האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

משוואות דיפרנציאליות רגילות (80320)

מועד א' תשס"א

המורה : פרופ' מ. בן-ארצי　　　　הזמן: שעתיים

לבחור שלוש מתוך ארבע השאלות.
לנסח במדוייק כל משפט עליו אתם מסתמכים.

1. א. נתונה המשוואה $y'=x^2-y^2$, $y(0)=1$.
להוכיח כי למשוואה פתרון יחיד $y(x)$, המוגדר בחצי הישר $x\geq 0$. להראות כי הפתרון מקיים $y(x)\geq 0$.
ב. האם המסקנה של א' נכונה גם לגבי המשוואה $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$?

2. יהי $I\subseteq \mathbf{R}$ קטע פתוח (סופי או אינסופי) ו- $a(x), b(x)$ פונקציות רציפות ממשיות ב- I .
יהיו $y_1(x), y_2(x)$ שני פתרונות של המשוואה
$$y''+a(x)y'+b(x)y=0,\quad x\in I. \qquad (*)$$
ויהי $W(x)$ הוורונסקיאן שלהם,
$$W(x)=y_1\,y_2'-y_2\,y_1' .$$
א. לנסח את המשפט המבטיח קיום הפתרונות y_1, y_2 בכל הקטע I .
ב. להראות כי, אם $x_0\in I$,
$$W(x)=W(x_0)\exp(-\int_{x_0}^{x}a(t)\,dt) .$$
ג. יהי $I=(-1,1)$. להראות כי לא קיימות פונקציות רציפות $a(x), b(x)$ כך שלמשוואה (*) ישנם הפתרונות: $y_1(x)=xe^x$, $y_2(x)=x^2-x$.

המשך מעבר לדף ←

3. א. להוכיח כי למערכת

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = y^2 \;,$$

$$\left(x(0),\, y(0)\right) \neq (0,0)$$

$$\frac{dy}{dt} \equiv \dot{y} = x^2 \;,$$

אין אף פתרון מחזורי.

ב. להוכיח כי אם $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ אזי הפתרון של א' "מתפוצץ" בזמן סופי $T > 0$,
כלומר, $x(t) + y(t) \to +\infty$ כאשר $t \to T$.

ג. להוכיח כי כל פתרונות המערכת

$$\dot{x} = -y^3 \;,\; \dot{y} = x^3 \;.$$

הם מחזוריים.

4. א. למצוא את פתרון המשוואה

$$(x+2)\sin y\,dx + x\cos y\,dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$$

(מספיק למצוא בצורה סתומה).

להראות כי הפתרון קיים ויחיד בקטע $(\frac{9}{10},\infty)$ אך לא ניתן להמשכה לחצי הישר $(0,\infty)$.

ב. ל- k טבעי, למצוא את הפתרון הכללי של המשוואות (ב- $x > 0$):

(i) $$y' + \frac{k}{x}y = 0 \;.$$

(ii) $$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2} \;.$$

בהצלחה!

(121) 80320 00/01

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

משוואות דיפרנציאליות רגילות (80320)

מועד ב' תשס"א

המורה : פרופ' מ. בן-ארצי הזמן: שעתיים

לבחור שלוש מתוך ארבע השאלות.
לנסח במדוייק כל משפט עליו אתם מסתמכים.

1. יהי $I \subseteq \mathbf{R}$ קטע פתוח (סופי או אינסופי).

תהי $A(x)$ מטריצה ממשית $n\times n$ רציפה על I (כלומר, כל אחד מאיבריה הוא פונקציה רציפה).

תהי $x_0 \in I$ ויהיו $y^{(1)}(x),\ldots,\ y^{(n)}(x)$ פתרונות של המשוואה $y'=A(x)y$

כאשר $y^{(l)}(x_0)=e_l=(0,\ldots,\overset{l}{1},0,\ldots 0)$, $l=1,\ldots,n$.

(כל $y^{(l)}(x)$ הוא פונקציה וקטורית בעלת n רכיבים).

א. נסח משפט המבטיח כי הפתרונות $y^{(l)}(x)$ מוגדרים לכל $x\in I$.

ב. תהי $Y(x)=(y^{(1)},\ldots,y^{(n)})$ המטריצה $n\times n$ שהעמודה ה- l שלה היא $y^{(l)}$.

להוכיח כי $Y(x)$ אינה סינגולרית, לכל $x\in I$.

ג. אם $A(x)\equiv A$ מטריצה קבועה, להוכיח כי $Y(x)=e^{(x-x_0)A}$.

2. נסתכל במערכת
$$\dot{x}=x-xy$$
$$\dot{y}=-y+xy$$
כאשר $x(0)>0$, $y(0)>0$.

א. להוכיח כי לאורך המסלול מתקיים $\ln x+\ln y=x+y+c \quad (c=const.)$

לפחות כל עוד הפתרון קיים ו- $x(t)>0$, $y(t)>0$.

ב. להוכיח כי הפתרון קיים לכל t והוא מחזורי ומוכל ברביע $x>0$, $y>0$.

המשך מעבר לדף←

3. א. למצוא את כל הפתרונות (המוגדרים על הישר) למשוואות הבאות:

(i) $y'=x\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=1$.

(ii) $y'=-x\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=1$.

($\sqrt{\ }$ - תמיד אי-שלילי).

ב. מתבוננים במשוואה $y'=e^y$, $y(0)=k$.

מהם ערכי k הממשיים (אם יש כאלה) שעבורם הפתרון <u>לא</u> קיים על כל הישר?

4. א. יהיו L,n מספרים טבעיים (לא אפס). לכתוב משוואה ליניארית (במקדמים קבועים)

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$$

כך שהפונקציות $e^{LX},e^{(L+1)x},\ldots,e^{(L+n-1)x}$ מהוות בסיס למרחב הפתרונות שלה (ניתן להניח שהן ב"ת ליניארית).

ב. להוכיח כי n הווקטורים ב- $\mathbf{R}^n$,

$$a_0=(1,L,L^2,\ldots,L^{n-1}),\ldots,a_k=\left(1,(L+k),(L+k)^2,\ldots,(L+k)^{n-1}\right)$$

ו- $0\le k\le n-1$, מהווים בסיס ל- $\mathbf{R}^n$.

בהצלחה!