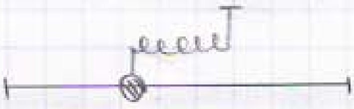
26-2-2007

מד"ר - שיעור מס' 1

מרצה: פרופ' יורם לס

דוגמא קונקרטית למשוואה דיפרנציאלית:



$$F = ma$$

כח ← F, תאוצה ← a

יהי מוט שעליו חרוז שקשור לקפיץ, שיכול לנוע

נתרגם את זה לבעיה מתמטית: מיקום החרוז ביחס לזמן

$$x(t)$$

מקום ← x, זמן ← t

a, התאוצה, זו הנגזרת השניה של המרחק לפי הזמן:

$$\underbrace{m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}}_{a} = \alpha \cdot \sin \omega t - \beta x^2(t) - \gamma \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{החיכוך}} \qquad [\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}]$$

זוהי למעשה משוואה דיפרנציאלית שהנעלם שלה הוא פונקציה $x(t)$.

זהו מקרה פרטי של משוואה יותר כללית שניתן לרשום:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית מסדר שני.

אם נסמן - את התאוצה: $a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

המהירות: $v(t) = \frac{dx(t)}{d(t)}$

אם נכתוב במונחים כאלה, אז

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\Big|_0 + \int_0^t a(t)\,dt = v(t)$$

זהו ביטוי במערכת אינטגרל למהירות.

אותו הדבר ניתן לעשות עבור:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt' \left[v(0) + \int_0^{t'} a(t'')\,dt''\right]$$

הבעיה היא שעכשיו את $x(t)$ הבענו באמצעות ביטוי שברור למספרים

הפונקציה היחידה שנמצאת בו היא a.

באופן אקוויולנטי ניתן לכתוב:

$$ma(t)=F\left(t,\ x(0)+\int_0^t dt'\left[v(0)+\int_0^{t'} a(t'')dt''\right],\ v(0)+\int_0^t a(t')dt'\right)$$ – משוואה אינטגרלית

פה: יש משוואה שהמשתנה שלה הוא הפונקציה a

אנחנו נתעסק בעיקר: בפונקציות במשתנים ממשיים.

משוואות דיפרנציאליות רגילות: משוואות שיש להן משתנה (שהוא פונקציה) עצמאי יחיד.

לא נתעסק במשוואות דיפרנציאליות חלקיות שבהן יש מס' גדול מ-1 של משתנים עצמאיים

למשל:
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$$

או
$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

אלו הן שתי משוואות דיפרנציאליות חלקיות.

ניתן לדבר גם על מערכות של משוואות:

$$\begin{cases}\frac{dH}{dt}=aH-\alpha HP\\ \frac{dP}{dt}=-cP+\gamma HP\end{cases}$$
מערכת של מד"ר שתי משוואות ושתי פונקציות נעלמות.

בשלב הראשון נדון במשוואות בודדות.

עד כה מבוא כללי

הגדרה:

הסדר של משוואה דיפרנציאלית הוא הסדר של הנגזרת הגבוהה ביותר המופיעה בה. המשוואה (הדיפרנציאלית הרגילה) הכללית מסדר n היא

מהצורה: $F(\underbrace{x,u(x),u'(x),\dots,u^{(n)}(x)}_{n+2 \text{ משתנים}})=0$ ... זוהי פונקציה של $n+2$ משתנים במובן כללי.

לרוב נכתוב משהו כמו:

$$(*)\quad F(x,y,y',\dots y^{(n)})=0$$

y תהיה הפונקציה של x אותה אנחנו מחפשים

דוגמא קונקרטית למשוואה כזו:

$$y'''+2e^xy''+y\cdot y'=x^4$$

$$\Updownarrow$$

$$y'''+2e^xy''+y\cdot y'-x^4=0$$

בדרך כלל נדון במשוואות מסדר n שהן מהצורה היותר מיוחדת, בה הנגזרת החית (הגבוהה ביותר):

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\qquad(**)$$

$(**)$ זוהי צורה פשוטה מצומצמת מהצורה הכללית ביותר $(*)$,

ובמובן כללי משוואה מהצורה $(*)$ עשויה להוביל למס' משוואות מהצורה $(**)$.

למשל אם נסתכל בדוגמא:

$$(y')^2+xy'+4y=0$$

$$\Downarrow$$

אפשר לחשוב על זה כמשוואה ריבועית ב-y'

$$\begin{cases} y'=\dfrac{-x+\sqrt{x^2-16y}}{2} \\ y'=\dfrac{-x-\sqrt{x^2-16y}}{2} \end{cases}$$

אם y' הוא פתרון של אחת המשוואות האלה אז ניתן לכתוב את המשוואה בצורה הפשוטה יותר.

למשוואה כזו, ככל נראה כבר ניתן לתת מובן לפונקציות ולמשתנים ניתן לשאול את השאלה האם ניתן למצוא פתרון למשוואה.

הגדרה:

פתרון של משוואה מהצורה: $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ על קטע $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$

היא פונקציה $\phi:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ כך שהנגזרות $\phi',\phi'',\dots,\phi^{(n)}$

קיימות ומתקיים השוויון $\phi^{(n)}(x)=f(x,\phi(x),\dots,\phi^{(n-1)}(x))$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$.

אפשר לדרוש שהפונקציות יהיו במרחב מסויים כך שלמשל יתקיים $\int_{\alpha}^{\beta}(\phi(x))^2dx<\infty$,

אפשר למשל לקחת פונקציית מדרגה שאינה גזירה

ניתן לדון גם במקרים כאלה ולחפש משוואות דיפרנציאליות

גם אם הנגזרות לא בהכרח קיימות.

(לא נעסוק בזה)

אנחנו נתעסק בקטעים פתוחים בהם הנגזרות יהיו מוגדרות בכל נקודה.

שאלות שמעניינות אותנו:

① קיום - האם יש או אין פתרון? (זה תלוי גם איזה מחפשים אותו). מהו אוסף הפתרונות? (אם יש כמה)

② יחידות- תחת אילו תנאים נוספים פתרון נקבע באופן יחיד?. האם יש פתרון יחיד המקיים תנאים מסויימים?

דוגמא: $y'=ky$ על הקטע $(-\infty,\infty)$, לכל $c\in\mathbb{R}$ קל לראות

כי אם ניקח את הפונקציה $\phi(x)=c\cdot e^{kx}$ אז $\phi(x)$ הוא פתרון

(אם נגזור נראה את השוויון). יש הרבה c כאלו שיתנו פתרון מתאים.

אך אם למשל נוסיף תנאי, $\phi(0)=1$ אז יש פתרון יחיד: $\phi(x)=e^{kx}$

26-2-2007

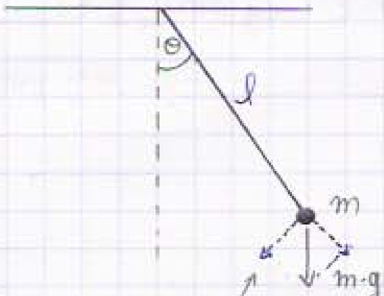
הגדרה: משוואה מהצורה $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ נקראת **לינארית** אם F היא פונקציה לינארית של המשתנים $y,y',\dots,y^{(n)}$. באופן שקול, המשוואה הלינארית הכללית מסדר n היא מהצורה: $a_n(x)\cdot y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_0(x)\cdot y=g(x)$

אם במקרה $g(x)=0$ אז אומרים שהמשוואה נקראת **הומוגנית**

ואם $g(x)\neq 0$ אזי היא נקראת **לא הומוגנית**.

הגדרה: משוואה שאינה לינארית נקראת **לא לינארית**.

דוגמא: שום בעיה מהחיים: מטוטלת



אז המשוואה: $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\cdot\sin\theta$ כאשר $x=l\theta$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

זוהי משוואה מסדר 2 שאינה לינארית (כי $\sin$ אינה פונקציה לינארית)

בקירוב, אם התנודות מאוד קטנות $\sin\theta\approx\theta$ ולכן אם הזווית θ נשאר קטן

אפשר להחליף את $\sin\theta$ ב-θ ו"לפתור" $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$ (שזוהי כן משוואה לינארית)

להחליף משוואה לא לינארית במשוואה לינארית קרובה נקרא **לינאריזציה**.

פתרון כללי של המשוואה הלינארית הזו הוא:

$$C_1\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+C_2\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

(נלמד להוכיח מחר)

אם נדרוש $\theta(0)=0$ (כמו ב $\theta=0$) אז הפתרון הכללי, אם נציב בו $t=0$

נקבל כי הפתרון הוא מהצורה $C\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t$

אבל עדיין לא קובע את הפתרון כי יש אינסוף פתרונות כאלה וכדי לקבוע את

הפתרון באופן יחיד מוכרחים תנאי נוסף: אם $\theta'(0)=0$ אז הפתרון

הוא 0 והוא יחיד.

אם נדרוש מתקיים $\theta'(0)=1$

$$C\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cos(0)=1 \Longrightarrow C=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Longrightarrow \theta(t)=\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

וזהו פתרון יחיד.

28-2-2007

מד"ר - שיעור מס' 2

שיעור שעבר היה מבוא:

משוואות מסדר ראשון:

$$y'=f(x,y)$$

הסוג הפשוט ביותר של המשוואות האלה הוא:

$$y'=f(x)$$

הפתרון של משוואה כזו הוא האינטגרל הלא מסוים $y=\int f(x)dx$

אם האינטגרל אינו מסוים (סמן אחר

$$y=\int^{x} f(t)dt+C$$

← זהו סימון להבהרה מסוימת של פונקציה קדומה (משתמשים בו כשרוצים אותו כ-אינטגרל לא מסוים)

נשים לב כי אין גבול תחתון ויש גבול עליון
(זה מבחין בין אינטגרל מסוים לאינטגרל שאינו מסוים)

האינטגרל מסוים: $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$

אם למשל: $f(x)=\sin x$

$\int f(x)dx=-\cos x+C$ זוהי משפחה של פונקציות שכולן מהוות פתרון.

במקרה הכללי נרשום: $\int f(x)dx=\int^{x} f(t)dt+C$

דוגמא קונקרטית: אם $y'=\sin 2x$

$$\Downarrow$$

$$y=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

מה שאנחנו מכירים כאינטגרל לא מסוים זהו בעצם פתרון למשוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון הפשוטה ביותר.

המשוואה הלינארית מסדר ראשון:

משוואה מהצורה: $y'+P(x)y=g(x)$

נתחיל ממקרה פרטי של המשוואה הנ"ל:

$y'+ay=0$ על הקטע $(-\infty,\infty)$

מ"ניחוש" רואים שאם ניקח $y=c\cdot e^{-ax}$ זה יהיה פתרון מתאים.

(מה שפחות פשוט לראות זה שאלו כל הפתרונות, כלומר זהו אוסף כל הפתרונות למשוואה)

ניתן לראות גם שכל הפתרונות הם מהצורה הזו כי:

$$y'=-ay \Leftarrow \frac{y'}{y}=-a \Leftarrow (\ln|y|)'=-a$$

$$\Leftarrow \ln|y|=-ax+\ln c$$

$$\Longrightarrow \boxed{y=c\cdot e^{-ax}}$$

ורואים שזהו פתרון.

סימון שנשתמש בו בהמשך:
(השימוש ב-log בקורס)

$$\log x=\begin{cases}\log_2 x & \text{במדעי המחשב}\\ \log_{10} x & \text{בבי"ס תיכון}\\ \ln x=\log_e x & \text{בכל מקום אחר}\end{cases}$$

לא בדקנו $y\neq 0$ כאשר חילקנו ב-y ולכן נבדוק לכך

כעת: במקרה הזה ניתן לראות שהחלוקה ב-y היא מוצדקת כי רואים שאם $y\neq0$ אזי ש

לפחות במקום אחד ש-$y\neq0$ וזוהי פונקציה גזירה ובפרט רציפה ולכן אם היא לא אפס במישהו מקום היא גם לא אפס במישהו קטע ואז באותו קטע הפתרון חייב להיות מהצורה הזאת. אם $y=0$ אנחנו מקבלים פתרון שכבר מוכל בקבוצת הפתרונות שמצאנו.

אם $y\neq0$ במישהו מקום אזי תמיד $y\neq0$ (רואים בזכות צורת הפתרון)

ברור מראש ש-$y=0$ בכל מקום הוא גם פתרון והוא נכלל בפתרון הכללי שמצאנו ע"י $c=0$.

בשביל לקבוע את הפתרון, צריך משהו שיקבע את הקבוע c.

היות ויש הרבה פתרונות דרוש תנאי (בנוסף על המשוואה) כדי לקבוע פתרון מסוים.

תנאי טבעי הוא מהצורה: $y=y_0$ בנקודה $x=x_0$

או כפי שנסמן $[y(x_0)=y_0]$

בדוגמא שראינו קודם זה כמו לומר: $ce^{-ax_0}=y_0 \Rightarrow c=y_0e^{ax_0}$

תנאי כזה נקרא בדרך כלל <u>תנאי התחלה</u>, (או לפעמים <u>תנאי שפה</u>)

בעיה הכוללת משוואה מסדר ראשון יחד עם תנאי כזה (תנאי התחלה)

קוראים בעיית ערך התחלתית (Initial Value Problem)

משהו קונקרטי:

<u>משל</u>: נתונה המשוואה $y'+ay=0$, תנאי התחלה

$$y(0)=2$$

$$\Leftarrow \quad c=2\cdot \underbrace{e^{-a0}}_{1}=2$$

$\Leftarrow \quad y=2e^{-ax}$ פתרון <u>יחיד</u> של בעיית הערך ההתחלתי.

הצעד הבא בדרך לפתרון הכללי יהיה להוסיף את הפונקציה $g(x)$:

$$y'+ay=g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}\cdot y)=e^{ax}y'+ae^{ax}y=e^{ax}(y'+ay)=e^{ax}g(x)$$

<u>כלומר</u>:

$$e^{ax}y=\int^{x}e^{at}g(t)dt+c$$

$$\Longrightarrow y(x)=e^{-ax}\int^{x}e^{at}g(t)dt+c\cdot e^{-ax}$$

נחזור לזה רק בתחילת השיעור הבא

מד"ר - שיעור מס' 3

נחזור על סוף השיעור הקודם.

לקחנו משוואה מהצורה $y'+ay=g(x)$ והסתכלנו על:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}y\right)=e^{ax}g(x) \Longrightarrow e^{ay}=\int^x g(t)dt+c$$

$$\boxed{y(x)=e^{-ax}\left(\int^x e^{at}g(t)dt+c\right.}$$

זהו פתרון למשוואה לינארית מסדר ראשון שהיא הומוגנית

כעת, נרצה להרחיב למשוואה לינארית כללית יותר מסדר ראשון:

$$y'+p(x)y=g(x) \qquad (\text{כאשר הפעם } g(x)\neq 0)$$

נחפש פונקציה $\mu(x)$ כך שמתקיים:

$$\mu(x)[y'+p(x)y]=[\mu(x)y]'=\mu(x)y'+\mu'(x)\cdot y$$

$\mu(x)$ כזו, אם קיימת, מקיימת את השוויון:

$$\mu(x)\cdot p(x)\cdot y=\mu'(x)\cdot y$$

$$\Longleftarrow \quad (\ln\mu)'=\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=p(x) \qquad (\text{נגזרת לוגריתמית})$$

$$\Longleftarrow \quad \ln\mu(x)=\int^x p(t)dt$$

$$\Longleftarrow \quad \mu(x)=\exp\left[\int^x p(t)dt\right]=e^{\int^x p(t)dt}$$

כעת ניתן לכתוב:

$$[\mu(x)y]'=\mu(x)g(x)$$

$$\mu(x)\cdot y=\int^x \mu(t)g(t)dt+c$$

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int^x \mu(t)g(t)dt+c\right)$$

עבור: $\mu(x)=e^{\int^x p(t)dt}$

$$\boxed{y(x)=e^{-\int^x p(t)dt}\left(\int^x e^{\int^x p(t)dt}\quad +c\right)}$$

משפט קיום ויחידות:

משפט 1: אם הפונקציות p ו- g הן רציפות על קטע פתוח (α,β) המכיל את הנקודה x_0 אזי: קיימת פונקציה יחידה $y=\phi(x)$ המקיימת את המשוואה $y'+p(x)y=g(x)$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$ עבור $y_0\in\mathbb{R}$ כלשהו.

הוכחה: ראינו שכל פתרון הוא מהצורה:

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(t)g(t)dt+c\right] \quad \text{עבור:} \quad \mu(x)=\exp\left[\int^x p(t)dt\right]$$

וכן, ראינו כי y כנ"ל הוא פתרון. (יש לשים לב שרציפות p מבטיחה ש- μ מוגדרת, אינה מתאפסת וגזירה. זה מצדיק את השיוויון $(\mu y)'=\mu\cdot g$ ובאותו אופן, רציפות g מבטיחה של- μg יש אכן אינטגרל שהוא מוגדר וגזיר, לכן רציפות p ו- g מצדיקה את החשבון שעשינו.

ניתן גם לראות שעבור בחירה כלשהי של פונקציה $\mu(x)$ קיים c שעבורו יתקיים תנאי ההתחלה וגם ש- c נקבע חד ערכית מתנאי זה. זה מסיים את ההוכחה.

צורה אלגנטית לרשום את הפתרון היחיד היא:

ניקח $\mu(x)=\exp\left[\int_{x_0}^x p(t)dt\right]$ ואז $\mu(x_0)=e^0=1$

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^x \mu(s)g(s)ds+c\right]$$

$$y(x_0)=\frac{1}{\mu(x_0)}(0+c)=\frac{c}{1}=c$$

ואז כדי לקיים את תנאי ההתחלה דרוש $c=y_0$

בסיכום יוצא

$$\begin{cases} y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^x \mu(s)g(s)ds+y_0\right] \\ \mu=\exp\left[\int_{x_0}^x p(s)ds\right] \end{cases}$$

הפתרון היחיד, שהוכח במשפט.

דוגמא: $y'-2xy=1$ $\quad y(0)=\frac{1}{2}$ $\quad p=-2x$

$g=1$

$$\mu(x)=\exp\left\{\int_0^x -2t\,dt\right\}=e^{-x^2}$$

$$y=\frac{1}{e^{-x^2}}\left[\int_0^x e^{-t^2}dt-\frac{1}{2}\right]$$

מד"ר - שעור מס' 4

משוואות לא ליניאריות מסדר ראשון

נחשוב מראש על בעיית ערך התחלתי מהצורה:

$$\underbrace{y'=f(x,y);\quad y(x_0)=y_0}_{\text{בעיית ערך התחלתי}}$$

נתחיל במשפט שמתאר מה שניתן לעשות במקרה הכללי הזה, עדין לא נוכיח אותו.

משפט 2: (משפט Picard, 1893):

תהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה במלבן $(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ המקיימת בו תנאי ליפשיץ במידה שווה ב-y דהיינו קיים קבוע K כך ש: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K|y_1-y_2|$ לכל x ב-(α,β) ולכל שתי נקודות y_1,y_2 ב-(γ,δ).

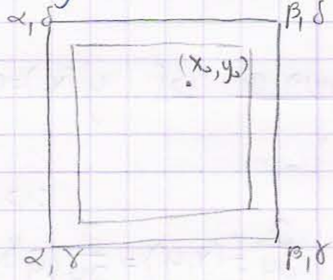
תהי (x_0,y_0) נקודה במלבן אזי קיים קטע מהצורה (x_0-h,x_0+h) המוכל בקטע המתאים לערכי x במלבן כלומר מוכל ב-(α,β) כך שלבעיית הערך ההתחלתי $y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ קיים פתרון יחיד $y=\phi(x)$ המוגדר בקטע (x_0-h,x_0+h).

כמה הערות:

1) יתכן קיום פתרון יחיד גם בלי קיום תנאי המשפט. (התנאים הם מספיקים, לא הכרחיים).

2) לקיום פתרון מספיק לדרוש את רציפות f, הדרישה לקיום תנאי ליפשיץ במידה שווה ב-y דרושה רק להבטחת היחידות.

3) אם $\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימת ורציפה, אזי: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\int_{y_2}^{y_1}\frac{\partial f}{\partial y}dy\right|\le\sup\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot|y_1-y_2|$



לכן, תנאי טבעי המבטיח את קיום תנאי ליפשיץ הנדרש על תת-מלבן קרוב למלבן המקורי הוא רציפות $\frac{\partial f}{\partial y}$ במלבן המקורי.
כלומר מסקנת המשפט מתקיימת אם גם f וגם $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות במלבן המקורי $(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$.

* חשוב לשים לב לתנאי השפה כאשר פותרים משוואות מסוג זה.

* במקרה הליניארי זה היה נראה כך: $y' = \overbrace{g(x) - y\cdot p(x)}^{f}$

<u>דוגמא</u>: $y' = y^{\frac{1}{3}}$ כאשר $y(0)=0$, $x \ge 0$.

קל לראות כי $y = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ פתרון.

כי אם נגזור נקבל:

$$\left[y' = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{3}x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

לבעיית ערך התחלה. כן יש המון
פתרונות, אבל אם נוסיף תנאי התחלה
אחר מ-0) לבעיה יהיה פתרון יחיד
(למשל אם נוסיף $y(x_0)=2$

כמו כן קל לראות כי: $y = -\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$ גם הוא פתרון. וגם $y=0$ פתרון.

וכל הפתרונות האלו מקיימים גם את תנאי ההתחלה, כלומר אלו הם 3 פתרונות שונים שמקיימים את בעיית הערך ההתחלתי.

למעשה: לכל $x_0 > 0$:

$$y_{\pm,x_0} = \begin{cases} 0 & 0 \le x < x_0 \\ \pm\left[\frac{2}{3}(x-x_0)\right]^{3/2} & x \ge x_0 \end{cases}$$

הוא פתרון.

ברור ש- $y(0)=0$, כמו כן (נראה את מקרה +):

$y'=0$ $\quad x<x_0$

עבור $x>x_0$:

$$y' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}^{\frac{3}{2}}\cdot(x-x_0)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}(x-x_0)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{2}{3}(x-x_0)\right)^{3/2}\right)^{1/3}$$

ורואים $y' \xrightarrow[x\searrow x_0]{} 0$

לא קשה לוודא (תרגיל) ש-y גזירה ב-x_0 ו- $y'(x_0)=0$ <u>לכן</u>: <u>יש המון פתרונות</u>.

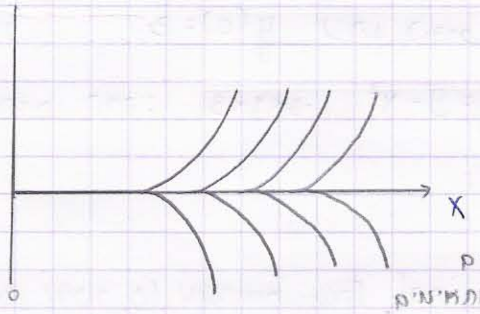
הקיום הזה של כל הפתרונות הוא <u>אינו</u> סתירה למשפט כי:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{1/3}\right) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

ולכן קל לראות שלא מתקיים תנאי ליפשיץ בסביבת 0.

12-3-2007

איך נראה בערך אוסף הפתרונות:



אלו הם המקרים הגבוליים המתאימים

2 הערות:

* אם היינו קובעים תנאי התחלה $y(x_0)=2$ ממשפט פיקארד היינו מקבלים פתרון יחיד בסביבה כלשהי אבל משום שהפתרון שראינו נכון לכל $x>0$ מרחיבים כל פעם את הקטע הנ"ל ומקבלים יחידות מכך שאוסף הפתרונות שהבאנו הוא אוסף כל הפתרונות.

* עפ"י ההערה שכתבנו קודם, רציפות f מספיקה לקיום פתרון. אם יש רק אי-רציפות אז בנקודה וסביבתה לא יהיו פתרונות. אך מרגע שהליפשיציות נשברת הרבה פתרונות יכולים להתחבר לנקודה אחת ובבעיית ערך התחלתי יש הרבה פתרונות.

הערה: הרבה פעמים הטוב ביותר שניתן לעשות הוא לקבל קשר מהצורה: $\Psi(x,y(x))=0$ עבור פתרון $y(x)$ של משוואה דיפרנציאלית מהצורה $y'=f(x,y)$. זה נקרא נוסחה לא מפורשת (implicit formula) ולפעמים קשר כזה נקרא אינטגרל של המשוואה.

דוגמא: עבור המשוואה $y'=-\frac{x}{y}$ ניתן להראות שכל הפתרונות מקיימים קשר מהצורה $x^2+y^2=c^2$. ניתן לוודא זאת ע"י גזירה: $2x+2yy'=0 \Longleftarrow$

$\Longleftarrow$ $y'=-\frac{x}{y}$. זה נותן למשל, אם מנסים לחלץ את y,

$y=\pm\sqrt{c^2-x^2}$ וזה מגדיר "המון פתרונות".

למשל: $y=\sqrt{c^2-x^2}\quad -c<x<c$, $y=-\sqrt{c^2-x^2}\quad -c<x<c$

$$y=\begin{cases}\sqrt{c^2-x^2} & -c\le x\le 0\\ -\sqrt{c^2-x^2} & 0<x<c\end{cases}$$

אפשר גם להגדיר זאת ב-3 קטעים שונים ע"י 3 קשרים שונים.

דוגמא קונקרטית:

מהינתן תנאי התחלה כמו $y(0)=3$ ניתן מהנ"ל לבחור פתרון קונקרטי תקף מקטע כלשהו. במקרה הזה: $-3<x<3$ $\quad y=9-x^2$ וכך את בעיית הערך ההתחלתי פתרנו.

נעבור עכשיו לכיוון קצת חדש, נדבר על משוואות שקל לפתור אותן:

פתרון בהפרדת משתנים:

את המשוואה $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ ניתן תמיד לכתוב בצורה הבאה:

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \begin{bmatrix} M=-f(x,y) \\ N=1 \end{bmatrix}$$

נניח שניתן להעביר את המשוואה לצורה:

$$\underbrace{M(x)}_{\text{רק פונקציה של } x}+\underbrace{N(y)}_{\text{רק פונקציה של } y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$M(x)dx=-N(y)dy$$

(ההפרדה בין dx, dy היא לגיטימית כי מתייחסים אליהם כמו אל מספרים מקורס הזה)

ואז ניתן לעשות אינטגרציה על שני האגפים.

דוגמה: נניח שיש לנו משוואה:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1+y^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -x^2+(1+y^2)\frac{dy}{dx}=0$$

וזוהי משוואה שניתנת להפרדת משתנים:

נסמן: $H_1'(x)=M(x)$, $H_2'(y)=N(y)$ אזי נשים לב לעובדה הבאה:

$$H_1'(x)+\underbrace{H_2'(y)\frac{dy}{dx}}_{\frac{d}{dx}(H_2(y))}=0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(H_1(x)+H_2(y(x))\right)=0 \Longrightarrow H_1(x)+H_2(y(x))=\overset{\text{קבוע}}{C}$$

12-3-2007

③

נניח תנאי התחלה מהצורה $y(x_0)=y_0 \Leftarrow C=H_1(x_0)+H_2(y_0)$

ואנחנו גם יודעים ש:

ובאופן דומה:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt+\int_{y_0}^{y} N(t)\,dt=0} \Leftarrow \begin{cases} H_1(x)-H_1(x_0)=\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt \\ H_2(y)-H_2(y_0)=\int_{y_0}^{y} N(t)\,dt \end{cases}$$

ניתן לכתוב כזאת:

$$\int_{x_0}^{x} M(t)\,dt=-\int_{y_0}^{y} N(t)\,dt$$

נמשיך מהשבוע הבא.

14-3-2007

מד״ר - שיעור מס׳ 5

(1)

משוואה ניתנת להפרדת משתנים אם ניתן לרשום אותה בצורה $M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0$

בתנאים האלה מתקיים:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} M(t)dt+\int_{y_0}^{y} N(t)dt=0}$$

[דרישה: M,N רציפות (אחרת אין לנו על מה לדבר)]

וזאת כאשר $y(x)$ פתרון של המשוואה המקיים: $y(x_0)=y_0$

נראה כיצד משתמשים בזאת לפתור משוואות:

דוגמא: $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, כאשר $y(0)=-1$

את המשוואה הנ״ל, ע״י הפרדת אגפים, ניתן לכתוב כ:

$$2(y-1)dy=(3x^2+4x+2)dx$$

$$\int_{-1}^{y} 2(t-1)dt=\int_{0}^{x}(3t^2+4t+2)dt$$

כי כה y_0 שלי   כי כה x_0 שלי

נעשה אינטגרציה פשוטה בשני האגפים.

את אותו החישוב בצורה יותר פשוטה נעשה: נחשב פונקציות קדומות של שני האגפים ונמצא קבוע שמתאים לתנאי ההתחלה:

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c$$

נקבע את c:

$$1+2=c \Rightarrow c=3$$

(ועכשיו מקבלים פה קשר מפורש.)

לכן קיבלנו בסיכום שה-y שלנו חייב לקיים:

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+3$$

במקרה הזה קל לחלץ את y באופן יחסי: (השלמה לריבוע)

$$y^2-2y+1=x^3+2x^2+2x+4$$

$$(y-1)^2= \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\Downarrow$$

$$y-1=\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$$

$$y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$$

נתייחס עכשיו לתנאי ההתחלה:

לקבל $y(0)=-1$ חייבים לבחור בפתרון עם המינוס $\left(-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}\right)$

לכן: הפתרון לבעיית תנאי ההתחלה הוא: $y=1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$.

בנוסף, כדי שהשורש יהיה של מספר חיובי, חייבים לדרוש: $x>-2$ (לבדוק לבד שדרישה כזו מספיקה - לחקור את הפונקציה)

נעבור לדבר על משוואות שניתן לפתור בשיטות אחרות:

משוואות מדוייקות:

נניח שיש לנו פונקציה של שני משתנים: $\Psi(x,y)=c$ באופן כללי

והקשר הזה נותן קשר בין x ל-y ונותן הגדרה של y כפונקציה של x.

אז ניתן לגזור:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}(\Psi(x,y))\cdot y'=0}$$

והיינו שקיבלנו ע"י גזירת הקשר הזה משוואה דיפרנציאלית.

משוואה דיפרנציאלית שפתרונה נתון ע"י $\Psi(x,y)=c$.

באופן הפוך, נניח שנתונה משוואה:

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0$$

אם קיימת פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=M \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y}=N$$

וכן ש: $\Psi(x,y)=c$ מגדיר את y כפונקציה גזירה של x

אזי בהכרח מתקיים גם: $M(x,y)+N(x,y)y'=\frac{d}{dx}\left[\Psi(x,y(x))\right]$

ומכאן שהמשוואה שקולה ל-

$$\frac{d}{dx}(\Psi(x,y))=0$$

שאז שקול ל- $\Psi(x,y)=c$ ואז: $\Psi(x,y)=c$ מגדיר את y כפונקציה של x

ומהווה פתרון של המשוואה.

משפט: (משפט ג): יהיו $M,N,\frac{\partial N}{\partial x},\frac{\partial M}{\partial y}$ פונקציות רציפות במלבן שצורתו:

$$R=\{(x,y):\alpha<x<\beta\ ,\ \gamma<y<\delta\}$$

אזי המשוואה: $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ היא משוואה דיפרנציאלית מדוייקת ב-R

אם ורק אם: $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ לכל נקודה ב-R.

נוכיח את המשפט בשיעור הבא.

19-3-2007

מד"ר - שעור מס' 6

נמשיך במשוואות מדוייקות:

משפט: יהיו M, N פונקציות רציפות $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ במלבן $R=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$

אזי המשוואה $M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0$ היא משוואה דיפרנציאלית מדוייקת

במלבן R אם ורק אם:

$$\underbrace{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}_{(*)}$$ בכל נקודה ב- R

כלומר קיימת פונקציה גזירה $\psi(x,y)$ המקיימת $\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=N}_{(**)}$

אם ורק אם M ו- N מקיימות את $(*)$

הערה: קיום $(**)$ אומר שהמשוואה שקולה ל- $\frac{d}{dx}\left[\psi(x,y(x))\right]=0$

הוכחה: כיוון ראשון: נניח שקיימת ψ כנדרש (מקיימת $(**)$):

אזי:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

מצד שני:

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

ועל פי משפט ידוע, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ אם הן פונקציות רציפות.

ומכאן הוכחנו כיוון ראשון.

כיוון שני: נניח ש- M ו- N מקיימות את $(*)$. נרצה לבנות פונקציה ψ כנדרש:

$$\psi(x,y)=\int^x M(t,y)\,dt+h(y)$$

רכיב שתלוי ב-y בלבד.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int^x M(t,y)\,dt+h'(y)=\int^x \frac{\partial}{\partial y}M(t,y)\,dt+h'(y)$$

אם מתקיים:

$$h'(y)=N(x,y)-\int^x \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt$$

אז יתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h'(y)\right)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\underset{(*)}{=}0$$

לכן במקרה כזה:

$h'(y)$ בלתי תלויה ב-x וניתן

לקבל את h: $h=\int^y h'(t)\,dt$.

כלומר, קיבלנו כה הסיכומו של דבר: (אם נבחר $x_0,y_0\in\mathbb{R}$, אזי $\psi(x,y)$ כנדרש היא:)

$$\boxed{\psi(x,y)=\int^{x} M(t,y)\,dt+\int^{y}\left[N(x,s)-\int^{x}\frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\,dt\right]ds} \qquad (***)$$

בדיקה:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=M(x,y)+\int^{y}\underbrace{\left[\frac{\partial N}{\partial x}(x,s)-\frac{\partial M}{\partial s}(x,s)\right]}_{0 \text{ (מה (*))}}ds=M(x,y)$$

נבדוק שמתקיים גם השוויון השני:

רק נאמר קודם ש: $\int^{x} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ - כך שאומרים במפורש מהו x_0. } אנחנו מניחים את זה לצורך האינטגרלים בנוסחא (***)

נבדוק הרכיב השני לפי y:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\cancel{\int^{x}\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt}+N(x,y)-\cancel{\int^{x}\frac{\partial M}{\partial y}(t,x)\,dt}$$

אז
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=N(x,y)$$

בדומה להערה שכתבנו קודם, הכוונה כ:

$$\int^{y} g(s)\,ds=\int_{y_0}^{y} g(s)\,ds$$

. כך שאומרים במפורש מהם x_0,y_0 (לצורך האינטגרלים בנוסחא (***))

נראה איך אנחנו משתמשים ב"סיפור" הזה כדי לפתור משוואה:

דוגמא: נתונה המשוואה: $\underbrace{(y\cos x+2xe^{y})}_{M}+\underbrace{(\sin x+x^{2}e^{y}-1)}_{N}y'=0$

נבדוק תחילה אם זה ניתן להפרדת משתנים: לא רואים פה שום הפרדה פשוטה

אז הדבר הבא הוא לבדוק האם זוהי משוואה מדוייקת:

נבדוק:
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x+2xe^{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\cos x+2xe^{y}$$

קיבלנו שיוויון ולכן זוהי משוואה מדוייקת.

19-3-2007

נחזור בעצם על החישוב מההורחה מאופן מסודר:

$$\psi = \int^{x} M(t,y)dt + h(y) = y\cdot\sin x + x^2e^y + h(y)$$

שוב נחזור על אותו התרגיל שעשינו קודם:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + h'(y) = N = \sin x + x^2e^y - 1$$

(יודעים שזה חייב להיות שווה ל-N מהמשפט)

אז: ניתן לחלץ ביטוי מפורש ל $h'(y)$ ולעשות עליו אינטגרציה

וקיבלנו בעצם: $h'(y) = -1 \Longrightarrow h(y) = -y$ (לא נדרש כאן פתרון כללי, מספיק למצוא איזושהי ψ)

לכן קיבלנו ביטוי ל-ψ שהוא: $\psi(x,y) = y\sin x + x^2e^y - y$

ומכאן יוצא שקיבלנו את פתרון המשוואה שהוא:

$$\boxed{y\sin x + x^2e^y - y = c}$$

(חשוב לגזור בסוף כדי לבדוק שבאמת קיבלנו משהו מתאים)

זהו פתרון לא מפורש של המשוואה המקורית.

נראה עכשיו משוואות שע"י מניפולציה קטנה ניתן להפוך אותן למשוואות מדוייקות:

גורמי אינטגרציה נניח ש- $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (*)

אינה מדוייקת. אם ניתן למצוא פונקציה $\mu(x,y)$ כך ש: $\mu(Mdx + Ndy) = 0$

מדוייקת, אזי ניתן יהיה לפתור אותה באופן לא מפורש, ואם $\mu(x,y) \neq 0$ $\forall x,y$

אזי הפתרון $\psi(x,y) = c$ של (*) נותן גם פתרון של המשוואה המקורית.

הסיבה של גורמי אינטגרציה, הוא סיבה של מציאת μ.

התנאי ש-(*) תהיה מדוייקת הוא שיתקיים $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$

אם את השיוויון הזה ניתן לרשום, ע"י העברת אגפים: $\Longleftarrow$

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = 0$$

התאפסות של זה

זה התנאי שהמשוואה המקורית תהיה אפס.

זוהי משוואה דיפרנציאלית חלקית מסדר ראשון

והיא קשה יותר מהמשוואה המקורית.

מכאן: מציאת גורמי אינטגרציה כאלה אינה פשוטה ולמעשה אינה אפשרית

המשך ←

יש מקרים בהם ניתן לנחש גורם אינטגרציה מסוים ויש מקרים בהם יש מס' שיטות.

נראה דוגמא קונקרטית אחת של גורם אינטגרציה שהוא טוב:

דוגמא:

נתבונן במשוואה: $\underbrace{(y^2+xy)}_{M}dx - \underbrace{x^2}_{N}dy=0$ נראה ש- $\mu(x,y)=(xy^2)^{-1}$

גורם אינטגרציה.

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}=2y+x \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-2x}_{\text{כלומר המשוואה אינה מדוייקת}}$$

נכפול ב- μ ונעביר את המשוואה לצורה המוכללת:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}_{\frac{\partial}{\partial y}=\frac{-1}{y^2}}dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{\frac{\partial}{\partial y}=\frac{-1}{y^2}}dy=0$$

ואכן גורם האינטגרציה הפך את המשוואה למדוייקת.

זוהי משוואה מדוייקת שפתרונה:

$$\ln(x)+\left(\frac{x}{y}\right)=c$$

יש לדאוג לכך ש: $x\neq0, y\neq0$ (הפתרון קיים הרחק מהצירים)

21-3-2007

מד"ר - שיעור מס' 7

1

דיברנו בשיעור הקודם על משוואות מדוייקות והתחלנו לדבר על גורמי אינטגרציה.

אמרנו כי "ניתן לפתור" משוואה ע"י כפל באיזשהו גורם אם $\mu(Mdx+Ndy)=0$ היא מדוייקת

ואז נשאלת השאלה מתי ניתן למצוא μ כזה. ברוב המקרים קשה למצוא אותו, לעיתים ניתן לנחש.

מקרים חשובים שבהם קל למצוא גורם אינטגרציה:

אם ניתן לבחור את אותו גורם אינטגרציה μ כפונקציה של x בלבד או כפונקציה של y בלבד.

נניח ש-μ פונקציה של x בלבד, אז:

במקרה כזה, $\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\mu\frac{\partial M}{\partial y}$ ← כאן μ הוא פונקציה של x בלבד.

$$\Longrightarrow \quad \frac{d\mu}{dx}=\underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}}\mu$$

(ניתן לפתור משוואה כזו אם זה פונקציה של x בלבד)

זוהי משוואה לינארית שניתנת לפתרון התלוי ב-x בלבד אם ורק אם $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ זוהי פונקציה של x בלבד.

אם μ פונקציה של y בלבד, אז: $M\frac{d\mu}{dy}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{d\mu}{dy}=\underbrace{\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}\mu$$

שוב נקבל כמו קודם שניתן לפתור $\mu(y)$

אם ורק אם זוהי פונקציה של y בלבד.

משוואות הומוגניות:

משוואה מהצורה $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ נקראית הומוגנית אם f תלויה אך ורק ביחס $\left(\frac{y}{x}\right)$ (ולא באופן עצמאי ב-x ו-y בנפרד).

כלומר: משוואה הומוגנית היא מהצורה: $\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$

דוגמא קונקרטית: $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)$

נניח שנתונה משוואה כזו ונסמן $y=xv \Longleftarrow \frac{y}{x}=v$ (עשינו בעצם החלפת משתנה)

אז המשוואה: $\frac{dy}{dx}=F(v)$ (העברנו את המשוואה להיות פונקציה של v)

מחליפים את y ב-v במשוואה ונבצע את הנגזרת המתאימה: $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$

←

ולכן המשוואה המקורית שקולה ל:

$$x\frac{dv}{dx}+v=F(v)$$

המשוואה הנ"ל ניתנת להפרדת משתנים:

$$\boxed{\frac{dx}{x}=\frac{dv}{F(v)-v}}$$ ← מפתרון משוואה זו מקבלים ביטוי ל- dx ואז: $y=xv$

נראה דוגמה עבור המשוואה שהבאנו מקודם:

$$x\frac{dv}{dx}+v=v^2+2v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=v^2+v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dv}{v(v+1)}=\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+1}\right)dv$$

⇐ ניתן לעשות אינטגרציה של שני האגפים ולקבל:

$$\ln|x|+\ln|c|=\ln|v|-\ln|v+1|$$

ומשוויון זה לקבל קשר מהצורה:

$$\Rightarrow |cx|=\left|\frac{v}{v+1}\right| \Rightarrow cx=\frac{v}{v+1}$$ (מההנחה ש: $x,y>0$)

$$\Rightarrow cx=\frac{y}{y+x} \Rightarrow y=\frac{cx^2}{1-cx}$$

ופתרון זה יהיה מוגדר מאיזשהו תחום מסויים.

עד כאן הדיון בסוגים הנפוצים ביותר של משוואות מסוגים מיוחדים שניתן לפתור.

עתה נעבור לדברים שיותר קשורים לתורה של משוואות דיפרנציאליות.

נוכיח את משפט picard שכבר נתננו ועדיין לא הוכחנו אך בינתיים נעשה חזרה על כמה דברים מעניינים שאותם נצטרך.

הגדרה: פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראית רציפה במידה שווה על קטע $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך ש- $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ לכל $x,y\in[a,b]$ שעבורם $|x-y|<\delta$

הגדרה: סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, מתכנסת נקודתית לפונקציה גבולית $f(x)$ על $[a,b]$, אם לכל $x\in[a,b]$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$

סדרה כנ"ל מתכנסת במידה שווה, אם לכל $\varepsilon>0$ יש N כך ש- $n>N$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in[a,b]$

26-3-2007

מבוא - שעור מס' 8

נתנו בשעור שעבר כמה הגדרות מאינפי והזכרנו משפט:

משפט: אם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, מתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית f,
ואם כל f_n היא רציפה (במ"ש) על $[a,b]$. אזי f רציפה (במידה שווה).

הוכחה: יהי $x\in[a,b]$, צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שעבור $|h|<\delta$,
$x, x+h\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(x+h)|<\varepsilon$.

אז נבחר n כך ש $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{3}\varepsilon$ וזאת לכל $x\in[a,b]$ ואז נבחר δ כך ש-
$|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{1}{3}\varepsilon$ לכל $x,y\in[a,b]$ שעבורם $|x-y|<\delta$.

אזי ל- $|h|<\delta$ מתקיים:

$$|f(x)-f(x+h)| = |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f(x+h)+f_n(x+h)-f_n(x+h)|$$

$$\le \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{\frac{1}{3}\varepsilon}+\underbrace{|f_n(x)-f_n(x+h)|}_{\frac{1}{3}\varepsilon}+\underbrace{|f(x+h)-f_n(x+h)|}_{\frac{1}{3}\varepsilon}<\varepsilon$$

אי שוויון המשולש

מרציפות f_n (כך נבחר ה- δ שלנו)

וכך מסתיימת ההוכחה.

☒

עכשיו ננסה להשתמש במשפט זה במהלך הוכחת משפט הקיום והיחידות שניסחנו בשעורים הקודמים (משפט 2)

משפט (2): תהי $f(x,y)$ רציפה במלבן $(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ המקיימת כי:
$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K|y_1-y_2|$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$! $y_1,y_2\in(\gamma,\delta)$.
תהי (x_0,y_0) נק' במלבן אזי קיים קטע $(x_0-h,x_0+h)\subset(\alpha,\beta)$, כך שלבעיית
הערך ההתחלתי $y(x_0)=y_0$; $y'=f(x,y)$ קיים פתרון יחיד בקטע (x_0-h,x_0+h).

הוכחה: נסמן ב- D מלבן מהצורה $|x-x_0|\le a$ $|y-y_0|\le b$ המוכל במלבן המקורי.
יהי $M>0$ שעבורו $|f(x,y)|\le M$ לכל הנקודות במלבן, כלומר לכל $(x,y)\in D$

המשך בעמ' הבא ←

נגדיר: $h=\min\{a, \frac{b}{M}\}$,

הערה: { נשים לב כי המשוואה הדיפרנציאלית $y'=f(x,y)$ קשורה למשוואה האינטגרלית:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

במובן זה שפתרון רציף של המשוואה הדיפרנציאלית המקיים את תנאי ההתחלה, מקיים את המשוואה האינטגרלית הנ"ל. }

(נשתמש בהערה בהמשך ההוכחה)

נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,dt$$

(y_0 הוא קבוע)

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))\,dt$$

וכן נמשיך

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))\,dt$$

אנחנו נראה שהסדרה: $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (הפונקציות שהגדרנו) מתכנסת לפתרון של בעיית הערך ההתחלתי בקטע (x_0-h, x_0+h).

השיטה הזו (לקבלת פתרון) נקראית שיטת האיטרציות של פיקארד, (והיא מתאימה להרבה הוכחות דומות).

היא פותחה בצורתה הכללית ע"י picard ב- 1893. שימוש ראשון מסודר

שיטה דומה לזו, שנכתבה ע"י Liouville שנכתב ב- 1838

כדי להוכיח את המשפט יש להוכיח 3 דברים:

(א) שהסדרה $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול רציף המוגדר בקטע (x_0-h, x_0+h).

(ב) שהפונקציה הגבולית היא פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית (המקיימת את תנאי ההתחלה).

(c) הפונקציה הגבולית היא הפתרון היחיד של המשוואה שמקיים את תנאי ההתחלה.

נראה תחילה, שעבור $|x-x_0|\le h$ מתקיים ש- $|y_n(x)-y_0|\le b$ (כלומר כל ה-y-ים נמצאים במלבן)

<u>הוכחה:</u> (באינדוקציה)

עבור y_1:

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,dt\right|\le\int_{x_0}^{x}|f(t,y_0)|\,dt\le \overset{\text{חוסם}}{M}\cdot \overset{\text{אורך הקטע}}{h}\le b$$

עפ"י בחירת h

(בצעד האינדוקציה:)

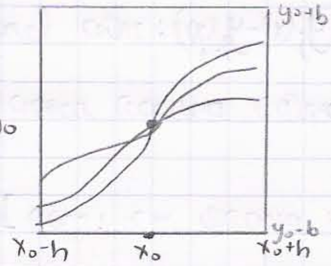
ואם $|y_{n-1}(x)-y_0|\le b$ $\forall |x-x_0|<h$, אזי:

$$|y_n(x)-y_0|\le\int_{x_0}^{x}|f(t,y_{n-1}(t))|\,dt\le M\cdot h\le b$$

ולכן מתקבל הנדרש

26-3-2007 ②

מה זה אומר מבחינה גרפית:



כל העקומים של ה-y_n-ים עוברים בנק' (תנאי ההתחלה). נכנסים בדיוק אחת של המלבן ויוצאים בשניה. (כולם רציפים כמובן)

צריך להראות שלא רק שהם כולם בתוך סביבה, אלא גם הולכים ומתקרבים

מה זה:

- לכן, מתקיים גם $|f(x,y_n(x))|\le M \quad \forall x\in(x_0-h,x_0+h)$
- נראה גם שמתקיים $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le M\cdot\frac{K^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n$ (מכך שמימין ישנם איברים של טור מתכנס תנבע ההתכנסות של ה-y_n-ים)

-נראה זאת באינדוקציה:

- עבור $n=1$ זה בסיס $|y_1(x)-y_0|\le M|x-x_0|$ מההגדרה, וזאת בדיוק הטענה, עבור $n=1$.
- נניח שמתקיים עבור $n-1$: $|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|\le M\cdot\frac{K^{n-2}}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1}$
- נראה שמתקיים עבור n: (משתמשים כמובן בהגדרות שהגדרנו), ה-y_0-ים מצטמצמים ומתקבל:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt-\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-2}(t))dt\right|\le$$

$$\le\int_{x_0}^{x}|f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y_{n-2}(t))|dt\le\int_{x_0}^{x}K|y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)|dt\le$$

ליפשיציות (עפ"י תנאי ליפשיץ)   עפ"י הנחת האינדוקציה

$$\le\frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}K|t-x_0|^{n-1}dt=\frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{|x-x_0|^n}{n}=\frac{MK^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n$$

(לא משנה אם $x_0>x$ או $x_0<x$ מסיבות הסימטריה.)

(זה כמו לעשות אינטגרל $\int_0^{|x-x_0|}t\,dt$)

וקיבלנו את הנדרש!

נתבונן בטור: $y_0+\sum_{j=1}^{\infty}(y_j(x)-y_{j-1}(x))$

וסדרת הסכומים החלקיים שלו: $y_n(x)=y_0+\sum_{j=1}^{n}(y_j(x)-y_{j-1}(x))$ זהו טור טלסקופי

[הערה: כדי שהסכום יהיה מוגדר צריך להגדיר y_0, אז נגדיר $y_0(x)=y_0$]

כלומר, $y_n(x)$ היא סדרת הסכומים החלקיים של הטור.

היות והאיבר הכללי של הטור חסום ע"י $\frac{M\cdot K^{j-1}}{j!}|x-x_0|^{j}\le\frac{M(Kh)^{j-1}}{j}\cdot h$

(המוטיבציה להכניס את h היא שעכשיו יש לנו חסם שלא תלוי ב-x)

היות ו- $\sum_{n=1}^{\infty}Mh\frac{(Kh)^{n-1}}{n!}$ טור מתכנס במוחלט

(הטור הזה שווה ל:
$$e^{Kh}-1=\frac{M}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Kh)^n}{n!}$$
אפשר להסיק גם כן התכנסות של טור חזקות של Kh נותנת רדיוס ההתכנסות שלו)

ממבחן M נובעת ההתכנסות של סדרת הסכומים החלקיים לגבול:

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y(x)$$

יתר על כן - ההתכנסות היא במידה שווה, כי לכל $|x-x_0|<h$ מתקיים:

$$|y(x)-y_n(x)|\le\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\frac{Mh(Kh)^{j-1}}{j}\right)=\varepsilon_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

עפ"י מה שראינו, $y(x)$ פונקציה רציפה במ"ש על $[x_0-h,x_0+h]$ $\Longleftarrow$ הוכחנו את (א).

• עכשיו צריך להראות ש- $y(x)$ היא שמקיים את תנאי ההתחלה (קל לראות) פותר את המשוואה הדיפרנציאלית:

• היות ומתקיים:
$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}|f(t,y(t))-f(t,y_{n-1}(t))|dt}_{\ge\left|\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt-\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt\right|}\le K\int_{x_0}^{x}|y(t)-y_{n-1}(t)|dt<K\cdot\varepsilon_{n-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

אזי מתקיים:
$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt=y_0+\int_{x_0}^{y}f(t,y(t))dt$$

ולכן מרציפות $y(t)$ ו- $f(-,-)$
$$y'(x)=\frac{d}{dx}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt\right]=f(x,y(x))$$

כלומר פתרנו.

$\Longleftarrow$ הוכחנו את (ב), כלומר $y(x)$ פתרון של בעיית ערך ההתחלה.

את היחידות של הפתרון נראה במשפט הבא, רק נזכיר אותה בקיצור

מסקנה:

• יהי $u(x)$ פתרון אחר, כלומר פונקציה המקיימת $u(x_0)=y_0$
פותרת את המשוואה ובנוסף מקיימת $|u(x)-y_0|\le b$ ו-$|x-x_0|\le h$
אזי u מקיים: $u(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,u(t))dt$

וכן:
$$|u(x)-y_n(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} \left(f(t,u(t))-f(t,y_{n-1}(t))\right)dt\right|$$

והמשך -

מתוך נוסחא זו נראה באינדוקציה שהביטוי שואף לאפס כאשר $n\to\infty$, כלומר שה-y_n-ים מתכנסים ל-u והיות וידוע שהם מתכנסים ל-y, מיחידות הגבול נובע $u=y$.

סיום ההוכחה משפט הבא!!!

28-3-2007

מד"ר - שעור מס' 9 ①

נמשיך את הוכחת המשפט של השעור הקודם,

כאמור עלינו להוכיח שהפתרון הוא יחיד.

נראה שמתקיים $|u_n(x)-y_n(x)| \le \frac{k^n b|x-x_0|^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} 0$

ולכן $y_n(x) \to y(x)$ $y_n(x) \longrightarrow u(x)$ ומיחידות הגבול

נקבל $y(x)=u(x)$ וסיים. נראה זאת באינדוקציה:

עבור $n=1$: $|u(x)-y_1(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t,u(t))-f(t,y_0)|dt \underset{\uparrow}{\le} k\cdot b|x-x_0|$

ליפשיצית

נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור n:

$$|u(x)-y_n(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(t,u(t))-f(t,y_{n-1}(t))|dt \le$$

$$\underset{\text{ליפשיצית}}{\le} \int_{x_0}^{x} k|u(t)-y_{n-1}(t)|dt \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\le} \frac{k^n b}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^{n-1}dt = \frac{k^n b|x-x_0|^n}{n!}$$

כמה הערות:

א) $f(t,y_n(t)) \longrightarrow f(t,y(t))$ ההתכנסות נובעת מהרציפות,

ההתכנסות במ"ש נובעת מהליפשיציות לכן

$$\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt \xrightarrow{\text{במ"ש}} \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

ב) קיום הפתרון $y'(x)=f(x,y)$. $y(x_0)=y_0$ הוא בקטע (x_0-h,x_0+h)

ⓒ מהוכחת היחידות, ההנחה $|u(x)-y_0|\le b$ אינה בעייתית כי בכל מקרה אנחנו יודעים על f רק דברים הקורים בתוך המלבן.

אם היה פתרון אחר שמוגדר על קטע יותר גדול, הוא מוכרח לצאת מהסביבה של (x_0,y_0) ולכן אם נראה יחידות בסביבה כזו, נובע מכך יחידות באופן כללי.

③ גם אם f אינה ליפשיצית ב-y אלא רק רציפה, עדיין ניתן להראות את קיום הפתרון. סקיצה להוכחה (כי ההוכחה משתמשת במשפטים שלא בטוח שכולם מכירים):

(i) $y_n(x)$ עדיין מוגדרת ורציפה לכל x, n. כמו כן קיימים $\tilde{M}, M'$ כך ש $|y_n(x)|\le\tilde{M}$; $y'_n(x)\le M'$ לכל n ; $|x-x_0|\le h$

מתנאים אלה נובע (משפט B-W) שקיימת תת-סדרה של $y_n(x)$ המתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית $y(x)$ [למשל ע"פ משפט Arzela Ascoli]. כאשר $y_{n_k}(x)\xrightarrow[x]{}y(x)$ ניתן להראות גם:

$$\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n_k}(t))\,dt \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

(למשל ע"י משפט ההתכנסות הנשלטת או משפט ההתכנסות החסומה)

28-5-2007

מד"ר – שיעור ראשון אחרי השביתה – שיעור מס' 10

בשיעור האחרון הוכחנו את משפט פיקארד ובכך סגרנו את נושא המשוואות מסדר ראשון.

משוואות מסדר שני

הצורה הכללית של משוואה מסדר שני: $y''=f(x,y,y')$

באופן כללי, קביעת פתרון דורשת קביעת שני קבועים, למשל:

עבור המשוואה $y''=g(x)$ רציפה, הפתרון הכללי של משוואה כזו הוא:

$$y=C_1+C_2x+\int^{x}\left[\int^{t}g(s)ds\right]dt$$

[קל לראות שזה נכון כי אם $y''=g(x)$ אז $y'=\int^{x}g(t)dt+C$] כאשר: C_1,C_2 קבועים כלשהם.

כדי לקבוע פתרון יחיד, צריך "בד"כ" לציין שני תנאים; מקובל מאוד לציין בתנאי התחלה מהצורה: $y(x_0)=y_0$ ו- $y'(x_0)=y'_0$ (קבוע). [בעקרון ניתן גם לקבוע שני קבועים ע"י, למשל, תנאים כמו:

$$y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2$$

או:

$$y(x_1)=y_1,\quad y'(x_2)=y'_2\ ]$$

<u>משפט:</u> אם f, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ רציפות בתחום פתוח R של המרחב התלת-מימדי (במשתנים x,y,y') ואם $(x_0,y_0,y'_0)\in R$ אזי קיים קטע כלשהו סביב x_0 שבו קיים פתרון יחיד של המשוואה $y''=f(x,y,y')$ המקיים את תנאי ההתחלה: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ (זהו משפט פיקארד למשוואות מסדר שני ולא נוכיח אותו)

משוואות לינאריות מסדר שני:

המשוואה הלינארית הכללית מסדר שני, היא מהצורה:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$, כאשר: P, Q, R, G פונקציות כלשהן

דוגמאות:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = F(t)$$ [מסה על קפיץ עם חיכוך]

קבוע חיובי

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$$ משוואת Bessel

קבוע

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$ משוואת Legendre

משוואות לא-לינאריות מסדר שני פשוטות יחסית מתקבלות במקרה ש-f הוא פונקציה רק של (x,y') או רק של (y,y'). במקרים אלה ניתן לעבור למשוואה מסדר ראשון ע"י ההצבה $v=y'$ ואז מקבלים משוואה מסדר ראשון ב-v ו-y מתקבל ע"י אינטגרציה.

אם למשל $y''=f(x,y')$ ונציב $v=y'$ אזי:

אפשר לרשום את המשוואה $v'=f(x,v)$ וזוהי משוואה מסדר ראשון.

ובאופן דומה אם $y''=f(y,y')$, $v=y'$

$$y''=v'=\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{v}=\frac{dv}{dy}\cdot v$$

ולכן ניתן עתה לכתוב את המשוואה בתור:

$$\frac{dv}{dy}=\frac{1}{v}f(y,v)$$

עכשיו נעבור למשוואות לינאריות:

אם $p(x)\neq 0$ $\forall x$ אזי ניתן לחלק בו ומקבלים משוואה מהצורה:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$ זוהי משוואה שיש לה את הצורה

(התואמת את משפט הקיום והיחידות) $y''(x,y,y')$ עבור: $f=-p(x)y'-q(x)y+g(x)$

ואז:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-q(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=-p(x)$$

ומשפט הקיום והיחידות תקף אם p,q,g הן פונקציות רציפות.

דהיינו מתקיימת המסקנה הבאה של משפט הקיום והיחידות:

משפט: אם p, q, g רציפות על קטע פתוח $I=(\alpha,\beta)$

ו- $x_0 \in I$, אזי קיים פתרון יחיד המקיים את המשוואה

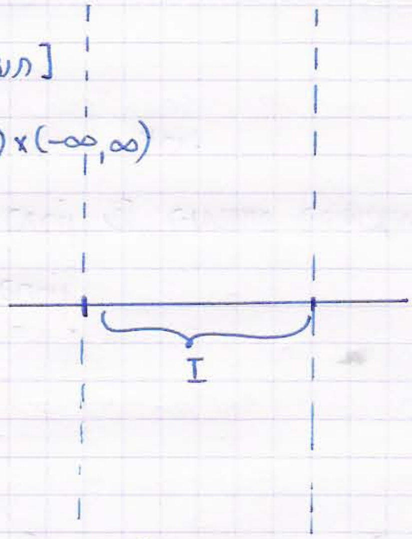
$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ על הקטע I ומקיים את תנאי ההתחלה

$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$. [כאשר: y_0, y'_0 יכולים להיות מספרים כלשהם]

[תנאי משפט הקיום והיחידות מתקיימים עבור:

$A = I\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$]

המשפט הזה הוא פשוט מסקנה של המשפט הכללי וגם אותו לא נוכיח.



דוגמא: $y''+y=0$, $-\infty<x<\infty$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

מ"ניחוש" $y=\sin x$ ו- $y=\cos x$ הם פתרונות

במקרה אחד $y=\sin x$ מתקיים $y(0)=0$, $y'(0)=1$ ומהמשפט נובע שהוא הפתרון היחיד המקיים את תנאי ההתחלה.

הערה: כדאי לשים לב, כי המשפט איננו מכסה את התנאים מהצורה $y(x_0)=A$ ו- $y(x_1)=B$ אשר עבורם לעיתים אין פתרון או שיתכנו אינסוף פתרונות.

[בעיות כאלה נקראות בעיות תנאי שפה].

למשל עבור הדוגמא: $y''+y=0$ אם $y(0)=0$ ו- $y(\pi)=0$ אז יש <u>אינסוף פתרונות</u> כי לא רק $\sin x$ הוא פתרון אלא גם כל הכפולות שלו.

לעומת זאת אם: $y(0)=0$ ו- $y(\pi)=1$ <u>אין</u> פתרונות כלל.

ואם: $y(0)=0$ $y(\frac{\pi}{2})=1$ יש פתרון יחיד.

(כי כל הפתרונות של משוואה זו הם מהצורה $C_1\sin x + C_2\cos x$)

נסביר זאת בהמשך

עבור המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ המשוואה ההומוגנית

המתאימה היא: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

טענה: נניח נתון פתרון מסוים כלשהו $\tilde{y}$ של $\tilde{y}''+p(x)\tilde{y}'+q(x)\tilde{y}=g(x)$

מתקיים שכל הפתרונות של המשוואה הלא הומוגנית הם מהצורה

$y=\tilde{y}+$ (פתרון של המשוואה ההומוגנית)

הוכחה: יהי y פתרון (של המשוואה הלא-הומוגנית) אזי:

(א) קל לראות ש: $y-\tilde{y}$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

(ב) מצד שני (פתרון של ההומוגנית)$+y$ הוא פתרון.

נעסוק במשוואה ההומוגנית:

סימון: נניח נתון p,q שתי פונקציות רציפות על קטע פתוח מהצורה (α,β)

נגדיר "אופרטור דיפרנציאלי": $L[\phi]=\phi''+p\phi'+q\phi$

שפועל על פונקציות גזירות פעמיים על הקטע (α,β)

עבור ϕ שכזו, $L(\phi)$ הוא פונקציה של x

כלומר $L(\phi)=(L[\phi])(x)$ הוא פונקציה על (α,β)

משל: $p(x)=x^2$, $q(x)=1+x$, $\phi(x)=\sin 3x$ אזי:

$$(L[\phi])(x)=(\sin 3x)''+x^2(\sin 3x)'+(1+x)\sin 3x=$$

$$=-9\sin 3x+3x^2\cos 3x+(1+x)\sin 3x$$

ניתן לכתוב: $L=D^2+pD+q$ כאשר D הוא אופרטור הגזירה: $D[\phi]=\phi'$

זה יאפשר לנו לכתוב דברים בצורה מקוצרת ויקל על החישובים.

28-5-2007 (3)

המשוואה ההומוגנית ניתנת לכתיבה כתנאי: $L[y]=0$.

<u>משפט:</u> (עקרון הסופרפוזיציה)

אם $y_1(x)$ ו $y_2(x)$ שני פתרונות של המשוואה $L[y]=0$

אזי כל קומבינציה לינארית מהצורה $y=C_1y_1+C_2y_2$, כאשר C_1, C_2

קבועים כלשהם, גם היא פתרון של המשוואה.

משפט: עקרון הסופרפוזיציה:

y_1, y_2 פתרונות של $L[y]=0$

$\Leftarrow$ $C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2$ גם הוא פתרון. (ניסוח מקוצר של המשפט שהוכחנו בשיעור קודם)

הוכחה: נתון: $L[y_1]=0 ; L[y_2]=0$

$$L[C_1y_1+C_2y_2]=(C_1y_1+C_2y_2)''+p(x)(C_1y_1+C_2y_1)'+q(x)(C_1y_1+C_2y_2)=$$

$$=C_2y_1''+C_2y_2''+C_1p(x)y_1'+C_2p(x)y_2'+C_1q(x)y_1+C_2q(x)y_2=$$

$$=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]=0+0=0$$

הערה:

העובדה ש: $L[C_1y_1+C_2y_2]=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]$ אומרת ש-L הוא אופרטור לינארי

[L הוא אופרטור לינארי דיפרנציאלי מסדר שני]

דוגמא:

עבור $y''+y=0$

$y_1=\sin x$ $y_2=\cos x$ כי שכבר ראינו הם פתרונות.

עפ"י המשפט $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ לכל $C_1,C_2\in\mathbb{R}$

גם הוא פתרון.

הגדרה: אומרים ששני פתרונות y_1,y_2 של המשוואה $L[y]=0$

יוצרים קבוצה יסודית של פתרונות (fundamental Set)

אם כל פתרון של המשוואה הוא מהצורה $C_1y_1+C_2y_2$

נשתמש עכשיו במשפט הקיום והיחידות.

ידוע שעבור פתרון ϕ של $L[y]=0$ על (α,β) המכיל את x_0,

$\phi(x_0)$, $\phi'(x_0)$ קובעים את הפתרון באופן יחיד. לכן:

כדי שיתקיים $\phi=C_1y_1+C_2y_2$ יש לדרוש:

$$(*)\begin{cases}C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=\phi(x_0)\\ C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)=\phi'(x_0)\end{cases}$$

אם נחשוב על זה כמערכת משוואות ל- C_1, C_2, אזי למערכת הנ"ל יש פתרון יחיד אם ורק אם הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים איננה מתאפסת, כלומר:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)\cdot y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) \neq 0$$

אם זה קורה עבור x_0 אזי במערכת יש פתרון (C_1,C_2) יחיד ל-(*)

ו- $\phi(x)$ ו- $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ הם פתרונות

המקיימים אותם תנאי התחלה ולכן הם שווים (ממשפט הקיום והיחידות שמבטיח את היחידות)

מכאן נובע משהו שניתן לנסח כמשפט:

משפט: אם p,q הן פונקציות רציפות על קטע פתוח (α,β) ואם y_1,y_2 הם שני פתרונות של המשוואה $L[y]=0$ בקטע הנ"ל המקיימים את התנאי:

$$y_1(x)\cdot y_2'(x) - y_1'(x)\cdot y_2(x) \neq 0$$

לכל $x \in (\alpha,\beta)$ אזי כל פתרון של המשוואה בקטע הנ"ל ניתן להצגה באופן יחיד כצירוף לינארי של y_1,y_2 [נאמר y_1,y_2 הם קבוצה יסודית של פתרונות]

דוגמא: עבור $y''+y=0$, $-\infty<x<\infty$, $y_1=\sin x$ $y_2=\cos x$ הם פתרונות מתקיים:

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

הגדרה: בהינתן שתי פונקציות גזירות y_1,y_2 על קטע פתוח כלשהו הפונקציה:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

נקראת הוורונסקיאן (Wronskian)

של y_1,y_2 לעיתים נסמן את:

$$W(y_1,y_2)(x) = W(x)$$

(אם ברור מהם y_1,y_2)

משפט: אם p,q רציפות על (α,β)

ו- y_1,y_2 הם פתרונות של $L[y]=0$ על כל הקטע

אזי או ש- $W(y_1,y_2)(x)=0$ על כל (α,β) או ש $W(y_1,y_2)(x)\neq 0$

לכל $x\in(\alpha,\beta)$.

הוכחה:

כי y_1 פתרון $\quad -y_2(y_1''+py_1'+qy_1)=0$

כי y_2 פתרון $\quad y_1(y_2''+py_2'+qy_2)=0$

(נכפל לפי השוויון ישנו ונחבר את שני הדברים

נחבר ונקבל: $y_1y_2''-y_2y_1''+p(y_1y_2'-y_1'y_2)=0$

נסמן: $W(x)=W(y_1,y_2)$ אזי:

$$W'(x)=y_1y_2''+y_1'y_2'-y_1'y_2'-y_1''y_2=$$

$$=y_1y_2''-y_1''y_2$$

ולכן קיבלנו שמתקיים: $W'+pW=0$

זוהי משוואה לינארית מסדר ראשון שפתרונה הכללי הוא:

$$W(x)=\underbrace{C}_{\text{קבוע כלשהו}}\cdot\exp\left[-\int^x p(t)dt\right]$$

עבור קבוע כלשהו C.

מכאן ש: $W(x)=0 \Longleftrightarrow C=0$ ואז $W(x)=0$ על כל הקטע (α,β).

$\blacksquare$

מד"ר - שיעור מס' 12

תזכורת: $y''+py'+qy=L[y]=0$ (*) על הקטע (α,β)

$$W(f,g)(x)=fg'-f'g$$

עבור y_1,y_2 פתרונות של המשוואה (*) $W(x)=W(y_1,y_2)(x)$ ומתקיים $W'+pW=0$

$\Longleftarrow$ $W=0$ על כל (α,β) או $W(x)\neq 0$ על כל (α,β)

הערה: קיבלנו כאן נוסחה לוורונסקיאן שאיננה תלויה בפתרונות ואיננה דורשת לפתור את המשוואה.

כל הוורונסקיאנים של זוגות פתרונות נבדלים ביניהם רק בכפל בקבוע.

לכן הראינו: (ניסוח חזק יותר של המשפט):

משפט: אם p,q רציפות על (α,β) ואם y_1,y_2 פתרונות של $L[y]=0$ בקטע זה ואם קיימת נקודה כלשהי $x\in(\alpha,\beta)$ שעבורה $W(y_1,y_2)(x)\neq 0$ אזי כל פתרון של המשוואה ניתן להבעה כ- $c_1y_1+c_2y_2$

נראה שאמנם תמיד קיימת מערכת יסודית של פתרונות:

משפט: אם p ו-q רציפות על (α,β) אזי תמיד קיימת קבוצה יסודית של פתרונות של המשוואה $L[y]=0$ בקטע הנ"ל.

הוכחה: נבחר $x_0\in(\alpha,\beta)$. ממשפט הקיום והיחידות נובע שקיימים פתרונות y_1,y_2 המקיימים את תנאי ההתחלה $y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\ y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1$ [והם פתרונות על כל (α,β)], היות ו- $W(y_1,y_2)(x_0)=1-0=1\neq 0$ נובע מהמשפט הקודם ש- y_1,y_2 יוצרים קבוצה יסודית של פתרונות.

הגדרה: אומרים ששתי פונקציות f ו-g על קטע פתוח (α,β) הן **תלויות לינארית** אם יש קבועים k_1,k_2 שאינם שניהם אפס, כך ש- $k_1f(x)+k_2g(x)=0$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$

אומרים ששתי פונקציות כנ"ל הן **בלתי תלויות לינארית** אם הן אינן תלויות לינארית.

משפט: אם f ו-g גזירות על (α,β) ואם $W(f,g)(x_0)\neq 0$ עבור $x_0\in(\alpha,\beta)$ כלשהו, אזי f ו-g הן בלתי תלויות לינארית. (כלומר, אם f ו-g תלויות לינארית אזי בהכרח הוורונסקיאן שלהן מתאפס $W(f,g)(x)=0$ ($\forall x\in(\alpha,\beta)$)

הוכחה:

$$\left[\begin{pmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \qquad \begin{cases} k_1 f(x_0) + k_2 g(x_0) = 0 \\ k_1 f'(x_0) + k_2 g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

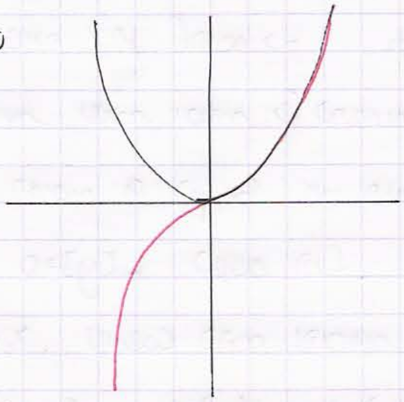
הדטרמיננטה המתאימה למערכת משוואות כזו היא בדיוק $W(f,g)(x_0)$ ואם הוא לא מתאפס אזי יש למערכת פתרון יחיד והוא $k_1=k_2=0$ ולכן $W(f,g)(x_0)\neq 0 \Leftarrow$ f ו-g הן בלתי תלויות לינארית. $\boxtimes$

הערה: עבור f ו-g כלליות "ההיפך" של המשפט אינו נכון, כלומר, יתכן ש- $W(f,g)=0$ על (α,β) בלי ש-f ו-g יהיו תלויות לינארית.

דוגמא: $g(x)=x^2$ $\quad f(x)=x|x|$ על הקטע $(-1,1)$

הפונקציות האלו הן בלתי תלויות כי בחלק החיובי שתיהן חיוביות ובקטע השלילי אחת חיובית ואחת שלילית (אם נסתכל על תת-קטע של הציר החיובי או השלילי) אז הן כן יהיו תלויות לינארית אבל: $W(f,g)=fg'-f'g=2x^2|x|-x^2(|x|+x|x|')=$

$=2x^2|x|-2x^2|x|=0$



משפט: אם y_1,y_2 פתרונות של $L[y]=0$ ואם p ו-q רציפות על (α,β) אזי y_1,y_2 הם בלתי תלויים לינארית אם ורק אם $W(y_1,y_2)$ אינו מתאפס על (α,β) (ההוכחה מושארת כתרגיל)

4-6-2007

הורדת סדר: נניח שעבור המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ ידוע פתרון אחד.

$y_1(x)\neq 0$, נראה שניתן מכך למצוא פתרון שני בלתי תלוי לינארית ב- $y_1(x)$.

נחפש פתרון מהצורה $y=v(x)y_1(x)$, $y'=v(x)y_1'(x)+v'(x)y_1(x)$

$$y''=v(x)y_1''(x)+2v'(x)y_1'(x)+v''(x)y_1(x)$$

נציב במשוואה (לשם הנוחות לא נרשום את x):

$$v\underbrace{(y_1''+py_1'+qy_1)}_{=0}+v'(2y_1'+py_1)+v''y_1=0$$

זוהי משוואה לינארית מסדר ראשון עבור v' שפתרונה

$$v'(x)=C\cdot\underbrace{\exp\left[-\int^x\left(p(t)+2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right)dt\right]}_{u(x)}=C\cdot u(x)$$

בכל קטע שבו $y_1\neq 0$ ולכן המשוואה שקולה ל- $v''+(p+2\frac{y_1'}{y_1})v'=0$

מתקיים:
$$u(x)=\frac{1}{(y_1(x))^2}\cdot\exp\left[-\int^x p(t)dt\right]$$

כעת:
$$v(x)=C\cdot\int^x u(\,)dt+k$$

ולכן:
$$y(x)=y_1(x)v(x)=C\cdot y_1(x)\int^x u(t)dt+\underbrace{k\,y_1(x)}_{\text{איבר טריוויאלי}}$$

ומכאן ששני הפתרונות הם: $y=y_1(x)$, $y=y_1(x)\int^x u(t)dt$

היות ו- $\int^x u(t)dt$ לא יכול להיות קבוע (כי זה אינטגרל של פונקציה חיובית)

אלו פתרונות בלתי תלויים לינארית.

הערה: החשוב הוא לזכור שתמיד ניתן למצוא פתרון שני y (בהינתן פתרון ראשון $y_1(x)$) ע"י הצבה $y=vy_1$.

דוגמא: $2x^2y''+3xy'-y=0$ $\quad x>0$

נשים לב ש $y_1=x^{-1}$ הינו פתרון (מניחוש) נציב $y=v(x)\cdot x^{-1}$ ואז נקבל

$$y'=x^{-1}v'-x^{-2}v \qquad y''=x^{-1}v''-2x^{-2}v'+2x^{-3}v$$

$$\Longleftarrow\quad 0=2x^2(x^{-1}v''-2x^{-2}v'+2x^{-3}v)+3x(x^{-1}v'-x^{-2}v)-x^{-1}v=$$

$$=2xv''+(-4+3)v'+(4x^{-1}-3x^{-1}-x^{-1})v=2xv''-v'$$

למעשה, ע"י הפרדת משתנים: $\frac{v'}{v''}=2x \Leftarrow v'(x)=Cx^{\frac{1}{2}}$ $\qquad v(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+k$

$$\Longleftarrow\quad y_2(x)=x^{-1}\cdot v=\frac{2}{3}Cx^{\frac{3}{2}}+kx^{-1}$$

$\leftarrow$

נבחר $k=0$ אזי $e=\frac{3}{2}$ $y_2(x)=x^{\frac{1}{2}}$ הוא פתרון נוסף בת״ לינארית מ- y_1.

<u>משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים:</u>

$0 \neq a \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}$ $\quad$ (**) $L[y] = ay'' + by' \pm cy = 0$

נחפש פתרונות מהצורה $y = e^{rx}$ (זו בדיוק הפונקציה שכאשר גוזרים אותה מקבלים כפל בקבוע)

$$0 = L[e^{rx}] = a(e^{rx})'' + b(e^{rx})' + ce^{rx} =$$
$$= e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

לכן e^{rx} פתרון אם ורק אם $ar^2 + br + c = 0$ וזו פשוט משוואה ריבועית מ- $\mathbb{R}$.

מד"ר - שעור מס' 13

מעתה נשתמש בסימון $L[y]$ לנוסחה שרשמנו בסוף השעור הקודם (מסומנת ב-(**) בסיכום שלי) אע"פ שהשתמשנו בסימון זה כבר קודם.

$ar^2+br+c=0$ זוהי משוואה ריבועית שפתרונותיה הם:

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

r_1,r_2 יכולים להיות ממשיים או מרוכבים, בכל מקרה אנחנו מחפשים פתרונות ממשיים. יש להבדיל בין מספר מקרים:

מקרה 1:

$b^2-4ac>0 \Rightarrow r_1,r_2\in\mathbb{R}$, $r_1\neq r_2$, במקרה כזה מתקיים:

$$W(e^{r_1x},e^{r_2x})=(r_2-r_1)e^{(r_2+r_1)x}$$

ולכן e^{r_1x}, e^{r_2x} הם שני פתרונות בלתי תלויים לינארית.

דוגמא: $y(0)=0$, $y'(0)=1$ $\qquad y''+5y'+6y=0$

$$y=e^{rx} \Longrightarrow 0=r^2+5r+6=(r+2)(r+3)$$

$$\Longrightarrow r_1,r_2=-2,-3$$

ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא מהצורה $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$

וקיום תנאי ההתחלה נותן לנו את השוויונות הבאים:

$c_1+c_2=0 \qquad -2c_1-3c_2=1$ (מגזירה)

זוהי מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים ומפתירה שלה אנו מקבלים ש- $c_1=1$ ו- $c_2=-1$ ואנו מקבלים שהפתרון הוא $y=e^{-2x}-e^{-3x}$

מקרה 2: $b^2-4ac=0 \Rightarrow r_1,r_2=\frac{-b}{2a}$ במקרה זה המשוואה הריבועית נותנת רק פתרון אחד והוא $e^{\frac{-b}{2a}x}$.

ע"י הורדת הסדר מובטח לנו שנקבל פתרון שני:

$$y=v(x)\cdot e^{-\frac{b}{2a}x} \Rightarrow y'=v'e^{-\frac{b}{2a}x}+\frac{-b}{2a}v\,e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y''=\left[v''-\frac{b}{a}v'+\frac{b^2}{4a^2}v\right]e^{\frac{-b}{2a}x}$$

ע"י הצבה במשוואה וחלוקה ב- $e^{\frac{-b}{2a}x}$ מקבלים:

$$a\left(v''-\frac{b}{a}v'+\frac{b^2}{4a^2}v\right)+b\left(v'-\frac{b}{2a}v\right)+cv=0$$

$$\Longrightarrow av''-\cancel{bv'}+\frac{b^2}{4a}v+\cancel{bv'}-\frac{b^2}{2a}v+cv=0$$

$$\Longrightarrow av''-\underbrace{\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)}_{=0}v=0 \Longrightarrow av''=0 \Longrightarrow v''=0$$

כי $b^2-4ac=0$

$$\Longrightarrow v=C_1x+C_2$$

ולכן הפתרון הכללי הוא: $y=C_1xe^{\frac{-b}{2a}x}+C_2e^{\frac{-b}{2a}x}=$

$$=(C_1x+C_2)e^{\frac{-b}{2a}x}$$

דוגמא: $y''=0 \Longleftarrow$ פתרון המשוואה הוא $r=0$ ולכן

$y=C_1x+C_2$ הוא פתרון כללי $(e^0=1)$

דוגמא נוספת: $y''+4y'+4y=0$

$$y=e^{rx} \Longrightarrow 0=r^2+4r+4=(r+2)(r+2)$$

$r=-2$ הוא שורש יחיד והפתרון הכללי הוא: $y=C_1xe^{-2x}+C_2e^{-2x}$

מקרה 3: $b^2-4ac<0 \Longleftarrow$ $r_1,r_2\notin\mathbb{R}$ $r_1\neq r_2$

במקרה כזה מקבלים שני פתרונות מרוכבים מהצורה $e^{(\lambda\pm i\mu)x}$

(הנגזרת כאן היא בדיוק כמו במקרה הממשי, כלומר $(\lambda\pm i\mu)e^{(\lambda\pm i\mu)x}$)

משפט: יהיו p ו- q פונקציות רציפות על (α,β) ונניח ש- $y=u(x)+iv(x)$

(כאשר u ו- v פונקציות ממשיות). פתרון מרוכב של $y''+py'+qy=0$

אזי u ו- v הם פתרונות ממשיים של המשוואה.

- נגזרת של פונקציה $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{C}$ היא בהגדרה:

$$f'=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

כאשר תמיד f מהצורה $f(x)=Ref+iImf$ לכן $f'(x)=(Ref)'+i(Imf)'$

$$y = u + iv \Leftarrow y' = u' + iv' \;,\; y'' = u'' + iv''$$

$$\Leftarrow \quad 0 = (u''+iv'') + p(u'+iv') + q(u+iv) =$$

$$= (u''+pu'+qu) + i(v''+pv'+qv)$$

נשים לב ש- $e^{(\lambda \pm i\mu)x} = e^{\lambda x}\cdot e^{\pm i\mu x}$ ומתקיים:

$$e^{\pm i\mu x} = \cos(\pm\mu x) \pm i\sin(\mu x) = \cos(\mu x) \pm i\sin(\mu x)$$

לכן מקבלים את הפתרון הכללי:

$$y = C_1 e^{\lambda x}\cos(\mu x) + C_2 e^{\lambda x}\sin(\mu x)$$

ו- $\cos$ ו- $\sin$ הם בלתי תלויים לינארית (כמו חישבנו את הוורונסקיאן שלהם).

מד"ר - שיעור מס' 14

נמשיך עם משוואות לינאריות מסדר שני:

משפט: יהי y_p פתרון כלשהו של המשוואה $y''+py'+qy=g$

אזי כל פתרון של משוואה זו הוא מהצורה

$y=y_p+c_1y_1+c_2y_2$ כאשר y_1,y_2 הם שני פתרונות בלתי תלויים לינארית

של המשוואה ההומוגנית המתאימה.

דוגמא (לשימוש): $y''+4y'+4y=8x^2+2$

המשוואה ההומוגנית המתאימה היא עם מקדמים קבועים שאותה אנו יודעים לפתור.

ע"י ניחוש $y_p=2x^2-4x+\frac{7}{2}$ הוא פתרון מסוים

כפי שראינו מסעיף הקודם e^{-2x} ו- $x\cdot e^{-2x}$ אלה הם שני פתרונות בלתי תלויים

לינארית של המשוואה ההומוגנית ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y=2x^2-4x+\frac{7}{2}+c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

שיטות למציאת פתרון מסוים:

טענה: אם המשוואה $y''+gy'+qy=g$ $\quad [L[y]=g]$ אופרטור לינארי

אם המשוואה זו g היא מהצורה $g=g_1+g_2+\dots+g_m$ ואם $y_{p,1},\dots,y_{p,m}$

הם פתרונות של המשוואות: $y''+py'+qy=g_i$ עבור $1\le i\le m$ בהתאמה

אזי הסכום $y_{p,1}+y_{p,2}+\dots+y_{p,m}$ הוא פתרון של המשוואה המקורית.

דוגמא: $y''+4y=1+x+\sin x$, נסתכל במשוואות

$y''+4y=1$

$y''+4y=x$

$y''+4y=\sin x$

קל לראות, במקרה זה, ש- $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{3}\sin x$ הם פתרונות של

משוואות אלו בהתאמה, לכן סכומם: $y_p(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}\sin x$ הוא

פתרון מסוים של המשוואה המקורית.

שיטת הקבועים החופשיים:

עבור משוואה עם מקדמים קבועים מהצורה:

$ay''+by'+cy=g(x)$ שבה $g(x)$ מורכבת מסכום של איברים שכל אחד מהם (הוא מכפלה של אקספוננטים, פולינומים וסינוסים או קוסינוסים [דהיינו:

$$g(x)=e^{ax}(a_mx^m+\dots+a_0)\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{cases}$$ או ש- g היא סכום

של איברים כעל' צורה כזו] ניתן למצוא פתרון שהוא סכום של איברים "דומים" (נסתיר מהמשפט)

ל- g, צריך רק להתאים את הקבועים המופיעים בפתרון.

דוגמאות: * $y''-3y'-4y=3e^{2x}$

ננסה: $y_p=Ae^{2x}$ עבור A שהוא קבוע שאותו יש למצוא.

$$y_p'=2Ae^{2x}$$

$$y_p''=4Ae^{2x}$$

ולכן הצבה במשוואה תיתן את הדבר הבא:

$$\overset{g}{\overset{\shortparallel}{3e^{2x}}}=y_p''-3y_p'-4y_p=$$

$$=(4A-6A-4A)e^{2x}=-6Ae^{2x}\implies -6A=3\implies \underline{A=-\tfrac{1}{2}}$$

וזה מתקיים אם"ם $A=-\frac{1}{2}$. כלומר מצאנו פתרון מסוים $y_p=\frac{1}{2}e^{2x}$

נראה דוגמא נוספת:

** $y''-3y'-4y=2\sin x$

אם ננסה $y_p=A\sin x$ זה לא יעבוד כי כשגוזרים פעם את מקבלים ביטוי עם $\cos x$

וזה נובע אותנו מהמשוואה, במילים אחרות:

$$y''-3y'-4y=-A\sin x-3A\cos x-4A\sin x=-5A\sin x-3A\cos x$$

והיות ו $\sin x$ ו $\cos x$ הם בת"ל לא יכול להיות שהם כן יהיו תלויים אך

מחשבון זה כן ניתן לנחש פתרון, אם נבחר קומבינציה ליניארית נכונה של $\cos x$ ו- $\sin x$

ננסה: $y_p=A\sin x+B\cos x$ **אז:**

$$y_p'=A\cos x-B\sin x$$

$$y_p''=-A\sin x-B\cos x$$

וע"י הצבה מתקבל:

$$2\sin x = y''-3y'-4y = (-A+3B-4A)\sin x + (-B-3A-4B)\cos x$$

לכן קיבלנו שצריך לדרוש: $B=\frac{-3}{5}A \Leftarrow 3A=-5B \Leftarrow -B-3A-4B=0$

ואז: $B=\frac{3}{17} \Leftarrow A=-\frac{10}{34}=\frac{-5}{17} \Leftarrow \frac{-34}{5}A=2 \Leftarrow -A-\frac{9}{5}A-4A=2$

סוף דוגמא:

*** $$y''-3y'-4y=4x^2$$

משהו כמו Ax^2 לא יעבוד. יש לחשוב על $4x^2$ כפולינום מעלה שניה ולנסות

$$y_p=Ax^2+Bx+C$$

אם פותרים מקבלים 3 משוואות למקדמים A,B,C. ניתן לפתור ולקבל: $y_p=-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}$

(להמשיך את הדוגמא לבד).

את כל זה ניתן לסכם בטבלה:

$g(x)$	$y_p(x)$
$P_n(x)=a_nx^n+\dots+a_0$	$x^s\cdot(A_nx^n+\dots+A_0)$
$P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$	$x^s(A_nx^n+\dots+A_0)e^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}\cdot\begin{cases}\sin x\\ \cos x\end{cases}$	$x^s\left[(A_nx^n+\dots+A_0)e^{\alpha x}\cos\beta x+(B_nx^n+\dots+B_0)e^{\alpha x}\sin\beta x\right]$

כאשר s יכול להיות 0, 1 או 2 והוא בדיוק הקטן מביניהם שיבטיח ששום איבר של $y_p(x)$ איננו פתרון של המשוואה ההומוגנית. (למשל אם $y''=4x^2 \Rightarrow y_p=x^s(Ax^2+Bx+C)$ כאשר $s=2$)

וריאציה של פרמטרים (שיטה כללית, במקרה כזה ש-g אינה אחת הפונקציות שהכרנו קודם)

נתונה משוואה מהצורה: $y''+py'+qy=g$

יהיו y_1, y_2 פתרונות המשוואה ההומוגנית.

נחפש פתרון מסוים מהצורה:

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

נגזור:

$$y_p'=\underbrace{(u_1'y_1+u_2'y_2)}_{=0\text{ דרישה!}}+(u_1y_1'+u_2y_2')$$

(נרשום כזאת כסכום של שני איברים)

זוהי דרישה שאנו מוסיפים כדי למצוא פתרון.

ולכן: $y_p'=u_1y_1'+u_2y_2'$

ואז:

$y_p''=u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1y_1''+u_2y_2''$ נציב במשוואה (נקבל):

$$u_1\underbrace{(y_1''+py_1'+qy_1)}_{=0}+u_2\underbrace{(y_2''+py_2'+qy_2)}_{=0}+u_1'y_1'+u_2'y_2'=g$$

כי זה מקיים את המשוואה ההומוגנית

$$\Leftarrow\quad u_1'y_1'+u_2'y_2'=g$$

לכן קיבלנו מערכת משוואות עבור u_1', u_2':

$$\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2=0\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=g\end{cases}$$

ניתן גם לרשום: $\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ g\end{pmatrix}$

הורונסקיאן

הדטרמיננטה לא מתאפסת ולכן יש פתרון יחיד.

וזוהי מערכת שפתרונה:

$$u_1'=\frac{-y_2g}{W(y_1,y_2)}$$

$$u_2'=\frac{y_1g}{W(y_1,y_2)}$$

כאשר $W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'$

נסכם הכל במשפט:

11-6-2007 ③

משפט: אם p,q ו-g רציפות על קטע פתוח (α,β)

ואם y_1,y_2 הם שני פתרונות בלתי תלויים לינארית של המשוואה ההומוגנית

המתאימה למשוואה: $y''+py'+qy=g$ אזי פתרון מסוים של משוואה זו בקטע (α,β)

נתון ע"י:

$$\boxed{y_p(x)=-y_1(x)\int^x\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt+y_2(x)\int^x\frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}dt}$$

הערה: את הפתרון המסוים ניתן גם לכתוב באופן:

$$y_p=\int^x\left(\frac{y_1(t)y_2(x)-y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}\right)g(t)dt.$$

כמו במקרים קודמים בדרך כלל יותר טוב לזכור את השיטה, כלומר:

הצבת $y_p=u_1y_1+u_2y_2$ + דרישה ש: $u_1'y_1+u_2'y_2=0$.

דוגמא: $y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2}$ את זה למשל לא ניתן לפתור ע"י קבועים חופשיים

אז נציב: $y_p=u_1\underbrace{e^x}_{y_1}+u_2\underbrace{xe^x}_{y_2}$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1)\end{vmatrix}=e^{2x}(x+1-x)=e^{2x}$$

$$u_1'=\frac{-xe^x}{e^{2x}}\cdot\frac{e^x}{1+x^2}=\frac{-x}{1+x^2}\Longrightarrow u_1=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$u_2'=\frac{e^x}{e^{2x}}\cdot\frac{e^x}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}\Longrightarrow u_2=\arctan x$$

ומכאן נמצא את הפתרון המסוים:

$$y_p=-\frac{1}{2}e^x\ln(1+x^2)+xe^x\operatorname{arctg}x$$

13-6-2007

מבנ' שעור מס' 12

נתחיל היום פרק חדש: פתרון משוואות בעזרת טורי חזקות. (נעשה היום הסקר תזכורת למושגים שקשורים בטורי חזקות)

פתרון בעזרת טורי חזקות

תזכורת:

טור חזקות הוא סכום מהצורה: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

* הטור מתכנס בנקודה x אם:

$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$ קיים. (כלומר אם הגבול קיים)

* הטור מתכנס בהחלט ב-x אם $\sum |a_n(x-x_0)^n|$ מתכנס.
* מתכנס בהחלט $\Longrightarrow$ מתכנס.
* מבחן שימושי (אם $a_n \neq 0 \quad \forall n$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

אם הגבול l קיים אזי הטור מתכנס בהחלט אם $1>l$ ומתבדר אם $1<l$.

* אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מתכנס ב $x=x_1$, אזי הוא מתכנס בהחלט לכל x המקיים:

$$|x-x_0| < |x_1-x_0|$$

אם הוא מתבדר ב $x=x_1$ אזי הוא מתבדר לכל x שעבורו $|x-x_0|>|x_1-x_0|$

* קיים "מספר" $0\le\rho\le\infty$ הנקרא רדיוס ההתכנסות של הטור כך ש-

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מתכנס בהחלט אם $|x-x_0|<\rho$ ומתבדר אם $|x-x_0|>\rho$

אם הטור מתבדר לכל $x\neq x_0$, $\rho=0$, ואם הוא מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$, אזי $\rho=\infty$.

*הקטע שבו $|x-x_0|<\rho$ (כאשר $\rho>0$) נקרא קטע ההתכנסות של הטור

(זה תמיד קטע פתוח, יכול להיות גם כל הישר הממשי)

* אם $\sum a_n(x-x_0)^n, \sum b(x-x_0)^n$ מתכנסים ל- $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה (עבור $|x-x_0|<\rho$, $\rho>0$) אזי לכל x שעבורו $|x-x_0|<\rho$ הדברים הבאים נכונים:

$$f(x)\pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_0)^n$$

$$f(x)g(x) = [\Sigma][\Sigma] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

כאשר: $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$

* הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה אינסוף פעמים לכל $\rho>|x-x_0|$.
הנגזרות של f מתקבלות מגזירה פורמלית של הטור:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

ובאופן דומה:

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$\vdots$ וכן הלאה

a_n נתון ע"י: $$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

* הטור נקרא <u>טור טיילור</u> של f סביב הנקודה x_0

* אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ לכל x (של קטע באורך חיובי סביב x_0)
אזי $a_n=b_n$ עבור $n=0,1,2,\dots$
בפרט אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=0$ אזי $a_0=a_1=\dots=0$

---

* פונקציה f שיש לה פיתוח כטור טיילור (בעל רדיוס התכנסות גדול מאפס)
סביב x_0, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ נקראית <u>אנליטית</u> ב- x_0.

* אם f,g הן שתי פונקציות אנליטיות ב- x_0 אזי גם הסכומים $f\pm g$, $f\cdot g$
אנליטית ב- x_0
ואם גם מתקיים $g(x_0)\neq 0$ אזי גם $\frac{f}{g}$ פונקציה אנליטית ב- x_0.

* פולינומים הם בפרט פונקציות אנליטיות בעלי רדיוס התכנסות $\rho=\infty$.

12-6-2007 נרצה להשתמש בטכניקות שהזכרנו כדי לפתור משוואות ליניאריות מסדר שני:

פיתוח פתרונות בטורים סביב נקודה רגילה:

משוואות ליניאריות מסדר שני:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$$

בפרק כזה נדון במקרים שבהם P,Q,R פולינומים ללא גורמים משותפים.

נרצה לפתור את המשוואה בסביבה של נקודה x_0.

הגדרה: נקודה x_0 שבה $P(x_0)\neq 0$ נקראית נקודה רגילה של המשוואה.

[במקרה כזה קיים קטע סביב x_0 שבו $P(x)\neq 0$ וניתן להעביר את המשוואה לצורה: $y''+py'+qy=0$ שעבורה תקף משפט (הקיום והיחידות)].

נקודה x_0 שבה $P(x_0)=0$ נקראית נקודה סינגולרית של המשוואה.

פתרון משוואה ע"י טורי חזקות:

נראה דוגמא:

נתונה המשוואה: $y''+y=0$ עבור $-\infty<x<\infty$

$$P(x)=1,\quad Q(x)=0,\quad R(x)=1$$

נחפש $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

ואנחנו רוצים: $0=y''+y=\sum\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n$

לכן: $(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0\ ;\ n=0,1,2$

זהו יחס רקורסיה.

a_0 קובע את $a_2,a_4,\ldots$

a_1 קובע את $a_3,a_5,\ldots$

עבור הזוגיים:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}$$

$$a_4 = \frac{-a_0}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{4!}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 \quad , \; n = 1, 2, \dots$$

עבור האי-זוגיים: מקדמים באופן דומה:

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 \quad , \; n = 1, 2, \dots$$

לכן הטור מקבל את הצורה הבאה:

$$y = a_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}_{\cos x} + a_1 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{\sin x}$$

מד"ר - שעור מס' 16

דוגמא: משוואת Airy $\quad , y''=xy \qquad -\infty<x<\infty$

[כאן: $P(x)=1$, $Q(x)=0$, $R(x)=-x$] כל נקודה היא רגילה, אז ניקח $x_0=0$. נחפש $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

אז: $$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

ואז הצבה במשוואה נותנת: $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$

ומקבלים: $$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1} \qquad \forall n\geq 1$$

שוב קיבלנו יחס רקורסיה.

לכן: a_0 בהכרח קובע את a_3 שיקבע את a_6 שיקבע את a_9 וכן הלאה...

a_1 קובע את: $a_4, a_7, a_{10}\dots$ (קפיצות של 3)

a_2 קובע את: $a_5, a_8, \dots$

נשאר מה מתוך הדברים האלו אנחנו יכולים לקבוע. נשים לב כי a_2 חייב להתאפס:

a_2 חייב להתאפס ולכן גם: $a_5, a_8, \dots$ מתאפסים.

מחשבון נקבל:
$$y=\underbrace{a_0}_{\text{כל האיברים שתלויים ב-}a_0}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots3\cdot2}\right]+$$
$$+\underbrace{a_1}_{\text{איברים שתלויים ב-}a_1}\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)\cdot(3n-2)(3n-3)\dots4\cdot3}\right]$$

וזה פתרון כללי מהצורה: $y=a_0y_1+a_1y_2$

כאשר y_1 ו-y_2 הם פונקציות בת"ל ליניארית המקיימות $\quad y_1(0)=1 \quad y_1'(0)=0$
(מין תנאי התחלה קטן)
$y_2(0)=0 \quad y_2'(0)=1$

[הפונקציות y_1,y_2 נקראות פונקציות Airy]. $\quad y''+y=0$
$c_1\cos x+c_2\sin x$ (רק נראים התנהגות)

[$y''-(x+\pi)y=0$]

∞

משפט: אם x_0 נקודה רגילה של משוואה מהצורה $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$

כך ש- $p=\frac{Q}{P}$ (גדול P) , $q=\frac{R}{P}$ (P קטן) אנליטית ב-x_0, אזי הפתרון הכללי של משוואה זו

מסדרים את המשוואה לצורה $y''+py'+qy=0$

הוא מהצורה:
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

כאשר a_0,a_1 קבועים כלשהם ו- y_1,y_2 הם בלתי תלויים לינארית והם טורי חזקות

בעלי רדיוס התכנסות שהוא לפחות כמו הרדיוס המינימלי מבין רדיוסי ההתכנסות

של p,q. יתר על כן הקבועים של הטורים המתאימים ניתנים למציאה ע"י הצבת הטור במשוואה.

הערה: במשפט הנ"ל y_1 הוא טור מהצורה:
$$y_1(x)=1+b_2(x-x_0)^2+b_3(x-x_0)^3+\dots$$

ו-
$$y_2(x)=(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+\dots$$

כלומר: y_1 הוא בדיוק הפתרון המקיים: $y_1(x_0)=1;\ y_1'(x_0)=0$

y_2 " " " : $y_2(x_0)=0;\ y_2'(x_0)=1$

כמה הערות נוספות:

טענה: (ללא הוכחה - טענה שבאה מפונקציות מרוכבות)

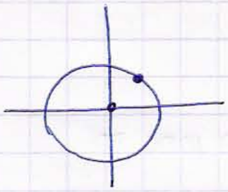
אם P ו- Q הם פולינומים

ללא גורמים משותפים ו- $P(x_0)\neq 0$ אזי ל- $\frac{Q}{P}$ יש פיתוח לטור חזקות סביב x_0

ורדיוס ההתכנסות שלו שווה למרחק בין x_0 לאפס המרוכב הקרוב ביותר של P.

דוגמא: רדיוס ההתכנסות של הפונקציה $\frac{1}{1+x^2}$ סביב 0 הוא 1. ניתן להסיק זאת מכך

ש- $1+x^2=0$ יש שורשים מרוכבים $\pm i$ שמרחק הקרוב מביניהם ל-0 הוא 1.



$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+x^6+\dots+(-1)^nx^{2n}+\dots$$

לא ניתן הוכחה מסודרת של המשפט, עקב חוסר זמן אך ניתן סקיצה להוכחה.

עבור המשוואה $y''+py'+qy=0$ (מסתכלים על $x_0=0$), ומניחים:

$p=\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ $q=\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ ושהטורים בעלי רדיוס התכנסות $\rho>0$ לפחות,

"לוקחים" $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, מציבים במשוואה, ומקבלים:

$$0=\sum_{n=0}^{\infty} x_n\left[a_{n+2}(n+2)(n+1)+\sum_{k=0}^{n}\left(p_{n-k}a_{k+1}(k+1)+q_{n-k}a_k\right)\right]$$

מכאן נקבל יחס רקורסיה כללי:

$$a_{n+2}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\left(p_{n-k}a_{k+1}(k+1)+q_{n-k}a_k\right)$$

וברור שבחירת a_0 ו- a_1 מאפשרת להגדיר את a_n לכל $n\geq 2$

מסרב $(a_0,a_1)=(0,1)$ ו- $(a_0,a_1)=(1,0)$ מובילות לשני טורים עבור y_1 ו- y_2

המופיעים במשפט.

(נותר להוכיח שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא לפחות המינימלי מבין הרדיוסים של הטורים שרשומים למעלה.) ניתן להראות ע"י יחס הרקורסיה את מה שצריך לגבי רדיוס ההתכנסות.

נעבור עכשיו למשהו אחר:

פתרונות סביב נקודות סינגולריות:

נתחיל מכמה דוגמאות:

* $x^2y''-2y=0$, 0 נק' סינגולרית.

במקרה כזה ניתן לבדוק ע"י הצבה ש- $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ הם שני פתרונות

בלתי תלויים לינארית ב- $x\neq 0$ ולכן: לכל $x\neq 0$ $y=c_1x^2+c_2x^{-1}$ פתרון כללי.

$y=c_1x^2$ הוא הפתרון היחיד שהוא חסום (וגם אנליטי) ליד $x_0=0$.

** $x^2y''-2xy'+2y=0$ קל לראות שמתקיים כי $y_1(x)=x$ $y_2(x)=x^2$

הם שני פתרונות בלתי-תלויים לינארית ושניהם חסומים (ואנליטיים) ליד $x_0=0$.

אעפ"כ, לא ניתן לפתור בעיית ערך התחלתי כללית מ- $x_0=0$ כי כל צירוף לינארי של y_1 ו- y_2

רנו מתאפס ב- $x_0=0$.

הגדרה: עבור המשוואה $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$

נקודה x_0 נקראית נקודה סינגולרית רגילה אם x_0 היא נקודה סינגולרית

ואם הפונקציות: $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$, $(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ הן שתיהן

אנליטיות ב- $x=x_0$.

נקודה סינגולרית שאיננה רגילה נקראית נקודה סינגולרית לא רגילה.

הערה: עבור P, Q, R שהם פולינומים האנליטיות הנ"ל שקולה לקיום

הגבולות: $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q}{P}$

ו- : $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R}{P}$

דוגמא: משוואת Legendre:

$$(1-x^2)y''+2xy'+\gamma(\gamma+1)y=0$$

$x=\pm 1$ נקודה סינגולרית.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x}=1$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\gamma(\gamma+1)}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\gamma(\gamma+1)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)\gamma(\gamma+1)}{1+x}=0$$

$\Longleftarrow$ $x=1$ נקודה סינגולרית רגילה, בדומה $x=-1$ סינגולרית רגילה.

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty}q_nx^n,\quad P=\sum_{n=2}^{\infty}P_nx^n\quad R=\sum_{n=0}^{\infty}r_nx^n$$

$x=0$ סינגולרית $P\sim P_2x^2,\ Q\sim q_1x,\ R\sim r_0$

ליד $x=0$ המשוואה "קרובה" ל: $x^2y''+q_1xy'+r_0y=0$

$$x\cdot\frac{q_1x}{P_2x^2}\sim\frac{q_1}{P_2},\quad x^2\frac{r_0}{P_2x^2}\sim\frac{r_0}{P_2}$$

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{Q}{P}=\frac{q_1}{P_2}\qquad \lim_{x\to 0}x^2\frac{R}{P}=\frac{r_0}{P_2}$$

משוואת Euler: $L[y]=x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$x=0$ נקודה סינגולרית רגילה.

נדון תחילה ב- $x>0$

נניח פתרון מהצורה $y=x^r$, $y'=rx^{r-1}$, $y''=r(r-1)x^{r-2}$

$$\Longrightarrow L(x^r)=x^2(x^r)''+\alpha x(x^r)'+\beta(x^r)=x^rf(r)$$

כאשר: $f(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta$

ורואים x^r פתרון אם ורק אם r הוא שורש של המשוואה הריבועית $f(r)=0$.

השורשים של המשוואה הריבועית הנ"ל הם:

$$r_1=\frac{-(\alpha-1)+\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2}\qquad r_2=\frac{-(\alpha-1)-\sqrt{(\alpha-1)^2+4\beta}}{2}$$

יש לחקור 3 מקרים:

מקרה א:

$(\alpha-1)^2-4\beta>0 \Leftarrow r_1, r_2$ ממשיים והם שונים ט

$r_1\neq r_2 \iff W(x^{r_1},x^{r_2})=(r_2-r_1)x^{r_1+r_2}\neq 0$

ונקבל פתרון כללי $\boxed{y=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_2}}$

דוגמא: $2x^2y''+3xy'-y=0$

$x>0$: עושים הצבה של $y=e^r$ ואז מקבלים:

$$0=x^r(2r(r-1)+3r-1)=x^r(2r^2+r-1)=x^r(2r-1)(r+1)$$

$r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=-1$ ונקבל פתרון כללי: $y=C_1x^{\frac{1}{2}}+C_2x^{-1}$

מקרה ב: $(\alpha-1)^2-4\beta=0 \Leftarrow$ למשוואה הריבועית יש פתרון יחיד:

$$r_1=r_2=\frac{-(\alpha-1)}{2}=\frac{1-\alpha}{2}$$

וזה נותן פתרון אחד $y_1(x)=x_1^{r_1}$, לקבלת פתרון שני נכתוב

$F(r)=(r-r_1)^2$ ומתקיים $F(r_1)=0$ וגם $F'(r_1)=0$

גזירה של המשוואה ביחס ל-r: $\frac{\partial}{\partial r}L[x^r]=\frac{\partial}{\partial r}[x^rF(r)]$

מתקיים $\frac{\partial}{\partial r}x^r=x^r\ln x$

לכן ניתן לומר: $L[x^r\ln x]=\frac{\partial}{\partial r}[x^rF(r)]=(r-r_1)^2x^r\ln x+2(r-r_1)x^r$

וזה מתאפס אם $r=r_1$ ולכן $y_2(x)=x^{r_1}\ln x$ $x>0$

הוא הפתרון השני $W(x^{r_1},x^{r_1}\ln x)=x^{2r_1-1}$

ולכן קיבלנו פתרון כללי ל- $x>0$: $\boxed{y=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_1}\ln x}$

(ניתן לעשות זאת גם ע"י הורדת סדר)

20-6-2007

דוגמא: ②

$$x^2y''+5xy+4y=0$$

$$y=x^r \Longrightarrow 0=x^r(r(r-1)+5r+4)=x^r(r^2+4r+4)=$$

$$=x^r((r+2)^2) \Longrightarrow r_1=r_2=-2$$

והפתרון הכללי ל- $x>0$ הוא $y=x^{-2}(c_1+c_2\ln x)$

המקרה השלישי בשעור הבא!!!

המשך מקרים של משוואת Euler מההרצאה הקודמת:

מקרה ג':

$(\alpha-1)^2-4\beta<0 \Longleftarrow$ יש שני פתרונות מרוכבים מהצורה

$r_1=\lambda+i\mu$, $r_2=\lambda-i\mu$ ו- $\mu\neq 0$

היות ו- $x^r=e^{r\ln x}$ מתקיים

$$x^{\lambda\pm i\mu}=e^{(\lambda\pm i\mu)\ln x}=$$

$$=e^{\lambda\ln x}\cdot e^{\pm i\mu\ln x}=x^{\lambda}(\cos(\mu\ln x)\pm i\sin(\mu\ln x))$$

ומכאן מקבלים שני פתרונות ממשיים: $x^{\lambda}\cos(\mu\ln x)$, $x^{\lambda}\sin(\mu\ln x)$

$$W(x^{\lambda}\cos(\mu\ln x), x^{\lambda}\sin(\mu\ln x))=\mu x^{2\lambda-1} \quad (x>0)$$

לכן קיבלנו שני פתרונות בלתי תלויים לינארית והפתרון הכללי הוא:

$$\boxed{y=C_1x^{\lambda}\cos(\mu\ln x)+C_2x^{\lambda}\sin(\mu\ln x)}$$ עבור $x>0$

דוגמא: $x^2y''+xy'+y=0$

$$y=x^r \Longrightarrow x^r(r(r-1)+r+1)=x^r(r^2+1)=0$$

פתרון כללי: $\Longrightarrow r=\pm i \Longrightarrow y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$

עבור $x<0$ ניתן להציב $x=-\xi=-|x|$ כאשר ξ הוא משתנה חיובי ומקבלים משוואת אוילר אחרת, בשביל המשתנה ξ (בשינויי סימן המקדמים) ורואים שמקבלים את אותו הדבר בשלושת המקרים אלא שבמקום x נקבל ξ שהוא בעצמו $|x|$. לכן כל הפתרונות שקיבלנו טובים גם ל- $x<0$, רק צריך בכל מקום להחליף את x ב- $|x|$.

נחזור לבעיה כללית יותר:

(הבעיה של משוואה עם נקודה סינגולרית רגולרית ב-0)

$x^2y''+x(xp(x))y'+(x^2q(x))y=0$ (אנו כותבים את המשוואה רק כי במשוואה

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ הפונקציות p ו- q "מתפוצצות" ב-0 ולכן מוכפלה

ב-x וב-x^2 אנו הופכים אותן להיות פונקציות אנליטיות).

כאשר: $x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$ $\quad xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$

נחפש פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}$ (ונדון תחילה במקרה ש- $x>0$)

הצבה במשוואה נותנת:

$$a_0r(r-1)x^r+a_1(r+1)x^{r+1}+\dots+a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n}+\dots+\dots$$

$$+(p_0+p_1x+\dots+p_nx^n+\dots)[a_0rx^r+a_1(r+1)x^{r+1}+\dots+a_n(r+n)x^{r+n}+\dots]+$$

$$+(q_0+q_1x+\dots+q_nx^n+\dots)[a_0x^r+a_1x^{r+1}+\dots+a_nx^{r+n}+\dots]=0$$

את כל זה ניתן לכתוב בצורה:

$$(*)\quad a_0f(r)x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[f(r+n)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]\Big]x^{r+n}=0$$

כאשר: $f(r)=r(r-1)+p_0r+q_0$

אם המשוואה מתקיימת אז $f(r)=0$ (כי מניחים ש $a_0\neq0$)

($y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ומניחים $a_0\neq0$)

יהיו $r_1,r_2\in\mathbb{R}$. מ-(*) מקבלים יחס רקורסיה:

$$F(r+n)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]=0 \qquad n\geq1$$

(כל עוד מניחים ש- $f(r+n)$ אינו מתאפס זהו יחס רקורסיה).

וניתן לחשב את $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ (כפונקציה של a_0) אם כל המקדמים

$f(r+1),f(r+2),\dots,f(r+n),\dots$ לא מתאפסים.

אבל $f(r)=0$ רק עבור $r=r_1$ ו- $r=r_2$, היות ו $r_1+n\neq r_1,r_2$! עבור $n>0$

נובע ש- $f(r_1+n)\neq0$ לכל $n\geq1$. (עבור r_2 אנחנו לא יודעים)

לכן, ניתן תמיד למצוא פתרון אחד לפחות:

$$y_1(x)=x^{r_1}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\Big]$$

אם r_1-r_2 איננו שלם אזי ניתן למצוא גם פתרון שני: $y_2(x)=x^{r_2}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r^2)x^n\Big]$

25-6-2007 ②

אחרת מקבלים מצב שהוא אנאלוגי למקרה $r_1=r_2$ במשוואת אוילר

וניתן למצוא פתרון נוסף באופן דומה (למשל ע"י הורדת סדר אבל $r_1-r_2=N>0$

יותר מסובך מהמקרה $r_1=r_2$ שהוא אנלוגי ישיר)

במקרה $x<0$ הכל אותו הדבר עם $x^{r_i}\longrightarrow |x|^{r_i}$ ובסיכום ניתן לקבל

את המשפט הבא:

משפט: עבור המשוואה $x^2y''+x(xp(x))y'+x^2q(x)y=0$ שבה $x=0$ נקודה

סינגולרית רגילה ו- $xp(x)$, $x^2q(x)$ פונקציות אנליטיות ב $x=0$

ועם טורי חזקות $xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n$, $x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n$

המתכנסים שניהם ל $|x|<\rho$, יהיו r_1,r_2 (כאשר $r_1\ge r_2$ אם $r_1,r_2\in\mathbb{R}$)

שורשי המשוואה $F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0=0$ אזי בכל אחד מהקטעים

$0<x<\rho$ ו- $-\rho<x<0$ למשוואה יש שני פתרונות בלתי תלויים לינארית

y_1,y_2 מהצורה הבאה:

(1) אם r_1-r_2 אינו שלם:

$$y_1(x)=|x|^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right),\quad y_2(x)=|x|^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_2)x^n\right)$$

(2) אם $r_1=r_2$ ($N>0$ טבעי) אזי:

$$y_1(x)=|x|^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right),\quad y_2(x)=y_1(x)\ln|x|+|x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(r_1)x^n$$

(3) אם $r_1-r_2=N$ ($N>0$ טבעי) אזי:

$$y_1(x)=|x|^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right),\quad y_2(x)=ay_1(x)\ln|x|+|x|^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(r_2)x^n\right)$$

הקבועים $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $C_n(r_1)$ והקבוע a ניתנים לקביעה ע"י הצבת

פתרון כללי בצורה המתאימה במשוואה (הקבוע a עשוי להתאפס), כל אחד מהטורים

המתקבלים בפתרונות הנ"ל מתכנס עבור $|x|<\rho$ ומגדיר פונקציה אנליטית ב- $x=0$.

27-6-2007

מד"ר - שעור מס' 19

משוואות מסדר גבוה

המשוואה הלינארית הרגילה מסדר n היא:

$$P_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots\dots+P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+P_n(x)y=G(x)$$

מניחים ש $P_0,\dots\dots,P_n,G$ רציפות בקטע פתוח (α,β)

וש $P_0(x)\neq 0$ ב- (α,β)

בתנאים האלה ניתן לחלק ב- P_0 ולקבל:

$$(*)\quad L[y]=y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\dots\dots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=g(x)$$

$$y^{(n)}=g(x)$$
$$y^{(n-1)}=\int^x g(t)dt+c$$

היות ויש פה נגזרת מסדר n, דרושות n אינטגרציות לקבלת פתרון ולכן באופן כללי דרושים n קבועים כדי לקבוע פיתרון. לקביעת פתרון יחיד יש לציין n תנאי התחלה ותנאי מקובל הוא מהצורה:

$$(**)\quad y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\dots\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

משפט: אם הפונקציות $P_1,\dots,P_n$ רציפות ב (α,β) אזי קיים פתרון יחיד של המשוואה $(*)$ המקיים את $(**)$ עבור נקודה כלשהי $x_0\in(\alpha,\beta)$ ובחירה כלשהי של $y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$

בדומה למקרה $n=2$ המשוואה עם $g=0$ נקראית ההומוגנית ומתקיים:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{אוסף הפתרונות}\\ \text{הלא הומוגניים}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\text{אוסף הפתרונות}\\ \text{ההומוגניים}\end{array}\right\}+\begin{array}{c}\text{פתרון}\\ \text{פרטי}\end{array}$$

עבור משוואה הומוגנית, אם $y_1,\dots,y_n$ פתרונות אז ברור ש: $y=c_1y_1+\dots+c_ny_n$ פיתרון.

מתי כל פתרון של בעיית ערך התחלתי היא מהצורה

$c_1y_1+\dots\dots+c_ny_n$ עבור $y_1,\dots,y_n$ נתונים?

$$c_1y_1(x_0)+\dots\dots+c_ny_n(x_0)=y_0$$
$$c_1y_1'(x_0)+\dots\dots+c_ny_n'(x_0)=y_0'$$
$$\vdots$$
$$c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

מערכת המשוואות בצורת מטריצות:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

הגדרה:

וורונסקיאן $W(y_1,\dots,y_n)(x_0)=\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$

תנאי הכרחי ומספיק לכך שכל פתרון יהיה מהצורה: $c_1y_1+\dots\dots+c_ny_n$

הוא ש- $W(y_1,\dots,y_n)(x_0)\neq 0$ עבור $x_0\in(\alpha,\beta)$

בדומה למקרה $n=2$ ניתן להראות ש W מתאפס בנקודה אם ורק אם

הוא מתאפס בזהות יזה קורה אם ורק אם $y_1,\dots,y_n$ תלויים לינארית.

לכן כל אוסף $y_1,\dots,y_n$ של פתרונות בת"ל הוא מערכת יסודית וניתן לבנות ממנה

כל פתרון אחר.

27-6-2007

וריאציה של פרמטרים:

נתונה משוואה מהצורה (*)

ידועים $y_1,\dots,y_n$ פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית.

נראה שניתן מכאן למצוא פתרון פרטי ל-(*):

נחפש ⟵
$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + \dots + u_n(x)y_n(x)$$

נדרוש:
$$u_1'y_1^{(m)} + u_2'y_2^{(m)} + \dots + u_n'y_n^{(m)} = 0$$

עבור: $m=0,1,\dots,n-2$ ואז

$$y_p^{(n)} = (u_1y_1^{(n)} + \dots + u_ny_n^{(n)}) + (u_1'y_1^{(n-1)} + \dots + u_n'y_n^{(n-1)})$$

וע"י הצבה במשוואה $u_1'y_1^{(n-1)} + \dots + u_n'y^{(n+1)} = g$ (זה מה שמתקבל לאחר ההצבה)

כלומר,

$$y_1u_1' + \dots + y_nu_n' = 0$$
$$y_1'u_1' + \dots + y_n'u_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$y_1^{(n-2)}u_1' + \dots + y_n^{(n-2)}u_n' = 0$$
⟵ עד לפה הכל מתאפס לפי הדרישה שלנו.
$$y_1^{(n-1)}u_1' + \dots + y_n^{(n-1)}u_n' = g$$

הדטרמיננטה של המטריצה המתאימה היא $W(y_1,\dots,y_n)$ ולכן אם $y_1,\dots,y_n$ בת"ל ניתן לפתור ולקבל את $u_1',\dots,u_n'$ ויוצא פתרון מהצורה:

$$u_m' = \frac{g(x)W_m(x)}{W(x)} \qquad m=1,\dots,n$$

כאשר $W(x) = W(y_1,\dots,y_n)(x)$ הוורונסקיאן

$W_m(x)$ - דטרמיננטה של מינור מתאים (נוסחת קרמר)

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}^{-1} (i,j) = \frac{\det(\text{minor}(i,j))}{W(x)}$$

זה לא מדוייק ונחזור לזה בשבוע הבא!

2-7-2007

מד"ר - שעור מס' 20

הודעה: מחר לא יהיו תרגולים - כן יהיה תרגיל שיפורסם באתר.

נאמר תחילה משהו לגבי טורי חזקות ואחכ נעסוק עם מה שעשינו בשעור שעבר:

במקרה של משוואה שניתנת לפתרון במסגרת טורי חזקות לעולם לא נקבל נוסחת רקורסיה מהצורה: $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (כי ~~רדיוס~~ ההתכנסות שנקבל יהיה 0)

כי: $a_{n+1}=(n+1)a_n=(n+1)(n)(n-1)a_{n-1}=\dots$

$$=\dots=\dots(n+1)n\cdots1\cdot a_0$$

$$=(n+1)!\cdot a_0$$

ואז ניתן לכתוב נוסחה כללית: $a_n=n!\cdot a_0$

$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1}$ אם יש לנו משוואה: $y'=y$

$$y=e^x$$

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (n+1)a_{n+1}=a_n$$

תשובה לגיטימית היא למשל: $y_1(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{17}+\frac{x^7}{139}$ ומתקיים ש- $a_{n+2}=\dots$

(זה מקרים שקשה למצוא נוסחה כללית שתקשור בין המקדמים).

נחזור לעניננו: דיברנו בפעם קודמת על פתרון של משוואה לינארית מסדר n ואחכ וריאציות של פרמטרים מסדר n:

דיברנו על משוואה מהצורה: $$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_ny=g$$

הנחנו כי: $y_1,\dots,y_n$ הם פתרונות למשוואה ההומוגנית ואז נחפש פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית מהצורה: $y_p=u_1y_1+\dots+u_ny_n$

וראינו שמקבלים:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \quad \Longleftarrow$$

ולכן ניתן לכתוב:

$$\Longrightarrow u_m' = \frac{g(x)\, W_m(x)}{W(x)} \qquad m=1,2,\dots,n$$

כל מה שנותר לנו לדעת זה איך להפוך מטריצה (שלמדנו בלינארית)

נוסחה כללית להיפוך מטריצה:

נוסחת קרמר: כהינתן מטריצה כללית $A=(A_{ij})$

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(\tilde{A}(j,i))}{\det(A)}$$

$\tilde{A}(i,j)$ - מטריצה המתקבלת מ-A ע"י שורה i ועמודה j.

$$\frac{W_m(x)}{W(x)} = (A^{-1})_{m,n}$$

ולכן הפתרון שמקבלים עבור y_p הוא:

$$y_p(x) = \sum_{m=1}^{n} y_m(x) \int^{x} \frac{g(t) W_m(t)}{W(t)}\, dt$$

עד כאן משוואה לינארית מסדר n.

2-7-2007

מערכות של משוואות:

עבור משוואה כללית מסדר n מהצורה: $y^{(n)}=F(t,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, ניתן להגדיר:

$x_1=y\ ,\ x_2=y'\ ,\ \dots\ ,\ x_n=y^{(n-1)}$ ואז בתנאים האלה ניתן לכתוב:

$$\circledast\ \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = F(t,x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

$\tilde{\circledast}$ זהו מקרה פרטי של מערכת משוואות מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t,x_1,\dots,x_n) \\ x_2' = F_2(t,x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t,x_1,\dots,x_n) \end{cases} \circledast$$

זוהי מערכת של n משוואות מסדר ראשון.

ניתן לרשום זאת כ-וקטור:

$$\vec{x}\,' = \vec{F}(t,\vec{x})$$

כאשר: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

כך ש: $\vec{x}:\underset{\mathbb{R}}{\underbrace{(\alpha,\beta)}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (זוהי פונקציה גזירה מקטע בממש"ם לתוך $\mathbb{R}^n$)

!

$\vec{F}:(\alpha,\beta)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

(המסקנה היא שבעצם אין משוואות מסדר גבוה אלא רק מסדר ראשון. (כי זו בסה"כ אותה המשוואה))!

תנאי התחלה של מערכת:

$$(**)\begin{cases} x_1(t_0)=x_1^0 \\ x_2(t_0)=x_2^0 \\ \vdots \\ x_n(t_0)=x_n^0 \end{cases}$$

כתיב מקוצר לזה: $\vec{x}(t_0)=\vec{x}^0$ (כרישום וקטורי)

אז:

$$(\vec{x})_0=\vec{x}^0$$

$$(\vec{x})_1=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(s,(\vec{x})_0)\,dt$$

הערה: צריך להבין ש: זהו כתיב מקוצר

$$\int_{t_0}^{t}\vec{G}(s)ds=\begin{pmatrix}\int_{t_0}^{t}G_1(s)ds\\ \vdots\\ \int_{t_0}^{t}G_n(s)ds\end{pmatrix}$$

ובאופן כללי: $(\vec{x})_n=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(s,(\vec{x})_{n-1}(s))ds$

וכמו בסדר ראשון מראים ש-

$$(\vec{x})_n(t)\longrightarrow\vec{x}(t)$$

התכנסות של כל אחת מהקואורדינטות בנפרד (במידה שווה)

ננסח גרסה של משפט הקיום והיחידות למקרה הזה:

משפט קיום ויחידות: אם $F_1,\dots,F_n$ והנגזרות $\frac{\partial F_1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F_1}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial F_n}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ רציפות בתחום פתוח B של המרחב ה- $n+1$ - מימדי במשתנים $t,x_1,\dots,x_n$ המכיל את הנקודה $(t_0,x_1^0,\dots,x_n^0)$, אזי קיים קטע $|t-t_0|<h$ אשר בו קיים פתרון יחיד $(x_1(t),\dots,x_n(t))$ של המערכת (*) המקיים את תנאי ההתחלה (**).

בבחינה: שני חלקים: (א) 25%-30% משפטים, יחד עם הוכחות, הגדרות וכו'... (אין בחירה)

(ב) 70%-75% לפתור תרגילים: צריך לשלוט טוב בטכניקות השונות

(כנראה תהיה בחירה של 3 שאלות מתוך 4)

2-7-2007

(3)

אם $F_1,\dots,F_n$ פונקציות לינאריות של $x_1,\dots,x_n$

אזי המערכת היא לינארית (אחרת, היא נקראת לא לינארית).

מערכת לינארית ניתן תמיד לכתוב באופן הבא:

$$x_1' = p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)$$

כלומר: את המשוואה הלינארית ניתן לכתוב $\vec{x}' = \hat{P}\vec{x} + \vec{g}$ כאשר:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

ו- $(\hat{P})_{i,j} = P_{ij}(t)$

ובמקרה הזה ניתן לכתוב ורסיה של משפט הקיום והיחידות:

משפט: אם $g_1,\dots,g_n$ ו- $P_{11},\dots,P_{nn}$ כולן פונקציות רציפות בקטע (α,β) המכיל את t_0, אזי קיים פתרון יחיד $x_1(t),\dots,x_n(t)$ של המערכת המקיים את תנאי ההתחלה: $x_1(t_0)=x_1^0,\dots,x_n(t_0)=x_n^0$ ותקף בקטע (α,β).

למערכת כזו יש גם קבוצה יסודית של פתרונות.

פתרון כללי של מערכת לינארית הומוגנית כזו:

$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t)$ כאשר $\vec{x}_1(t),\dots,\vec{x}_n(t)$ פתרונות בלתי תלויים לינארית. נסמן

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad k=1,\dots,n$$

ואז נסמן ב- $\hat{X}(t)$ את המטריצה:

$$\hat{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

ואז הורונסקיאן:

$$W(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det(X(t))$$

W מתאפס אם ורק אם $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ תלויים לינארית וכו'....

(יש לנו הרחבה מלאה של מקרים (נוכיח יותר)

4-7-2007

מד"ר - שיעור מס' 21

נמשיך את מה שהתחלנו בשיעור שעבר:

$$\vec{x}' = \hat{P}\vec{x} + \vec{g} \qquad \vec{x} = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$$

המערכת (המשוואה) נקראית הומוגנית אם $\vec{g}(t)=0$

מערכת משוואות הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$(*) \quad \vec{x}' = \hat{P}\vec{x}$$

כאשר $\hat{P}$ מטריצה קבועה (לא תלויה ב- t = מטריצת מספרים)

$y(t) = y(0)\cdot e^{at}$

כאשר דיברנו על משוואות מהצורה: $y'=ay$ הפתרון היה מהצורה $y = C\cdot e^{at}$

הפתרון ל-$(*)$ הוא מהצורה:

$$\vec{x}(t) = e^{\hat{P}t}\vec{x}(0) \quad (**)$$

כאן: $e^{\hat{P}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \hat{P}^n}{n!}$

מרחב המטריצות n×n

$e^{\hat{P}t} : (\alpha,\beta) \to M_n(\mathbb{C})$ כפונקציה

(כדי שהדבר יהיה מוגדר צריך יהיה להתאים מושג מתאים של גבול)

התכנסות הטור היא בנורמה שמוגדרת באופן הבא:

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|\hat{A}\vec{x}\| \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$$

נורמת האופרטור של המטריצה

כאשר: (הנורמה האוקלידית של $\mathbb{R}^n$)

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

קיום הגבול $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n$ משמעו שקיימת מטריצה $\hat{B}$ כך ש: $\left\|\sum_{n=0}^{N} \hat{A}_n - \hat{B}\right\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

גזירות של $e^{\hat{P}t}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\hat{P}t}\right) = \lim_{\delta\to 0} \frac{e^{\hat{P}(t+\delta)} - e^{\hat{P}t}}{\delta}$$

ניתן להראות (לא נעשה זאת מפאת חוסר זמן) שהגבול קיים בנורמה ושווה ל: $\hat{P}\cdot e^{\hat{P}t}$.

טענה: נניח ש- $\hat{A}(t): \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ פונקציה שהיא גזירה במובן שהגבול:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\hat{A}(t+\delta)-\hat{A}(t)\right)$$

קיים בנורמת האופרטור אזי: לכל וקטור קבוע $\vec{X}_0 \in \mathbb{C}_n$

$\hat{A}(t)\vec{X}_0$ גזירה כפונקציה מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{C}^n$ ומתקיים:

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{A}(t)\vec{X}_0\right)=\frac{d}{dt}\left(\hat{A}(t)\right)\vec{X}_0 .$$

הוכחה:

אם נתבונן ב:

$$\left\|\frac{1}{\delta}\hat{A}(t+\delta)-\hat{A}(t))\vec{X}_0-\hat{A}'(t)\vec{X}_0\right\| =$$

חישוב הנורמה הזו זה בדיוק חישוב הנגזרת שאנו מחפשים

$$=\left\|\left(\frac{1}{\delta}\left(\hat{A}(t+\delta)-\hat{A}(t)\right)-\hat{A}'(t)\right)\vec{X}_0\right\| \le$$

עם מה שרשום באדום

$$\le \left\|\frac{1}{\delta}\left(\hat{A}(t+\delta)-\hat{A}(t)\right)-\hat{A}'(t)\right\|\cdot\|\vec{X}_0\| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

מתקיים: $\|\hat{A}\cdot\hat{B}\| \le \|\hat{A}\|\cdot\|\hat{B}\|$

כי הדבר הזה בהגדרה הוא:

$$\sup_{\|\vec{x}\|=1}\|\hat{A}\hat{B}\vec{x}\| \le$$

$$\le \sup_{\|\vec{x}\|=1}\|\hat{A}\vec{x}\|$$

דרך נוספת לראות את הנורמה הזה:

$$\sup_{\|\vec{x}\|\neq 0}\frac{\|\hat{A}\hat{B}\cdot\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\le\|\hat{A}\|\|\hat{B}\|$$

(תרגיל)

ולכן רואים ש-(**) אכן נותן את הפתרון הכללי:

כי:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\hat{P}t}\vec{X}(0)\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(e^{\hat{P}t}\right)\vec{X}_0=\hat{P}e^{\hat{P}t}\vec{Y}(0)$$

ולסיכום $e^{\hat{P}0}=I=$ מטריצת היחידה כלומר מקיים את תנאי ההתחלה.

9-7-2007

מפגש שמור מס' 22

אם יש פונקציה $F:\mathbb{R}\longrightarrow X$ זוהי פונקציה שמוגדרת על קטעים של הישר הממשי.

X מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$)

זהו מרחב וקטורי V שמוגדרת בו התכנסות (יש בו מושג של גבול)

בתנאים אלו ניתן לדבר על נגזרות: $\frac{dF}{dt}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[F(t+\delta)-F(t)\right]$

עבור סדרת פונקציות $f_n:(\alpha,\beta)\longrightarrow\mathbb{R}$ ניתן לדבר על מושגים שונים של התכנסות

למשל, התכנסות במידה שווה והתכנסות נקודתית

זוהי התכנסות בנורמה!

$f_n\longrightarrow f \iff \sup_{x\in(\alpha,\beta)}|f_n(x)| = \|f_n-f\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$f_n\longrightarrow f$ אם ורק אם $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$ לכל $x\in(\alpha,\beta)$

אם X מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ מעל מימד סופי, אזי כל מושג של התכנסות ב-X שקול להתכנסות בכל הקואורדינטות. ניתן להגדיר

$\|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|\vec{x}(j)|^2}$ (נורמה של וקטור)

ואז סדרת וקטורים מתכנסת בכל מובן שהוא, אם ורק אם היא מתכנסת בנורמה זו

כלומר $\{\vec{x_n}\}$ מתכנסת ל-$\vec{x}$ אם ורק אם $\|\vec{x_n}-\vec{x}\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$\vec{F}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}\qquad \frac{d\vec{F}}{dt}=\begin{pmatrix}f_1'(t)\\ \vdots\\ \vdots\\ f_n'(t)\end{pmatrix}$$

בדומה עבור מטריצות: $\hat{F}:(\alpha,\beta)\longrightarrow M_n(\mathbb{C})$

$$\frac{d\hat{F}}{dt}=\begin{pmatrix}F_{11}'(t) & \cdots & F_{1n}'(t)\\ \vdots & & \vdots\\ F_{1n}'(t) & \cdots & F_{nn}'(t)\end{pmatrix}$$

כאשר: $\hat{F}=(F_{ij}(t))$

נשים לב כי שימוש בנורמות, אע״פ שאינו הכרחי, יכול לעזור:

מגדירים "נורמת האופרטור" של מטריצה: $\hat{A} \in M_n(\mathbb{C})$

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|\hat{A}\vec{x}\| = \sup_{\vec{x}\neq 0} \frac{\|\hat{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$\Downarrow$ מכאן נובע הדבר הבא:

$$\|\hat{A}\vec{y}\| \underset{\vec{y}\neq 0}{=} \left(\frac{\|\hat{A}\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|}\right)\cdot\|\vec{y}\| \leq \|\hat{A}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

תכונה נוספת $\Longleftarrow$

$$\underbrace{\sup_{\|\vec{x}\|=1} \|\hat{A}\hat{B}\vec{x}\|}_{\|\hat{A}\hat{B}\|} \leq \sup_{\|\vec{x}\|=1}\left(\|\hat{A}\|\|\hat{B}\vec{x}\|\right) =$$

$$= \|\hat{A}\|\cdot\sup_{\|\vec{x}\|=1}\|\hat{B}\vec{x}\| = \|\hat{A}\|\cdot\|\hat{B}\|$$

$$\Longleftarrow \quad \|\hat{A}^2\| \leq \|\hat{A}\|^2 \quad \Longleftarrow \quad \|\hat{A}^n\| \leq \|\hat{A}\|^n \quad (*)$$

לכן אם $\sum a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות כלשהו R אזי

אם $\|\hat{A}\|<R$, נוכל ש- $\sum a_n \hat{A}^n$ מתכנס.

ניתן לראות כזאת מכך ש-

$$\left\|\sum_{n=N}^{N+M} a_n\hat{A}^n\right\| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{n=N}^{N+M} |a_n|\cdot\|\hat{A}^n\| \underset{(*)\text{-מ}}{\leq} \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|\,\|\hat{A}\|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

זה כבר נתכנס.

$\Longleftarrow$ סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum a_n \hat{X}^n$ היא קושי ולכן הטור מתכנס.

9-7-2007 ②

נתקן עכשיו טעות משעור קודם: (או ליתר דיוק נבהיר)

ראינו בסמס הקודמת שעבור פונקציה מטריצאלית:

$$\left(\hat{A}(t)\vec{x}\right)' = \hat{A}'(t)\vec{x}$$

וקטור קבוע

הראינו שהדבר הזה שגוי

אם נתון אם $\hat{A}(t)$ גזירה
ומתקיים השיוויון הזה

הראינו זאת בסמס הקודמת תוך שימוש בנורמות ולאחר מה שראינו היום יהיה קל יותר להוכיח זאת (בסמס שעבר השתמשנו בחישוב ארוך מדי כשהוכחנו השיוויון נוכל (נוכח לכך מאי-שיוויון פשוט יותר).

עבור משוואה ~~הומוגנית~~ לינארית עם מקדמים קבועים:

כלומר משוואה מהצורה: $\vec{x}' = \hat{P}\vec{x}$ ראינו שהפתרון הכללי נתון ע"י:

$\vec{x}(t) = e^{\hat{P}t}\vec{x}(0)$. באופן כללי, $e^{\hat{P}t}$ הוא באופן כללי קשה לחישוב

אבל אם למשל $\hat{P}$ אלכסונית, כלומר: $\hat{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ אזי:

$$e^{\hat{P}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

כלומר אם יודעים ללכסן את המטריצה החישוב יהיה קל יותר.

ניתן לקבל פתרונות באופן מפורש בעזרת פתרון וקטורים עצמיים וערכים עצמיים של המטריצה.
הטענה המרכזית כאן היא: אם $\vec{y}$ וקטור עצמי של $\hat{P}$ בעל ערך עצמי λ, אזי $\vec{y}$ הוא וקטור עצמי של $e^{\hat{P}t}$ עם ערך עצמי $e^{\lambda t}$. עבור וקטור עצמי כזה מתקיים: $e^{\hat{P}t}\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{y}$.

[כי: $\hat{P}^2\vec{y} = \hat{P}\cdot\lambda\vec{y} = \lambda^2\vec{y}$ | ולכן: $\hat{P}^n\vec{y} = \lambda^n\vec{y}$ $\Leftarrow$ לכל פולינום $\left(\sum a_n\hat{P}^n\right)\vec{y} = \left(\sum a_n\lambda^n\right)\vec{y}$]

לכן, אם $\hat{P}$ ניתנת ללכסון ויש לה n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית:
$\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n$ בעלי ערכים עצמיים מתאימים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ אזי הפתרון הכללי
הוא מהצורה: $\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}\vec{y}_k$. בפרט: $\vec{x}(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\vec{y}_k$

ומכאן מקבלים את המקדמים $\{c_k\}_{k=1}^{n}$ לפי תנאי התחלה.

אם מספר הוקטורים העצמיים של $\hat{P}$ קטן מ-n אזי מקבלים מהם מס' קטן יותר של פתרונות בלתי תלויים לינארית. (קיימות שיטות אלגבריות לפתור את זה. לא ניכנס לזה כאן).

דוגמא:

משוואה לינארית, הומוגנית מסדר שני $ay''+by'+cy=0$

(כבר פתרנו כזאת אך עכשיו בדרך החדשה לא נצטרך לנחש פתרון).

נגדיר: $x_1=y$

$x_2=y'=x_1'$

$\Leftarrow$ נרשום את המשוואה בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-bx_2-cx_1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ניתן כמובן לומר כאן ש:

$$\vec{X}(t) = e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}} \cdot \vec{X}(0)$$

לקבלת פתרונות מפורשים נלכסן את המטריצה:

הפולינום האופייני הוא:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{c}{a} & \lambda+\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda+\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a} =$$

$$= \lambda^2+\lambda\frac{b}{a}+\frac{c}{a} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

וזה בדיוק משחזר את הפתרונות e^{r_1}, e^{r_2} של המשוואה הריבועית שקיבלנו בשיעור קודם כמובן.

המצב $\lambda_1=\lambda_2$ הוא המקרה הבעייתי שבו המטריצה איננה ניתנת ללכסון.

יום ד' יהיה שעור חזרה.

11-7-2007

מד"ר - שעור חזרה (שעור אחרון של הסמסטר)

שאלות של התלמידים.

שאלה לגבי פתרון באמצעות טורים: אם יש משוואה

$$x^2y''+x\underbrace{(xp)}_{\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n}y'+\underbrace{(x^2q)}_{\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n}y=0 \Longrightarrow r(r-1)+p_0r+q_0$$

זוהי משוואה ריבועית שיש לה שני פתרונות.

הפתרונות הם r_1, r_2 [מניחים $r_1 \ge r_2$ אם שניהם ממשיים $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$]

אפשר לחלק את הסיפור לשני מקרים.

מקרה 1:

$$r_1-r_2\notin\{0,1,\dots\} \Longrightarrow y_1=|x|^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right]$$

$$y_2=|x|^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_2)x^n\right]$$

מסתכלים על החלק המדומה והממשי של y_1 כדי לקבל שני פתרונות.

$$\tilde{y}_1=\mathrm{Re}\,y_1$$

$$\tilde{y}_2=\mathrm{Im}\,y_1$$

$$a_n(r_1)=\mathrm{Re}\,a_n(r_1)+i\,\mathrm{Im}\,a_n(r_1)$$

$$\left[\begin{aligned}&|x|^{r_1}=e^{r_1\ln|x|}=\\&=[r_1=\lambda+i\mu]=\\&=e^{\lambda\ln|x|}\cdot e^{i\mu\ln|x|}=\\&=|x|^{\lambda}(\cos(\mu\ln|x|)+i\sin(\dots))\end{aligned}\right]$$

כשיודעים שקיים פתרון בצורה מסוימת, מציבים אותם במשוואה ומקבלים יחס רקורסיה שהיא פונקציה של r ואז מציבים את r_1 ואת r_2.

ניתן דוגמא כדי שיהיה ברור:

משוואה היפרגאומטרית: (זוהי דוגמא למצב רגיל)

$$x(1-x)y''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)x]y'-\alpha\beta y=0$$

$$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

יש פה המון נקודות רגילות.

יש שתי נקודות סינגולריות: $0, 1$

השלב הראשון נסתכל <u>סביב 0</u>.

הדבר הראשון שנרצה לעשות: לרשום את המשוואה באופן נכון סביב 0.

נכפול את המשוואה ב-x ונחלק ב $(1-x)$:

$$x^2y'' + x\underbrace{\left(\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)x}{1-x}\right)}_{xp}y' - \underbrace{\frac{\alpha\beta x}{1-x}}_{x^2q}y = 0$$

עכשיו צריך לכתוב את הפונקציות (שהן אנליטיות) כטורי חזקות

הכל מתבסס על הטור הגאומטרי:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$x\cdot p = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma-(1+\alpha+\beta)x\right)x^n$$

$$x^2q = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha\beta x^n$$

$$\left[\gamma-(1+\alpha+\beta)x\right]\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\gamma x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(1+\alpha+\beta)x^n$$

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0$$

$$r(r-1)+\gamma r=0$$

$$\left.\begin{matrix} r=0 \\ r=1-\gamma \end{matrix}\right\}\text{שני פתרונות}$$

ניתן להפריד פה בין 3 מיני מקרים:

נניח $0<1-\gamma<1$ (כדי שהשורש יהיה הגדול יותר מבין השניים ושההפרש לא יהיה שלם)

אז

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(0)x^n$$

עכשיו צריך להציב את זה ולקבל יחס רקורסיה.

11-7-2007

②

במקרה שההפרש שלם:

נניח ש: $\gamma=1$

$$y_2 = y_1 \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(c)\, x^n$$

צריך לגזור פעמיים את הביטוי הזה.

$$y_2' = y_1' \ln|x| + y_1 \cdot \frac{1}{|x|} \ldots$$

ולהציב והחשבון יוצא מסובך.

אם היינו לוקחים $\gamma=0$ (שזה גם מקרה)

במקרה כזה הנוסחה קצת שונה. y_1 עדיין מאותה הצורה [אבל]

$$y_2 = a y_1 \ln|x| + |x|\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n\right]$$

[אלו] מקרים מסובכים שלא יהיו כפי הנראה

בבחינה.