האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות (80320)
מועד א', תשס''ח – 1.9.08

המורה: פרופ' מתניה בן-ארצי
משך הבחינה: 2.5 שעות.

אין להיעזר בכל חומר (כולל מחשבונים).
נא לצטט במדוייק כל משפט שמסתמכים עליו.
נא כתבו בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
שימו לב: סך הנקודות שתוכלו לצבור במבחן הוא 105, אך הציון הסופי המקסימאלי יכול להגיע לציון 100 בלבד.

פרק א'

יש לפתור שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות: **(כל שאלה=15 נקודות)**

1) למצוא פתרון כללי למשוואה:
$$z''(t)-9z(t)=5e^{3t}.$$

2) לחשב את e^{tA} כאשר A היא המטריצה:
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3) מוגדרת סידרת פונקציות $\{y_j(t),\quad t\in R\}_{j=1}^{\infty}$ על-ידי:
$$y_1(t)=t\ ,\quad y_{j+1}(t)=\pi+\int_0^t \sin(y_j(s))ds.$$
לבדוק האם הסידרה מתכנסת ואם התשובה חיובית—למצוא את הגבול.

4) נתונה בעיית ההתחלה:
$$y'=t^2+y^2+\frac{1}{2}e^{-y^2},\quad y(0)=0.$$
להראות כי יש לה פתרון יחיד בקטע $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ והוא מקיים שם $|y(t)|\le 1$.

(נא להפוך דף...)

פרק ב'

יש לפתור שתיים משלוש השאלות הבאות. (כל שאלה =30 נקודות).

1) תהי $f(t,y)\in C^1(R\times R)$ (פונקציה גזירה ברציפות לפי שני משתנים ממשיים בכל המישור)
ונניח שקיים קבוע $C>0$ כך ש- $(t,y)\in R\times R$, $|f(t,y)|<Ce^t+\sqrt{1+y^2}$.
להוכיח כי לכל $(t_0,y_0)\in R\times R$ לבעיית ההתחלה

$$y'=f(t,y),\quad y(t_0)=y_0$$

קיים פתרון יחיד $y(t;t_0,y_0)$ המוגדר על כל הישר (כלומר, אינטרוול הקיום המקסימלי שלו הוא כל הישר).

2) נסתכל בפונקציה

$$f(t,y)=(1-y^2)(1+\sin^2(t+y)).$$

להוכיח כי למשוואה $y'=f(t,y)$ קיים פתרון מחזורי המוגדר על כל הישר (כלומר, אינטרוול הקיום המקסימלי שלו הוא כל הישר). יתר על כן, הפתרון תמיד חיובי.
תזכורת: פונקציה מחזורית היא פונקציה המקיימת $\phi(t+T)=\phi(t)$ עבור $T>0$ מסויים (קבוע) וכל $t\in R$.

3) נתבונן במשוואה $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ בקטע $I=(\alpha,\beta)$, כאשר הפונקציות $p(t),q(t)$ רציפות בקטע. יהיו $y_1(t),y_2(t)$ שני פתרונות בלתי תלויים בקטע.
א) להוכיח כי ל- $y_1(t),y_2(t)$ אין נקודת אקסטרמום מקומית משותפת (אפילו לא נקודה משותפת שהיא מינימום מקומי עבור פונקציה אחת ומקסימום מקומי עבור השנייה).
ב) **משפט שטורם**: להוכיח כי בין כל שני אפסים עוקבים של $y_1(t)$ בקטע (בהנחה שיש כאלה) יש בדיוק אפס אחד של $y_2(t)$.

בהצלחה!!!