולש (אי שוויון מינקובסקי) מתוך אי שוויון הולדר:

$$\|x+y\|_p^p=\sum|x_i+y_i|^p\le\sum(|x_i|+|y_i|)|x_i+y_i|^{p-1}=\sum|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\underset{\text{הולדר}}{\le}\left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\|x+y\|_p^{p-1}$$

נחלק הכל ב- $\|x+y\|_p^{p-1}$ ונקבל את הדרוש.

(4) 30.10.06
ת. אינפי

הגדרה: $U\subseteq X$ תקרא הקבוצה פתוחה אם לכל $x\in U$ ישנו $r>0$ שעבורו $B_0(x,r)\subseteq U$

קבוצה $F\subseteq X$ נקראת סגורה אם $\{x\in X : x\notin F\} = F^c$ קבוצה פתוחה

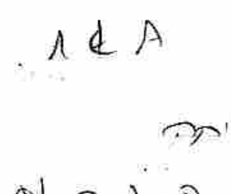
הוכחנו בכיתה: $F\subseteq X$ סגורה אמ"מ לכל סדרה x_n של איברים ב-F אם קיים x כך ש- $\lim x_n = x$ אז $x\in F$

חשוב להדגיש שהמושגים "פתוחה" ו"סגורה" אינם הפכיים.

דוגמאות:
1) ישנן קבוצות שהן גם פתוחות וגם סגורות למשל X, $\emptyset$.
2) $X=\mathbb{R}$ עם המטריקה הרגילה ; $A=[0,1)$
הקבוצה A אינה פתוחה כי לא קיים $r>0$ כך ש- $B_0(0,r)\subseteq A$
והיא גם לא סגורה כי למשל $1-\frac{1}{n}\longrightarrow 1$ אבל $1\notin A$.
3) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ אינה פתוחה ואינה סגורה - ראינו בכיתה
4) אם X מרחב דיסקרטי אז כל קבוצה בו היא גם פתוחה וגם סגורה (ראינו בכיתה)

תרגיל: מצאו קבוצה צפופה ופתוחה ב-$\mathbb{R}$ (ביטול של התרגיל: פשוט מדי)

דוגמא: $U=(0,1)\times(0,1)\subseteq\mathbb{R}^2$ ו-$\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית הרגילה. U קבוצה פתוחה.



הוכחה: נבחר $x=(a,b)\in U$ מתקיים $a,b\in(0,1)$
לכן ישנו $\varepsilon>0$ שעבורו $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq(0,1)$
$(b-\varepsilon,b+\varepsilon)\subseteq(0,1)$
לכן $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\times(b-\varepsilon,b+\varepsilon)\subseteq U$.
לכן $B(x,\varepsilon)\subseteq U$. למה? עבור $y=(y_1,y_2)\in B_0(x,\varepsilon)$ מתקיים
$\sqrt{(a-y_1)^2+(b-y_2)^2}<\varepsilon$ בפרט $|y_1-a|<\varepsilon,\ |y_2-b|<\varepsilon \Leftarrow (y_1,y_2)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\times(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$

דוגמה:

נקודה $\{x\}$ במרחב מטרי (X,d) היא קבוצה סגורה.
טוב, זה די ברור, כי כל סדרה שמכילה רק את x כמובן, מתכנסת ל-x ולכן היא סגורה.
אפשר גם להוכיח ש-$U=X\setminus\{x\}$ היא קבוצה פתוחה:
נבחר $y\in U$ ונסמן $0<r=\frac{d(x,y)}{2}$ ואז $B(y,r)\subseteq U$
כי x איננו בכדור הזה. $\Leftarrow$ כל קבוצה סופית סגורה (כאיחוד של יחידונים) היא סגורה.

שימו ♡ שהיינו צריכים לומר "U פתוחה ב-X" ולא סתם "U פתוחה" (וכנ"ל לסגורה).
אם (X,d) מרחב מטרי ו- $Y\subseteq X$ אז (Y,d) הוא גם מרחב מטרי. אם $U\subseteq Y$ אפשר לשאול 2 שאלות:
- האם U פתוחה ב (X,d)?
- האם U פתוחה ב- (Y,d)?

התשובה ממש לא מוכרחה להיות!

דוגמאות: $X=\mathbb{R}$, $Y=[0,1)$. אז $U=Y$ פתוחה וסגורה ב-Y אבל לא פתוחה ולא סגורה ב-X.

עוד דוגמה: $X=\mathbb{R}^2$ ו- $Y=\mathbb{R}\times\{0\}$ - ציר ה-X. המטריקה המושרית של Y היא המטריקה הרגילה של $\mathbb{R}$ תחת הזיהוי המתבקש בין Y ל-$\mathbb{R}$: $x\longmapsto(x,0)$, ואז

$$d((x,0),(y,0))=\sqrt{(x-y)^2-(0-0)^2}=|x-y|$$

נסמן $A=(0,1)\times\{0\}\subseteq Y$. $A\subseteq Y$ פתוחה ב-Y אבל $A\subseteq X$ לא פתוחה ולא סגורה.

דוגמה: $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{Q}$. $A=(e,\pi)\cap Y$. $A\subseteq Y$ פתוחה וסגורה ב- A. למה? פתוחה מאחר והיא חיתוך של פתוחה ב X עם Y. סגורה כי ב-Y: $A^c=(-\infty,e)\cup(\pi,\infty)$ ואז מאותו שיקול

אזי A איננה פתוחה ב-X כי כל כדור בתוך R מכיל מספרים אי רציונליים כי למשל $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ אי רציונלי לכל n,m שלמים זרים.

הערה: ישנה סדרה q_n שאיבריה הם כל המספרים הרציונליים. (המספרים הממשיים לעומת זאת, אינם בני מניה)

כמו כן, A לא סגורה כי למשל ניתן לבחור סדרת רציונליים מ-A המתכנסת ל-π, והרי $\pi \in X\setminus A$.

פנים, סגור ושפה

(X,d) מרחב מטרי ו- $A\subseteq X$ נגדיר:

$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A\subseteq C \\ C \text{ סגורה ב-}X}} C$ הסגור של A

הערה: $\bar{A}$ סגורה ב-X $\Leftarrow$ $\bar{A}$ היא הסגורה הכי קטנה שמכילה את A.

$A^{\circ} = \bigcup_{\substack{A\supseteq C \\ C \text{ פתוחה ב-}X}} C$ הפנים של A

הערה: A° היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-A.

$\partial A = \bar{A}\setminus A^{\circ}$ השפה של A

<u>דוגמא:</u> $A=(0,1]\subseteq \mathbb{R}$ אז

$\bar{A}=[0,1]$

$A^{\circ}=(0,1)$

$\partial A=\{0,1\}$

אם $A\subseteq X$ קבוצה פתוחה וסגורה אז $\bar{A}=A$, $A^{\circ}=A$

אז $\partial A=\emptyset$.

האם הכיוון ההפוך נכון? אם $\partial A=\emptyset$ אז $A^{\circ}\subseteq A\subseteq \bar{A}$.
אבל $\partial A=\emptyset$ $\Leftarrow$ $\bar{A}=A^{\circ}$ $\Leftarrow$ $A=A^{\circ}=\bar{A}$ ולכן A גם פתוחה וגם סגורה.

דוגמה $Y=\mathbb{Q}$, $A=\{x\in Y: e\le x\le \pi\}$. ראינו ש- $A^\circ=\bar{A}=A$

$\Leftarrow$ השפה של A ב-Y ריקה.

לעומת זאת אם נחשב את השפה בתוך $X=\mathbb{R}$ נקבל:

$\bar{A}=[e,\pi]$, $A^\circ=\emptyset$

$\Leftarrow$ $\partial A=\bar{A}=[e,\pi]$

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי ויהיו $A,B\subseteq X$. אזי $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$

הוכחה: $A\cap B\subset A,B$

$\Leftarrow$ $\overline{A\cap B}\subset\bar{A},\bar{B}$

משתמשים רק ש- $E\subset F \Leftarrow \bar{E}\subset\bar{F}$ ☺

הכיוון ההפוך לא בהכרח נכון:

$A=[0,1)$, $B=(1,2]$

$\bar{A}=[0,1]$ $\bar{B}=[1,2]$

$A\cap B=\emptyset \Rightarrow \overline{A\cap B}=\emptyset$

אבל $\bar{A}\cap\bar{B}=\{1\}$

עוד דוגמה: בתוך $\mathbb{R}$: $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

אז $\bar{A}=\mathbb{R}$, $\bar{B}=\mathbb{R}$ ואז

$\bar{A}\cap\bar{B}=\mathbb{R}\neq\overline{A\cap B}=\emptyset$

אפיון של $\bar{A}$: $\bar{A}$ הוא כל הנקודות x שקיימת עבורן סדרה $x_n\in A$ שמתכנסת ל-x.

טענה: $x\in\partial A$ אמ"מ כל כדור מסביב ל-x חותך גם את A וגם את A^c.

הוכחה: $x\in\partial A=\bar{A}\setminus A^\circ$. אז בהינתן $r>0$ נסמן ב-B_r את הכדור הפתוח ברדיוס r מסביב ל-x. B_r חותך את A כי ישנה סדרה $x_n\in A$ המתכנסת ל-x ולכן החל מ-n מסוים x_n יהיו קרובים ל-x עד כדי $\frac{r}{2}$ ולכן $x_n\in B_r\cap A$, בפרט $B_r\cap A\neq\emptyset$.

מצד שני, $x\notin A^\circ$, כלומר הכדור B_r לא יכול להיות מוכל ב-A, כלומר חותך את A^c.

בכיוון השני, נניח שכל כדור פתוח B_r מסביב ל-x חותך את A ואת A^c וצריך להוכיח ש- $x\in\bar{A}$ וש- $x\notin A^\circ$.
זה ש- $x\in\bar{A}$ זה קל. ניקח כדורים שהולכים וקטנים וניקח מהם $x_n\in B_{\frac{1}{n}}\cap A$ ואז $x_n\to x$! $x\in\bar{A}$.
מדוע $x\notin A^\circ$ אם $x\in A^\circ$ אז היה כדור פתוח B_r ש- $B_r\subset A$ בסתירה להנחה ש- B_r חותך את A^c. ☺

<u>טענה</u>: $B_0(x,r)\subseteq B^\circ(x,r)$ (אין שוויון!!)
<u>הוכחה</u>: $B_0(x,r)$ קבוצה פתוחה המוכלת ב- $B(x,r)$
ולכן מהגדרה מוכלת בפנים $B^\circ(x,r)$. ☺

מדוע לא חייב להיות שוויון? (X,d) מרחב דיסקרטי ואז

$$B_0(x,1)=\{x\}$$
$$B(x,1)=X$$
$$\Rightarrow B^\circ(x,1)=B(x,1)=X$$

<u>טענה</u>: $\overline{B_0(x,r)}\subset B(x,r)$
<u>הוכחה</u>: הכדור הסגור קבוצה סגורה המכילה את הכדור הפתוח. ולכן מהגדרה מכילה גם את הסגור $\overline{B_0(x,r)}$. ☺

מדוע לא חייב להיות שוויון? (X,d) מרחב דיסקרטי ואז

$$\overline{B_0(x,1)}=\overline{\{x\}}=\{x\}$$
אבל:
$$B(x,1)=X.$$

הערה: במרחבים נורמיים לא יכולה להתרחש התופעה הנ"ל בגלל שאנחנו לא יכולים להגדיל את הרדיוס מבלי להכניס ~~נוספות~~ נקודות נוספות. במרחבים נורמיים תמיד יש שוויונים בהכלות הנ"ל.

(4) 6.11.06
ת. אינפי'

נתונים מרחבים מטריים קומפקטיים $\{(X_n,\rho_n)\}_{n=1}^{\infty}$. בתרגול הראשון ראינו כיצד אפשר להגדיר מטריקה על מרחב המכפלה.

נניח שלכל $x,y\in X_n$ $\rho_n(x,y)\le 1$ (אפשר להניח את זה כי אחרת אפשר להכפיל בסקלר)

$$X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:x_n\in X_n\}$$

$$\rho\left((x_n),(y_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\rho_n(x_n,y_n)$$

זו מטריקה שנותנת משקל למרחקים בין קואורדינטות - לקואורדינטות הראשונות יותר משקל מאשר לאחרות.

הראנו בתרגיל שסדרה $X\ni\{\vec{X}^{(k)}\}=\{x_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה המתכנסת לאיבר $\vec{y}=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ אמ"מ לכל n מתקיים $x_n^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}y_n$

__טענה__: (X,ρ) מרחב מטרי קומפקטי.
(כלומר - מכפלה של מרחבים קומפקטיים היא קומפקטית).

__הוכחה__: נקח סדרה עם איבר כללי $\vec{X}^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ ונמצא לה תת סדרה מתכנסת.

לשם הנוחות נרשום את איברי הסדרה:

$$\begin{aligned}
\vec{X}^{(1)}&=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},\dots,x_n^{(1)},x_{n+1}^{(1)},\dots\\
\vec{X}^{(2)}&=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)},\dots x_n^{(2)},x_{n+1}^{(2)},\dots\\
&\vdots\\
\vec{X}^{(n)}&=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},x_3^{(n)},\dots,x_n^{(n)},x_{n+1}^{(n)},\dots
\end{aligned}$$

כאן מטריצה אינסופית של איברים שם האיברים בעמודה ה-i שייכים במרחב הקומפקטי X_i.

מאחר שהם נוסים קומפקטיים בכל עמודה אפשר למצוא תת סדרה מתכנסת בכל אחד מהם. אבל זה לא מספיק טוב, אנחנו רוצים שכולם יתכנסו.

נמצא סדרת טבעיים עולה $\{k_{1,m}\}_{m=1}^{\infty}$ שעבורה העמודה הראשונה מתכנסת, כלומר הסדרה $\{x_1^{(k_{1,m})}\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת לאיזה $y_1\in X_1$. אפשר לעשות את זה בגלל ש-X_1 מרחב קומפקטי.

נרשום מחדש את הסדרה שלנו:

$$\vec{X}^{(k_{1,1})} = X_1^{(k_{1,1})}, X_2^{(k_{1,1})}, \dots, X_n^{(k_{1,1})}, \dots$$
$$\vec{X}^{(k_{1,2})} = X_1^{(k_{1,2})}, X_2^{(k_{1,2})}, \dots, X_n^{(k_{1,2})}, \dots$$
$$\vdots$$
$$\vec{X}^{(k_{1,m})} = X_1^{(k_{1,m})}, X_2^{(k_{1,m})}, \dots, X_n^{(k_{1,m})}, \dots$$

כעת מהקומפקטיות של X_2 נמצא ל- $k_{1,m}$ תת סדרה $\{k_{2,m}\}_{m=1}^{\infty}$ שעבורה הסדרה $\{X_2^{(k_{2,m})}\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת לאיזה $y_2 \in X_2$.

נמשיך בתהליך ונמצא לכל n טבעי סדרת טבעיים $\{k_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ שעבורן מתקיים:

(1) $\{k_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ הינה תת סדרה של $\{k_{n-1,m}\}_{m=1}^{\infty}$

(2) הסדרה $\{X_n^{(k_{n,m})}\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת ב- X_n לאיזו נקודה y_n.

(מה שמאפשר לנו למצוא כאלה סדרות הוא העובדה שלכל $n \in \mathbb{N}$ X_n קומפקטי).

נרשום את המידע שיש לנו במטריצה אינסופית באופן הבא:

$$\begin{matrix}
\vec{X}^{(k_{1,1})} & \vec{X}^{(k_{2,1})} & \cdots & \vec{X}^{(k_{n,1})} & \cdots \\
\vec{X}^{(k_{1,2})} & \vec{X}^{(k_{2,2})} & \cdots & \vec{X}^{(k_{n,2})} & \cdots \\
\vec{X}^{(k_{1,3})} & \vec{X}^{(k_{2,3})} & \cdots & \vec{X}^{(k_{n,3})} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
\vec{X}^{(k_{1,n})} & \vec{X}^{(k_{2,n})} & \cdots & \vec{X}^{(k_{n,n})} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{matrix}$$

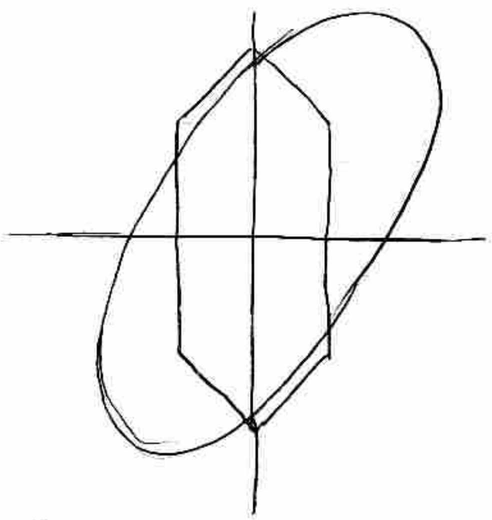
כל שורה i כאן היא תת סדרה של השורה שמעליה ו- i הקואורדינטות הראשונות מתכנסות.

הסדרה $(k_{1,1}, k_{2,2}, \dots, k_{m,m})$ היא סדרה עולה של טבעיים. $\Leftarrow$ $\{\vec{X}^{(k_{m,m})}\}$ היא תת סדרה של הסדרה המקורית $\{\vec{X}_n^{(k)}\}$ וטענו ש- $\vec{X}^{(k_{m,m})} \to \vec{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$.

(8)

עבור n כלשהו נתבונן ברכיבים ה-n-יים של $\vec{X}^{(k_{m,m})}$, כלומר בסדרה $\{X_n^{(k_{m,m})}\}_{m=1}^{\infty}$. מתקיים ש-$\{X_n^{(k_{m,m})}\}_{m=n}^{\infty}$ תת סדרה של $\{X_n^{(k_{n,m})}\}_{m=1}^{\infty}$ ובנינו את $\{k_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ בצורה כזו (תכונה (ב)) שיתקיים $X_n^{(k_{n,m})} \xrightarrow[m\to\infty]{} y_n$ וסיימנו. ☺

עכשיו המטרה שלנו תהיה להראות שיש קשר מאוד הדוק בין כל הנורמות שאפשר להגדיר על $\mathbb{R}^n$. הן לא בהכרח שוות אבל הן שקולות. מה זה אומר? הכי נראה מהגדרה מטריקה אז אנחנו נטען שהסדרות המתכנסות הן אותן סדרות מתכנסות, לא משנה איזו נורמה נבחר.



ברור שאפשר לכווץ את האליפסה כך שהצורה האחרת תחסום אותה ולהפך

<u>טענה</u>: אם $\|\ \|_*$, $\|\ \|_\star$ נורמות על $\mathbb{R}^n$ אז קיימים קבועים $0<a,b$ שעבורם

$$bB_{\|\ \|_\star}(0,1) \subseteq B_{\|\ \|_*}(0,1) \subseteq aB_{\|\ \|_\star}(0,1)$$

<u>רדוקציה</u>: מספיק להוכיח את הטענה עבור $\|\cdot\|_\star = \|\ \|_1$ $\quad$ ($\|x\|_1 = \sum^n |x_i|$)

<u>הוכחת הרדוקציה</u>: נניח שהראינו כי קיימים a_1,b_1, a_2,b_2 עבורם

$b_1 B_{\|\ \|_\star}(0,1) \subseteq B_{\|\ \|_1}(0,1) \subseteq a_1 B_{\|\ \|_\star}(0,1)$ וגם

$b_2 B_{\|\ \|_*}(0,1) \subseteq B_{\|\ \|_1}(0,1) \subseteq a_2 B_{\|\ \|_*}(0,1)$.

נסמן $B_* = B_{\|\ \|_*}(0,1)$, $B_\star = B_{\|\ \|_\star}(0,1)$, $B_1 = B_{\|\ \|_1}(0,1)$

ואז נקבל: $B_* \subseteq \frac{1}{b_2} B_1 \subseteq \underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{a=} B_\star$.

ובאופן דומה מראים קיים b שעבורו $bB_\star \subseteq B_*$.

<u>הוכחת הטענה</u>: נתונה נורמה $\|\ \|_*$ על $\mathbb{R}^n$ וצריך למצוא α, β שעבורם $\beta B_1 \subseteq B_* \subseteq \alpha B_1$. נסמן $e_i = (0,\dots,\underset{i}{1},\dots,0)$

בכיוון אחד: נבחר $x=(x_1\dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ ואז

$$\|x\|_* = \|\sum x_i e_i\|_* \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|e_i\|_* \le \max_{1\le i\le n} \|e_i\|_* \sum |x_i| = M\cdot \|x\|_1$$

אם $\|x\|_1 \le 1$ כלומר $x \in B_1$ אז $\|x\|_* \le M\|x\|_1 \le M$

ולכן $x \in MB_*$, כלומר $B_1 \subseteq MB_*$ או

$\frac{1}{M}B_1 \subseteq B_*$. אז $\beta = \frac{1}{M}$.

הכיוון השני יותר מסובך.

<u>טענות עזר:</u>

(1) הפונקציה $\|\ \|_* : (\mathbb{R}^n, \|\ \|_*) \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה.

<u>הוכחה:</u> אם $x_n \to x$, אז $\|x_n - x\|_* \to 0$ ולכן

מאי-שוויון המשולש $\big|\|x_n\|_* - \|x\|_*\big| \le \|x_n - x\|_* \longrightarrow 0$ ☺

(2) נסמן $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ S^1 קבוצה קומפקטית
במטריקה $\|\ \|_1$.

<u>הוכחה:</u> תזכרו של ההוכחה מהכיתה ותראו שגם במטריקה
המושרית ע"י $\|\ \|_1$ הקבוצות הקומפקטיות הן בדיוק סגורות
וחסומות. ברור ש-S^1 סגורה וחסומה.

(3) העתקת הזהות $Id : (\mathbb{R}^n, \|\ \|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\ \|_*)$ היא רציפה.

<u>הוכחה:</u> אותו.

נחזור להוכחת הטענה המקורית: היה חסר לנו למצוא את α.
ידוע שתמונה רציפה של קומפקטי (יוכח בהרצאה).
לכן מטענות עזר 2, 3 נקבל ש-S^1 קומפקטית
גם ביחס ל-$\|\ \|_*$.

לפי טענה 1 הפונקציה $\|\ \|_* : S^1 \to \mathbb{R}$ היא רציפה ולכן
יש לה מינימום (פונקציה רציפה של מרחב קומפ' $f : K \to \mathbb{R}$
מקבלת מינ' ומקס') $\Leftarrow$ ישנו ε שעבורו $\|x\|_* \ge \varepsilon$ לכל
$x \in S^1$. מכאן שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ $\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_* \ge \varepsilon$.

$\Leftarrow$ $\|x\|_* \ge \varepsilon\|x\|_1$, כלומר אם $\|x\|_* \le 1$ אז $\|x\|_1 \le \frac{1}{\varepsilon}$

$\Leftarrow$ $B_* \subseteq \frac{1}{\varepsilon}B_1$ מש"ל ☺

(9) 13.11.06
ת. אינפי

בשיעור הזה יש פרק D זוג מרחבים מטריים
X,Y ואת המטריקות שלהם נסמן באות d.

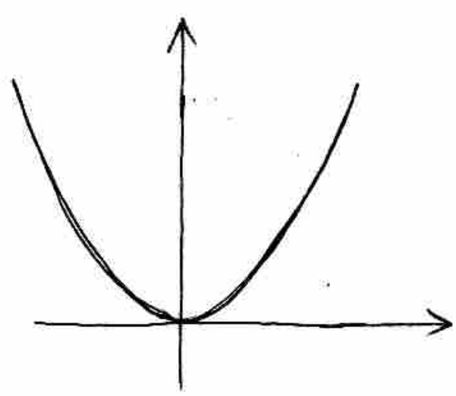
<u>הגדרה</u>: $f: X\to Y$

① רציפה אם לכל $U\subset Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)\subset X$ פתוחה
(f רציפה ⟺ המקור של קבוצה פתוחה הוא קבוצה פתוחה)

② f נקראת העתקה פתוחה אם תמונה של פתוחה היא פתוחה.
כלומר אם לכל $U\subset X$ פתוחה מתקיים $f(U)\subset Y$ פתוחה.

③ f העתקה סגורה אם תמונת סגורה היא סגורה, כלומר לכל
$F\subset X$ סגורה מתקיים $f(F)\subset Y$ סגורה.

<u>הערה</u>: ידוע שמתקיים $f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$ לכל $A\subset Y$ ולכן
בהגדרה (1) יכולנו לדרוש שמקור של סגורה הוא סגורה.
לעומת זאת, ב-(2) ו-(3) זה לא נכון ש- $f(B^c)=(f(B))^c$
עבור $B\subseteq X$ כללית ולכן ההגדרות (2) ו-(3) הן לגמרי
הגדרות שונות.



<u>דוגמאות</u>:

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$.

טענה: f רציפה, סגורה ולא פתוחה.

הוכחה: הרציפות ידוע מאינפי 1.

f איננה פתוחה כי $\mathbb{R}$ קבוצה פתוחה
ואילו $f(\mathbb{R})=[0,\infty)$ אינה פתוחה.

נראה כי f העתקה סגורה. תהי $F\subset\mathbb{R}$ סגורה ונתבונן ב- $f(F)$.
תהא $f(x_n)$ סדרה ב- $f(F)$ ($x_n\in F$). המתכנסת לאיזה $y\in\mathbb{R}$
צ"ל: $y\in f(F)$. נבחר תת סדרה של $\{x_n\}$ (שוב אותה נסמן ב- x_n)
שאיבריה שווי סימן - נניח לצורך העניין שהסימן שלילי ואז נסמן

$$y_n = f(x_n) = x_n^2$$

$$x_n = -\sqrt{y_n}$$

$g(t) = -\sqrt{t}$ היא פונקציה רציפה על $[0,\infty)$ ולכן אם $y_n \to y$

אז $F \ni x_n = -\sqrt{y_n} \to -\sqrt{y}$ ולכן מסגירות F, $-\sqrt{y} \in F$

וכאמור תמונתו היא y כנדרש.

(2) נתבונן בהעתקת ההטלה $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\pi(x,y) = x$.

טענה: π רציפה, פתוחה אך לא סגורה

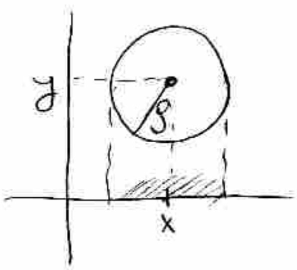
הוכחה: הרציפות ברורה.

כדי להראות פתיחות הכרחי ומספיק להוכיח שתמונת כדור פתוח היא קבוצה פתוחה כי כל קבוצה פתוחה $U \subset X$ היא איחוד של כדורים פתוחים $U = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$; $f(U) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$

וכאמור איחוד של פתוחות הינו פתוח

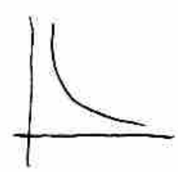
במקרה שלנו $\pi(B_\rho((x,y),\rho)) = (x-\rho, x+\rho)$

(זה על סמך ההיכרות שלנו עם המטריקה האוקלידית)



למה π איננה סגורה?

נקח $F = \{(x, \frac{1}{x}) : x>0\}$



אפשר להשתכנע ש-F באמת סגורה

אבל $\pi(F) = (0,\infty)$ - פתוחה!

היינו רוצים להגדיר שקילות בין מרחבים מטריים. ההגדרה הבאה:

- איזומטריה: X,Y איזומטריים אם ישנה $f: X \leftrightarrow Y$ חח"ע ועל המקיימת $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$

וההגדרה הזאת חזקה מדי כי היינו רוצים לחשוב על $[0,1]$ ו-$[0,2]$ כמרחבים שקולים - הרי הם סה"כ מתיחה אחד של השני.

נזכיר רק שבמקרה זה גם f ו-f^{-1} רציפות.

- ליפשיציות: העתקה $f: X \to Y$ נקראת ליפשיצית עם קבוע α אם $d(f(x_1), f(x_2)) \le \alpha d(x_1, x_2)$

$f: X \leftrightarrow Y$ חח"ע ועל נקראת בי-ליפשיצית אם קיימים α,β שעבורם f ליפשיצית עם קבוע α ו-f^{-1} ליפשיצית עם קבוע β.

- את שנוחה לעבוד איתו: העתקה חח"ע ועל $f: X \leftrightarrow Y$ נקראת הומיאומורפיזם אם גם f וגם f^{-1} רציפות.

(10)

<u>סמינר 8:</u>

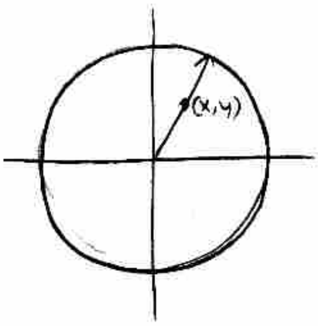
1) $(0,1)$ הומאומורפי ל- $(0,\infty)$ אבל לא בי-ליפשיץ.

2) $D^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ הומאומורפי ל- $\mathbb{R}^2$ אבל לא בי-ליפשיץ.

<u>הוכחה:</u>

ראשית, ברור שאין העתקה בי-ליפשיצית כי המרחבים $(0,1)$, D^2 חסומים בעוד ש- $\mathbb{R}^2$, $(0,\infty)$ אינם והרי פונקציה בי-ליפשיצית מאפשרת רק מתיחה סופית.

עכשיו נוכיח למשל ש D^2 הומאומורפי ל- $\mathbb{R}^2$.



$$f(x,y)=\frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{1-\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{(x,y)}{\cancel{\|(x,y)\|}}=$$

$$=\frac{1}{1-\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$$

$$g(x,y)=\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$$

$$g:\mathbb{R}^2\to D^2\quad,\quad f:D^2\to\mathbb{R}^2$$

(נבדוק ש- $g=f^{-1}$

$$f(g(x,y))=f\left(\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}x,\ \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}y\right)=$$

$$=\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)=$$

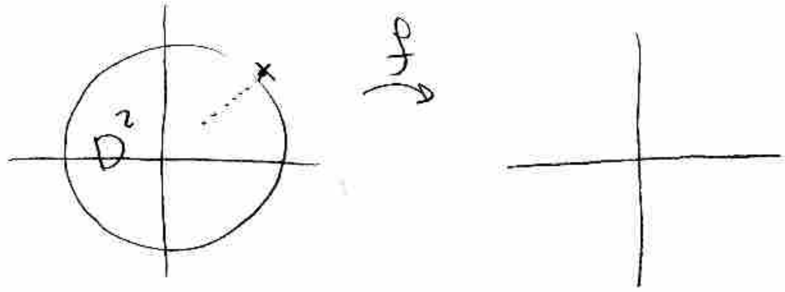
$$=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)=(x,y)$$

אם הבדיקה ש $g(f(x,y))=(x,y)$ נעשית בצורה דומה.

f,g רציפות בתחום הגדרתן.

<u>הערה:</u>



אם יש סדרה ב D^2 שמתכנסת למשהו מחוץ ל- D^2 אז ב- $\mathbb{R}^2$ הסדרה הזאת היא בכלל מתבדרת

אז הומאומורפיזם לא בהכרח שולח סדרת קושי לסדרת קושי.

אבל זה משהו שאולי דווקא כן היינו רוצים. העתקות ביליפשיציות או איזומטריה הן דווקא כן שומרות על סדרות קושי.

<u>הערה:</u>

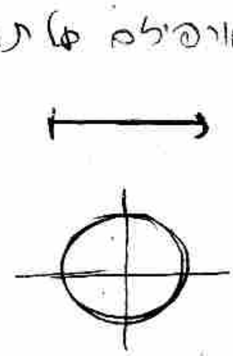
אם $f: X \hookrightarrow Y$ חח"ע ועל כדי לבדוק ש- f^{-1} רציפה צריך לבדוק הגם מקור של פתוחה הוא פתוח או מקור של סגורה הוא סגור.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f^{-1}} & Y \\ A & & (f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \end{array}$$

כלומר, הרציפות של f^{-1} שקולה לכך ש- f תהיה העתקה פתוחה ובן שקולה לכך ש- f תהיה העתקה סגורה.

<u>הגדרה:</u> אם $f: X \hookrightarrow Y$ חח"ע אז נוכל לצמצם את מרחב התמונה ולהתבונן ב- $f: X \hookrightarrow f(X)$. אם במקרה זה f היא הומאומורפיזם בין X ל- $f(X)$ אז נאמר ש- f היא הומאומורפיזם על תמונתה.

<u>דוגמה:</u>



$f: [0,1) \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

המרחבים האלה לא הומאומורפיים -

אינטואיטיבית, אפשר לחשוב על זה כך: ניקח גומיה ונפעיל עליה העתקות רציפות - מתיחה וכו'. לא משנה מה נעשה, בלי לקרוע אותה לא נוכל להפוך אותה לישר חצי פתוח.

באופן פורמלי - נראה שההעתקה f איננה סגורה ולכן אינה הומאומורפיזם על תמונתה.

הקבוצה $[\frac{1}{2}, 1)$ היא סגורה ב- $X-[0,1)$ מצד שני תמונתה היא $\{(\cos t, \sin t) : \pi \le t < 2\pi\}$. נבחר $t_n \to 2\pi$ ואז

$$f(X) \ni (\cos t_n, \sin t_n) \longrightarrow (1,0)$$

אבל $(1,0) \notin A$ כלומר A לא סגורה.

זה לא אומר שהמרחבים אינם הומאומורפיים, אלא רק ש- f אינה הומאומורפיזם.

<u>דוגמה:</u> תהא $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ רציפה וחח"ע.

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

f הומאומורפיזם על תמונתה.

<u>הוכחה:</u> לכל סגורה $K \subset S^2$ מתקיים ש- K קומפקטית כי S^2 קומפקטית ולכן $f(K)$ קומפקטית (רציפות f).

ולכן $f(K) \subset \mathbb{R}^3$ סגורה, כלומר f העתקה סגורה. ☺

<u>הערה:</u> העתקה רציפה ממרחב קומפקטי היא <u>תמיד</u> סגורה.

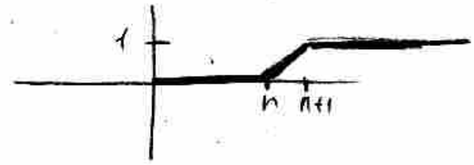
<u>טענה:</u> אם $f, f_n : X \to Y$ רציפות כאשר X קומפקטי ומתקיים כי לכל סדרה מתכנסת $x_n \to x$ ב- X מתקיים $f_n(x_n) \to f(x)$ אז $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$.

* "מה? נגמר השיעור שכולם מתארגנים?"
~מסתכל על השעון ואומר- אדוני עוד 5 דקות~
"טוב, אז ב-7 דקות שנשארו..."

<u>הערה:</u> הקומפקטיות הכרחית:

$$Y = X = \mathbb{R}$$

f_n :



מתקיים שלכל סדרה מתכנסת $x_n \to x$ החל ממקום מסוים $f_n(x_n) = 0$.

אבל $\sup_{x \in \mathbb{R}} d(f_n(x), 0) = 1$ כלומר אין התכנסות במ"ש.

<u>הוכחת הטענה:</u>

ראשית, אם התנאי נכון ע"י בחירת סדרה קבועה $x_n \equiv x_0$ נקבל ש $f_n(x_n) \equiv f_n(x_0)$ מתכנסת ל- $f(x_0)$, כלומר יש התכנסות נקודתית.

לו לא הייתה התכנסות במ"ש היינו מוצאים $\varepsilon > 0$ וסדרה $n_k \nearrow \infty$ ונקודות $x_{n_k} \in X$ שעבורן $d(f_{n_k}(x_{n_k}), f(x_{n_k})) > \varepsilon$ (*)

נעדן את סדרה מתכנסת של x_{n_k} שגם אותה (נסמן ב- x_{n_k}) המתכנסת לאיזה נק' y. אבל אז $f_{n_k}(x_{n_k}) \xrightarrow[\text{הנחה}]{} f(y)$

ו $f(x_{n_k}) \xrightarrow[\text{רציפות}]{} f(y)$ בסתירה ל-(*).

מש"ל ☺

(12) 20.11.06
ת. אינפ'

תיקון לשבוע שעבר: הייתה לנו שיעור שעבר סדרה (x_n) של נקודות במרחב קומפקטי K וסדרת פונקציות (f_n) ומקיימת תנאי מסוים וגם $d(f(x_n), f_n(x_n)) > \varepsilon$. ירדנו לתת סדרה מתכנסת (x_{n_k}) וקיבלנו סתירה.
תחזרו על הטיעון הנ"ל ותוודאו אם הוא דרך "שיפול".

שלמות (אוריינט שהכוונה תהיה 'שלמות')

הגדרה: מרחב מטרי (X,d) (נקרא שלם) אם כל סדרת קושי ב-X מתכנסת ב-X.

דוגמאות:

① $\mathbb{R}$ מרחב מטרי שלם תחת המטריקה הטבעית בו.

② $(0,1)$ עם המטריקה הרגילה הוא אינו שלם כי $(\frac{1}{n})$ סדרת קושי ואין לה גבול ב-$(0,1)$.

③ טענה: כל קבוצה סגורה במרחב מטרי שלם היא מרחב מטרי שלם במטריקה המושרית.

הוכחה: יהי X מרחב שלם ותהי A קבוצה סגורה בו. תהי (a_n) סדרת קושי ב-A. בפרט (a_n) ב-X. לכן מתכנסת ל-$a \in X$. אבל A סגורה אז $a \in A$.
$\Leftarrow$ A שלם. ☺

שאלה: יהא (X,d) מרחב מטרי שלם ו-$A \subseteq X$ תת קבוצה שעבורה $(A, d|_A)$ שלם. האם A סגורה ב-X?

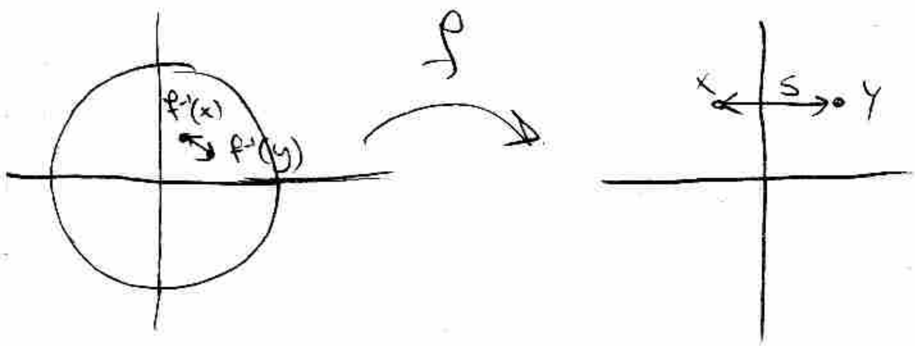
תשובה: כן! ניקח איזו סדרה $(a_n) \subseteq A$ המתכנסת לאיזה $x \in X$. מההתכנסות נובע ש-(a_n) סדרת קושי. לכן ל-(a_n) יש גבול ב-A שנסמנו a. מיחידות הגבול ב-X נקבל ש-$a = x$ ובפרט $\lim a_n \in A$. כלומר A סגורה. ☺

ראינו טענה מאוד חשובה אבל היא לא שומרת שלמות בדבר של המרחב עצמו.

__הערה חשובה:__ שלמות היא תכונה של המטריקה ואם עוברים למטריקה שקולה (כלומר שבה לא שינינו את הסדרות המתכנסות) ניתן לבנות דוגמאות של מרחבים X עם מטריקות שקולות d_1, d_2 כך ש- (X,d_1) שלם בעוד ש- (X,d_2) אינו שלם!

__דוגמא:__ $f:(D^2,d)\to(\mathbb{R}^2,\rho)$ הומאומורפיזם עם המטריקה הרגילה. ניקח את המטריקה הטבעית של D^2 אל $\mathbb{R}^2$, כלומר נגדיר מטריקה $\tilde{\rho}$ על $\mathbb{R}^2$ ע"י

$$\tilde{\rho}(x,y)=d(f^{-1}(x),f^{-1}(y))$$



ברור שזו באמת מטריקה כי זה פשוט כיווץ העתקה חח"ע ועל.

עכשיו נטען שהעובדה ש- f הומאומורפיזם שקולה לכך שהמטריקות ρ ו- $\tilde{\rho}$ שקולות.

__הוכחה:__ זה לחלוטין ברור ונובע מרציפות של f ושל f^{-1}. בהינתן סדרת נקודות (x_n) השואפת לפי ρ ל- x נקבל ש- $f^{-1}(x_n)$ שואפת ל- $f^{-1}(x)$ לפי d (מרציפות f^{-1}) אבל זאת בדיוק ההגדרה של $\tilde{\rho}$, כלומר

$$\tilde{\rho}(x_n,x)=d(f^{-1}(x_n),f^{-1}(x))\longrightarrow 0$$

כלומר $x_n\to x$ לפי $\tilde{\rho}$.

הכיוון ההפוך, מתקבל באופן סימטרי ומשתמש ברציפות של f. ☺

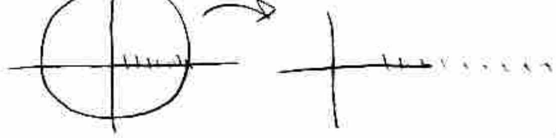
ניזכר שבנינו את הדוגמה הזו בשביל להציג שתי
מטריקות ρ ו- $\tilde{\rho}$ על $\mathbb{R}^2$ רק שתחת האחת
$\mathbb{R}^2$ שלם ואילו תחת השנייה המרחב אינו שלם.
תחת ρ $\mathbb{R}^2$ שלם כי אם (x_n, y_n) סדרת קושי
ב- $\mathbb{R}^2$ לפי ρ אז

$$\varepsilon > \rho((x_n,y_n),(x_m,y_m)) = \sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2} \geq$$
$$\geq \max\{|x_n-x_m|, |y_n-y_m|\}$$

לכן גם הסדרות (x_n) ו (y_n) סדרות קושי ב- $\mathbb{R}$
ומהשלמות של $\mathbb{R}$ נובע שאלה הן סדרות מתכנסות.
נסמן $x_n \to x$, $y_n \to y$. ונקבל ש-

$$\rho((x_n,y_n),(x,y)) = \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} \to 0$$

נראה ש- $\mathbb{R}^2$ לא שלם תחת $\tilde{\rho}$. נבחר
$x_n = f((1-\frac{1}{n}, 0))$.



$$\tilde{\rho}(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

לכן זוהי סדרת קושי אבל בטח שאינה מתכנסת.
כי לו היתה מתכנסת אז היינו מפעילים את f^{-1} ואז
היינו אמורים לקבל סדרה מתכנסת ב- D^2 אבל $((1-\frac{1}{n},0))$
אינה מתכנסת בדיסק משום ש $(1,0)$ אינה בדיסק.

<u>הערה</u>: מרחב מטרי קומפקטי נשאר שלם תחת כל מטריקה שקולה.

<u>אבחנה</u>: אם $f: X \to Y$ רציפה במידה שווה אז f
מעבירה סדרת קושי לסדרת קושי.
<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon > 0$. יהי δ לפי הרציפות במידה שווה רק
שלכל x, y רק ש $d(x,y) < \delta$ מתקיים $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$
ויהי N רק שלכל $n,m > N$ $d(x_n, x_m) < \delta$. אזי לכל
$n,m > N$ $\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ כלומר $(f(x_n))$ סדרת
קושי. ☺

שלמות במרחב נורמי (אורי גדיע שלמות במרחבים נורמיים)

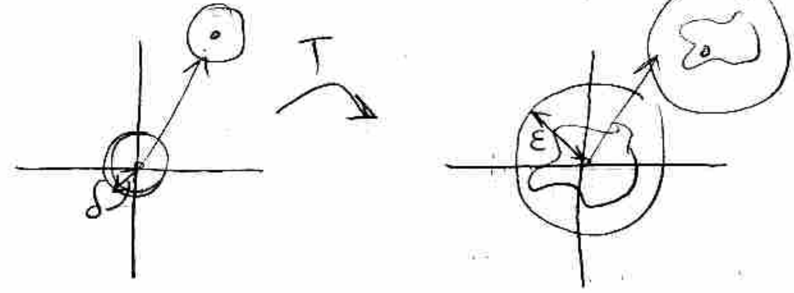
הגדרה: מרחב נורמי $(X, \|\cdot\|)$ נקרא מרחב בנך אם הוא שלם תחת המטריקה שהנורמה משרה.

טענה: אם X, Y מרחבים נורמיים אז העתקה לינארית $T: X\to Y$ היא רציפה ב-0 אמ"מ היא רציפה במידה שווה על X.

הוכחה:

($\Leftarrow$) ברור

($\Rightarrow$) קודם ניתן אינטואיציה לענין: בגלל הלינאריות אנחנו יכולים לפשר ניתוח סביב 0 ואז פשוט להזיז אותה למקום אחר ושום דבר לא ישתנה.



פורמלית: מהר רציפות ב-0 נובע שבהינתן $\varepsilon>0$ ישנו $\delta>0$ כך ש $T(B_X(0,\delta))\subseteq B_Y(0,\varepsilon)$

לכן בהינתן זוג נקודות $a,b\in X$ שמרחקן לכל היותר δ מתקיים $\|a-b\|<\delta \Rightarrow \|T(a-b)\|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ מהלינאריות $\|T(a)-T(b)\|<\varepsilon$. ☺

מסקנה: אם T רציפה אז היא מעבירה סדרות קושי לסדרות קושי (כי אם T רציפה אז היא רציפה ב-0 ולכן רציפה במידה שווה והעתקה רציפה במ"ש מעבירה סדרה קושי לסדרה קושי)

(14)

מסקנה: אם $T:X\to Y$ הומאומורפיזם לינארי אז X מרחב בנך אמ"מ Y מרחב בנך.

הוכחה: נניח למשל ש- X מרחב בנך ותהא $\{y_n\}$ סדרת קושי ב- Y. נפעיל את T^{-1} ונקבל סדרת קושי $\{T^{-1}y_n\}$ שמתכנסת לפי ההנחה ש- X בנך לכן ישנו גבול $\lim T^{-1}(y_n)=x$. מרציפות T נקבל ש- $T(T^{-1}(y_n))=y_n\to T(x)$ - כלומר לכל סדרת קושי (y_n) יש גבול. ☺

אם למשל מדובר במרחב וקטורי אחד X עם זוג נורמות $\|\ \|_a$, $\|\ \|_b$ אז נוכל להתבונן כיצד העתקת הזהות $id:(X,\|\ \|_a)\to(X,\|\ \|_b)$ וזו העתקה לינארית הפיכה. אם במקרה היא רציפה בשני הכיוונים נקבל ש- X בנך תחת $\|\ \|_a$ אמ"מ X בנך תחת $\|\ \|_b$.

טענה: הנורמות $\|\ \|_b$, $\|\ \|_a$ על X מגדירות מטריקות שקולות אמ"מ העתקת הזהות היא הומאומורפיזם.
הגדרה: במקרה כזה נאמר שהנורמות שקולות.

מסקנה: מאחר שראינו בתרגול שכל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות ומאחר שהשתכנענו שתחת המטריקה שמגיעה מהנורמה האוקלידית $\mathbb{R}^n$ שלם, נקבל ש- $\mathbb{R}^n$ מרחב שלם (בנך) תחת כל נורמה עליו.

סיכום ביניים

- כל תת מרחב שלם של מ"מ הוא סגור
- פונק' רציפה במ"ש מעבירה סדרות קושי לסדרות קושי
- העתקה לינארית רציפה הינה רציפה במ"ש
- ברגע שנתונות זוג נורמות שקולות על מ"ו X אז X בנך תחת האחת אמ"מ X בנך תחת השניה.

- מאחר שכל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות ויש לנו נורמה
שתחתיה הוא שלם (למשל $\|\ \|_2$) נקבל ש-$\mathbb{R}^n$
שלם תחת כל נורמה עליו.

<u>תרגיל</u>: כל תת מרחב ממימד סופי במרחב נורמי $(X,\|\ \|)$
הוא שלם תחת הנורמה המושרית.
<u>הוכחה</u>: מרחב ממימד סופי ניתן לזהות עם $\mathbb{R}^n$ ולפי
המסקנה הקודמת תת המרחב שלנו שלם, ולכן בפרט
הוא סגור ב-$(X,\|\ \|)$. ☺

<u>דוגמה</u>: $X=C[0,1]$ עם $\|\ \|_\infty$.
נגדיר $V=sp\{1,x,x^2,x^3\}$. $(V,\|\ \|_\infty)$ מרחב
שלם ולכן בפרט סגור (מה שאומר) ב-$C[0,1]$.
$\Leftarrow$ כל סדרת פולינומים מדרגה ≤ 3 המתכנסת במ"ש
לאיזו פונקציה רציפה $f\in C[0,1]$ מתקיים
ש-f פולינום מדרגה ≤ 3.

$$\ell_1=\{(x_1,x_2,\dots)\in\mathbb{R}^\infty : \sum|x_n|<\infty\}$$
$$\|(x_n)\|_1=\sum|x_n|$$

$$\ell_\infty=\{(x_1,x_2\dots)\in\mathbb{R}^\infty : \sup|x_n|<\infty\}$$
$$\|(x_n)\|_\infty=\sup|x_n|$$

איברי ℓ_1 שואפים כסדרות לאפס ובפרט
מדובר בסדרות חסומות. לכן $\ell_1\hookrightarrow\ell_\infty$ (משוכן)
מראין שעל ℓ_1 יש שני נורמות $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$
והן לא שקולות כי אם נתבונן בסדרה
$$\vec{X}_n=(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\dots,\tfrac{1}{n},0,0,\dots)$$
כל האיברים הם ב-ℓ_1 אבל $\|\vec{X}_n-(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)\|_\infty=\frac{1}{n+1}\to 0$
אבל $\|\vec{X}_n\|_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty$!

(15) 27.11.06

תרגול

משפט העתקה המכווצת:

יהא X מרחב מטרי שלם ! ב-$T:X\to X$ העתקה מכווצת אז יש ל-T נקודת שבת יחידה ולכל בחירה של $x_0\in X$ הסדרה $T^n(x_0)$ מתכנסת לנקודת השבת.

הערה: אם פרמטר הכיווץ הוא $0<\alpha<1$, כלומר $d(Tx,Ty)\le \alpha d(x,y)$ אז אם נבחר את x_0 באקראיות ונסמן ב-y את נקודת השבת אז

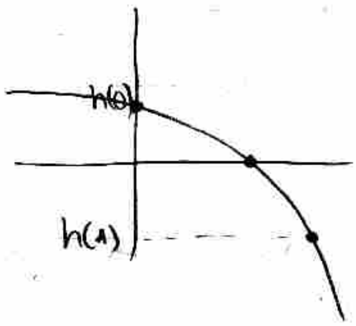
$$d(T^n x_0, y) = d(T^n x_0, T^n y) \le \alpha^n d(x_0,y)$$

במקרה שידוע לנו למשל שהמטריקה חסומה ע"י 1 נקבל $d(T^n x_0,y)\le \alpha^n$ שזה נותן לנו איזושהי הערכה לגבי קצב ההתכנסות.

דוגמה: נרצה לפתור את המשוואה $2-e^x=x$.

במבט ראשון נראה שכדאי להגדיר $h(x)=2-e^x$ ולחפש נקודת שבת של h. בשביל זה צריך למצוא (למשל) קטע סגור $[a,b]$ ש-h מעתיקה לתוך עצמו ומכווצת שם.

אבל זה לא ממש יוצא לנו כי $h'(x)=-e^x$, ו-h נראית כך:



צריך להשתכנע שלא ניתן למצוא קטע ש-h מעתיקה לתוך עצמו ומכווצת שם.

את $\mathbb{R}$ כולו לא ניתן לקחת כי h לא מכווצת שם.

אז איך נפתור את הבעיה? נעבור למשוואה שקולה ל- $2-e^x-x=0$.

נבחר $\lambda\neq 0$ כלשהו והמשוואה $\lambda(2-e^x-x)+x=x$ היא שקולה למשוואה המקורית (כי נחסר x משני האגפים ונחלק ב-λ).

נגדיר $g_\lambda(x)=\lambda(2-e^x-x)+x$. נרצה לבחור את λ בחכמה כך ש-g_λ תעתיק קטע סגור לתוך עצמו ותהיה מכווצת שם.

__הערה__: אם נחזור לביטוי $f(x)=2-e^x-x$ אז f פונ' מונוטונית שהרי $f'(x)=-e^x-1<0$. אבל $f(0)=1>0$ ו- $f(1)=1-e<0$. משפט ערך הביניים, יחד עם הרציפות נותנים שיש פתרון למשוואה בקטע $[0,1]$ והפתרון הזה הוא יחיד ב- $\mathbb{R}$ בגלל המונוטוניות.

אז ננסה למצוא את התנאים ש- λ צריך לקיים בכדי ש- g_λ תעתיק את $[0,1]$ לעצמו ותהיה מכווצת שם.

אם g_λ תהיה מונוטונית זה יעזור לנו כי אז נוכל לחפש λ רק ש- $g_\lambda(0)\ge 0$ ו- $g_\lambda(1)\le 1$ ואז התמונה בוודאות תהיה ב $[0,1]$.

נחזור: $g'_\lambda(x)=-\lambda e^x-\lambda+1=1-\lambda(1+e^x)$. נרצה ש- $g'_\lambda(x)>0$ לכל $x\in[0,1]$

כלומר $\lambda(1+e^x)<1$ $\Leftarrow$ $\lambda<\frac{1}{1+e^x}$ $\Leftarrow$ נבחר $(*)\ \lambda<\frac{1}{1+e}$

כדי שזה יהיה נכון לכל $x\in[0,1]$.

עכשיו $g_\lambda(x)$ מונוטונית עולה. נבדוק את הערכים: $g(0)=\lambda$ $\Leftarrow$ נרצה ש $\lambda>0$.

$g_\lambda(1)=\lambda(1-e)+1$ $\Leftarrow$ נרצה ש $\lambda(1-e)+1<1$ אבל זה תמיד נכון כי אם $\lambda>0$ אז $\lambda(1-e)$ שלילי.

עכשיו נרצה שהיא תהיה כיווץ: נרצה שלכל $x,y\in[0,1]$ $|g_\lambda(x)-g_\lambda(y)|<\alpha|x-y|$

אבל לפי משפט ערך הביניים קיים $\xi\in[0,1]$ כך ש- $\left|\frac{g_\lambda(x)-g_\lambda(y)}{x-y}\right|=|g'_\lambda(\xi)|$

$\Leftarrow$ אם ניתן היה לחסום את $|g'_\lambda(\xi)|$ ע"י $\alpha<1$ אז היה לנו כיווץ עם פרמטר α.

אז נחסום את הנגזרת: $g'_\lambda(x)=1-\lambda(1+e^x)\underset{x=0}{\le}1-2\lambda$

נסמן אז $0<\alpha=1-2\lambda$ $\Leftarrow$ $\lambda<\frac{1}{2}$. אבל זה מתקיים אוטומטית לאור $(*)$.

אז נבחר $\lambda=\frac{1}{4}$ (ואז $(*)$ מתקיים) ואז $g_{\frac{1}{4}}(x)=g(x)=\frac{1}{4}(2-e^x-x)+x$

ומתקיים ש- $|g^n(\frac{1}{2})-y|<\alpha^n=\frac{1}{2^n}$ כאשר y נקודת שבת של g, כלומר הפיתרון שאנחנו מחפשים. ועכשיו בשביל למצוא פיתרון בקירוב של נניח 10^{-3} סה"כ צריך לחשב את $g^n(\frac{1}{2})$ עבור n כך ש $\frac{1}{2^n}<10^{-3}$.

__הערה__: בהוכחת המשפט אמרנו כי:

$$d(T^nx_0,T^{n+k}x_0)\le\alpha^n d(x_0,T^kx_0)\le\alpha^n\left(d(x_0,Tx_0)+d(Tx_0,T^2x_0)+\dots+d(T^{k-1}x_0,T^kx_0)\right)\le$$

$$\le\alpha^n\left(d(x_0,Tx_0)+\alpha d(x_0,Tx_0)+\dots+\alpha^{k-1}d(x_0,Tx_0)\right)=$$

$$=\alpha^n d(x_0,Tx_0)\left(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{k-1}\right)\le\alpha^n d(x_0,Tx_0)\cdot\frac{1}{1-\alpha}$$

נשאיף את k לאינסוף ונאמר שידוע ש- $T^{n+k}x_0\xrightarrow[k\to\infty]{}y$ נק' שבת יחידה אז $d(T^nx_0,y)\le\alpha^n\cdot\frac{d(x_0,Tx_0)}{1-\alpha}$

ראיתם מה ששינינו עכשיו? בתחילת השיעור אמרנו ש-

$$d(T^n x_0, y) \le \alpha^n d(x_0,y)$$

אבל בתחילת התהליך y לא ידוע אז $d(x_0,y)$ לא ידוע ואם המרחק לא חסום אז לא ניתן לחסום את $d(x_0,y)$

מה שראינו בעמוד הקודם אבל, $d(T^n x_0,y)\le \alpha^n \frac{d(x_0,Tx_0)}{1-\alpha}$ מאפשר לנו להעריך גם אם המרחק לא חסום מראש, בלי לדעת מהו y אפשר להעריך את המרחק כי את $d(x_0,Tx_0)$ דווקא אין בעיה לחשב.

עכשיו נראה שימוש פרקטי למשפט ההעתקה המכווצת.

יש n שחקנים שמשחקים משחק ובכל שלב לפי כלל מסויים מחלקים דינרים בין השחקנים. נשאלת השאלה מה קורה עם הרכוש בכל שלב וגם אם ניתן למצוא מצב התחלתי שממנו לא יהיה שינוי בכל שלב ושלב.

סה"כ יש לנו את המצב הבא: נתון משחק של n שחקנים $\{1,\dots,n\}$. כל שחקן מתחיל עם כמות התחלתית של רכוש $x_j \ge 0$. נקרא לווקטור $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ וקטור נכסים התחלתי. לכל שחקן $1\le j\le n$ יש "כלל חלוקה" שלפיו הוא מחלק בכל שלב את הרכוש שיש לו בין השחקנים. את כלל החלוקה הזה נאפיין ע"י וקטור $\begin{pmatrix}p_{1j}\\ \vdots\\ p_{nj}\end{pmatrix}$ כאשר $0\le p_{ij}\le 1$ שבנוסף $\sum_i p_{ij}=1$ (וקטור זה נקרא וקטור הסתברות) ומה שאומר: הרכוש ששחקן j נותן לשחקן i בכל שלב הוא p_{ij} (מהיש של שחקן j). בשלב הראשון אם וקטור הנכסים ההתחלתי הוא $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ נותן אז השחקן j לשחקן i סכום רכוש $p_{ij}x_j$. אחרי שמשחקים את המשחק פעם אחת הרכוש של שחקן i הוא $\sum_j p_{ij}x_j$.

כלומר וקטור הנכסים אחרי שלב אחד הוא

$$(p_{ij})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vdots\\ \sum_j p_{ij}x_j\\ \vdots\end{pmatrix}$$

נקרא למטריצה (p_{ij}) מטריצת כלל החלוקה. (נסמן מטריצה זו ב-P) ואת וקטור הנכסים ההתחלתי ב-$\vec{x}$. אחרי k פעמים שמשחק את המשחק $P^k\vec{x}$ יהיה וקטור הנכסים.

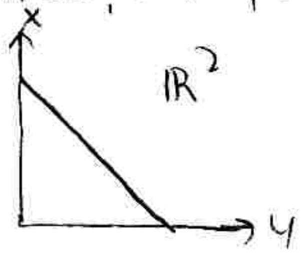
בעצם אנחנו מחפשים ו"ע עם ע"ע $\underline{1}$

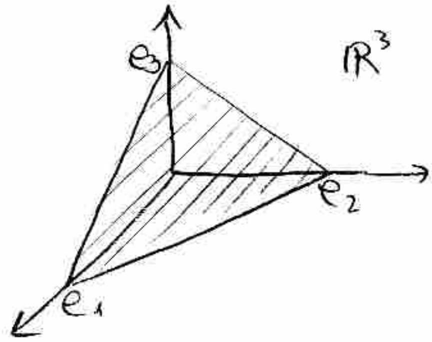
הערה 8: נשים ♡ שמאחר שהעמודות הן וקטורי הסתברות

$$(1 \dots 1)\begin{pmatrix} p_{ij} \end{pmatrix} = (1 \dots 1)$$

לכן אנחנו יודעים שישנו ו"ע ימני עם ע"ע 1 אבל לא ברור שהוא "יחיד" (חוץ מכפל בסקלר) וגם לא ברור שכל הקואורדינטות אי שליליות.

נגדיר את ~~הסימפלקס~~ הסימפלקס של וקטורי ההסתברות ב-$\mathbb{R}^n$: $\Delta = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : x_i \ge 0,\ \sum x_i = 1\}$





נראה שהמטריצה P מעתיקה את Δ לתוך עצמו ומכווצת שם ביחס למטריקה של $\|\ \|_1$. נראה ש-$P(\Delta)\subseteq\Delta$: ניקח $\vec{x}\in\Delta$ ואז

$$P\vec{x} = \begin{pmatrix} \sum_j p_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j p_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

מאחר ש-x_i, p_{ij} אי שליליים נקבל שהקואו' של $P\vec{x}$ אי שליליות.

חוץ מזה $\sum_i\sum_j p_{ij}x_j = \sum_j x_j\left(\sum_i p_{ij}\right) = \sum x_j = 1$. אז בוודאות $P:\Delta \circlearrowleft$.

נשאל מתי P מכווצת: ניקח 2 וקטורי הסתברות $\vec{x},\vec{y}$ וננסה להעריך את $\|P\vec{x}-P\vec{y}\|_1$:

$$\|P\vec{x}-P\vec{y}\|_1 \overset{\text{לינאריות } P}{=} \|P(\vec{x}-\vec{y})\|_1 \overset{?}{\le} \alpha\|x-y\|_1$$

נשים ♡ שלכל זוג וקטורי הסתברות $\vec{x},\vec{y}$ מתקיים $\sum(x_i-y_i) = \sum x_i - \sum y_i = 1-1 = 0$

⇐ מספיק להראות שלכל $\vec{z}$ שמקיים $\sum z_i = 0$ מתקיים $\|Pz\|_1 \le \alpha\|z\|_1$ (*) עבור $0<\alpha<1$

שמ הלינאריות מספיק שנראה את (*) ל-$\vec{z}$ כך המקיים $\|z\|_1 = 1$. יהי $\vec{z}$ כזה - כלומר

① $\sum z_i = 0$; ② $\sum|z_i| = \|z\|_1 = 1$ וננסה להעריך את $\|P\vec{z}\|_1$:

$$\|P\vec{z}\|_1 = \left\|\left(\sum_j p_{ij}z_j\right)\right\|_1 = \sum_i\left|\sum_j p_{ij}z_j\right|$$

נחלק את z_i-ים לחיוביים והשליליים. ① ו-② הופכים ל- $\sum_{z_i>0} z_i - \sum_{z_i<0} z_i = 1$

$\sum_{z_i>0} z_i + \sum_{z_i<0} z_i = 0$ ⇐ חייב להיות $\sum_{z_i>0} z_i = \frac{1}{2}$; $\sum_{z_i<0} z_i = -\frac{1}{2}$

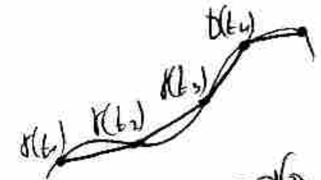
⇐ מאחר שבסך הכל יש לכל היותר n איברים ישנו $z_i>0$ המקיים $z_i \ge \frac{1}{2n}$ וישנו $z_j<0$ כך ש-$z_j \le -\frac{1}{2n}$ (אחרת הסכומים יהיו לא מסתדרים)

המשך שבוע הבא.

(14) 4/12/06
ת. איפי

המשך משיעור שעבר: בהינתן מטריצה סטוכסטית (כלומר מטריצה p_{ij}
שעמודותיה הן וקטורי הסתברות, כלומר הם אי שליליים והסכום 1)
שעבורה $p_{ij}>0$ לכל i,j מתקיים $P: \Delta^{(n-1)} \to \Delta^{(n-1)}$
הנה העתקה מכווצת ביחס למטריקה המושרה מהנורמה $\| \ \|_1$.
ההוכחה המלאה תופיע ב- owl.

מסילות



* $\|\ \|$ נורמה כלשהי

נתונה מסילה גזירה ברציפות $\gamma:[a,b]\to(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)^*$
נתבונן בביטוי שמקרב את האורך של γ: נתונה חלוקה
$T=\{a=t_0<\dots<t_n=b\}$ של הקטע $[a,b]$. $L(\gamma,T)=\sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$

נגדיר
$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots\\ \gamma_n(t)\end{pmatrix}$$

לכל i מתקיים
$$\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})=\begin{pmatrix}\gamma_1(t_i)-\gamma_1(t_{i-1})\\ \vdots\\ \gamma_n(t_i)-\gamma_n(t_{i-1})\end{pmatrix}$$

ממשפט ערך הביניים ניתן לרשום
$$\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})\begin{pmatrix}\gamma_1'(\xi_1^{(i)})\\ \vdots\\ \gamma_n'(\xi_n^{(i)})\end{pmatrix} \qquad t_{i-1}<\xi_j^{(i)}<t_i$$

נניח לרגע (וזה כמובן לא נכון בכלל, אנחנו עושים את זה רק לאינטואיציה)
שהייתה לנו נקודת ביניים משותפת, כלומר ש- $\xi_1^{(i)}=\dots=\xi_n^{(i)}$
אזי
$$L(\gamma,T)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\left\|\begin{pmatrix}\gamma_1'(\xi_1^{(i)})\\ \vdots\\ \gamma_n'(\xi_n^{(i)})\end{pmatrix}\right\|$$
וזה הרי סכום רימן של הפונקציה $\|\gamma'(t)\|$ (שהיא פונקציה רציפה מ-$[a,b]$ ל-$\mathbb{R}$)
לכן מאחר שפונקציה רציפה היא אינטגרבילית נקבל ש-γ בעלת אורך ומתקיים
$$\ell(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$$

עכשיו שיש לנו אינטואיציה ניגש להוכחה.

ראשית, נפתור את בעיית נקודות הביניים. נשים ♥ שמהרציפות במ"ש של γ' על $[a,b]$ מהינתן $\varepsilon>0$ נבחר חלוקה T עם פרמטר $\lambda(T)$ קטן מה-δ^* שמתאים ל-ε בהגדרה של רציפות במ"ש של γ'.

*אפשר לכל רכיב יש δ משלו אז פשוט נבחר את המינימלי

$$L(\gamma,T)=\sum\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|=\sum(t_i-t_{i-1})\left\|\begin{pmatrix}\gamma_1'(\xi_1^{(i)})\\ \vdots\\ \gamma_n'(\xi_n^{(i)})\end{pmatrix}\right\|\le$$

$$\le\sum(t_i-t_{i-1})\left(\left\|\begin{pmatrix}\gamma_1'(t_i)\\ \vdots\\ \gamma_n'(t_i)\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}\gamma_1'(\xi_1^{(i)})\\ \vdots\\ \gamma_n'(\xi_n^{(i)})\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_1'(t_i)\\ \vdots\\ \gamma_n'(t_i)\end{pmatrix}\right\|\right)\le$$

$$\le\sum(t_i-t_{i-1})\left\|\begin{pmatrix}\gamma_1'(t_i)\\ \vdots\\ \gamma_n'(t_i)\end{pmatrix}\right\|+(b-a)\varepsilon$$

אם נבחר את פרמטר החלוקה מספיק קטן נקבל

$$L(\gamma,T)\le\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt+2(b-a)\varepsilon$$

כעת, אגף ימין כבר לא תלוי ב-T ולכן נקבל ש-

$$l(\gamma)=\sup_T L(\gamma,T)\le\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt+2(b-a)\varepsilon$$

משרירותיות ε נקבל $l(\gamma)\le\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$

הכיוון השני של אי השוויון מושאר לנו כתרגיל.

מסקנות: נגדיר $s(t)=l(\gamma|_{[a,t]})=\int_a^t\|\gamma'(t)\|dt$

אז s גזירה וכן $s'(t)=\|\gamma'(t)\|$, ואם $\gamma'(t)\neq\vec{0}$ לכל $t\in[a,b]$

אז $s(t)$ פונקציה רציפה מונוטונית עולה ממש. אז $s(t)$ הפיכה

שינוי פרמטר:

$$[a,b]\underset{\varphi=s^{-1}}{\overset{s(t)}{\rightleftarrows}}[0,l(\gamma)]$$

נתבונן בהרכבה $[0,l]\xrightarrow{\varphi}[a,b]\xrightarrow{\gamma}\mathbb{R}^n$. לכל $0\le r\le l=l(\gamma)$

מתקיים שהמסילות $\gamma|_{[a,\varphi(r)]}$, $\gamma\circ\varphi|_{[0,r]}$ שקולות ולכן יש להן אותו

אורך, אבל $l(\gamma\circ\varphi|_{[0,r]})=l(\gamma|_{[a,\varphi(r)]})=s(\varphi(r))=r$

הפרמטריזציה הזאת נקראת פרמטריזציה לפי אורך קשת.

הגדרה: $\gamma:[0,\ell]\to X$ נקראת בפרמטריזציית אורך קשת אם לכל $0\le t\le \ell$ מתקיים $\ell(\gamma|_{[0,t]})=t$ ואנחנו חושבים על מסילות כאילו הן מתקדמות בקצב קבוע 1.
כמו כאילו שלקחנו חוט שלא מתחנו אותו, אלא פשוט הנחנו אותו במרחב בצורה מסויימת.

ראינו בכיתה שאם $\gamma:[a,b]\to X$ מסילה שאינה קבועה על אף קטע אז $s(t)=\ell(\gamma|_{[a,t]})$ הינה רציפה ומונוטונית עולה ממש ומתקיים שאם נסמן את ההפכית ל- $s(t)$ ב- $\varphi:[0,\ell]\to[a,b]$ אז $\gamma\sim\gamma\circ\varphi$ וכן $\gamma\circ\varphi$ נתונה בפרמטריזציית אורך קשת.

הערה: אם γ מסילה גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^n$! $\gamma'\neq 0$ בכל נקודה אז כאמור φ היא ההפכית של $\int_a^t\|\gamma'(t)\|dt$ ולכן φ גזירה ברציפות. $\Rightarrow$ אז ההצגה של γ לפי פרמטריזציית אורך קשת היא גזירה ברציפות.

טענה: עבור $\gamma:[0,\ell]\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות המקיימת $\gamma'(t)\neq 0$ מתקיים ש- γ נתונה בפרמטריזציית אורך קשת אמ"מ $\|\gamma'(t)\|=1$.

הוכחה: אם γ נתונה בפרמטריזציית אורך קשת אז

$$t=s(t)=\ell(\gamma|_{[0,t]})=\int_0^t\|\gamma'(s)\|ds$$

נגזור ונקבל $1=\|\gamma'(t)\|$.

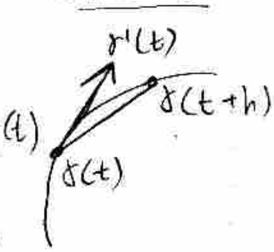
מצד שני, אם נתונה γ גזירה ברציפות $\gamma:[0,\ell]\to\mathbb{R}^n$! $\|\gamma'(t)\|=1$ אז

$$\ell(\gamma|_{[0,t]})=\int_0^t\|\gamma'(s)\|ds=\int_0^t 1ds=t$$

אנלוגיה: מסילה $\longleftrightarrow$ תנועת חלקיק ב- $\mathbb{R}^n$

$\gamma(t)$ $\longleftrightarrow$ המיקום של החלקיק בזמן t

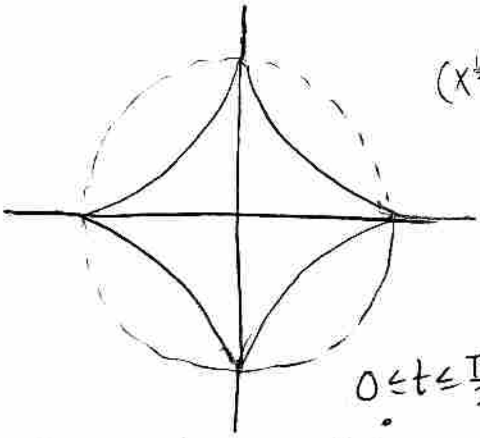
$\gamma'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}=\dot\gamma(t)$ המהירות הרגעית בזמן t



שינוי פרמטריזציה $\longleftrightarrow$ שינוי מהירות ההתקדמות של החלקיק

פרמטריזציית אורך קשת היא תנועה במהירות שגודלה קבוע $=1$.

נחשב את האורך במישור של העקום (שנקרא אסטרואיד)
שמוגדר ע"י $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ עם הנורמה האוקלידית.



אם x,y על העקום מתקיים $(x^{\frac13})^2+(y^{\frac13})^2=1$

⇐ $(x^{\frac13},y^{\frac13})$ על מעגל היחידה

⇐ ישנו $0\le t\le 2\pi$ שעבורו $\cos^3 t=x$, $\sin^3 t=y$

נתבונן במסילה $\gamma(t)=(\cos^3 t,\ \sin^3 t)$ $\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

ונשים ♡ ש-γ מסילה פשוטה סגורה עם נגזרות $\dot\gamma\neq 0$ בפנים הקטע
ולכן אורך העקום הוא (בהגדרה) אורך המסילה. (אורך העקום הכולל יהיה 4 פעמים האורך שנחשב)

$$\dot\gamma(t)=(-3\sin t\cos^2 t,\ 3\cos t\sin^2 t)$$

$$\ell(\gamma|_{[0,s]})=\int_0^s\|\dot\gamma(t)\|dt=$$

$$=\int_0^s\sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t+9\cos^2 t\sin^4 t}\,dt=$$

$$=\int_0^s \underbrace{3\sin t\cos t}_{\text{ברביע ה-I הם חיוביים ולא צריך ערך מוחלט}}\underbrace{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}_{1}\,dt=$$

$$=\frac32\int_0^s 2\sin t\cos t\,dt=\frac32[\sin^2 t]_0^s=\frac32\sin^2 s$$

⇐ האורך של רבע האסטרואיד הוא $\frac32\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}=\frac32$

ובסה"כ אורך האסטרואיד הוא 6.

הפונקציה ההפוכה ל $\frac32\sin^2 s:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,\frac32]$ היא $\varphi(t)=\arcsin(\sqrt{\frac23 t})$
והיא פרמטריזציה לפי אורך קשת.

נחשב את אורך מעגל היחידה לפי $\|\cdot\|_1$: $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$

נחשב את אורכו של הרבע ברביע הראשון - $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

$$\ell(\gamma|_{[0,\frac{\pi}{2}]})=\int_0^{\pi/2}\|(-\sin t,\cos t)\|_1\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+\cos t)\,dt=2$$

(16) 11.10.06

ת.אינפי

שדות וקטוריים ואינטגרל לאורך מסילה

אנחנו הגדרנו שדה וקטורי בשיעור. נחזור על זה. בהינתן $A\subseteq\mathbb{R}^n$, שדה וקטורי על A הוא פונקציה $f:A\to\mathbb{R}^n$. בדרך כלל (אם לא רשום אחרת) A היא קבוצה פתוחה קשירה מסילתית.

יתר על כן, $f=(f_1,\dots,f_n)$ דיפרנציאבילית ברציפות. כלומר, לכל $1\le i,j\le n$ הנגזרת החלקית $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})$ קיימת ורציפה. בהינתן מסילה (גזירה ברציפות למקוטעין) $\gamma:[a,b]\to A$ נגדיר

$$\int_\gamma f=\int_a^b\langle f(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\,dt=$$
$$=\int_a^b\sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\cdot\gamma_i'(t)\,dt$$

לפעמים מסמנים במקום $\int_\gamma f$ את $\int_\gamma\sum f_i dx_i$

למשל, סימון זה כאשר השדה מוגדר על מישור xy יהיה

$$\int_\gamma f_1dx+f_2dy$$

<u>הגדרה</u>: שדה $f:A\to\mathbb{R}^n$ נקרא שדה משמר אם האינטגרל לאורך כל מסילה ב-A תלוי רק בקצוות המסילה.

<u>משפט שראינו בכיתה</u>: f שדה משמר אמ"מ קיימת לו פונק' פוטנציאל. (כלומר פונק' $\Phi:A\to\mathbb{R}$ שעבורה $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\vec{x})=f_i(\vec{x})$.

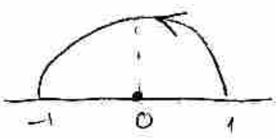
לאור המשפט על נגזרות מעורבות נקבל שאם השדה משמר אז

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\quad(*)$$ הערה

<u>הגדרה</u>: שדה f שמקיים את $(*)$ לכל i,j נקרא שדה משמר לוקלית...

הערה: בשביל שזה יהיה נכון Φ צריכה להיות גזירה פעמיים ברציפות אבל אם היא פונקציה פוטנציאל אז היא מקיימת את זה

היינו הגדרה (לאור הטרמינולוגיה) ש- f היה משמר לוקאלית
אמ"מ לכל $x\in A$ יהיה כדור $B_x \subseteq A$ שבתוכו, f יהיה משמר.



דוגמה: $F = (f_1, f_2) = (x^2-y^2, -2xy)$

נסמן $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t\in[0,\pi]$

נחשב את $\int_\gamma F = \int_\gamma f_1\,dx + f_2\,dy$

$$\int_\gamma F = \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t)(-\sin t) + (-2\sin t\cos t)\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^\pi (-\sin t)(3\cos^2 t - 1 + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi (-\sin t)(4\cos^2 t - 1)\,dt = \frac{4}{3}\cos^3 t - \cos t \Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{4}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 1 = \frac{6}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$$

נבדוק שימור מקומי:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -2y$$

⇐ F משמר לוקאלית. אז זה מחשיב אותו.

ננסה למצוא פוטנציאל ל- F.

לו הייתה פונקציה פוטנציאל $\phi(x,y)$ כך ש-

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f_1 \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = f_2$$

אז

$$\phi(x,y) = \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial x}(t,y)\,dt + \varphi(y)$$

$$= \int_0^x f_1(t,y)\,dt + \varphi(y)$$

כאשר $\varphi(y)$ צריכה להיות פונקציה המקיימת

$$\underbrace{f_2(x,y)}_{\text{נתון}} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x f_1(t,y)\,dt}_{\text{ניתן לחשב}} + \varphi'(y)$$

⇐ כדי למצוא פוטנציאל מספיק למצוא פונקציה $\varphi(y)$

(17)

שעבורה מתקיים

$$(*)\quad f_2(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x f_1(t,y)\,dt\right) + \varphi'(y)$$

כי אם מצאנו φ שמקיימת את השוויון הזה אז נגדיר

$$\phi(x,y) = \int_0^x f_1(t,y)\,dt + \varphi(y)$$

נגזור לפי x ונקבל $\frac{\partial \phi}{\partial x} = f_1(x,y)$ מהמשפט היסודי,

נגזור לפי y ונקבל $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x f(t,y)\,dt\right) + \varphi'(y) = f_2(x,y)$ מ־$(*)$

נשתמש בשיטה הזאת למקרה שלנו:

$$f_1 = x^2 - y^2 \qquad f_2 = -2xy$$

$$\int_0^x f_1(t,y)\,dt = \int_0^x t^2 - y^2\,dt = \frac{x^3}{3} - y^2 x$$

מחפשים $\varphi(y)$ שעבורה

$$-2xy = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} - y^2 x\right) + \varphi'(y)$$

$\Leftarrow$ נבחר $\varphi \equiv 0$, אזי הפוטנציאל הינו

$$\phi(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 x$$

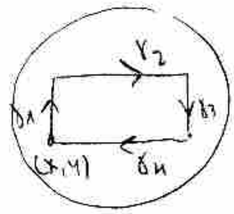
מצאנו פונקציית פוטנציאל $\Leftarrow$ השדה משמר.
לכן את החישוב של האינטגרל לאורך המסילה היה אפשר לפשט:

$$\int_\gamma F = \Phi(\gamma(\pi)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) =$$
$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

<u>משפט</u>: אם $f=(f_1,f_2)$ שדה משמר לוקאלית בעיגול B אז f משמר שם.

<u>הערה</u>: בכיתה נוכיח משפט הרבה יותר כללי שאומר ששדה משמר לוקאלית בתחום פשוט קשר הוא משמר.

<u>הוכחה</u>: (יהי שטח מלבן ב- B $\gamma=\gamma_4*\gamma_3*\gamma_2*\gamma_1$

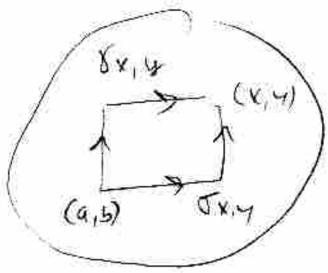


מתקיים $\int_\gamma f=0$

אם נראה זאת אז מתקיים $(*)\ \int_{\gamma_2*\gamma_1} f=\int_{\gamma_3^{-1}*\gamma_4^{-1}} f$

נגדיר אם כן $\phi:B\to\mathbb{R}$ ע״י:

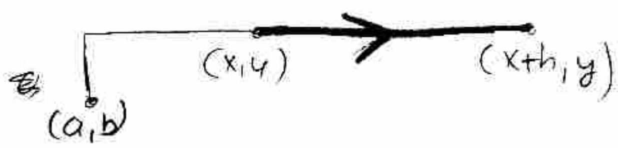
$$\phi(x,y)=\int_{\gamma_{x,y}} f$$



ולאור $(*)$ מתקיים $\phi(x,y)=\int_{\sigma_{x,y}} f$

מה זה $\frac{\partial\phi}{\partial x}$?

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h,y)-\phi(x,y)}{h}$$



$\phi(x+h,y)-\phi(x,y)$ זה האינטגרל $\int_{\tau_h} f$

כאשר $\tau_h(t)=(x+t,y)$, $0\le t\le h$ (המסלה בקו ישר)

$$\int_{\tau_h} f=\int_0^h f_1(x+t,y)\cdot 1+0\,dt$$

$$\Rightarrow\ \frac{\phi(x+h,y)-\phi(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h f_1(x+t,y)\,dt$$

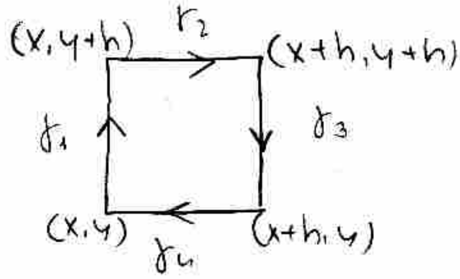
לכן הגבול שווה ל- $f_1(x,y)$ כנדרש.

את העובדה ש- $\frac{\partial\phi}{\partial y}=f_2$ מקבלים ע״י חישוב ϕ לפי המסילה $\sigma_{x,y}$ ולא כמו $\gamma_{x,y}$

עד כאן הראינו שאם ידוע שהאינטגרל של f על מלבן הוא אפס אז יש פוטנציאל והשדה משמר.

נוכיח שאם המלבן הוא ריבוע אז האינטגרל מתאפס.

נתבונן בריבוע



מגניב!

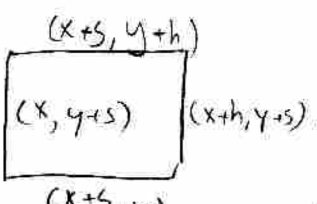
$$\left.\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (x;\ y+t)\\ \gamma_2(t) &= (x+t,\ y+h)\\ \gamma_3(t) &= (x+h,\ y+h-t)\\ \gamma_4(t) &= (x+h-t,\ y)\end{aligned}\right\}\quad 0\le t\le h$$

$$\int_\gamma f = \sum\int_{\gamma_i} f = \int_0^h f_2(x,y+t)dt + \int_0^h f_1(x+t,y+h)dt +$$
$$+\int_0^h -f_2(x+h,y+h-t)dt$$
$$+\int_0^h -f_1(x+h-t,y)dt =$$

נחליף משתנה משני האינטגרלים האחרונים $s=h-t$ $ds=-dt$

ותחום האינטגרציה התהפך.

$$= \int_0^h f_2(x,y+s) - f_2(x+h,y+s)\,ds +$$



$$+\int_0^h f_1(x+s,y+h) - f_1(x+s,y)\,ds =$$

לפי משפט ערך הממוצע ישנם $0<\theta_1,\theta_2<1$ שעבורם

$$= -\int_0^h h\frac{\partial f_2}{\partial x}(x+\theta_2 h, y+s)\,ds +$$
$$+\int_0^h h\frac{\partial f_1}{\partial y}(x+s, y+\theta_1 h)\,ds$$

אם $\varepsilon>0$! h - ($\gamma(\varepsilon)$ הריבוע) מספיק קטן אז

$\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_1,x_2)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(y_1,y_2)\right|<\varepsilon$ כאשר (x_1,x_2) , (y_1,y_2) מתוך הריבוע.

$$\Leftarrow\quad \left|\int_\gamma f\right| \le \int_0^h h\cdot\varepsilon = h^2\varepsilon$$

אם ניקח ריבוע גדול נכסה אותו ע"י ריבועים עם צלע h

(צריך $\frac{1}{h^2}$ כאלה). האינטגרל לאורך שפת הריבוע הגדול

שווה לסכום האינטגרלים של הריבועים הקטנים [illegible]

$$\left|\int_{\text{ריבוע גדול}} f\right| \le \sum_{\text{ריבועים עם צלע } h} \left|\int f\right| \le \frac{1}{h^2}\cdot h^2\cdot \varepsilon = \varepsilon$$

משרירותיות ε נקבל שהאינטגרל של הריבוע הגדול הוא

אפס.

והמספר מריבועים לאלפים נעשה ע"י [illegible] [illegible].

☺

העתקות לינאריות – נורמת אופרטורים

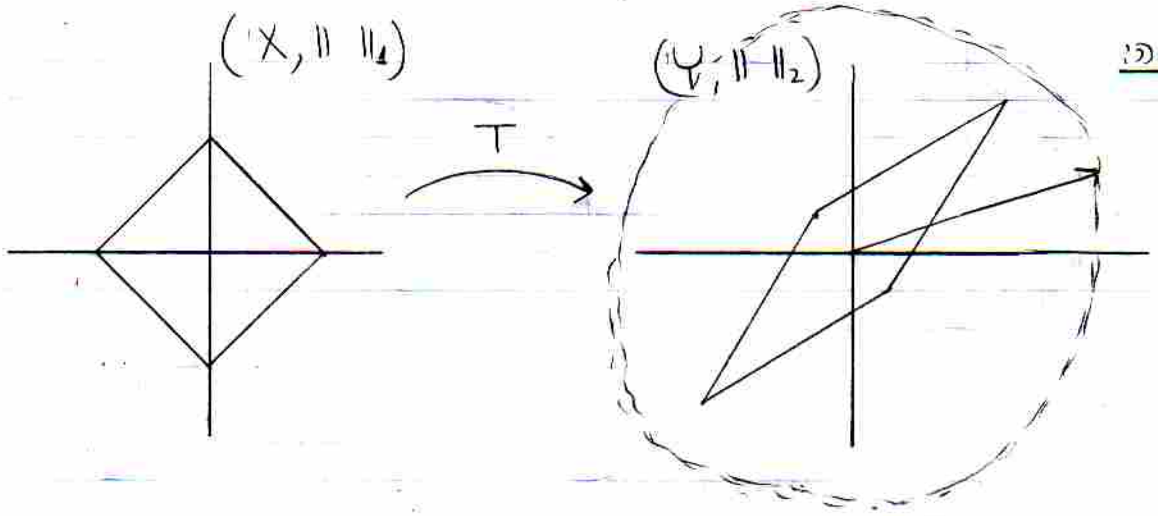
נתונים מרחבים נורמיים $(X, \|\ \|)$, $(Y, \|\ \|)$ אנחנו מסמנים את הנורמות באותו סימון אבל הן שונות וצריך לזכור ברור מההקשר לאיזו נורמה מתכוונים.

עבור העתקה לינארית $T: X \to Y$ נגדיר $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

$\|T\|$ נקראת הנורמה האופרטורית של T והיא תלויה הן בנורמה של X והן בנורמה של Y, כלומר, אם נחליף אותן נקבל נורמה אופרטורית חדשה.

נסמן $L(X,Y)$ – אוסף האופרטורים הלינאריים מ-X ל-Y בעלי נורמה סופית. אז $\|\cdot\|$ הנורמה האופרטורית הינה באמת נורמה של $L(X,Y)$. ההוכחה פשוטה ומושארת לקורא.

<u>דוגמה:</u>



ניקח כדור ברדיוס R שמכיל את $T($הכדור היחידה ב-$X)$ וניקח את ה-R המינימלי כזה.

<u>טענה:</u> R הנ"ל הוא הנורמה האופרטורית של T

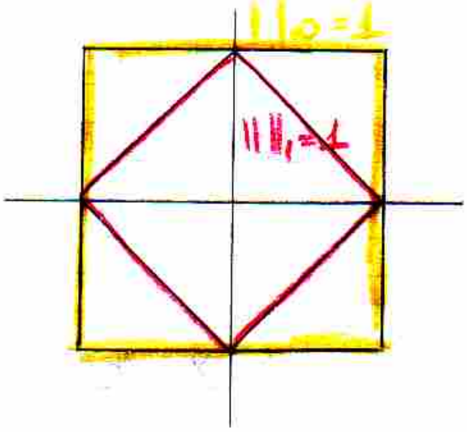
<u>הוכחה:</u> ברור מהנוסחה $\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|$ שמתקיים שהכדור ברדיוס $\|T\|$ סביב אפס ב-Y מכיל את תמונת הכדור ברדיוס 1 סביב אפס ב-X.

מצד שני, אם $T(B_X(0,1)) \subseteq B_Y(0,R)$ אז לכל $\|x\|=1$ מתקיים $\|Tx\| \le R$ ולכן $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \le R$

דוגמא:

נחשב את הנורמה האופרטורית של העתקת הזהות $Id:(\mathbb{R}^2,\|\|_p)\to(\mathbb{R}^2,\|\|_q)$

א) $p=1$ $\quad q=\infty$



כדור היחידה $\|\|_\infty$ מכיל את כדור היחידה $\|\|_1$ ואי אפשר להקטין את הרדיוס של הכדור הצהוב ולהשאיר את ההכלה $\Leftarrow$ $\|Id\|=1$

לפי הגדרה של הנורמה:

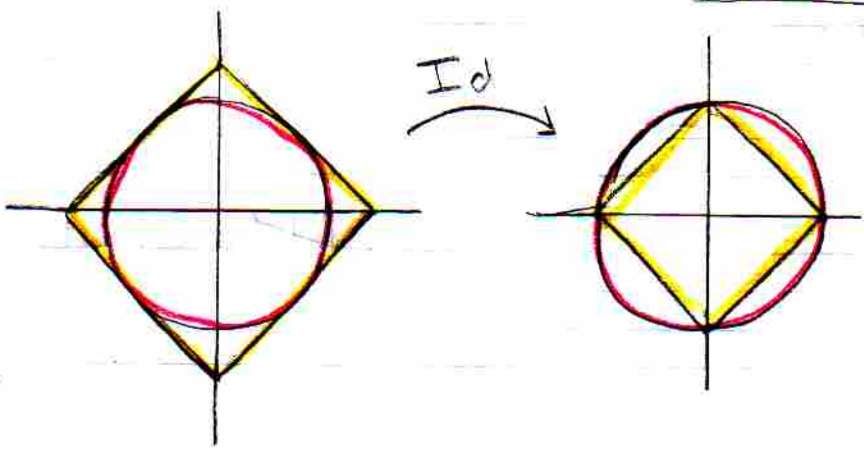
$\|x\|_1 \ge \|x\|_\infty$

לכן אם $\|x\|_1=1$ אז $\|Id(x)\|_\infty \le 1$ $\Leftarrow$ $\|Id\|\le 1$

אבל עבור $x=e_i$ מתקיים $\|Id(x)\|_\infty = 1 = \|x\|_1$

$\Leftarrow$ $\|Id\|=1$

ב) $q=1$ $\quad p=2$



מהציור רואים ש- $\|Id\|=\sqrt{2}$

בהמשך השיעור (עבור כל) $Y=X=(\mathbb{R}^n,\|\|_2)$.

הערה: כאשר מדברים על נורמת אופרטורים על $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ ולא מציינים במפורש איזו נורמות לוקחים על $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$, יש להבין שמדובר בנורמות האוקלידיות.

נזהה את המרחב $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ עם מרחב המטריצות $M_n(\mathbb{R})$.

<u>טענה 8</u> לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

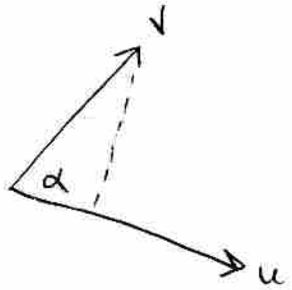
$$\|A\| = \max\{\langle Ax, y\rangle \mid \|x\| = \|y\| = 1\}$$

<u>הוכחה:</u> ראשית, נשים ♡ שהמקסימום

אכן מתקבל כי הפונקציה $(x,y) \longmapsto \langle Ax, y\rangle$

היא פונקציה רציפה על הקבוצה הקומפקטית

$$\{x : \|x\| = 1\} \times \{y : \|y\| = 1\}$$



$\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\alpha$
אם u וקטור יחידה
$\|v\|\cos\alpha \le \|v\|$

כעת, א"ש קושי שוורץ מבטיח לנו

שלכל x, y כך ש- $\|x\| = 1 = \|y\|$:

$$|\langle Ax, y\rangle| \le \|Ax\|\|y\| = \|Ax\| \le \max_{\|z\|=1} \|Az\| = \|A\|$$

מצד שני, נבחר $\|x\| = 1$ שמממש את הנורמה האופרטורית של A, כלומר $\|Ax\| = \max_{\|z\|=1}\|Az\| = \|A\|$.

נבחר $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ ונקבל

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{\|Ax\|}\langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\| = \|A\|.$$

☺

נזכור שלכל x, y מתקיים: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$.

<u>מסקנה:</u>

$$\|A^t\| = \max\{\langle A^t x, y\rangle : \|x\| = \|y\| = 1\} =$$
$$= \max\{\langle x, Ay\rangle : \|x\| = \|y\| = 1\} =$$
$$= \max\{\langle Ay, x\rangle : \|x\| = \|y\| = 1\} = \|A\|$$

<u>טענה:</u> $\|A^t A\| = \|A\|^2$

<u>הוכחה:</u> ראינו בכיתה שכאשר המכפלה $T \circ S$ מוגדרת אז $\|T \circ S\| \le \|T\|\|S\|$. $\Leftarrow$ $\|A^t A\| \le \|A^t\|\|A\| = \|A\|^2$

מצד שני, לכל בחירה של $\|x\| = 1 = \|y\|$ $\|A^t A\| \ge \langle A^t A x, y\rangle$

נבחר $x = y$ וקטור מנורמה 1 המממש $\|A\|$ ונקבל

$$\|A^t A\| \ge \langle A^t A x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 = \|A\|^2$$

$\Leftarrow$ $\|A^t A\| = \|A\|^2$ ☺

הערה: במקרה הכללי אין מהכרח שוויון ב- $\|T\circ S\| \le \|T\|\|S\|$

לדוגמא: $T=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad S=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ T\circ S\neq 0\ ,\ S\circ T=0$$

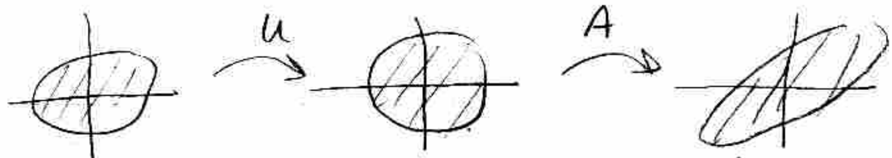
אבחנה: אם U מטריצה אורתוגונלית (מייצגת העתקה המעבירה בסיסים אורתונורמליים לבסיסים אורתונורמליים) אז לכל A

$$\|AU\|=\|UA\|=\|A\|$$

הוכחה: מטריצה אורתוגונלית מקיימת $\langle Ux,Uy\rangle=\langle x,y\rangle$ ובפרט $\|Ux\|=\|x\|$.

לכן כדור היחידה עובר תח"ע ועל כדור היחידה (ב- $\mathbb{R}^n$)

לכן



לאמור $A\left(\text{כדור היחידה}\right)=AU\left(\text{כדור היחידה}\right)$ ומכאן שוויון הנורמות.

מסקנות:

(1) אם $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$ אלכסונית אז $\|D\|=\max|\lambda_i|$

הוכחה: נבחר וקטור, ל- $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ רק ש $\sum x_i^2=1$

מתקיים $Dx=\begin{pmatrix}\lambda_1x_1\\ \vdots\\ \lambda_nx_n\end{pmatrix}$. לכן

$$\|Dx\|^2=\sum\lambda_i^2x_i^2\le(\max\lambda_i^2)\cdot\sum x_i^2=\max\lambda_i^2$$

נשיג שוויון אם נבחר $x=e_j$ כאשר $|\lambda_j|$ מקסימלי.

$$\left\|\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2=\|\lambda_je_j\|^2=|\lambda_j|^2$$

אינטואיציה: מטריצה אלכסונית מנפחת את הצירים לפי λ_i. אז בשביל לחסום את התמונה צריך כדור ברדיוס של הניפוח הכי גדול.

<u>מסקנה</u>: אם A נורמלית $(A^tA = AA^t)$ אז מאלגברה לינארית אנו יודעים שיש העתקה אורתוגונלית u שעבורה

$$uAu^{-1} = D_{\text{אלכסונית}}$$

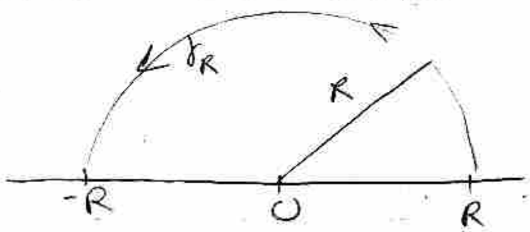
$$\Rightarrow \max|\lambda_i| = \|D\| = \|uAu^{-1}\| = \|A\|$$

<u>מסקנה</u>: ל-A כלשהי $AA^t = B$ היא סימטרית ובפרט נורמלית. ⇐ $\|B\|$ = מקסימום הערכים המוחלטים של הערכים העצמיים. אבל $\|A\|^2 = \|B\|$. לכן כדי למצוא את $\|A\|$ יש למצוא את הע"ע של AA^t ולקחת את השורש של המקסימלי מביניהם.

שימוש של שדות משמרים

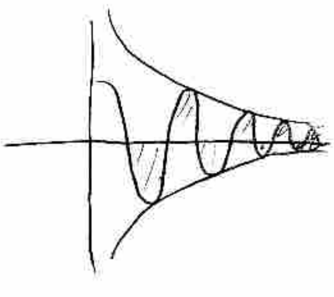
<u>הרעיון</u>: נניח שנתון שדה משמר על חצי המישור העליון
$\{(x,y): y \ge 0\}$

האינטגרל על מסילה סגורה יהיה 0.
⇐ האינטגרל מ- $(-R,0)$ עד $(R,0)$



יהיה אינטגרל על פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ (הבסיס של חצי המעגל) והוא שונה מ- $\int_{\gamma_R} F\,d\gamma_R$ - כאשר $\gamma_R = R(\cos t, \sin t)$
$t \in [0,\pi]$

למשל ידוע שהאינטגרל הלא אמיתי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ מתכנס בתנאי.
האינטגרל הוא סכום של שטחים עם סימנים מתחלפים
ונהפוך לטור לייבניץ ⇐ מתכנס.



תמון משדה

$$F(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))$$

$$P(x,y)=e^{-\frac{y}{x^2+y^2}}(x\sin x-y\cos x)$$

$$Q(x,y)=e^{-\frac{y}{x^2+y^2}}(x\sin x+y\cos x)$$

F מוגדר ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

טענה: F משמר לוקלית.

הוכחה: בדיקה קלה - $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

מסקנה: השדה משמר בחצי המישור העליון בלי 0
(כי הנ"ל פשוט קשר).

נחשב

$$\int_{\gamma_R}F=\int_0^{\pi}P(R\cos t,R\sin t)(-R\sin t)\,dt+$$

$$+\int_0^{\pi}Q(R\cos t,R\sin t)\cdot R\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi}e^{-R\sin t}\cdot\cos(R\cos t)\,dt$$

כאשר R שואף לאפס, האינטגרנד שואף במידה
שווה ל-1. לכן האינטגרל שואף ל-π.

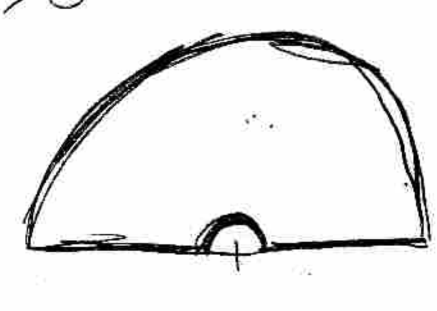
בהינתן $\varepsilon>0$ מתקיים:

$$\left|\int_0^{\pi}e^{-R\sin t}\cos(R\cos t)\,dt\right|\le\int_0^{\varepsilon}1+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}1+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}e^{-R\sin t}(\cos(R\cos t))\,dt$$

$\Leftarrow$ כאשר $R\to\infty$ הנ"ל $\geq$ $2\varepsilon+0$

משרירותיות ε נקבל ש-

$$\int_{\gamma_R}F\xrightarrow[R\to 0]{}0$$



(22) 25.12.06

תיקונים

דיפרנציאביליות

הגדרה: תהיינה קבוצה פתוחה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ופונקציה $f: A \to \mathbb{R}^m$ נאמר ש-f דיפרנציאבילית ב-$\vec{a} \in A$ אם קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ שעבורה

$$f(\vec{a}+h) = f(\vec{a}) + T(h) + o(\|h\|)$$

לחלופין

$$\frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

בכיתה למדנו ש-T יחידה (אם קיימת) ויש לה גם ייצוג מטריציוני $T = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})\right)$ כאשר $f = (f_1, \dots, f_m)$

הערות:

1. עבור $n = m = 1$ זו בדיוק הגדרת הנגזרת:
   - $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ זה פשוט הכפל בסקלר t_0
   - דיפרנציאביליות אומרת שקיים t_0 שעבורו

$$f'(a) = t_0 \Leftarrow \lim \frac{f(a+h) - f(a) - t_0 h}{h} = 0$$

2. מסילות גזירות: $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_m \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ מסילה. המשמעות של דיפרנציאביליות של γ הוא קיום וקטור $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ שעבורו

$$\lim \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a) - \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} h}{h} = 0$$

$$\lim \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{\gamma_i(a+h) - \gamma_i(a) - v_i h}{h} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

שזה שקול לכך ש-$\gamma_i: \mathbb{R} \supseteq$ גזירה ומתקיים $\gamma_i'(a) = v_i$.

במקרה $m=1$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

לכל $t \in \mathbb{R}$ הקבוצה $f^{-1}(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת "קו גובה"

הדיפרנציאל של f במקרה זה הינו וקטור שורה

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

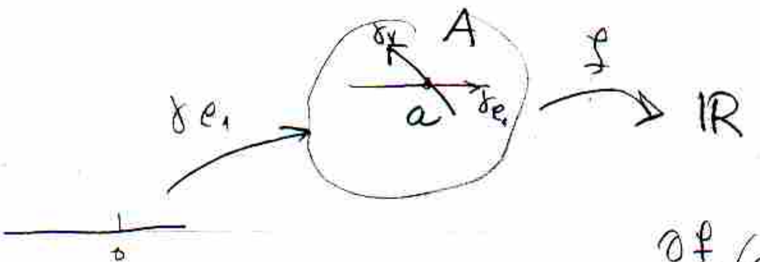
במקרה זה הדיפרנציאל $Df(a)$ מסומן ב- $\nabla f(a)$ (שהוא וקטור עמודה) ונקרא הגרדיאנט של f ב- a.

הדיפרנציאביליות אומרת ש-

$$f(a+h) = f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + o(\|h\|) =$$

$$= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(h)$$

נגזרת כיוונית:



$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_1) - f(a)}{t}$$

$$\gamma_{e_1}(t) = a + te_1$$

נשים ♡ ש- $\frac{\partial f}{\partial x_1} = (f \circ \gamma_{e_1})'(0)$

באופן דומה לכל $v \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\gamma_v(t) = a + tv$

הנגזרת של $f \circ \gamma_v$ ב $t=0$ נקראת הנגזרת הכיוונית של f בכיוון v ומסומנת $D(f,v)(a)$.

$$D(f,v)(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

מכלל השרשרת מתקבל

$$D(f,v)(a) = D_f(\gamma(0))\, D_{\gamma_v}(0) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \langle \nabla f(\gamma(0)), v \rangle =$$

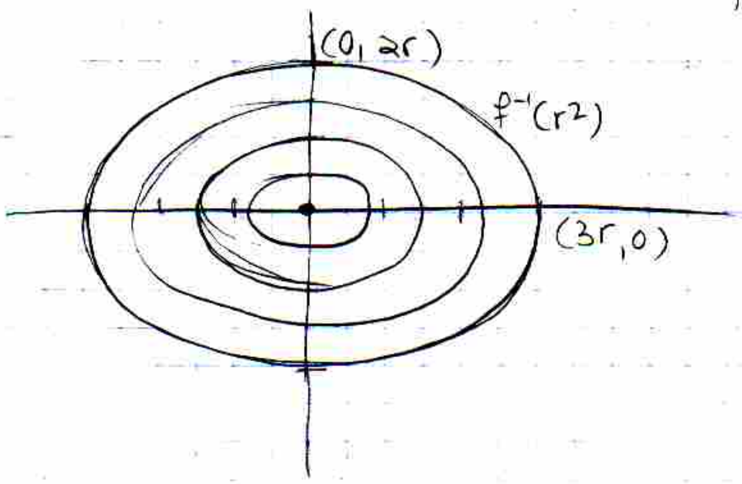
$$= \langle \nabla f(a), v \rangle$$

$\Leftarrow$ בשביל להבין את הנגזרות בכל הכיוונים מספיק להבין אותה בכיוונים של הבסיס הסטנדרטי.

נעיר רק שהשימוש במונח כיוון יכול להטעות כאן
כי הנגזרת הכיוונית תלויה ב-v ולא רק בכיוון שלו,
אבל אנחנו חושבים על v כעל וקטור כיוון.

<u>דוגמה</u>: $f(x,y)=\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2$

נצייר את קווי הגובה של f



הערה לגבי נגזרות כיווניות:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=D(f,v)(a)$$

אבל $f(a+tv)-f(a)=D_f(a)(tv)+o(t)$

נחלק ב-t ונשאיף לאפס ונקבל

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\langle\nabla f(a),v\rangle$$

<u>הערה לדוגמה</u>:

קיבלנו שקו הגובה שמתאים ל-r^2 הוא אליפסה.

נתבונן בביטוי $f(a+tv)-f(a)=\langle\nabla f(a),tv\rangle+o(t)$

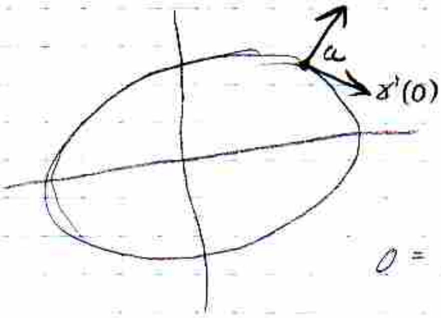
נקבל שקצב הגידול של f הוא מקסימלי בכיוון הגרדיאנט
כי הנגזרת הכיוונית בכיוון v הינה קצב הגידול של f
בכיוון זה ושווה $\langle\nabla f,v\rangle$. הנ"ל מקבל ערך מירבי
כאשר לוקחים את v בכיוון ∇f.

הגרדיאנט ניצב לקווי הגובה. המשמעות של המשפט הזה היא הבאה:

לכל מסילה גזירה $\gamma:(-1,1)\to\mathbb{R}^2$ שעוברת בזמן אפס

ב-a $(\gamma(0)=a)$ ותמונתה מוכלת בקו גובה $f=r^2$

מתקיים $\nabla f(a)\perp\gamma'(0)$



<u>הוכחה</u>: תהי γ מסילה כזו ונתבונן ב-

$r^2=f\circ\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לכן הנגזרת $=0$

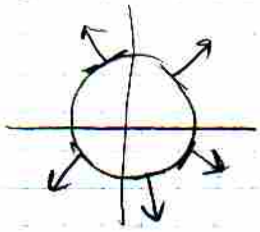
אבל לפי כלל השרשרת $0=Df(a)D\gamma(0)=\langle\nabla f(a),\gamma'(0)\rangle$

במקרה שלנו,

$$\nabla f(a_1,a_2)=\left(\tfrac{2}{3}a_1,\ a_2\right)$$

<u>דוגמא</u> שיותר קל לדמיין: $g(x,y)=x^2+y^2$

קווי הגובה הם מעגלים סביב הראשית



הגרדיאנט הוא $\nabla g(x,y)=(2x,2y)$

לדוגמא, בנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ $\nabla g\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=(\sqrt2,\sqrt2)$

<u>הערה</u>: (1) אם יש קו גובה עם פנים אז הגרדיאנט מתאפס בכל נקודה פנימית.

(2) אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מקבלת מקסימום/מינימום ב-a (a פנימית)

אז $\nabla f(a)=0$

הוכחה: אם $v=\nabla f(a)\neq 0$ אז

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}=\underbrace{\langle\nabla f(a),\nabla f(a)\rangle}_{>0\ (\text{לפי הנחה})}+\frac{o(t)}{t}$$

נבחר את $|t|$ מספיק קטן שעבורו מתקיים שתוספת $\frac{o(t)}{t}$ לא משנה את סימן $\|\nabla f\|^2$. ל-t חיובי זה מתקיים

$$f(a+tv)>f(a)\Leftarrow\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}>0$$

ועבור t שלילי נקבל ההיפך $f(a)>f(a+tv)$

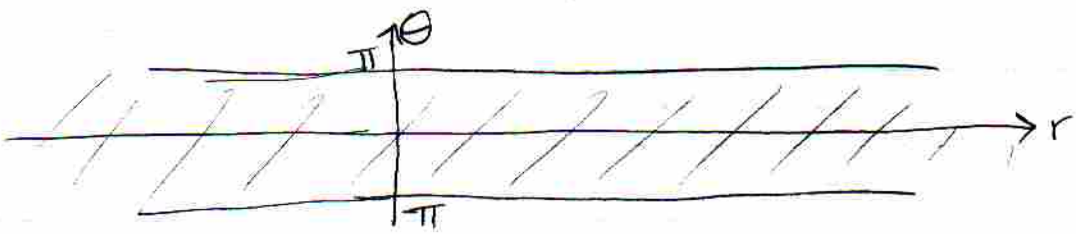
לכן a אינה נק' מינימום/מקסימום מקומי.

(24)

נניח שיש פונק' דיפר' $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ והיא מתפרקת
למשתנו גבהה. האם הם בהכרח יפים, כלומר
אנליטיים? לא!
אם דורשים שהדיפרנציאל משתנה בפתאומיות
בגלל הגבה לא בהכרח יפים...

קואורדינטות קוטביות

$$A = (0,\infty) \times (-\pi, \pi)$$



$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

נגדיר $c: A \to B$ ע"י

$$c(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

הדיפרנציאל הוא

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

<u>תרגיל</u>: מצאו נוסחה להופכית של c שנסמנה p
חשבו את הדיפרנציאל שלה והראו שכלל
השרשרת עובד.

25 11.07
ת.יגוני
שנה אזרחית טובה!

תרגול עם אייק

משפט הפונקציה ההפוכה

יהיו $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצות פתוחות, $f:U\to V$ דיפרנציאבילית ברציפות ב- $x_0\in U$ כך ש- $Df(x_0)$ הפיכה (כלומר $\det Df(x_0)\neq 0$). אז קיימת סביבה V_0 של $f(x_0)$ ופונקציה $g:V_0\to U$ כך ש- $f\circ g=id_{V_0}$ ובנוסף g דיפרנציאבילית ברציפות.

במקרה החד ממדי זה ברור. כי אם נגזרת פונקציה שונה מאפס אז יש סביבה שבה הפונקציה מונוטונית ולכן הפיכה.

חשוב לשים לב שמדובר בפונקציות בין מרחבים באותו ממד. אחרת אין בכלל משמעות לתנאי $\det Df(x_0)\neq 0$.

ש: הגוש תנין הסו ארוך יותר או ירוק יותר?
ת: ירוק יותר - כי הוא ארוך רק לאורך אבל הוא ירוק גם לרוחב.
~ אנונימית

דוגמא:
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$f(x,y)=(\underbrace{e^x\cos y}_{f_1},\ \underbrace{e^x\sin y}_{f_2})$$
$$a=(0,\tfrac{\pi}{3})\in\mathbb{R}^2$$
$$Df(x,y)=\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow Df(a)=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt3/2\\ \sqrt3/2 & 1/2\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \det Df(a)=\tfrac14+\tfrac34=1\neq 0$$

* אגב, הפונקציה דיפרנציאבילית כי מהנוסחה ברור שכל הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בכל $\mathbb{R}^2$ ובפרט בסביבה של a

$\Leftarrow$ כל רכיב של $Df(x,y)$ רציף כפונקציה של x,y לכן $Df(x,y)$ רציפה ו- f דיפרנציאבילית ברציפות.

נסמן $b=f(a)=(\frac12,\frac{\sqrt3}{2})$. בהינתן (u,v) בסביבה של b רוצים x,y כך ש- $f(x,y)=(u,v)$

צריך לפתור את המשוואות

$$e^x \cos y = u$$
$$e^x \sin y = v$$

בהנחה ש- $u \neq 0$ נניח $\cos y \neq 0$ ואז נחלק

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{v}{u}$$

ובכל אברה $e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = u^2 + v^2$

$$\Rightarrow e^{2x} = u^2 + v^2$$
$$\Rightarrow e^x = \sqrt{u^2+v^2}$$
$$\Rightarrow x = \ln\sqrt{u^2+v^2}$$

וזה בסדר כי אם $u \neq 0$ אז $u^2+v^2 \neq 0$

לכל k אפשר לפתור את $\tan y = \frac{v}{u}$ ע"י

$$y = \arctan\frac{v}{u} + \pi k$$

אני רוצים שיתקיים $\frac{\pi}{3} = \arctan\sqrt{3} + \pi k \Leftarrow k = 0$

סה"כ יוצא $(x,y) = (\ln\sqrt{u^2+v^2}, \arctan\frac{v}{u})$

נקרא לפונקציה זו g. g מוגדרת בסביבה של b

$$V_0 = \{(u,v) : u > 0\}$$

והחשבון שעשינו מראה ש- $f \circ g = id_{V_0}$.

הערות)תרגיל 8.

$n \geq 2$

(7) בל : פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית

היא קבועה על ספירות $\Leftarrow$ לכל x $Df(x) \parallel x$.

הוכחה:

$(\Rightarrow)$ נקבע $R > 0$ ונראה ש- f קבועה על $\partial B(0,R)$

נראה שלכל מסילה סגורה $\gamma : [0,1] \to \partial B(0,R)$ הפונקציה

$f \circ \gamma$ קבועה. זה מספיק כי לכל נקודה $x \in \partial B(0,R)$ יש

מסילה בין x-ה ל- Re_1. לכן לכל $x \in \partial B(0,R)$ $f(x) = f(Re_1)$

ומכאן שהפונקציה קבועה על הספרה.

נותר להראות ש- $f\circ\gamma \equiv const$

מספיק להראות ש- $(f\circ\gamma)' \equiv 0$.

לפי כלל השרשרת

$$(f\circ\gamma)'(t) = Df(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$$

ידוע ש- $Df(\gamma(t)) \parallel \gamma(t)$

אבל מצד שני $\langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle \equiv R^2$

$$\Rightarrow \gamma'(t)\gamma(t) + \gamma(t)\cdot\gamma'(t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \gamma'(t)\perp\gamma(t)$$

$$\Rightarrow Df(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = 0$$

($\Leftarrow$) נראה שאם f קבועה על ספירות אז $Df(x)=\nabla f(x)\parallel x$

צריך להראות שבהינתן x יש להראות שלכל $y\perp x$

מתקיים $\langle Df(x), y\rangle = 0$

<u>למה</u>: בהינתן $0\neq x\in\mathbb{R}^n$, $y\perp x$ יש ! מסילה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$

רק ש- $\|\gamma(t)\| = const$, $\gamma(\frac{1}{2})=x$, $\gamma'(\frac{1}{2})=y$

<u>"הוכחה"</u>: אם נגדיר x נמצא על e_1, ו-y על e_2 אז אפשר לבצע

העתקות אורתונורמליות פעמיים - פעם נסובב ככה ש"יצא

מה שאנחנו רוצים. ואז נפעיל העתקות הפוכות ונקבל את הדרוש.

בהינתן הלמה נשים לב ש- $f\circ\gamma = const$, לכן

$$0 = (f\circ\gamma)'(t) = Df(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$$

נציב $t=\frac{1}{2}$: $0 = Df(\underbrace{\gamma(\tfrac{1}{2})}_{x})\cdot\underbrace{\gamma'(\tfrac{1}{2})}_{y}$. אז לכל $x\neq 0$ ולכל

$x\perp y$ מתקיים $\langle Df(x), y\rangle = 0 \Leftarrow Df(x)\parallel x$. ☺

<u>שיטת ניוטון למציאת שורשים</u>

נתונה פונקציה $f:U\to\mathbb{R}^n$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה

ורוצים לפתור את המשוואה $f(x)=0$.

<u>משפט</u>: נניח שקיים $x_0\in U$ כך ש- $f(x_0)=0$, ! $Df(x_0)$ הפיכה ✓

נניח ש- f דיפרנציאבילית ברציפות. בהינתן $x_1\in U$

נסתכל על הסדרה $(x_n)\subseteq U$ ע"י $x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1}f(x_n)$

עבור x_1 קרוב מספיק ל-x_0 הסדרה תהיה מוכלת ב-U ותתכנס ל-x_0 בקצב מעריכי.

<u>דוגמה:</u> נניח $f(x)=Ax+b$ כאשר $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ו-$b\in\mathbb{R}^n$. נגדיר $x_0=-A^{-1}b$.
במקרה זה, לכל x_1 מתקיים

$$x_2 = x_1 - \underbrace{Df(x_1)^{-1}f(x_1)}_{A^{-1}(Ax_1+b)} = -A^{-1}b$$

$$x_3 = x_2 - A^{-1}f(x_1) = x_2 \Leftarrow f(x_2) = A(-A^{-1}b)+b = 0 \Leftarrow$$

ובאותו אופן $x_n = x_2$ לכל n ובאמת $x_n \to x_0 = x_2$ $\square$

<u>למה:</u> תהי $f:U\to\mathbb{R}^n$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וקמורה.
f דיפרנציאבילית ברציפות. אם $a,b\in U$
אז $\|f(a)-f(b)\| \le \|a-b\| \max_{t\in[0,1]} \|Df(ta+(1-t)b)\|$

לכל שתי נקודות מהקבוצה הישר שמחבר ביניהן הוא גם בקבוצה

<u>הוכחת המשפט:</u> בהינתן (x_n) נבצע הערכה:

$$\|x_0-x_{n+1}\| = \|x_0-(x_n-Df(x_n)^{-1}f(x_n))\| =$$

$$= \|x_0-x_n+Df(x_n)^{-1}(f(x_n)-\underbrace{f(x_0)}_{0})\| =$$

$$= \|x_0-x_n+Df(x_n)^{-1}(Df(x_0)(x_n-x_0)+\alpha(x_n-x_0))\| \le$$

$$\alpha(y)=o(\|y\|)$$

$$\le \|(x_0-x_n)+Df(x_n)^{-1}Df(x_0)(x_n-x_0)\| + \|\alpha(x_n-x_0)\|$$

כאשר x_n קרוב ל-x_0 אז $Df(x_n)^{-1}Df(x_0)\sim Id$
(בגלל שהפונקציה גזירה ברציפות). אז אם אנחנו
בסביבה מספיק קטנה $\|x_0-x_{n+1}\| \le \frac{3}{4}\|x_0-x_n\|$
אז בכל איטרציה אנחנו מתקרבים יותר ויותר ל-x_0 שזה
מה שרצינו.

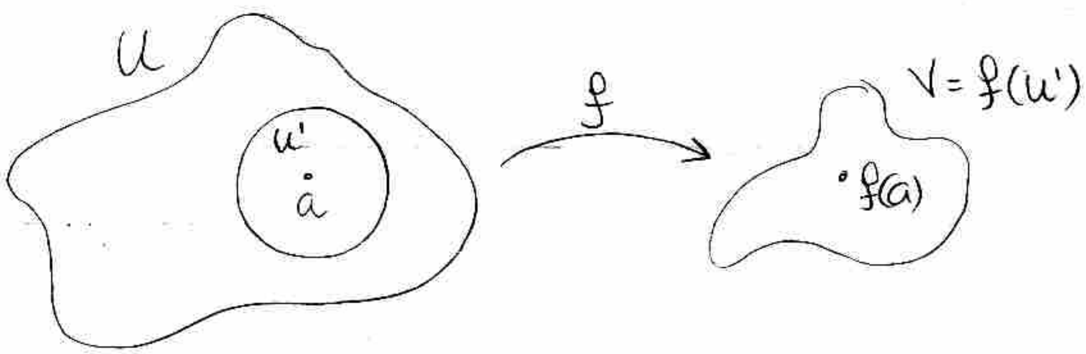
(27) 8.1.07
ת. איפ'

ההודעה של עדו מפילגת מהוואר!

* * *

משפט הפונקציה ההפוכה:

נתונה פונקציה $f: U \to \mathbb{R}^n$ כאשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$
סביבה של a (כלומר U פתוחה המכילה את a או לחילופין
U מכילה כדור פתוח סביב a)
אם f דיפרנציאבילית ברציפות ב- a ו- $\det Df(a) = J_f(a) \neq 0$
אז ישנה סביבה פתוחה $U' \subseteq U$ של a כך ש- $f(U') = V$
היא קבוצה פתוחה (סביבה פתוחה של $f(a)$), $f|_{U'}$
חח"ע והפונקציה ההפוכה $f^{-1}: V \to U'$ דיפרנציאבילית
ברציפות ב- $f(a)$.



שלבים חשובים בהוכחת המשפט:

(1) להראות ש- $J_f(a) \neq 0$ אומר ש- f חח"ע בסביבת a
(2) להראות שהתמונה מכילה סביבה של $f(a)$
(3) לבסוף שקיימת הופכית בסביבה קטנה וצריך להוכיח דיפרנציאביליות

זה משפט עם אופי מקומי. יש לנו מידע על נקודה והמשפט
נותן מידע על סביבה אבל יכול להיות שהיא קטנה מאוד.
המשפט הנ"ל עוזר לנו בהוכחת קיום הופכית <u>דיפרנציאבילית</u>.
הוא לא עוזר במציאת נוסחה, אלא רק בהוכחת הקיום.

דיפרנציאביות ברציפות

<u>דוגמה</u>: נניח ש- $f:U\to\mathbb{R}^n$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה.

נניח ש- $Jf(x)\neq 0$ לכל $x\in U$

המשפט מאפשר לנו לכסות את U ע"י קבוצות קטנות $\{U_x\}_{x\in X}$ כך ש- $f(U_x)=V_x$ פתוחה, $f|_{U_x}$ חח"ע ! $f^{-1}:V_x\to U_x$ דיפרנציאבילית ברציפות.

אם במקרה f חח"ע על U אז מוגדרת $f^{-1}:V\to U$ ואז V פתוחה ! ו- f^{-1} דיפרנציאבילית ברציפות.

הסבר: * לכל $f(x)\in V$ ראינו ש- $f(U_x)=V_x\ni f(x)$ הינה סביבת $f(x)$ המוכלת ב- V אלכן V פתוחה.

* הדיפרנציאביליות נובעת מיידית מהדיפרנציאביליות של $f|_{U_x}$ לכל x, שהרי דיפרנציאביליות היא תכונה מקומית.

<u>דוגמה</u>: נזהה את $\mathbb{R}^2$ עם המישור המרוכב ע"י

$$(x,y)\leftrightarrow x+iy=z$$

אז אם $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציה, ניתן לחשוב כעל פונקציה $(u,v)=f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

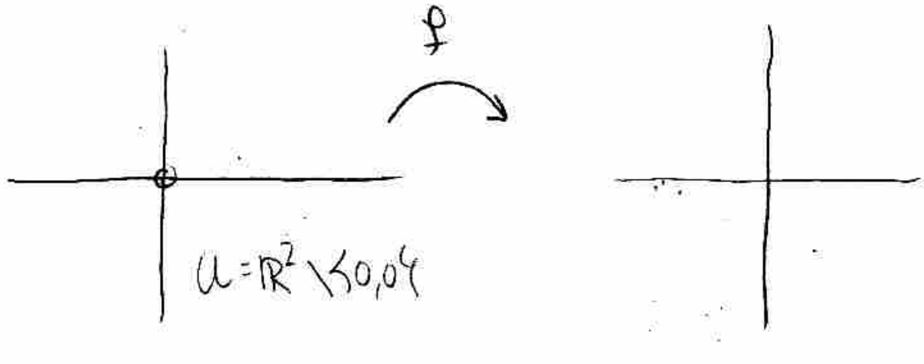
למשל $f(z)=z^2=x^2-y^2+i\cdot 2xy$

$$(u(x,y),v(x,y))=(x^2-y^2,\ 2xy)$$

$$\Rightarrow Df(x,y)=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Jf(x,y)=(2x)^2+(2y)^2$$

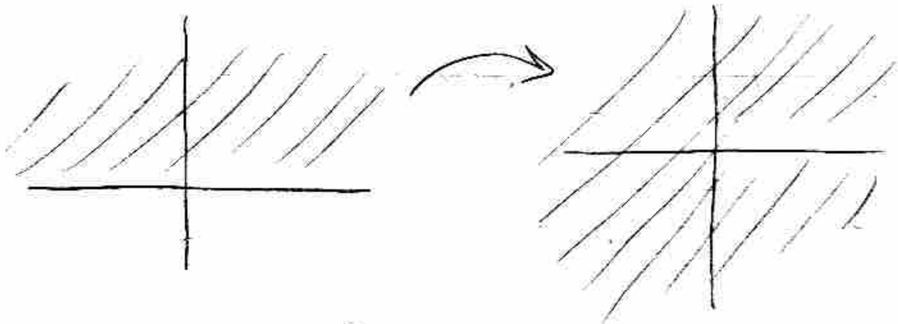
$$Jf(x,y)\neq 0 \iff (x,y)\neq(0,0)$$



היעקוביאן אינו מתאפס בכל הנקודות שאינן בראשית,
אז באופן נקודתי יש פונקציות הופכיות.
נחפש קבוצה פתוחה גדולה שבה יש פונקציה הופכית.

מה זה כפל של מספרים מרוכבים?
- מחברים את הזוויות וכופלים את הגדלים.

$\Leftarrow$ הקבוצה הפתוחה חצי המישור העליון עוברת
ל- $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0): x\geq 0\}$.



$U=\{(x,y): y>0\}$ $\quad$ $V=\{(x,y): y\neq 0 \vee x>0\}$

$\Leftarrow$ ישנה פונקציה הופכית שנסמנה $z^{1/2}: V\to U$
ומאחר שאנחנו יודעים שהיא דיפרנציאבילית ברציפות ונוכל
לחשב את הדיפרנציאל?

$$D\varphi^{-1}(x^2-y^2, 2xy) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}^{-1}$$

הגדרה: פונקציה מהמישור למישור $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (גם) נשאל
ואם קיים הגבול הבא קיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\in\mathbb{C}$$

מותר לחלק ב-h כי זה מספר מרוכב

אם כן נסמן את הגבול ע"י $f'(z_0)$.
נניח שנתונה f כנ"ל והיא גזירה ברציפות, נאמר $f'(z)$ קיימת ורציפה

האם ניתן לומר משהו על הדיפרנציאביליות של f כאשר מסתכלים עליה כפונקציה מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}^2$?

נרשום
$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$
$$(f(x,y)=(u(x,y),v(x,y)))$$

עתה ש- $h=h_1+ih_2$ יתקיים

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=$$

$$=\frac{u(x_0+h_1,y_0+h_2)+iv(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{h_1+ih_2}$$

$$=\frac{u(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)}{h_1+ih_2}+i\frac{v(x_0+h_1,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)}{h_1+ih_2}$$

מאחר שהגבול קיים (יש להשאיף את h לאפס על ציר ה- x, כלומר $h_2\equiv 0$ ו- h_1 שואף לאפס ונקבל

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

כלומר, העובדה ש- $f'(z_0)$ קיימת אומרת לנו ש- $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ קיימות ושמתקיים השוויון (*).

כעת נשתמש שוב בעובדה שהגבול קיים כאשר $h\to 0$ ונשאיף לאפס רק $h_1\equiv 0$ (כלומר על ציר ה- y). ואז:

$$f'(z_0)=-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)&=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)&=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{aligned}\right\} **$$

$f(x,y)$ דיפרנציאבילית (כי הנגזרות החלקיות קיימות ומהנתון ש- $f'(z)$ רציפה אזי הן רציפות)

(29)

והדיפרנציאל הוא מהצורה

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_f = a^2 + b^2$$

גזירה ברדיוס $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

אז יש שני מקרים : או של-f יש הופכית מקומית (כי $J_f \neq 0$) או שהדיפרנציאל מתאפס

<u>הערה:</u> המשוואות (**) נקראות משוואות קושי רימן

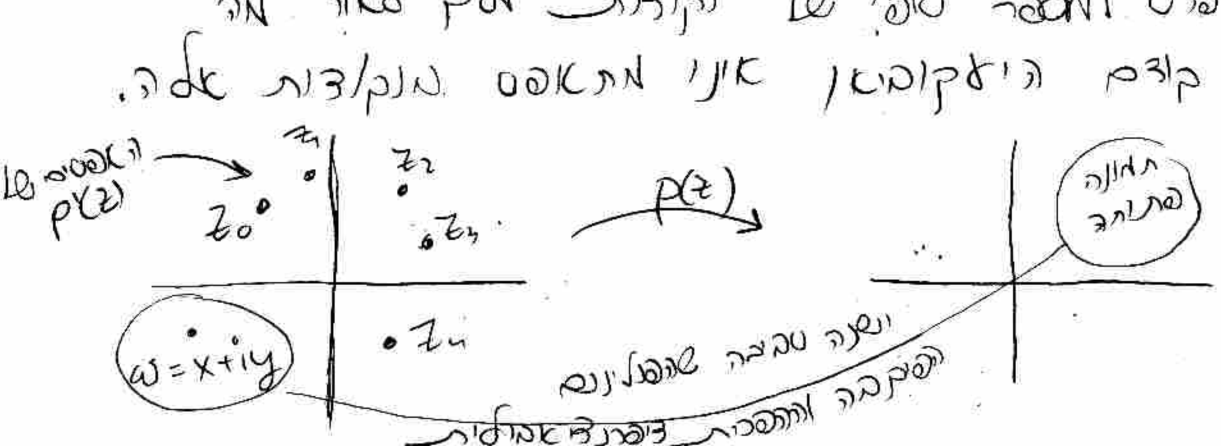
<u>דוגמה:</u> ההעתקה הלינארית $z \to \bar{z}$, $(x,y) \to (x,-y)$ דיפרנציאבילית עם דיפרנציאל $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ שלא מקיים את משוואות קושי רימן ולכן זו לא העתקה גזירה במובן שהגדרנו באף נקודה (כי מהגזירות הסקנו את קיום המשוואות).

באותה דרך כמו בחדו"א 1 מראים שאם f,g גזירות (במובן המרוכב) אז $f\circ g$, $f+g$ גזירות ואם $g \neq 0$ גם f/g ומתקיימת אריתמטיקה של נגזרות.

ברור שפונקציית הזהות $f(z)=z$ גזירה ; $f'(z)=1$

ולכן פולינומים הם גזירים ואנחנו יודעים לגזור אותם.

<u>מסקנה:</u> בהינתן פולינום $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ אז ל-$p'(z)$ שהוא פולינום יש מספר סופי של אפסים $\Leftarrow$ הדיפרנציאל של p כפונקציה מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^2$ אינו אפס פרט למספר סופי של נקודות ולכן לאור מה שנאמר קודם היעקוביאן אינו מתאפס מנקודות אלה.



(30) 15.1.07
ת. אינפי'

כופלי לגרנז'

נתונה $D \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ! $f: D \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית ברציפות. מחפשים מינימום/מקסימום מקומי של f תחת אילוצים המוגדרים ע"י משוואות $\{g_i(x)=0\}$

כל אחד מהאילוצים מוריד את המימד של הקבוצה שבה אנחנו מחפשים נק' קיצון.

לדוגמא - מעגל במישור מוגדר ע"י הנוסחה $x^2+y^2=1$
אז $g(x,y)=x^2+y^2-1$

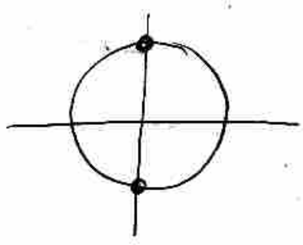
מעגל במרחב $\mathbb{R}^3$ צריך להיות מוגדר ע"י שני אילוצים:
$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-1=0$$
$$g_2(x,y,z)=z=0$$

משפט: (סמן $M=\{x\in D : \forall 1\le i\le k \ g_i(x)=0\}$ נק' אילוץ)
אם $x_0\in M$ מינימום או מקסימום מקומי של f ביחס ל-M
אז $\nabla g_i(x_0) \parallel \nabla f(x_0)$

מסקנה: אם x_0 נקודת קיצון ביחס ל-M ; $\nabla g_i(x_0)$ בת"ל אז ישנם סקלרים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ שעבורם
$$\nabla f(x_0)=\sum \lambda_i \nabla g_i(x_0)$$

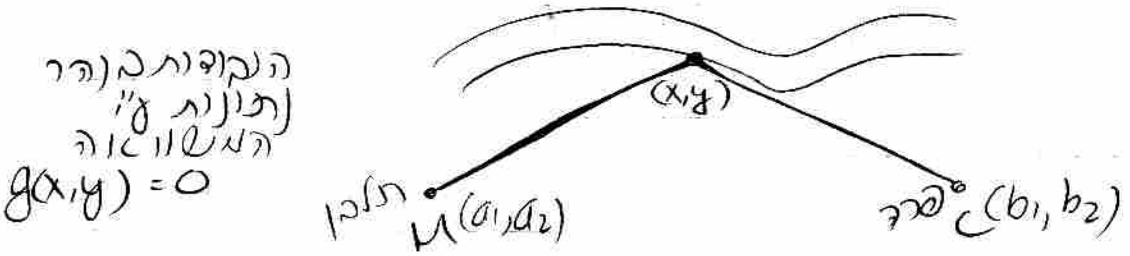
דוגמא לחשיבות "הקיצון" ביחס ל-M ":

$f(x,y)=y \qquad g(x,y)=x^2+y^2-1$



בכל $\mathbb{R}^2$ אין לפונקציה הזאת לא מקסימום ולא מינימום. אבל על המעגל M $(0,1)$ נק' מקסימום מקומי ו- $(0,-1)$ נק' מינימום מקומי.

דוגמא: יש חלבן שצריך להביא מים לפרה שלו והוא רוצה לעשות את זה בדרך המהירה ביותר - כלומר במסלול הקצר ביותר.

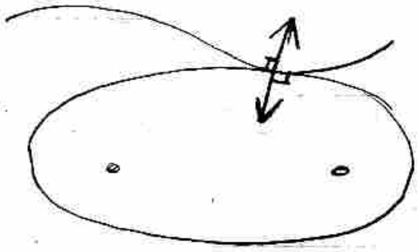


רוצים למצוא מינימום גלובלי לפונקציה

$$f(x,y) = d((x,y),(a_1,a_2)) + d((x,y),(b_1,b_2))$$

תחת האילוץ $g(x,y) = 0$.

קווי הגובה של $f(x,y)$ הם אליפסות. האליפסה המינימלית שתיגע בנהר תיגע בו בנקודה שאליה כדאי לחלבן ללכת. הנקודה הראשונה הזאת היא נקודת השקה בין הנהר לאליפסה ואז הגרדיאנטים של f ו- g צריכים להיות מאונכים לקווי הגובה (זה נכון תמיד) אבל בנקודת ההשקה האנך הוא זהה גם ל- g וגם ל- f.



הערה: לגבי המשפט מספר הנעלמים בניסוח המתוקן למשפט כופלי לגרנז') הוא $n+k$

הנקודה x_0 ; λ_i - אילוצים

ויש גם $n+k$ משוואות

מהמשוואה הגרדיאנט $\nabla f = \sum \lambda_i \nabla g_i$; מהאילוצים

אז יש סיכוי שנוכל לפתור את מע' המשוואות.

דוגמה לשימוש במשפט

רוצים למצוא מימדי ארגז מנפח קבוע מראש V בעל שטח פנים מינימלי.

$$f:\{(x,y,z): x,y,z>0\} \to \mathbb{R}$$

$f(x,y,z) = xy+yz+xz$ - חצי משטח הפנים.

רוצים מינימום של f על האילוץ

$$g(x,y,z) = xyz - V = 0$$

$$\nabla g(x,y,z) = (yz,\ xz,\ xy)$$

מתקיים שגם $\nabla g \neq 0$

* לפני שמשתמשים את כל זה צריך קודם להוכיח שבכלל קיים מינימום לפונקציה הזאת.

נוכיח תחילה מדוע קיים מינימום (זה שלב חשוב! הרבה פעמים אנשים מאבדים פה נקודות).

נרצה למצוא קבוצה קומפקטית שבה f תקבל מינימום בפנים שלה כך שמחוץ לקבוצה הזאת f מקבלת רק ערכים מאוד גדולים, ולכן נקבל שגם המינימום של f מתוך הקומפקט הוא גם מינימום גלובלי.

נתונים ש- (x,y,z) בקבוצת האילוץ - $xyz=1$ ($V=1$ נניח).

נרצה למצוא $R>0$ כך שאם $x>R$ אז:

$$f(x,y,z) >> f(1,1,1) = 3$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

אם $y<z$. אז $1 = xyz > R y^2$

מתקיים $\frac{1}{y} > \sqrt{R} \Leftarrow y^2 < \frac{1}{R}$

לכן כל מה שצריך לבחור הוא R שעבורו $R>9 \Leftarrow \sqrt{R}>3$

קבוצת האילוץ היא סגורה $g^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z): xyz=1\}$

כי קבוצה סגורה ו- g רציפה $\Leftarrow$ האילוץ קבוצה סגורה.

נחתוך את האילוץ עם התיבה $\{(x,y,z): \|(x,y,z)\|_\infty \le 9\}$ ונקבל קבוצה קומפקטית.

מאחר ש- f רציפה יש לה מינימום על הקומפקט הזה.

המינימום הזה הוא מינימום גלובלי של האילוץ כי מחוץ לתיבה
f מקבלת על האילוץ רק ערכים גדולים מ-3 שהוא ערך
שאינו מתקבלת בתוך התיבה.
נשאר לפתור את המשוואות:

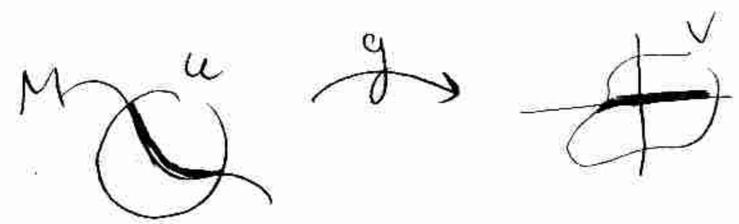
$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

תרגול - לפתור את מע' המשוואות.

משפט הפונקציות הסתומות

הגיוני להגדיר שקב' $M \subseteq \mathbb{R}^n$ הוא $n-k$ מימדית
אם מקומית היא גרף של פונקציה ב- $n-k$ משתנים.
למשל המעגל $x^2+y^2=1$ הוא חד ממדי במישור.

אפשר להסתכל על זה גם ככה: אפשר ליישר את M ע"י
סביבות u כך שקיימת $g: u \to v$ פונק' דיפ' עם הופכית
דיפ' למרחב ה- $n-k$ ממדי $\{(x_1,\dots,x_{n-k},\underbrace{0,\dots,0}_{k})\} = V$



(32) 22.1.07
ת' אופ'

משפט הפונקציות הסתומות

נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ברציפות ואנחנו רוצים לדעת איך נראה קו גובה של f (קו גובה של נק' $p\in\mathbb{R}^n$ זו קבוצת המקורות $f^{-1}(f(p))$).

הנחת הרציפות של f גוררת שקו גובה הוא קבוצה סגורה (כמקור של נקודה).

משפט הפונקציות הסתומות אומר לנו איך נראה קו הגובה בסביבה קטנה. זהו משפט לוקאלי, כלומר נותן מידע על קו הגובה העובר דרך p רק בסביבה קטנה של p.

המסקנה מהמשפט היא שקו גובה הוא גרף של פונקציה $g:\mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}^k$ (בהינתן $U\subseteq\mathbb{R}^{n-k}$, $V\subseteq\mathbb{R}^k$ ופונקציה דיפרנציאבילית ברציפות $g:U\to V$ הגרף שלה הוא $\{(x,g(x)) : x\in U\}\subseteq U\times V\subseteq\mathbb{R}^n$)

באופן יותר מדויק, ההנחה במשפט היא ש- $Df(p)=\boxed{\begin{matrix}-\nabla f_1-\\ \vdots \\ -\nabla f_k-\end{matrix}}$ היא מדרגה k. מההנחה נובע שניתן לבחור k עמודות בת"ל. לצורך פשטות הסימון נניח שמדובר בעמודות שמתאימות ל- $x_{n-k+1},\dots,x_n$ ואז המסקנה היא שיש קבוצות פתוחות $(p_1,\dots,p_{n-k})\in U\subseteq\mathbb{R}^{n-k}$, $(p_{n-k+1},\dots,p_n)\in V\subseteq\mathbb{R}^k$ כך שקו הגובה של p בתוך $U\times V$ הוא בדיוק גרף של פונקציה $g:U\to V$ גזירה ברציפות.

באופן כללי, אם נתונה חלוקה של הצירים ב- $\mathbb{R}^n$ $I\cup J=\{1,\dots,n\}$ כאשר $|J|=k$ ו- $|I|=n-k$ אז אם העמודות ב- $Df(p)$ המתאימות למשתנים מ- J הן בת"ל אז המשפט נותן לנו קבוצות פתוחות U ו- V סביב p_I = הטלת p על $\mathbb{R}^I$ וסביב p_J = ההטלה של p על J ופונקציה דיפרנציאבילית ברציפות $g:U\to V$ כך שקו הגובה הוא הגרף של g בסדר הקואורדינטות של I.

דוגמה: תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ העתקה לינארית. לכן $Df(x)=f$
נניח ש- $\operatorname{rank} Df = k$ $\Leftarrow$ בהצגה של f ע"י מטריצה יש k עמודות
בת"ל. נניח לשם הפשטות שמדובר ב-k העמודות הראשונות. ניתן להציג את
f ע"י מטריצה מהצורה $k\{\underbrace{A}_{k}\,\underbrace{B}_{n-k}$. איך f פועלת על וקטורים?

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\left(\frac{y}{x}\right) = Ay + Bx$$

$f(y,x)=0$ אמ"מ $Ay+Bx=0$ אמ"מ $y=-A^{-1}Bx$
כלומר קו הגובה (הגרעין של f) הוא אוסף הנקודות ב-$\mathbb{R}^n$ מהצורה

$$\{(-A^{-1}Bx, x) : x\in\mathbb{R}^{n-k}\}$$

מסקנה: אם $f:\mathbb{R}^9\to\mathbb{R}^7$ דיפרנציאבילית ברציפות ויש נקודה ב-$\mathbb{R}^9$ שבה הדרגה מקסימלית (כלומר שווה 7) אז f איננה חח"ע.

תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית ברציפות. נניח ש- $\nabla f(p)\left(\ldots\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_p\ldots\right)\neq 0$ ניתן להפעיל את משפט הפונקציות הסתומות.
לכל $1\le j\le n$ שעבורו $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\neq 0$ נקבל פונקציה $X_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$
שמוגדרת בסביבת $(p_1,\dots,p_{j-1},p_{j+1},\dots,p_n)$ ומתקיים $f(x_1,\dots,x_{j-1},X_j,x_{j+1},\dots,x_n)\equiv f(p)$
בסביבה הנ"ל. את הזהות הזאת אפשר לגזור: לכל $1\le i\ne j\le n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial X_j}{\partial x_i}=0$$

היות והנחנו ש- $\frac{\partial f}{\partial x_j}\neq 0$ $\Rightarrow$ $$\frac{\partial X_j}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_j}}$$

קל לראות שאם $n=3$; $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\neq 0$ $j=1,2,3$ אז יש לנו פונק'

$$X_1(x_2,x_3),\quad X_2(x_1,x_3),\quad X_3(x_1,x_2)$$

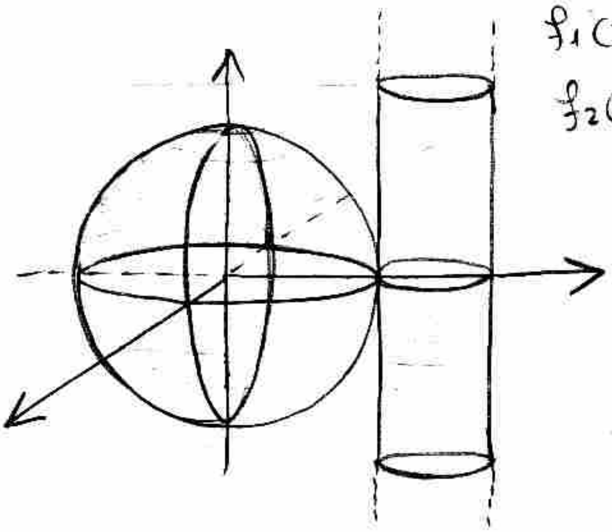
המוגדרות בסביבת הנקודה המתאימות ומתקיים

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_1}=-1$$

דוגמא: אם המשפט יכול להכשל ?

נבנה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f=(f_1,f_2)$.

נשים לב שקו גובה של f הוא חיתוך של קוי גובה של f_1 ו- f_2.



נגדיר $f_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$f_2(x,y,z)=(x-2)^2+y^2$

קו הגובה של $f=(f_1,f_2)$ שעובר בנקודה $(1,0,0)$ או לחילופין הקו המוגדר ע"י $f^{-1}(1,1)$.

אבל $f^{-1}(1,1)$ מכיל רק נקודה אחת

⇐ משפט הפונקציות הסתומות נכשל

כי קו הגובה הזה אינו גרף של פונקציה מקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}$ לקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$.

למה?? נשים לב ש- $Df(1,0,0)=\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$

כלומר הדיפרנציאל אינו מדרגה מלאה.

$$Df(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x&2y&2z\\2(x-2)&2y&0\end{pmatrix}$$

נשים לב שבכל סביבה של $(1,0,0)$ נוכל למצוא דיפרנציאל להיות מדרגה 2.

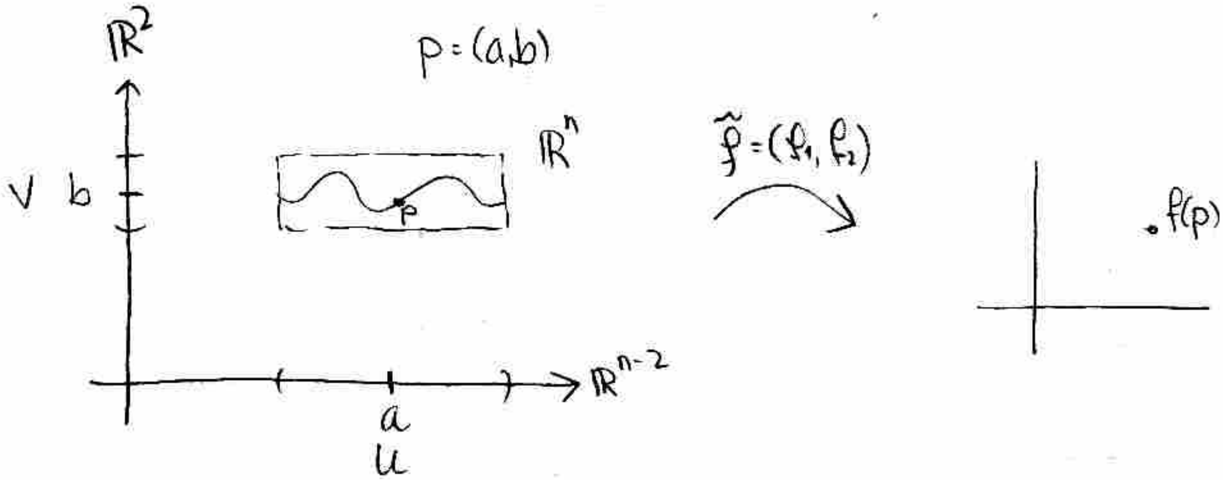
חיזוק למשפט הפונקציות הסתומות:

אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ברציפות ו- $\operatorname{rank} Df(x)=2$ בסביבת הנקודה p. אזי קו הגובה הוא גרף של פונקציה ב- $n-2$ משתנים.

<u>הוכחה</u>: נניח למשל ש- $\nabla f_1, \nabla f_2$ הם בת"ל מנקודה p. נתבונן ב- $\tilde f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $\tilde f=(f_1,f_2)$ אזי

$$D\tilde f(p)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1-\\-\nabla f_2-\end{pmatrix}$$

והוא מדרגה 2 ולכן ניתן להפעיל את משפט הפונקציות הסתומות.
קיימות קבוצות פתוחות $U\subseteq\mathbb{R}^{n-2}$, $V\subseteq\mathbb{R}^2$ ופונקציה גזירה ברציפות $g:U\to V$ כך שקו הגובה של $\tilde f$ ב- $U\times V$ הוא הגרף
$\{(x,g(x)) : x\in U\}$



נניח ש- f קבועה על הגרף הזה וזה יאמר שהוא קו גובה של f.
נגזור את $\tilde{f}\circ g$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} -\nabla f_1- \\ -\nabla f_2- \end{pmatrix} \boxed{Dg} = \begin{pmatrix} -0- \\ -0- \end{pmatrix}$$

ואם נגזור את $f\circ g$ נקבל

$$\boxed{\begin{matrix} -\nabla f_1- \\ -\nabla f_2- \\ \vdots \\ -\nabla f_k- \end{matrix}} \boxed{Dg} = \boxed{\begin{matrix} -0- \\ -0- \\ \vdots \end{matrix}}$$

אבל ∇f_1, ∇f_2 ניצבים לעמודות של Dg ולפי ההנחה יתר
ה ∇f_i הם צירוף לינארי שלהם. $\Leftarrow$ יש ניצבות גם שם..
$\Leftarrow$ $f\circ g$ קבועה.