27-2-2007

מבוא - תרגול מס' 1

מתרגל (כרגע): יוסי שמאי
yossish@math..
בניין מתמטיקה חדר 308
טלפון: 052-3243398
שעות קבלה: יום ג' 18:00 - 19:00
(בניין קנדה)

חובת ההגשה היא 100% אם מחשבים 70% טובים ביותר.

הקורס הוא ברובו טכני, פחות נעסוק במשפטים ויותר נעסוק בחלק הפרקטי של החומר.

התרגילים והפתרונות יהיו באתר של המתרגל שכרגע under construction.

היום נעשה חזרה בעיקר על אינטגרלים: (על שיטות שונות של אינטגרציה: הצבה, חלקים ושל פונקציות רציונליות).

שיטת ההצבה:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \qquad *$$

הצבה

$$\begin{cases} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{cases} \Downarrow \quad dx = \frac{dt}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$\int tgx\,dx = \qquad *$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

$$\begin{cases} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{cases} \quad dx = -\frac{dt}{\sin x}$$

אינטגרציה בחלקים:

$$* \quad \int x e^x dx =$$

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv \qquad \begin{cases} u' = e^x \\ v = x \end{cases}$$

$$= e^x \cdot x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$$

$$* \quad \int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = \quad x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1)$$

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln x \end{cases}$$

זה מראש מוגדר ל- $x>0$ ולכן
לא שמנו ערך מוחלט

$$* \quad \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin x\,dx$$ (נרצה לפתור זאת בחלקים)

$$= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx = \underbrace{-\cos x \sin x \Big|_0^{\pi}}_{0} + x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \pi - \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$\begin{cases} u' = v = \sin x \\ \end{cases}$$

ועכשיו ניתן להעביר אגפים ולקבל:

(אחרי שנציב את תחום האינטגרציה:

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

אם נשאל מה הערך של האינטגרל הזה בתחום $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

דרך נוספת לפתור את האינטגרל הזה היא להשתמש בזהות:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

ואז האינטגרל פשוט יותר

$$* \int \operatorname{arctg} x\,dx = \int 1\cdot\operatorname{arctg} x\,dx =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|$$

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1+x)}$$

אינטגרלים רציונליים:

$$* \quad \int\frac{1}{1-x^2}dx =$$

$$\int\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx = A\int\frac{1}{1-x} + B\int\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{1}{1-x}dx}_{=-\ln|1-x|} + \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{1}{1+x}dx}_{=\ln|1+x|}$$

$$* \int\frac{2+x}{1+x+x^2}dx :$$

לפולינום ממעלה שניה יש 3 אפשרויות:
פריק עם שורש אחד
פריק עם שני שורשים
אי-פריק

נעשה למונה השלמה לנגזרת של המכנה

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x+1}{1+x+x^2}dx}_{=\ln|1+x+x^2|} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{1+x+x^2}$$

עכשיו נחשב את האינטגרל הזה ונשים לב כי הפולינום במכנה אי-פריק.

$$\int\frac{dx}{1+x+x^2} = \int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int\frac{dt}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{du}{u^2+1} :$$

נעשה השלמה לריבוע

$t = x+\frac{1}{2}$

$dt = dx$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg} u + C$$

$$* \int \frac{dx}{1+2x+x^2} = \int \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x} + C$$

$$* \int \frac{x^4}{1+2x+x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{p(x)}_{\text{פולינום}} + \frac{r(x)}{1+2x+x^2}$$

דרך אחת זה חילוק ארוך של פולינומים

נרשום את המכנה רק:

$$\int \frac{x^4}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{(t-1)^4}{t^2}$$

$1+x=t$

דרך נוספת:
נפתח סוגריים ונחלק כל אחד מהמחוברים ב-t^2

* מה קורה כשיש מכפלה של שני פולינומים אי-פריקים ממעלה 2

$$\int \frac{dx}{(1+x+x^2)(1+x+2x^2)} = \int \frac{Ax+B}{1+x+x^2} + \int \frac{Cx+D}{1+x+2x^2}$$

נרשום זאת רק

ניתן להפריק את הפולינום כמכפלה

$$p(x) = \prod_{i=1}^{\deg p} (x-\lambda_i) \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$$p(\bar{\lambda}_i) = 0 \Longleftarrow p(\lambda_i) = 0$$

ז"א שהפולינום

$$(x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) \mid p(x)$$

6-3-2007

מד"ר - תרגול מס' 2

אתר הקורס owl.huji.ac.il

שני התרגילים הראשונים כבר מופיעים שם.

משוואות דיפרנציאליות, בדומה לאינטגרלים זה דבר שלעתים אין להם פתרון ע"י פונקציות אלמנטריות.

למשל: $\int \sin(x^2)dx$ אין פתרון אך כן פונקציה רציפה ולכן קיים האינטגרל

אבל לא ניתן לחשב אותו. בדומה $\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx$.

אז אם רוצים לפתור, עושים קירוב ע"י סכומי רימן.

במשוואות דיפרנציאליות זה דבר דומה בעיקרון הזה.

תרגיל מס' 2 שקיבלנו עוסק במשפחה של משוואות מהצורה:

$y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$ אלו הן משוואות ליניאריות מסדר ראשון.

את המשפחה הזו אנחנו יודעים לפתור.

בתרגיל מס' 1 כאשר נותנים לנו פונקציה:

$\arcsin(3+x^2)$

היא אינה מוגדרת ולכן אינה גזירה אם היינו שמים - במקום +

ניתן היה לגזור אותה.

כמה דוגמאות לאינטגרלים:

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx = 3\int e^t t^2 dt$$

נפתור עד הסוף ע"י אינטגרציה בחלקים

$t=x^{\frac{1}{3}}$ הצבה

$dt=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$dx=3t^2dt$

* דוגמא נוספת:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

הצבה:

$\sin t = x$

$\cos t\,dt = dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\sqrt{\cos^2 t}}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1+x}{(1+x+x^2)^2}\,dx = \qquad *$$

(נשים לב) נגדיר את המונה

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\underbrace{\frac{1}{(1+x+x^2)^2}\,dx}_{I_2}$$

וכך הקטנו את הדרגה של המונה

זהו ביטוי שאנחנו יודעים לפתור

$$I_1 = \int_1^{\infty}\frac{1\cdot dx}{1+x+x^2} = \frac{x}{1+x+x^2}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{x\cdot(2x+1)}{(1+x+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{1+x+x^2}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{2x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \frac{3}{2}\int_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x+x^2)^2} =$$

(נכפיל ב-1 ונעשה אינטגרציה בחלקים וכך נגיע) - I_2

$$= \frac{x}{1+x+x^2}\Big|_1^{\infty} + 2I_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\Big|_1^{\infty} - \frac{3}{2}I_2$$

אז מתקבל כי:

$$I_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{1+x+x^2}\Big|_1^{\infty} + I_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\Big|_1^{\infty}\right)$$

∞

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int\frac{dx}{(x-\lambda_1)^n(x-\lambda_2)^n}$$

אם הפולינום פריק

תלוי אם הדרגה n

6-3-2007

תרגיל מס' 1, שאלה מס' 4:

* $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

מה ניתן לומר על גזירות:

בכל נקודה $\neq 0$ אין בעיה

$\sqrt{|x|}=y$

ב-0 נבדוק עם ההגדרה:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos y-1}{y^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4!}+\dots$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=+\frac{1}{2}$$

שני הגבולות החד-צדדיים שונים ולכן אין גזירות ב-0

* $\sqrt{tg x}$

שוב בנקודות $\neq 0$ אין בעיה.

שואלים לגבי הסביבה של 0. ולכן נסתכל על

הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{tg x}-0}{x}$$

ומקבלים כי הגבול הנ"ל שווה ל-∞

* $$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

נבדוק את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=$$

נעשה מכנה משותף

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\dots+$$

כמה הערות לגבי שאלה מס' 5:

$$y'(x)=f(x)$$

$$y(x_0)=y_0 \quad !$$

$$y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} y'(t)dt=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

אנחנו מניחים בעצם ש- f רציפה בקטע (x_0,x)

סעיף ב

$$f(x)=tg x$$

$x_0=0$ $\quad (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow$ בקטע הזה יש תנאי שקובע את הפונ' באופן יחיד

$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ → בקטעים אלו אין יחידות

<u>מתרגיל 2, שאלה 1</u>:

משוואות לינאריות מסדר ראשון, להביא את המשוואות לצורה לינארית.

<u>משאלה 2</u>: יש גם תנאי התחלה.

<u>משאלה 3</u>: כאן לא משוואה לינארית, אך צריך להוכיח משהו על יחידות הפתרון

<u>משאלות 4,5</u>: אין יותר מדי מה להגיד

הערה: אם יש פתרון שהוא מהצורה סתומה כלומר לא $y(x)=0$

אלא $F(y(x))=0$

ולא תמיד ניתן לחלץ את y, זה פתרון לגיטימי

כי הרי גזירות לא משנות כאן וניתן להסתפק במשפט

הפונקציות הסתומות

13-3-2007

מד"ר - תרגול מס' 3

נדבר היום על משוואות ליניאריות מסדר ראשון, על הפרדת משתנים ועל משפט הקיום והיחידות.

נפתור את שאלה 4 משעורי הבית:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x+y^2e^{2y}}$ תנאי התחלה: $y(\frac{1}{3})=0$

נפתור בשלבים:

נרצה לבטא את x כפונקציה של y. משפט הפונקציה ההפוכה מבטיח לנו שבאזור לוקאלי אם הנגזרת שונה מאפס ושאר התנאים של המשפט הפונקציה y הפיכה.

נחשב את $\frac{dy}{dx}(\frac{1}{3})$:

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \neq 0$$

לכן, הפונקציה $y(x)$ הפיכה בסביבת הנקודה $x_0=\frac{1}{3}$, והפונקציה ההפוכה גזירה ברציפות בסביבה זו, כלומר ניתן לרשום את x כפונקציה של y: $x(y)$ כאשר y הוא המשתנה.

מכלל השרשרת, $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$

ואז:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = 2x+y^2e^{2y} \\ x(0)=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dy} - 2x = y^2e^{2y}$$

מחפשים גורם אינטגרציה $\mu(y)$ כך ש-

$$\mu\frac{dx}{dy} - 2\mu x = (\mu x)' = \mu x' + \mu' x$$

כלומר: $\mu' = -2\mu$

נבחר $\mu(y) = e^{-2y}$

לכן

$$(\mu\cdot x)' = y^2\cdot e^{2y}\cdot\mu = y^2$$

המשך ←

פותרים אינטגרל:

$$\mu(y)x = \int y^2 dy + c = \frac{y^3}{3} + c$$

ולכן:

$$x = e^{2y}\cdot\left(\frac{y^3}{3} + c\right)$$

$c = \frac{1}{3}$ (נציב תנאי התחלה מתאים ונקבל)

$$\Leftarrow \quad x = e^{2y}\left(\frac{y^3}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

משפט הפונקציה ההפוכה - תזכורת:

$$f: U \to \mathbb{R}^d, \quad U \subseteq \mathbb{R}^d$$

קיימת g וסביבה $U' \subseteq U$ של x_0 וקיימת סביבה V של $f(x_0)$ כך ש:

$g: V \to U'$ ו- $g\circ f = f\circ g = id$.

דוגמא נוספת:

$$y' - xy = x$$

$$\mu' = -x\cdot\mu \longleftrightarrow (\ln|\mu|)' = \frac{\mu'}{\mu} = -x$$

$\mu = e^{\int -x dx} = ce^{-\frac{x^2}{2}}$ בגלל הערך המוחלט יש גם את + וגם את -

אבל יש לנו חופש לבחור את c ולכן אפשר לבחור ב +

ולכן מה שנקבל זה: $\left(y\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

נדבר עכשיו באופן כללי:

חשוב!

נניח שבחרנו μ ונניח כי μ למשל אינה מוגדרת בנקודה $x=0$.

למשל אם $\mu = \frac{1}{x}$ מקבלים פתרון $y(x)$ המוגדר לכל $x \neq 0$.

אם קיים הגבולות $\lim_{x\to0} y'(x)$ אז קיים פתרון למשוואה בכל התחום.

$$\lim_{x\to0} y(x)$$

כי ועוד אם $y' = f(x,y)$ (נכונה ל) $x \neq 0$ והגבולות קיימים

כי $x=0$ אז הפתרון הוא גם לנקודה $x=0$.

13-3-2007

<u>בשאלה מס' ב משיעורי הבית:</u>

$$y'=y^2$$

<u>פת':</u> $y=\frac{1}{c-x}$ (אם $y\neq 0$)

<u>הוכחה:</u> תהי x_0 נקודה עבורה $y(x_0)\neq 0$ (נניח קודם שהיא קיימת)

אזי בסביבה של x_0, $y(x)\neq 0$ ולכן, $\left(\frac{1}{y}\right)'=\frac{-y'}{y^2}=-1$

$\Rightarrow \frac{1}{y}=-x+c \Rightarrow y=\frac{1}{c-x} \Rightarrow y(x)\neq 0$ לכל x

מסקנה: אם קיימת נקודה x_0, כך ש: $y(x_0)=0$ אזי

y היא זהותית 0 $y\equiv 0 \Rightarrow$ אוסף הפתרונות הוא:

$y=\frac{1}{c-x}$ לאיזשהו c ! $y\equiv 0$

משפט הקיום והיחידות מבטיח קיום של פתרון באופן <u>לוקאלי</u>

מזמן שנותר נדבר על הפרדת משתנים:

אם היינו רוצים לפתור

$y'=y^2$ מבלי שאמרו לנו מה הפתרון:

היינו עושים: $\frac{y'}{y^2}=1$

ועושים אינטגרל לפי x לשני האגפים:

$$\int\frac{dt}{t^2}=\int\frac{y'}{y^2}\,dx=\int 1\,dx+c=x+c$$

$$-\frac{1}{t}=-\frac{1}{y}$$

במילים אחרות קיבלנו

$$y=-\frac{1}{x+c}=\frac{1}{c'-x}$$

ובאופן כללי הפרדת משתנים:

נניח כי נתונה משוואה $y'=f(y)g(x)$ כאשר f,g פונקציות רציפות.

אזי $\frac{y'}{f(y)}=g(x)$ ולכן נעשה אינטגרציה לשני האגפים לפי x

ונקבל

$$\int\frac{dt}{f(t)}=\int\frac{y'}{f(y)}dx=\int g(x)dx$$

ניתן להשאיר את התוצאה בצורה סתומה.

הפרדת המשתנים היא הצורה הפשוטה ביותר כי ניתן לפתור אותה באופן ישיר

20-3-2007

מד"ר - תרגול מס 4

(1)

נדבר על כמה תרגילים משעורי הבית הקודמים

הפרדת משתנים, שאלה 3 (ב)

$$y'=e^{x+y} \longleftrightarrow$$

נרצה את שני האגפים

$$-(e^{-y})' = y'\cdot e^{-y} = e^{x}$$ עכשיו ניתן לעשות אינטגרציה על שני האגפים.

נעשה אינטגרציה משני האגפים: $-e^{-y} = e^{x}+c$

$$-y = \ln(-e^{x}-c)$$

$$y = -\ln(-e^{x}-c) = -\ln(\tilde{c}-e^{x})$$

תחום ההגדרה תלוי בתנאי ההתחלה אם $y(0)=0$ נקבל אז $-\ln(\tilde{c}-e^{0})=0$

$$\Leftarrow \tilde{c}=2.$$

שאלה נוספת שהיתה:

(4) (א)

$$(*)\begin{cases} y'=|y| \\ y(0)=0 \end{cases}$$

צריך להוכיח שקיים פתרון $y(x)$ ב- $(-\infty,\infty)$:

נניח כי $y_0>0$ $\qquad f(x,y)=|y|$

$$|f(y_2)-f(y_1)| = ||y_2|-|y_1|| \le |y_2-y_1|$$

ממשפט הקיום והיחידות קיים פתרון $y(x)$ המוגדר ב $(-h,h)$ לאיזשהו h.

נקח המשוואה $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ כזהו בדיוק המשוואה המקורית בתחום $y_0>0$ (ללא הערך המוחלט)

פתרון יחיד למשוואה הנ"ל הוא: $y(x)=y_0 e^{x}$

נשים לב כי y חיובי תמיד (לכל x) ולכן y פתרון ל-$(*)$

אם $y_0<0$ אזי פתרון (יחיד) למשוואה $\begin{cases} y'=-y \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ הוא: $y(x)=y_0\cdot e^{-x}$

מכיוון ש-y תמיד שלילי (כי $y_0<0$) נקבל כי y פתרון ל-(*).

טענה: יהיו y_1, y פתרונות למשוואה $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(c)=y_0 \end{cases}$ ונניח כי f רציפה וליפשיצית לפי y (עם קבוע L)

נניח ש y_1, y מוגדרים לכל $x\ge 0$, אזי $y_1(x)=y_2(x)$ לכל $x\ge 0$

הוכחה: ממשפט הקיום והיחידות יש $h>0$ כך ש- $y(x)=y_1(x)$ לכל $x\in[0,h)$

נסמן $x_0=\sup\{h: y_1=y_2 \text{ ב-} [0,h)\}$. אם $x_0=\infty$ סיימנו.

אחרת $0<x_0<\infty$.

נסמן
$$y_0=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} y(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} y_1(x) = y(x_0) = y_1(x_0)$$

נביט במשוואה
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

נשים לב (מהרציפות) כי y, y_1 מקיימים את תנאי ההתחלה

ממשפט הקיום והיחידות יש $h>0$ כך ש- $y=y_1$ ב- $[x_0, x_0+h)$

$\Leftarrow$ $x_0=\sup\{h: \text{כמו קודם}\}\ge x_0+h$ סתירה!

אם לוקחים משוואה:
$$\begin{cases} y' = f(x,y)=|y| \\ y(c)=y_0 \end{cases}$$

מכאן נסיק כי הפתרון היחיד הוא
$$y(x)=\begin{cases} y_0e^{x} & y_0\ge 0 \\ y_0e^{-x} & y_0<0 \end{cases}$$

4ב) לכל y_0 יש פתרון $y(x,y_0)=y_{y_0}(x)$

מהי $\frac{d}{dy_0}y(x,y_0)$?

אם $y_0>0$

$$\frac{d}{dy_0}y(x,y_0)=\frac{d}{dy_0}(y_0e^x)=e^x$$

$y_0<0$

$$\frac{d}{dy_0}y(x,y_0)=e^{-x}$$

עבור $y_0=0$, הנגזרת $\frac{d}{dy_0}y(x,y_0)$ קיימת אם ורק אם הנגזרות החד-צדדיות שוות כלומר אם ורק אם $x=0$

5) א) בנ משוואה לינארית הומוגנית מסדר 2 ש: y_1, y_2 הם הפתרונות שלה:

נתבונן בדטרמיננטה של המטריצה:

$$\det\begin{pmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{pmatrix}=0$$

זוהי משוואה הומוגנית לינארית מסדר 2 והנוסף $y=y_1$! $y=y_2$ פתרונות למשוואה. נשים לב כי y פתרון אם ורק אם שורות המטריצה תלויות לינארית (ואז הדטרמיננטה היא אפס). במקרה הספציפי המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} y & y' & y'' \\ \sin x & \cos x & -\sin x \\ \ln x & \frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

השורות 2,3 בת"ל.
לכל x
כלומר אם $a,b\in\mathbb{R}$ שני סקלרים כך ש: $a(\sin x, \cos x, -\sin x)$
$+b(\ln x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2})=0$

אזי $a=b=0$

(נציב למשל $x=\pi$ ונקבל $b=0 \Leftarrow a=0$)

עתה, $\det A=0$ אם ורק אם השורה הראשונה היא קומבינציה לינארית של האחרות, כלומר $(y,y',y'')=a(y_1,y_1',y_1'')+$
$+b(y_2,y_2',y_2'')$

זה קורה אם ורק אם $y=a\cdot y_1+b\cdot y_2$ ולכן y פתרון
אם ורק אם $y\in Span\{y_1,y_2\}$

5 ב) האם קיימת משוואה לינארית הומוגנית רק ש: $\ln x, \sin x$ פתרונות?

התשובה: לא!

כי נניח בשלילה שקיימת משוואה כזו: $y'=a(x)\cdot y+b(x)=f(x,y)$

f רציפה וליפשיצית. נבחר x_0 שעבורו $\ln x_0=\sin x_0=y_0$ (וק כזו קיימת מאינט' 1)

נ.ס מתנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

מיחידות הפתרון ב- $[x_0,x_0+h)$, נסיק כי $\ln x=\sin x$ לכל x בקטע $[x_0,x_0+h]$

(אך לא יתכן כי $\ln x=\sin x$ על קטע.)

כי מליפשיציות f + הטענה הקודמת נובע כי $\ln x=\sin x$ לכל $x\in\mathbb{R}$

סתירה!

27-3-2007

מד"ר - תרגול מס 5

נפתור כמה שאלות מתרגיל הבית שעבר:

2. נתון $y' \le k\cdot y$ $\quad y(0)=y_0$

צ"ל: לכל $x\ge 0$ $\quad y(x)\le y(0)e^{kx}$

הוכחה: נרצה לחלק ב- y ולעשות אינטגרציה אך יש לנו בעיה עם הסימן

אז נסמן (כי התשובה נתונה לנו)

$$g(x)=y(x)\cdot e^{-kx}$$

נוכיח כי $g(x)\le y(0)=g(0)$ לכל $x\ge 0$ ואז נעבור ונקבל:

$$g(x)'=e^{-kx}[y'-ky]\le 0$$

$\Leftarrow$ g יורדת ולכן $g(x)\le g(0)$ לכל $x\ge 0$

כלומר אם נכפול את שני אגפי האי-שוויון ב- e^{kx}

נקבל: $y(x)\le e^{kx}y(0)$.

הערה נוספת לאותה דרך חשיבה:

נניח כי y, y_1 פתרונות ל: $y'=ky$ (כמובן $y(0)=y_0$) אזי $y=y_1$ לכל x.

נוכיח כי $y=y_1=e^{kx}y(0)$

נגדיר $g(x)=e^{-kx}\cdot y$ ונוכיח כי g קבועה

$g'=e^{-kx}[y'-ky]=0$ ולכן $g(x)=g(0)=y(0)$

ולכן שוב נכפול את שני האגפים ונקבל את התשובה:

$$y(x)=e^{kx}y(0)$$

$$\begin{cases} y' = e^x + y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$ ③

צ"ל: אין פתרון בקטע $[0,2]$

הוכחה: זוהי אינה משוואה מהסוגים שאנו יודעים לפתור ולכן צריך להוכיח שאין פתרון מבלי באמת לנסות לפתור.

אז נניח בשלילה שקיים פתרון $y(x)$ בקטע $[0,2]$

נהפוך את השיוויון הנ"ל לאי-שיוויון ע"י זה שנמצא משהו קטן יותר שאין לו פתרון בקטע

$$y' = e^x + y^2 \ge y^2$$

מהיות $y' \ge 0$ לכל x אזי $y(x)$ פונקציה עולה ולכן $y(x) \ge y(0) = 1$

לכל $x \in [0,2]$ ולכן לכל $x \in [0,2]$ $\frac{y'}{y^2} \ge 1$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים לפי x:

$$\int_0^x \frac{y'}{y^2}\,dt \ge \int_0^x 1\,dt \quad (*)$$

(אם $f(x) \ge g(x)$ לכל x אזי $\int_0^x f(t)dt \ge \int_0^x g(t)dt$) (במילים אחרות אינטגרציה שומרת על אי-שיוויון)

לכן אם נפתור את האינטגרלים $(*)$ נקבל:

$$x \le \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_0^x = -\frac{1}{y(x)} + 1$$

ולכן $-\frac{1}{y(x)} \ge x - 1$

נציב $x=1$ ונקבל כי $0 > -\frac{1}{y(1)} \ge 0$ סתירה!

מה משוואה $y' = e^x + y^2 \geq 1 + y^2$ יכולנו לקבל אי-שוויון מסוג דרכים.

שאלה ①:

אם (x,y) נקודה שבה $f(x,y)$ רציפה בסביבתה אזי <u>קיים</u> פתרון בסביבה של הנקודה x_0 המקיים $y(x_0) = y_0$

משפט <u>היחידות</u> צריך ליפשיציות אז אם $f(x,y)$ גזירה ברציפות לפי x ולפי y בסביבה של (x_0, y_0).

צריך כי $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$

לכל x בסביבת x_0 ו- y_1, y_2 בסביבת y_0.

נראה כי

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ חסומה בסביבה של (x_0, y_0)

אז אם $\frac{\partial}{\partial y} f$ רציפה בסביבה, היא חסומה בה ולכן f ליפשיצית לפי y בסביבה (ולכן נקבל יחידות).

<u>נפתור עכשיו את 1 סעיף ה</u>:

$$y' = \frac{2x - 5y + 1}{2x + 4y + 3}$$

נגדיר $\tilde{x} = x + a$ $\tilde{y} = y + b$

ואז: $\tilde{y}(\tilde{x}) = y(x+a) + b$

נתאר עכשיו את המשוואה מהמשתנים $\tilde{x}, \tilde{y}$: $\Leftarrow$

$$\tilde{y}' = \frac{2(\tilde{x} - a) - 5(\tilde{y} - b) + 1}{2(\tilde{x} - a) + 4(\tilde{y} - b) + 3}$$

נרצה להפטר מהגורמים החופשיים

נבחר a, b כך ש-

$$\begin{cases} -2a + 5b + 1 = 0 \\ -2a - 4b + 3 = 0 \end{cases}$$

מובטח שקיימים a, b שכאלו כי אם $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

אז A הפיכה כי $\det A \neq 0$ ולכן

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(כי המשוואה:

$$\left(A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

לכן קיימים פתרונות (יחידים) ואז המשוואה היא:

(כי המקדמים החופשיים מתבטלים כי ככה בחרתי את a,b)

$$\tilde{y}' = \frac{2\tilde{x} - 5\tilde{y}}{2\tilde{x} + 4\tilde{y}}$$

ועכשיו נרצה לפתור

נסמן $v = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$

$$\tilde{y} = \tilde{x}v$$

$$\tilde{y}' = \tilde{x}v' + v = \frac{2-5v}{2+4v} \Longleftarrow$$

ועכשיו ניתן לגלות את v ע"י הפרדת משתנים ואינטגרציה

$$\tilde{x}v' = \frac{2-5v}{2+4v} - v = \frac{2-5v-2v-4v^2}{2+4v}$$

$$\frac{v'(2+4v)}{2-7v-4v^2} = \frac{1}{\tilde{x}} \Longleftarrow$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים:

$$\ln|\tilde{x}| + c = \int \frac{v'(2+4v)}{2-7v-4v^2}\,d\tilde{x} \underset{t=v(\tilde{x})}{=} \int \frac{2+4t}{2-7t-4t^2}\,dt$$

ועכשיו נציב:

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = y(x-a) - b$$

$$\tilde{x} = x - a$$

29-5-2007

מד"ר - תרגול מס' 6

משוואות מדוייקות

① המשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ נקראית מדוייקת אם $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

במקרה הזה קיימת פונקציית "פוטנציאל" $P(x,y)$ כך ש-

$$\frac{\partial P}{\partial x}=M \quad \frac{\partial P}{\partial y}=N \quad (\nabla P=(M,N)).$$

והפתרון למשוואה הוא $P(x,y)=const$ [אין הבדל בין x ל-y]

② אם קיים "גורם אינטגרציה" $\mu(x,y)$ כך ש: $\mu M dx+\mu N dy=0$ מדוייקת

אז סיימנו (כמו במקרה ①)

③ אם $R=R(x)=\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ הוא פונקציה של x בלבד, קיים גורם אינטגרציה

$$\mu=\mu(x) \quad | \quad \mu(x)=\exp\left(\int R(x)dx\right)$$

④ אם $R=R(y)=-\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ הוא פונקציה של y בלבד, אז יש גורם אינטגרציה

$$\mu(y)=\exp\left(\int R(y)dy\right)$$

⑤ תרגיל 5 - שאלה ב:

צ"ל: אם $R=R(x\cdot y)=\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{xM-yN}$

פונקציה של $w\overset{\text{סימון}}{=}xy$ בלבד, אז קיים גורם אינטגרציה.

הוכחה:

קיים גורם אינטגרציה μ אם $(\mu M)'_y=(\mu N)'_x$ (נגזרות חלקיות)

כלומר - $\mu'_y M+\mu M'_y=\mu'_x N+\mu N'_x$

מתקיים - $\mu'_x \underset{\text{שרשרת}}{=} \mu'_w\cdot w'_x=y\mu'_w$ $\quad$ $\mu'_y=\mu'_w\cdot w'_y=x\mu'_w$

נציב ונקבל $x\mu'_w M+\mu M'_y=y\mu'_w N+\mu\cdot N'_x$

$$\mu'_w(xM-yN)=\mu(N'_x-M'_y)$$

ולכן

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N'_x - M'_y}{xM - yN} = R(\omega)$$

נתון שזו פונקציה של $\omega = xy$

$$\Leftarrow \quad \ln(\mu) = \int R(\omega)d\omega \Longleftarrow \mu = \exp\left(\int R(\omega)d\omega\right)$$

(באותו אופן - אפשר לעשות כאשר $\omega = \frac{y}{x}$)

שאלה 3

ב

$$(x+2)\sin y\,dx + x\cos y\,dy = 0$$

$$\begin{cases} M = (x+2)\sin y \\ N = x\cos y \end{cases}$$ זוהי משוואה שאינה מדוייקת.

נב.ט כי:

$$R = -\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = -\frac{\cos y - (x+2)\cos y}{x\cos y} = \frac{1+x}{x}$$

$\Longleftarrow$ ולכן קיים גורם אינטגרציה

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1+x}{x}dx\right) = xe^x$$

(נבדוק שזה אכן גורם אינטגרציה: בודקים שהמשוואה לאחר ההכפלה ב-μ מדוייקת ע"י שכירה.)

נמצא פוטנציאל $P(x,y)$:

$$P(x,y) = \int \mu N(x,y)dy + C(x) = \int x^2e^x \cos y\,dy + C(x) = x^2e^x\sin y + C(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = e^x\sin y(x^2+2x) + C'(x) \underset{\text{אמור להיות שווה ל-}}{=} x(x+2)e^x\sin y$$

$$\Longleftarrow \quad C'(x) = 0 \Longleftarrow C(x) = const$$

פתרון: $x^2e^x\sin y = Const$

כל התהליך הוא מתכון מובטח לטעויות - לכן לבדוק, ולחזור על השלבים.

29-5-2007

שאלה ⑤:

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

נתון כי קיים פתרון יחיד $y(x, y_0)$

תנאי התחלה

המוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$

צ.ל: $\frac{\partial}{\partial y_0} y(x, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} y(x, y_0) \Big/ \frac{\partial}{\partial x} y(0, y_0)$

הוכחה: $y(x+t, y_0) = y(x, y(t, x_0)) = y(t, y(x, y_0))$

מכיוון ש-f לא תלוי ב-x + יחידות

סימטרי

(מערכת אוטונומית לא תלויה ב-x)

נגזור לפי t:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x+t, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} y(x+t, y_0) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x, y(t, y_0)) = \frac{\partial}{\partial y_0} y(x, y(t, y_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} y(t, y_0)$$

נציב $t=0$ ונקבל

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x, y_0) = \frac{\partial}{\partial y_0} y(x, y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x} y(0, y_0)$$

לגבי שעורי הבית המתאים!

תרגיל 6 - שאלה 2:

להזכר בהוכחת משפט הקיום והיחידות

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t))\,dt$$

בונים באינדוקציה סדרה של פונקציות:

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_n(t))\,dt \\ y_0(x) = y_0 \end{cases}$$

הפונקציות y_n נקראות אפרוקסימציות.

בשאלה פשוט צריך לחשב את האפרוקסימציה.

שאלה 3: צריך לבדוק f רציפה, ליפשיצית לפי y

מוצאים את n כך ש $y_n \to y_{n+1}$ הסתכה מרוכזת.

5-6-2007

מד"ר - תרגול מס 7

פתרון תרגילים מתרג' מס 6

(2)
$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0)=1 \end{cases}$$
(האפרוקסימציה של פיקארד)

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_n(t))\,dt \\ y_0(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x -y_n(t)\,dt$$

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x 1\,dt = 1 - x$$

$$y_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \longrightarrow e^{-x}$$

(רדיוס ההתכנסות הוא ∞, כלומר y_n מתכנסת לכל x)

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \longrightarrow e^x \Longleftarrow \begin{cases} y' = y \\ y(0)=1 \end{cases}$$

(3) $y' = y^2 - x^2 - \sin y + \cos x$ הפונקציה הזו רציפה וגזירה לפי כל אחד מהמשתנים

ולכן על כל קבוצה חסומה במישור היא ליפשיצית לפי y (כי הנגזרת חסומה)

ולכן לפי משפט הקיום והיחידות קיים פתרון בסביבה של כל נקודה ובפרט ב-0

ולכן הוא צריך להיות מוגדר על כל הישר.

נניח כי $y(x)$ הוא פתרון למשוואה, עם תנאי התחלה ב-0, מקסי' $[-h, h]$

נתבונן ב- $y'(0) = y(h)$ ונסמן $x_0' = h$, לכן קיים פתרון $V(x)$ בסביבה $[h-h', h+h']$ אשר מקיים $V(x_0') = y_0'$ ו- V יחיד בסביבה זו.

נחשב את האפרוקסימציות:
$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \left(y_n^2(t) - t^2 + \sin y_n(t) + \cos t\right)dt$$

ונניח כי (ל- h מספיק קטן) מתקיים:

$$\sup_{x\in[0,h]} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \lambda \sup_{x\in[0,h]} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

עבור $0 < \lambda < 1$.

מכאן נקבל ש:

← המשך

המשך $\longleftarrow$ $\sup_{x\in[0,h]} |y_{n+1}-y_n| \le C\cdot \lambda^n$

(מאינדוקציה)

מכאן נובע ש-y_n סדרה מתכנסת (וגם סדרת קושי)

$$\sup|y_n-y_m| \le C\cdot\sum_{k=m+1}^{n}\lambda^k \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| = \left|\int_0^x \big(f(t,y_n(t))-f(t,y_{n-1}(t))\big)dt\right| \le$$

$$\le \int_0^x |f(t,y_n)-f(t,y_{n-1})|dt = \int_0^x |y_n^2(t)-y_{n-1}^2(t)+\sin y_n(t)-\sin y_{n-1}(t)|dt$$

$$\le \int_0^x |y_n-y_{n-1}|\cdot|y_n+y_{n-1}| + |\sin y_n - \sin y_{n-1}|$$

⊛

נבחר M כך שבקטע $[-h,h]$ $|y_n(x)|\le M$ לכל n ולכל x

(נראה בסוף ש-M כזה קיים).

$$\Longrightarrow ⊛ \le \int_0^x |y_n(t)-y_{n-1}(t)|(2M+1)dt \le$$

$$\le \int_0^x |y_n(t)-y_{n-1}(t)|(2M+1)dt \le \int_0^h \sup_{t\in[0,h]}|y_n-y_{n-1}|(2M+1)dt \le$$

$$\le (2M+1)\sup|y_n-y_{n-1}|\cdot h$$

לכן מכדי ש-y_n יתכנס נדרש כי ⊛ $(2M+1)h<1 \Longleftarrow h<\frac{1}{2M+1}$

ⓑ $|y_n(x)|\le M$ ב- $[0,h]$

$$|y_n(x)| = |y_0 + \int_0^x f(t,y_{n-1}(t))dt| \le 1+\int_0^x |y_{n-1}^2 - t^2 + \sin y_n - \cos t|dt \le$$

$$\le 1+\int_0^h (M^2+t^2+2)dt \le 1+M^2h+h^3+2h < M$$ אנו רוצים שיתקיים

נבחר h כך ש- $h\le 1$, וכן $M^2h<1$ ואז:

$$|y_n(x)| \le 4+M^2h < 5$$

לכן $M=5$ הוא חסם לכל ה-y_n כאשר $h<\min(1,\frac{1}{25})$

לכן כדי ש-y_n תתכנס נדרוש $h\le\min(1,\frac{1}{25})$ עבור $M=5$

בתרגיל 7 שאלה 1 כמו שאלה 5 בתרגיל 6 - ההוכחה סגנ.

④ נניח כי ישנן 2 פתרונות תלויים לינארית: $ay_1(x)+by_2(x)=0$ לכל x

$$ay_1'(x)+by_2'(x)=0$$

אפשר להציב x_0 ולקבל כי גם הווקטורים תלויים לינארית.

מסקנה: מימד מרחב הפתרונות הוא 2

12-6-2007

מד"ר - תרגול מס' 8

①

נפתור את שאלה מס' 2 מדף 7:

$$x^2y''+2xy'-2y=g(x)$$

המשוואה ההומוגנית:

$$x^2y''+2xy'-2y=0$$

יודעים כי אוסף הפתרונות הוא מרחב וקטורי ממימד 2.

אם $y(x)$ הוא פתרון אז פתרון כללי:

$$y(x)=A\cdot y_1(x)+B\cdot y_2(x)+y_p(x)$$

פתרון (פרטי) כללי למשוואה הלא הומוגנית.

① אם אמרו לי שיש פתרון $y_1(x)=x$

נחפש פתרון נוסף מהצורה:

שיטת הורדת הסדר

$$\begin{cases} y_2(x)=y_1(x)\cdot v(x) \\ y_2'=y_1'v+y_1v' \\ y_2''=y_1''v+2y_1'v'+y_1v'' \end{cases}$$

נציב את הפתרון:

$$x^2(y_1''v+2y_1'v'+y_1v'')+2x(y_1'v+y_1v')-2y_1v=0$$

$$\Longrightarrow x^2(2y_1'v'+y_1v'')+2x(y_1v')=0$$

$$x^2y_1v''+(2x^2y_1'+2xy_1)v'=0$$

זהו סדר נמוך יותר כי עכשיו אין לנו את v ולכן זו משוואה מסדר ראשון עבור v'.

$$\frac{v''}{v'}=\frac{-(2x^2y_1'+2xy_1)}{x^2y_1}=\frac{4x^2}{x^3}=\frac{4}{x}$$

מציבים את $y_1=x$

$$\Longrightarrow \ln|v'|=\int-\frac{4}{x}dx=-4\ln|x|=\ln x^{-4}$$

$$\Longrightarrow v'=x^{-4}\longrightarrow v=\frac{x^{-3}}{-3}$$

אז $v=x^{-3}$ פתרון מתאים.

$\Leftarrow$ עכשיו $y_2(x) = y_1 \cdot v = x^{-2}$.

אז הפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית הוא:

$y(x) = A \cdot x + B \cdot x^{-2}$ בכל תחום בו מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$y'' = (x, y, y')$

המשוואה שלנו היתה:

$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$

$y'' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{p} y' - \underbrace{\frac{2y}{x^2}}_{q} = 0$

p, q הם רציפים בכל תחום $\neq 0$

$\Leftarrow$ בכל תחום שלא מכיל את אפס $(x=0)$ זה הפתרון הכללי.

אם התחום מכיל את 0 נחלק לשני תחומים

$$y(x) = \begin{cases} Ay_1(x) + By_2(x) & x > 0 \\ \tilde{A} y_1(x) + \tilde{B} y_2(x) & x < 0 \end{cases}$$

המקדמים לא חייבים להיות אותם מקדמים.

ⓒ $y_p(x) = \sin x$ פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית

$y(x) = Ax + Bx^{-2} + \sin x$

~~בסעיף~~

נתבונן עתה במשוואה אחרת:

$$\begin{cases} y''+y=2 \\ y(0)=0 \quad y'(0)=1 \end{cases}$$

נפתור תחילה בהומוגנית, אח"כ באי-הומוגנית למציאת פתרון פרטי

ואח"כ נעבור בתנאי ההתחלה למציאת המקדמים.

$$y''+y=0$$

הפתרון הכללי: (לאי-הומוגנית)

$$y(x)=A\sin x+B\cos x+2$$

$$y(0)=0 \longrightarrow B=-2$$

$$y'(x)=A\cos x-B\sin x$$

$$y'(0)=A=1$$

הפתרון הסופי למשוואה:

$$y(x)=\sin x-2\cos x+2$$

מבחן 7 : לא נפתור עד הסוף - סעיף ג של שאלה 3:

$$\begin{cases} y''=y'\cdot\tan(y')y \\ y(0)=1\,, \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

$$V=y'$$

$$y''=V'_x=V'_y\cdot y'_x=V'_y\cdot V$$

$$V'_y\cdot \cancel{V}=\cancel{V}\tan(V)\cdot y$$

נעשה הפרדת משתנים ונמשיך מכאן הלאה...

עכשיו נעבור לדבר על תרגיל 8

משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים:

$$y''+2y'+y=0$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$y(x)=e^{\lambda x}$$

$$y'(x)=\lambda y$$

$$y''=\lambda^2 y$$

נציב במשוואה, נשים לב כי $e^{\lambda x}$ ונקבל את המשוואה:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

נפתור עבור λ אחת מהאפשרויות למשוואה ריבועית:

יתכנו 3 מקרים:

(1) יש שני פתרונות שונים $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$$W(y_1, y_2) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \neq 0$$ (בודקים שהפתרונות בת"ל)

ולכן מצאנו בסיס וניתן לפתור למקרה הזה.

(2) יש רק פתרון אחד, שורש אחד $\lambda \in \mathbb{R}$ למשוואה.

$\Leftarrow$ יש פתרון: $y_1(x) = e^{\lambda x}$

ננסה הורדת סדר למציאת פתרון נוסף: (נניח שמצאנו)

$$y_2(x) = xe^{\lambda x}$$

נותר לבדוק שהם בת"ל.

(3) למשוואה יש שני פתרונות λ_1, λ_2 מרוכבים ושונים. (הם צמודים)

$$\lambda_1 = a + bi$$

$$\lambda_2 = a - bi$$

אם ננסה פתרונות מרוכבים הם יהיו: $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ אבל אנחנו רוצים פתרונות ממשיים.

הפתרונות הממשיים $\mathrm{Re}\, y_1 = e^{ax}\cos ax$ (החלק הממשי)

$$\mathrm{Im}\, y_1 = e^{ax}\sin bx$$

(שני הפתרונות המרוכבים יהיו תלויים לינארית)

אם $y_1(x) = x$ פתרון אז הפתרון השני $y_2(x) = 1$

אם $y_1(x) = \cos x = e^{0\cdot x}\cos x$ פתרון אז $y_2(x) = e^{0\cdot x}\sin x$ פתרון

19-6-2007

מד"ר - תרגול מס' 9

①

היום נדבר על שיטת הפרמטרים החופשיים ושיטת הוריאציה של פרמטרים

שיטת המקדמים החופשיים:

נתונה משוואה:

$$y''+ay'+by=g(x)$$ (זוהי משוואה לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים)

אוסף הפתרונות הוא מרחב וקטורי ממימד 2

+ פתרון פרטי.

שלב I: פתור משוואה הומוגנית

שלב II: מצא פתרון פרטי.

אם במקרה אפשר לרשום את g:

$$g(x)=e^{ax}\cdot P_n(x)\cdot\begin{cases}\cos(bx)\\ \sin(bx)\end{cases}$$

אזי קיים פתרון פרטי y_p שצורתו:

$$y_p(x)=e^{ax}\cdot[A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\dots+A_1x+A_0]\cdot(A\cos(bx)+B\sin(bx))\cdot x^s$$

$$s=0,1,2$$

עתה נרצה להחליט מהם המקדמים ונמצא אותם באמצעות y_p.

s נבחר כך שאף אחד מהמחוברים לאחר פתיחת סוגריים אינו פתרון של המשוואה ההומוגנית.

(תרגיל 8)

נמחיש זאת בדוגמא: (מהתרגיל)

2ב) $$y''-2y'+y=xe^x+4=g(x)$$

שלב I: נפתור את המשוואה ההומוגנית: $y''-2y'+y=0$

הפולינום האופייני: $\lambda^2-2\lambda+1=0=(\lambda-1)^2=0$ (מחפשים פתרון מהצורה $y=e^{\lambda x}$)

$y_1(x)=e^x \quad y_2(x)=x\cdot e^x$ (כפי שאנחנו כבר יודעים)

שלב II: $g(x)$ הנתונה אינה מהצורה הרצויה ולכן נשתמש בעקרון הסופרפוזיציה

$$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$$

מחפשים עתה פתרונות פרטיים y_{p_1}, y_{p_2} המתאימים ל- $g_1(x), g_2(x)$

נתחיל מ- g_1:

$$y_{p_1}(x)=e^x(Ax+B)x^s$$

$s=0$ או 1 או 2

אם $s=0$ אז יוצא $Ae^x\cdot x$, Be^x שני אלו פתרונות להומוגנית לכן $s=0$ לא מתאים.

כנ"ל עם $s=1$: מקבלים פתרון של ההומוגנית Bxe^x , Ax^2e^x

כלומר $s=2$.

כלומר נחפש פתרון: $y_{p_1}(x)=e^x(Ax^3+Bx^2)=(Ax^2+Bx)\underbrace{xe^x}_{y_2}$

$$y_{p_1}'=(2Ax+B)y_2+(Ax^2+Bx)y_2'$$

$$y_{p_1}''=2Ay_2+2(2Ax+B)y_2'+(Ax^2+Bx)y_2''$$

נציב: $2Ay_2+2(2Ax+B)y_2'-2(2Ax+B)y_2=g_1(x)$

נשים לב: $y_2'=y_2+y_1$ (זה נגזרת של xe^x)

אז ניתן להציב במשוואה ונקבל:

$$\Longrightarrow 2Ay_2+2(2Ax+B)y_1=g_1=y_2$$

קיבלנו כי: $(2A+4A)y_2+2By_1=y_2$

נשווה מקדמים ונקבל: $B=0$ $\quad$ $A=\frac{1}{6}\leftarrow 6A=1$

$\Leftarrow$ y_{p_1} הוא: $\boxed{y_{p_1}=e^x\cdot\frac{1}{6}x^3}$ (עכשיו אפשר לבדוק שצדקנו)

עכשיו, עבור $g_2=4$, y_{p_2}

$$y_{p_2}(x)=A\cdot x^s$$

כאן $s=0$ כי A אינו פתרון של ההומוגנית ולכן נחפש $y_{p_2}=A$ ונקבל $A=4$.

$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ והפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x + 4$$

נמצא c_1, c_2 (עפ"י תנאי ההתחלה)

$$y(0) = y'(0) = 1$$

(לפתור לבד).

השיטה הבאה:

שיטת וריאציה של פרמטרים (המקדמים) וריאציית

זוהי שיטה כללית, כאשר g אינה מהצורה שהכרנו קודם וצריך לעשות פה אינטגרל.

דוגמא: שאלה 3 מתרגיל 8:

נתונה משוואה: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \frac{1}{4}) y = g(x)$

נתונים שני פתרונות בת"ל למשוואה ההומוגנית:

$$\begin{cases} y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sin x \\ y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cos x \end{cases}$$

נחפש פתרון פרטי שצורתו:

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

$$u_1'(x) = \frac{-y_2 \tilde{g}}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2'(x) = + \frac{y_1 \tilde{g}}{W(y_1, y_2)}$$

כדי שהנוסחה תהיה תקפה המשוואה צריכה להיות מהצורה: $y'' + p(x) y' + q(x) y = \tilde{g}(x)$

ובמקרה שלנו נחלק את המשוואה ב-x^2 כדי לקבל צורה מתאימה.

נבדוק מהו הורונסקיאן:

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x^{-\frac{1}{2}} \sin x & -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \sin x + x^{-\frac{1}{2}} \cos x \\ x^{-\frac{1}{2}} \cos x & -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \sin x - x^{-\frac{1}{2}} \sin x \end{pmatrix} = -x^{-1} (\sin^2 x + \cos^2 x) = -x^{-1}$$

כלומר הפתרונות הם בת"ל

עכשיו, נניח שקיימת נק' $x_0 \neq 0$ שבה $W(y_1,y_2)=0$ מה ניתן להסיק?

($W \neq 0|_{x=0}$!)

א) y_1, y_2 ת"ל

ב) תנאי הקיום והיחידות לא מתקיימים באיזושהי נקודה (בסביבה של x_0)

ג) לא ניתן להסיק שום דבר והכל יכול להיות

ד) המרצים עדיין עובדים על זה...

מהמשך הפתרון, בעצם יש נוסחה ל- $u_1(x),u_2(x)$ צריך לחשב אותם ולקבל את y_p

26-6-2007

מד"ר - תרגול מס' 10

נדבר היום על טורי חזקות מתרגיל 9:

שאלה 4 מדף 9: אם r שורש $\Leftarrow$ e^{xr} פתרון

אם השורש מרוכב אז מסתכלים $Re\, e^{xr}, Im\, e^{xr}$ $\qquad r=a+bi$

$$e^{rx}=e^{ax}\cdot e^{bix}$$

$$e^{bi}=\cos(bx)+i\sin(bx)$$

4 א נתונה המשוואה: $x_0=0$ $\quad (4-x^2)y''+2y=0$ זוהי משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני.

נפתור באמצעות טורי חזקות סביב x_0.

מחפשים פתרון כללי מהצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

המטרה היא למצוא את y כלומר את המקדמים a_n

אז נציב את y במשוואה:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^{n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)x^{n-2}$$

נציב ונקבל:
$$4\sum_{2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)x^n+2\sum_{0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$4\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n(n-1)x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

נקבל:

$$4a_{n+2}(n+1)(n+2)-a_n\cdot n(n-1)+2a_n=0$$

אז:
$$a_{n+2}=\frac{n^2-n-2}{4(n+1)(n+2)}a_n=\frac{n-2}{4(n+2)}a_n$$

$$a_2=-\frac{2}{8}a_0=-\frac{1}{4}a_0$$

$$a_3=-\frac{1}{12}a_1$$

$$a_4=0$$

אם n זוגי ! $K=2,3,\dots \Leftarrow a_n=0$

אחרת, אם n אי-זוגי אז

$$a_{n+2}=\frac{n-2}{4(n+2)}a_n=\frac{(n-2)(n-4)}{4^2(n+2)\cdot n}a_{n-2}$$

$$=\frac{(n-2)(n-4)\cdots(-1)}{4(n+2)\cdot 4n\cdot 4(n-2)\cdots\cancel{4\cdot 3}}\cdot a_1$$

מאינדוקציה: $a_{n+2}=\frac{1}{4^k}\cdot\frac{1(-1)}{(n+2)n}\cdot a_1$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+x^2\underset{-\frac{1}{4}a_0}{\overset{\shortparallel}{a_2}}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}=a_0-\frac{1}{4}a_0x^2$$

$$-a_1\sum\frac{1}{4^{k-1}}\frac{1}{(2k-1)(2k+3)}\cdot x^{2k+1}$$

נחפש את רדיוס ההתכנסות:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}}\cdot\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}x^{2k+1}=$$

$$w=x^2$$

נוסחת קושי-הדמר

$$=x\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}}\cdot\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}w^k$$

$$\sqrt[k]{\frac{1}{4^{k-1}}\cdot\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{4}$$

לכן הטור מתכנס רק $|w|<4 \longleftrightarrow |x|\le 2$

נחזור למשוואה

$$(x^2-4)y''+2y=0\ ,\ x_0=0$$

יכולנו לבחור את המקדמים a_0,a_1

$a_0=y(0)$

$a_1=y'(0)$

26-6-2007

$$y''-xy'-y=0,\quad x_0=1$$ ④ ②

נחפש פתרון $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-1)^n$

נציב במשוואה ונראה מה קורה (אנו יודעים כבר איך גוזרים פעם אחת ופעמיים)

$$\sum_{2}^{\infty} a_n\cdot n(n-1)(x-1)^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n(x-1)^{n-1}-\sum_{0}^{\infty} a_n(x-1)^n=0$$

($x=(x-1)+1$ כדי לקבל טור טיילור של x סביב 1)

נעשה תיקון

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

נציב את הביטוי הנ"ל:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n\cdot n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n(x-1)^n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot n(x-1)^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=0$$

נעשה תיקון:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-1)^n$$

אז:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1)-a_n\cdot n-a_{n+1}(n+1)-a_n=0$$

$$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{n+2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{n+1}+\frac{a_n+a_{n-1}}{n}}{n+2}$$

קיבלנו, שבכדי שנעשה מעבר נשתמש בצורה של השמה וקטורית ונקבל השמה פשוטה יותר

$$C_{n+1}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{n+2}&\frac{1}{n+2}&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\\a_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$C_1=\begin{pmatrix}a_2\\a_1\\a_0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C_n}=A_n A_{n-1}\cdots A_1\overrightarrow{C_1}$$

קיבלנו השמה וקטורית לביטוי המטריצה שכתבנו קודם

$$\overrightarrow{C_{n+1}}=A_n\cdot\overrightarrow{C_n}=\underbrace{A_n\cdot A_{n-1}\cdot\ldots\cdot A_1}_{B_n}\cdot\overrightarrow{C_1}$$

זוהי נוסחה שתלויה בתנאי ההתחלה.

10-7-2007

שעור חזרה 17-7-2007
יום ג' 12:00-14:00
שעור רווחה

מדר תרגול מס' 11 (המתמט)

(נעבור היום על תרגול 10 ונעבור על תרגיל 11:

משוואות אויילר

תרגיל 10, שאלה 6 (א):

$$x^2y''-xy'+y=0$$

נחפש פתרון מהצורה: $y=x^r$, נציב במשוואה ונבדוק מה r צריך לקיים.

$$x^2\cdot r(r-1)x^{r-2}-x\cdot r\cdot x^{r-1}+x^r=0$$

נוציא את x^r החוצה ונקבל:

$$(r(r-1)-r+1)x^r=0$$

נקבל:

$$r^2-2r+1=0$$

$$r=1 \quad \text{(מסדר שניים)}$$

יש לנו חלוקה למקרים ונשתמש בהם: $r=1$ הוא פתרון מסדר 2:

$$y_1(x)=x$$

$$y_2(x)=x\ln|x|$$

אז הפתרון הכללי הוא: $y=A\cdot y_1+B\cdot y_2$

איפה הוא מוגדר?

לכן, y פתרון בקטע $[-1,1]$ אם ורק אם $y=A\cdot x$

(ב)

$$x^2y''+3xy'+5y=0$$

שוב נחפש פתרון מהצורה: $y=x^r$

$$(r(r-1)+3r+5)x^r=0$$

$$r^2+2r+5=0$$

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=-1\pm 2i$$

יש שני פתרונות מהצ' x^{r_1}, x^{r_2} אך הם מרוכבים.

לכן ניקח חלק ממשי וחלק מדומה. ולכן הפתרונות הממשיים נפרשים ע"י

$$y_1 = x^{-1}\cos(2\ln|x|)$$

$$y_2 = x^{-1}\sin(2\ln|x|)$$

i מאומגדר

הפתרון הכללי הוא: $y = Ay_1 + By_2$ לשום בחירה של A, B חוץ מאפס זה לא יתקיים.

והפתרון היחיד הוא $y=0$

c

$$(x-2)^2 y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$$

נציב ונקבל: $y = (x-2)^r$

$$r(r-1) + 5r + 8 = 0$$

$$r^2 + 4r + 8 = 0 \qquad r_{1,2} = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$

אז הפתרונות שלי הם:

$$y_1 = (x-2)^{-2}\cos(2\ln|x-2|)$$

$$y_2 = (x-2)^{-2}\sin(2\ln|x-2|)$$

הפתרון הכללי הוא הפתרון שמוגדר ב: $[-1,1]$

$$y = Ay_1 + By_2$$

אם r_1, r_2 פתרונות ושניהם ממשיים אז יש לי שני פתרונות בהצ':

$$y_1 = x^{r_1}$$

$$y_2 = x^{r_2}$$

10-3-2007 ②

מציאת פתרון בסביבת נקודה סינגולרית רגילה:

נסביר זאת באמצעות פתרון מטל' 10:

(*) $2xy'' + y' + xy = 0$ (א) (5)

$x=0$ נקודה סינגולרית (רגילה)

אם היינו כותבים את המשוואה בצורה רגילה:

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2}y = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{2x} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{2}$$

נק' סינגולרית רגילה היא נקודה שבה הגבול:

$$\lim_{x \to 0} (x\,p(x)) = \frac{1}{2} = p_0$$ קיים

$$\lim_{x \to 0} (x^2 \cdot q(x)) = 0 = q_0$$ וגם קיים

אנחנו צריכים להסתכל על הפונקציה:

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

$$r^2 - \frac{1}{2}r = 0 \quad , \quad r_1 = 0$$

$$r_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_1(x) = x^0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)$$

$$y_2(x) = |x|^{\frac{1}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)$$

אז יש לנו את המשוואה: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ // נכפול הכל ב-x^2

$$x^2y'' + x(x\,p(x))y' + x^2q(x)y = 0$$

$$x\,p(x) \sim p_0$$

$$x^2q(x) \sim q_0$$

ואז נקרב ונקבל משוואת אוילר:

$$x^2y'' + xp_0y' + q_0y = 0$$

אנו צריכים פולינום.

נפתור ונקבל שני פתרונות x^{r_1}, x^{r_2}

המשך ←

נרצה עכשיו למצוא את המקדמים (כדי למצוא את y_1 ו-y_2)

נמצא למשל את y_2:

מספיק להציב בדיוק ולגזור

נניח בהתחלה $\underline{x<0}$: (כי יש לנו גזירה של ערך מוחלט)

אז
$$y(x) = x^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (n+\tfrac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2}) x^{n-\frac{3}{2}}$$

נציב ב-(*) ונקבל:

$$\cancel{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} + 2\sum_{1}^{\infty} b_n (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (n+\tfrac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+\frac{3}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} b_{n-2} x^{n-\frac{1}{2}}$$

נרצה להשוות מקדמים:

$\underline{n=1 \text{ עבור}}$:

$$\left(\cancel{2}b_1 \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} + b_1 \frac{3}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$b_1 = 0 \Longleftarrow$$

$\underline{n=2 \text{ עבור}}$:

$$\left(2b_2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} + b_2 \frac{5}{2} + 1\right) x^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b_2 = -\frac{1}{10}$$

עבור $n \geq 3$ כבר ניתן לרשום נוסחה רקורסיבית כללית:

$$2b_n (n+\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2}) + b_n (n+\tfrac{1}{2}) + b_{n-2} = 0$$

$$b_n = -\frac{b_{n-2}}{2n(n+\frac{1}{2})}$$

לכן $b_3 = b_5 = \ldots = 0$ (האי-זוגיים מתאפסים)

ומכאן ניתן להמשיך בעזרת היחס הרקורסיבי.

בדומה פותרים $\underline{\text{עבור } x<0}$, ועכשיו $y_2 = (-x)(1+\sum b_n x^n)$

הסימן בא בגלל הערך המוחלט שגזרנו!

כאשר ההפרש בין r_1 ל-r_2 הוא שלם הם תלויים (אם המספר אינו תקין) אם ניתן למצוא פתרון אחד ניתן ע"י הורדת סדר למצוא פתרון נוסף.

10-3-2007 ③

<u>לגבי תרגיל 11:</u>

שאלות 1,2,3 בדומה לתרגיל 10, מספיק לרשום את יחס הקורטה

אם הצלחנו לפתור. לא צריך ביטוי מפורש לשאר המקדמים.

שאלה 4- משוואה מסדר שלוש: $xy''' - y'' = 0$

נתון לי כי: $1, x, x^3$ פתרונות

$$W(y_1, y_2, y_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \cancel{x^3} & 3x^2 & 6x \end{pmatrix} = 6x$$

תנאי התחלה הוא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} y(c) \\ y'(c) \\ y''(c) \end{pmatrix}$$

כלומר לא לכל תנאי התחלה ניתן למצוא פתרון.

שאלה 5- $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = g(x)$

הסדר של הגזירה של ט אחד מהמחוברים הוא החזקה של x שכופל אותו (אוילר)

נתונים לנו פתרונות של משוואה הומוגנית:

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = \frac{1}{x}$$

נחפש: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$

תמיד מעיפים את העמודה השלישית

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} & -2x^{-3} \end{pmatrix}$$

$$u_1' = \frac{g \cdot \det \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}}{W(y_1, y_2, y_3)}$$

$$u_2' = -\frac{g \cdot \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}}{W(y_1, y_2, y_3)}$$

$$(A) \begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = A^{-1} b$$

הופכים את המטריצה ע"י נוסחת קרמר.