(1) 12.05.08

מד"ע

המרצה: מתניה בן-ארצי

אתר: ב- homepage של מתניה (יש שם סיכומים)
math.huji.ac.il|~mbartzi

יהיו תרגילים ומבחן אמצע שיהיה מבוסס עליהן בעיקר.

המבחן יהווה 25% מגן

מסגרת העבודה שלנו היא $\mathbb{R}^n$ ונניח שהמושגים הבסיסיים של טופולוגיה ב- $\mathbb{R}^n$ ידועים. הכי חשוב לה קבוצות קומפקטיות.

<u>הגדרה</u>: K קומפקטית אם לכל סדרה בתוכה יש תת סדרה מתכנסת עם גבול השייך ל- K.

סימונים: אינדקס עליון מסמן נקודה $\{x^k\} \subseteq X$

אינדקס תחתון מסמן רכיבים $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$

תחת סימונים אלה, קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם

$\{x^k\} \subseteq K \Rightarrow \exists \{x^{k_j}\} \quad x^{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x \in K$

נזכיר רק מה זה סדרה מתכנסת. $x^k \longrightarrow x$ פירושו

$\lim\limits_{k\to\infty} |x^k - x| = 0$ כאשר $|\cdot|$ הנורמה האוקלידית (ששקולה לכל הנורמות האחרות) וזה שקול להתכנסות בכל אחד מהרכיבים:

$\lim\limits_{k\to\infty} |x_i^k - x_i| = 0 \quad i = 1, \dots, n$

<u>טענה</u>: הטענות הבאות שקולות:

(א) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית

(ב) K חסומה וסגורה

(ג) לכל כיסוי פתוח של K קיים תת כיסוי סופי.

<u>תזכורת</u>:

- חסומה - קיים כדור $B(0,r)$ רק ש- $K \subseteq B(0,r)$

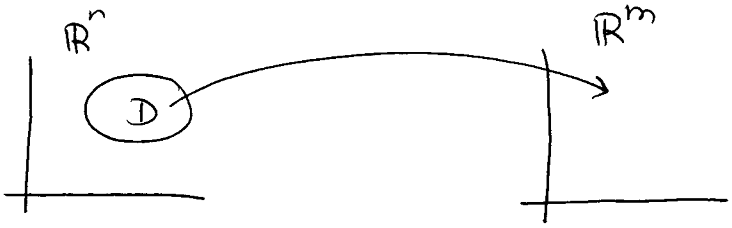
  $[\ B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}\ ]$

- פתוחה - לכל $y \in U$ קיים $\delta > 0$ רק ש- $B(y,\delta) \subseteq U$

• סגורה - אם המשלים $\mathbb{R}^n \setminus A$ פתוח.

מרחבי פונקציות

סימון: תהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$. נסמן ב- $C(D,\mathbb{R}^m)$ את אוסף הפונקציות הרציפות מ- D לתוך $\mathbb{R}^m$:



התכנסות במידה שווה: נאמר שהסדרה $\{f^k\} \subseteq C(D,\mathbb{R}^m)$ מתכנסת במ"ש ל- $f \in C(D,\mathbb{R}^m)$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K(\varepsilon)$ כך ש $\sup_{\substack{x\in D\\ k>K}} |f^k(x) - f(x)| < \varepsilon$

הערה: אם $\{f^k\} \subseteq C(D,\mathbb{R}^m)$ מתכנסת במ"ש ל- f אזי בהכרח $f \in C(D,\mathbb{R}^m)$ (תרגיל)

$\boxed{\text{K תמיד מסמנת קבוצה קומפקטית}}$

הגדרה: על $C(K,\mathbb{R}^m)$ נגדיר לכל $f \in C(K,\mathbb{R}^m)$
$$\|f\| = \max_{x\in K} |f(x)|$$
(המקסימום קיים כי K רציפה והנורמה היא פונקציה רציפה)

טענה: $C(K,\mathbb{R}^m)$ מרחב לינארי ! $\|\cdot\|$ היא נורמה עליו.

הוכחה: אם $f,g \in C(K,\mathbb{R}^m)$ אזי גם $f+g \in C(K,\mathbb{R}^m)$
כאשר $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
אם $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי $\alpha f \in C(K,\mathbb{R}^m)$ כאשר $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
$\|\cdot\|$ נורמה:
- הומוגניות $\|\alpha f\| = \max_{x\in K} |\alpha f(x)| = |\alpha| \cdot \max_{x\in K} |f(x)| = |\alpha|\,\|f\|$
- חיוביות $f = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0$ - ברור. ורואים $\|f\| \ge 0$
- אי שוויון המשולש $\|f+g\| = \max_{x\in K} |f(x)+g(x)| \le \max_{x\in K} |f(x)| + \max_{x\in K} |g(x)| =$
$= \|f\| + \|g\|$

<u>הערה</u>: $\{f^k\}\subseteq C(K,\mathbb{R}^m)$ מתכנסת במ"ש ל- f אמ"מ
$$\|f^k-f\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$
(נובע פשוט מההגדרה)

<u>טענה</u>: אם $\{f^k\}\subseteq C(K,\mathbb{R}^m)$ סדרת קושי אז קיימת $f\in C(K,\mathbb{R}^m)$ רק ש- $\|f^k-f\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. להפך, אם $f^k\xrightarrow[k\to\infty]{}f$ אזי $\{f^k\}$ סדרת קושי.

<u>תזכורת</u>: תנאי קושי פירושו: לכל $\varepsilon>0$ קיים $K(\varepsilon)$ רק ש $k_1>k_2>K(\varepsilon) \Rightarrow (*)\ \|f^{k_1}-f^{k_2}\|<\varepsilon$ (זה תנאי פנימי)

<u>הוכחה</u>: נניח ש- $\{f^k\}$ קושי. כלומר, בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $L(\varepsilon)$ כך שלכל $k_1>k_2>L(\varepsilon)$ $\|f^{k_1}-f^{k_2}\|<\varepsilon$. בפרט, לכל $x\in K$ בוודאי מתקיים $|f^{k_1}(x)-f^{k_2}(x)|<\varepsilon$ אם $k_1>k_2>L(\varepsilon)$. לכן $\{f^k(x)\}$ סדרת קושי ב- $\mathbb{R}^m$. $\Leftarrow$ קיים גבול $f^k(x)\to f(x)$ ($\mathbb{R}^m$ מרחב שלם). נראה ש- $f^k\xrightarrow[k\to\infty]{}f$ במובן $C(K,\mathbb{R}^m)$, כלומר $\|f^k-f\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ (ואז אוטומטית $f\in C(K,\mathbb{R}^m)$).
נחזור ל-(*). מתקיים $\|f^{k_1}-f^{k_2}\|<\varepsilon$ לכל $k_1>k_2>L(\varepsilon)$. לכן, נותן עבור $x\in K$ ונשאיף $k_1\to\infty$. נקבל $|f(x)-f^{k_2}(x)|\le\varepsilon$ לכל $k_2>L(\varepsilon)$ ולכל $x\in K$. $\Rightarrow$ $\|f-f^{k_2}\|\le\varepsilon$ ל- $k_2>L(\varepsilon)$
וזה בדיוק אומר ש- $f^{k_2}\xrightarrow[k_2\to\infty]{}f$ במובן $\|\cdot\|$.
להפך, אם $\|f^k-f\|\to\infty$ אז ל- $\varepsilon>0$ נתון קיים $L(\varepsilon)$ רק ש- $k>L(\varepsilon)\Rightarrow\|f^k-f\|<\varepsilon$. נניח $k_1>k_2>L(\varepsilon)$. אז:
$$\|f^{k_1}-f^{k_2}\|=\|f^{k_1}-f+f-f^{k_2}\|\le\|f^{k_1}-f\|+\|f^{k_2}-f\|<2\varepsilon$$
☺

<u>מסקנה</u>: המרחב $C(K,\mathbb{R}^m)$ שלם (complete) ביחס ל- $\|\cdot\|$.

<u>משפטי קומפקטיות</u>

<u>תזכורת</u>: $f\in C(K,\mathbb{R}^m)$ רציפה במ"ש, כלומר, אם $\varepsilon>0$ נתון אז קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in K$ ולכל $y\in K$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. (זה משפט באינפי וזה נובע מזה ש- K קומפקטית).

הגדרה: תהי $\Phi \subseteq C(K,\mathbb{R}^m)$ משפחת פונקציות. נאמר ש- Φ רציפה במידה אחידה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $f\in\Phi$ לכל $x,y\in K$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

תרגיל: אם $f^n \to f$ אזי $\{f^n\}$ רציפה במידה אחידה.

משפט Arzela-Ascoli: תהי $\{f^n\} \subseteq C(K,\mathbb{R}^m)$ סדרה שמקיימת:

(i) חסומה במידה שווה (קיים C כך שלכל k, $\|f^n\|<C$).

(ii) רציפה במידה אחידה.

אזי קיימת תת סדרה $f^{n_k} \to f$.

הוכחה: (החסימות הזו מאוד חשובה. זה רמז תנאי הכרחי. הרי אם ניקח $f^n \equiv k$ אז הן כמובן רציפות במידה אחידה אבל אין להן ת"ס מתכנסת)

תהי $\varepsilon_\ell>0$. סדרה יורדת כך ש- $\varepsilon_\ell \to 0$. לכל ε_ℓ ניקח את δ_ℓ המתאים לו לפי הרציפות במידה אחידה. כלומר

$$\forall x,y\in K \quad |x-y|<\delta_\ell \Rightarrow \forall j \quad |f^j(x)-f^j(y)|<\varepsilon_\ell$$

כיוון ש- K קומפקטית, קיים מספר סופי של כדורים $B(x^1,\delta_\ell),\dots,B(x^{j_\ell},\delta_\ell)$ המכסה את K. (תכונת הכיסוי הסופי).

בה"כ δ_ℓ סדרה יורדת. ע"י לקיחת כל הכדורים לכל ℓ נקבל מספר בן-מנייה של כדורים מהצורה $B(x^p,\delta_\ell)$ (ה- $\{x^p\}$ הם אוסף המרכזים של הכדורים).

כיוון שלכל $x\in K$ הסדרה $\{f^k(x)\}$ חסומה, יש תת סדרה מתכנסת $\{f^{k_j}(x^1)\}$ (עבור $p=1$). קיימת תת סדרה מתכנסת $\{f^{k_{j_m}}(x^2)\}$. עכשיו דרך להמשיך בתהליך האלכסון... נמצא תת סדרה (f^{n_k}) שמתכנסת ל- $x^1,x^2,\dots,x^p,\dots$ לכל x^p מקודם.

③ 14.05.08
מד"ר

התרגיל והסיכומים באתר של מתניה מתוקנים.

שירות להשכלה הכללית שלנו: תהליך האלכסון של קנטור.

השאלה המרכזית: למה האירציונליים ב-$(0,1)$ אינם בני-מנייה?

ברור שאלה שיש להם ייצוג סופי הם בני-מנייה. אז נתבונן באלה עם הייצוג האינסופי. נניח בשלילה שהם בני-מנייה והמנייה שלהם היא

$$0.a_1^1a_2^1a_3^1\ldots = a_1$$
$$0.a_1^2a_2^2a_3^2\ldots = a_2$$
$$0.a_1^3a_2^3a_3^3\ldots = a_3$$
$$\vdots$$

עכשיו נתבונן במספר $0.x_1x_2x_3\ldots$ רק ש- $x_n=\begin{cases}1 & a_n^n\neq 1\\ 2 & a_n^n=1\end{cases}$

קל לראות שהמספר הזה לא מופיע ברשימה שלנו אבל הוא ב-$(0,1)$ וזו סתירה.

הנה עוד הוכחה: נניח בשלילה ש-$(0,1)$ בן מנייה. נחלק את $[0,1]$ לשלושה חלקים ונבחר אחד שלא מכיל את a_1. נניח שבחרנו $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$. נחלק אותו לשלושה חלקים שווים ונבחר אחד שלא מכיל את a_2. רק באופן אינדוקטיבי נקבל סדרה $I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\ldots$. זאת סדרה יורדת של קטעים סגורים שהגודל שלהם יורד לאפס. לכן לפי הלמה של קנטור היא מתכנסת לנקודה בודדת שמשותפת לכל הקטעים, אבל הנקודה הזו לא יכולה להיות במנייה שלנו לפי הבנייה של הקטעים וזו סתירה.

<u>משפט Arzela-Ascoli</u>: סדרה חסומה במידה שווה ורציפה במידה אחידה $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq C(K,\mathbb{R}^m)$ מכילה תת סדרה מתכנסת.

<u>הוכחה:</u>

(c) לכל l טבעי, עבור $\varepsilon_l=\frac{1}{l}$ ניקח $\delta_l>0$ שנתון ע"י הרציפות במידה אחידה. כלומר $(*)\quad |x-y|<\delta_l \Rightarrow |f^k(x)-f^k(y)|<\frac{1}{l}$

מהגדרת הקומפקטיות של K קיים מספר סופי של נקודות $x^{l,1},\ldots,x^{l,s_l}\in K$ רק ש- $K\subseteq\bigcup_{j=1}^{s_l}B(x^{l,j};\delta_l)$. בה"כ $\delta_l\downarrow 0$.

ב) נסמן $\Lambda = \bigcup_l \{x^{l,1},\dots,x^{l,s_l}\} = \{x^1,x^2,\dots,x^p,\dots\}$. בנוסף זו קבוצה צפופה ב-K. עבור $x=x^1$ הסדרה $\{f^k(x^1)\}$ חסומה ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $\{f^{k_j}(x^1)\}$. עבור $x=x^2$ קיימת תת סדרה מתכנסת $\{f^{k_{j_m}}(x^2)\}$ (שמתכנסת גם ב-x^1).

עכשיו מגיע תהליך האלכסון:

$$\begin{array}{cccc} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \quad \dots \\ f^{k_1} & f^{k_{j_1}} & f^{k_{j_{m_1}}} & \\ f^{k_2} & f^{k_{j_2}} & f^{k_{j_{m_2}}} & \\ f^{k_3} & f^{k_{j_3}} & f^{k_{j_{m_3}}} & \\ \vdots & & & \end{array}$$

עושים פה "סינון והשמטה". בכל עמודה מופיעים חלק מהאינדקסים של העמודה הקודמת.

ע"י תהליך אלכסון של התת סדרות המתקבלות ובחירות תת סדרה מתכנסת ב-x^m ותת סדרה שלה המתכנסת גם ב-x^{m+1} וכן הלאה, נקבל תת סדרה $\{f^{k_\beta}\}_{\beta=1}^{\infty}$ (האינדקסים הם האינדקסים של האלכסון) כך ש-$f^{k_\beta}(x^p)\to f(x^p)$ מתכנסת לכל $x^p\in\Lambda$. (כי לכל p יש זנב סדרה שהוא ת"ס של סדרה שמתכנסת ב-x^p).

ג) יהי l טבעי. נסתכל ב-$\{x^{l,1},\dots,x^{l,s_l}\}\subseteq\Lambda$. נמצא אינדקס B כך שאם $\beta>B$ אז $|f^{k_\beta}(x^{l,j})-f(x^{l,j})|<\frac{1}{l}$ לכל $1\le j\le s_l$. אם $x\in K$ אז $x\in B(x^{l,j},\delta_l)$ עבור איזה $1\le j\le s_l$ (כי זה כיסוי). וכן מ-(*) נובע ש-$|f^{k_\beta}(x)-f^{k_\beta}(x^{l,j})|<\frac{1}{l}$. אם בנוסף $\beta_1>\beta_2>B$ אז $|f^{k_{\beta_1}}(x^{l,j})-f^{k_{\beta_2}}(x^{l,j})|<\frac{2}{l}$ וכן לכל $\beta_1>\beta_2>B$ מתקיים $|f^{k_{\beta_1}}(x)-f^{k_{\beta_2}}(x)|<\frac{4}{l}$ וזה לכל $x\in K$.

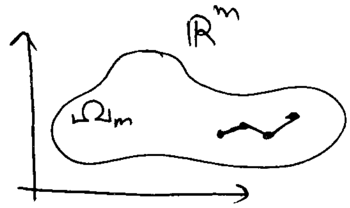
ד) מכאן שמצאנו שלכל l טבעי קיים אינדקס B כך שאם $\beta_1>\beta_2>B$ אז $\|f^{k_{\beta_1}}-f^{k_{\beta_2}}\|\le\frac{4}{l}$, אז $\{f^{k_\beta}\}$ סדרת קושי ב-$C(K,\mathbb{R}^m)$ ולכן מתכנסת לגבול ב-$C(K,\mathbb{R}^m)$!

④ 19.5.2008

מד"ר

נאלצו לדבר אי-מילים למתניה בעברית!

משוואה דיפרנציאלית היא אוסף של הוראות כיוון למסלול. בכל רגע אינפיניטסימלי יש לנו כיוון והמסלול שנוצר הוא פיתרון של המשוואה.



<u>הגדרה</u>: יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום פתוח כאשר $n = m+1$ ($1 \le m$). $f(t,x) \in C(D, \mathbb{R}^m)$ כאשר $(t,x) \in D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ משוואה דיפרנציאלית היא משוואה עבור פונקציה נעלמת $y \in C(I, \mathbb{R}^m)$ המקיימת (*) $y'(t) = f(t, y(t))$. ההנחה ש- $y(t)$ היא רציפה ש- $(t, y(t)) \in D$ לכל $t \in I$ כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח.

הסבר: $y(t)$ האמיתית ב- $\mathbb{R}^m$! - f נותנת את הנגזרת של ה- פונקציה המשיק בכל זמן t בהתאם לערך $y(t)$. אז אם אנחנו יודעים את $y(t)$ בזמן t כלשהו יודעים את השיפוע שם אז יודעים סביבה קטנה וכך אפשר להתקדם ולקבל את כל המסילה

<u>בעיית התחלה</u>: למצוא פונקציה $y(t)$ רציפה שמקיימת את המשוואה וכך ש- $y(t_0) = y_0$ כאשר $D \ni (t_0, y_0)$ נתונה.

<u>משפט</u>: בתנאי <u>ההגדרה</u>, תהי $(t_0, y_0) \in D$ ויהיו $\eta, \alpha > 0$ מספרים כך ש- $\Gamma = [t_0-\eta, t_0+\eta] \times \overline{B(y_0, \alpha)}$ קבוצה סגורה קומפקטית מוכלת ב- D. נניח ש- $M\eta < \alpha$ כאשר $M = \max\limits_{\Gamma} |f|$ אזי קיים פיתרון $y(t)$ ל-(*) $y'(t) = f(t, y(t))$ כך ש-

(i) $y(t) = C^1(I, \mathbb{R}^m)$ (כאשר $I = (t_0-\eta, t_0+\eta)$)

(ii) $y(t) \in B(y_0, \alpha)$ לכל $t \in I$

(iii) $y(t_0) = y_0$

<u>הערה</u>: לכאורה יש כאן תנאי מעגלי כי M תלוי ב- η. אבל תמיד אפשר להגדיר את η מספיק כך שהאי שוויון יתקיים – הרי ככל שהתחום קטן המקסימום יכול רק לקטון. אז אחרי ניתוח

התחלתי ש- η. אפשר להקטין אותו רק שיתקיים הדרוש.

<u>הוכחה</u>: למספר טבעי $k\ge 2$ נחלק את הקטע $\bar I=[t_0-\eta,t_0+\eta]$

ל- $2k$ קטעים שווים $t_j^k=t_0+j\cdot\frac{\eta}{k}$, $j=-k,\dots,0,\dots,k$.

ונגדיר $z^{k,0}=y_0$ ו- $z^{k,j+1}=z^{k,j}+f(t_j^k,z^{k,j})\cdot\frac{\eta}{k}$

עבור $j=0,\dots,k-1$ ובאופן אנלוגי ל- $j=-k+1,\dots,-1$.

נשים לב ש- $|z^{k,j+1}-z^{k,j}|=|f(t_j^k,z^{k,j})|\frac{\eta}{k}\le M\cdot\frac{\eta}{k}$

וניתן באינדוקציה ש- $f(t_j^k,z^{k,j})$ מוגדר וב- Γ

לכן לפי אי שוויון המשולש $|z^{k,j}-y_0|\le M\cdot\frac{\eta}{k}\cdot j\le M\eta<\alpha$ וקיבלנו

שבכל התהליך לא יצאנו מהמלבן.

נגדיר פונקציה רציפה $y^k(t)$ ע"י

$y^k(t)=$ פונקציה לינארית ב- t לכל $t\in[t_j^k,t_{j+1}^k]$ וכך ש- $y^k(t_j^k)=z^{k,j}$, $y^k(t_{j+1}^k)=z^{k,j+1}$

ל- $j=0,\dots,k-1$ ואותו דבר ל- $j=-k+1,\dots,-1$.

תרגיל: לרשום באופן מפורש.

(זאת פשוט פונקציה פוליגונלית עם קדקדים ב- $z^{k,j}$).

סדרת הפונקציות המתקבלת $\{y^k(t)\}_{k=2}^{\infty}$ עבור $t\in\bar I$

חסומה במ"ש ($|y^k(t)-y_0|\le\alpha$ ל- $k=2,3,\dots$ ו- $t\in I$).

נטען גם שזו סדרה רציפה במידה אחידה על $\bar I$. וזה היות שיש להן קבוע ליפשיץ משותף M: אם ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ אז אם $|t-s|<\delta$

$$|y^k(t)-y^k(s)|\le M|t-s|<\varepsilon$$

לפי משפט Arzela-Ascoli קיימת תת סדרה $\{y^{k_\ell}\}$ שמתכנסת במידה שווה על I לפונקציה $y(t)$

רק ש- $y\in C(\bar I,\mathbb R^m)$ וגם בעלת $y(t)\in\overline{B(y_0,\alpha)}$ לכל k, $y^k(t_0)=y_0$ אז גם $y(t_0)=y_0$.

$f(t,x)$ רציפה במ"ש על Γ. לכן בהינתן $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|\xi^1-\xi^2|<\delta$ אז $|f(\xi^1)-f(\xi^2)|<\varepsilon$ כאשר $\xi^1,\xi^2\in\Gamma$. יהי $t\in[t_j^k,t_{j+1}^k]$. אז $y^k(t)=y^k(t_j^k)+\int_{t_j^k}^{t}f(t_j^k,y^k(t_j^k))ds$

נניח ש- k מספיק גדול כך ש- $(\frac{\eta}{k})^2+|z^{k,j+1}-z^{k,j}|<\delta^2$ עבור $j=-k,\dots,k$. לכן

$|y^k(t)-(y^k(t_j^k)+\int_{t_j^k}^{t}f(s,y^k(s))ds)|<\varepsilon\frac{\eta}{k}$ כאשר $t_j^k\le t\le t_{j+1}^k$

לכן $|y^k(t)-(y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y^k(s))ds)|\le\varepsilon\eta$ ל- $t\in\bar I=[t_0-\eta,t_0+\eta]$. ניקח את ת"ס

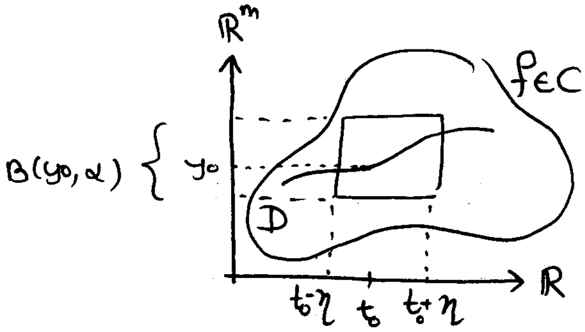
$\{k_j\}$ ונשאיף $j\to\infty$ ונקבל $|y(t)-(y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds)|\le\varepsilon\eta$ וזה לכל $\varepsilon>0$ אז

$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds \Rightarrow$ $C(\bar I,\mathbb R^m)$; $y(t)\in\overline{B(y_0,\alpha)}$ ו- $y'(t)=f(t,y(t))$ לכל $t\in I$.
(לפי המשפט היסודי) ☺

5

21.05.08

מפ"ר



עניננו במשוואות דיפרנציאליות.

ראינו שבתנאים מסויימים אפשר להבטיח קיים פתרון למשוואה הדיפרנציאלית

$$(*)\quad y'(t)=f(t,y(t)),\ y(t_0)=y_0$$

יתר מזה, אמרנו שפתרון הוא

$$(**)\quad y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))\,ds$$

<u>מסקנה</u>: $(*)$ ו- $(**)$ ניסוחים שקולים.

<u>הוכחה</u>: ברור ש- $(**)\Rightarrow(*)$ לפי המשפט היסודי.

מאידך, נניח שיש פונקציה $y(t)$ שמקיימת את $(*)$. $\Leftarrow$ $y'(t)$ רציפה. נעשה אינטגרציה ונקבל $y(t)-y_0=\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds$

אם בעניין היחידות? נניח ש- $f:D\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות. בפרט $D_yf(t,y):D\to\mathbb{R}^m$ רציפה, כלומר $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right\}_{1\le i,j\le m}$ רציפות ב- D.

<u>טענה</u>: נניח שתי פונקציות $y^1(t),y^2(t)$ מקיימות את $(**)$. אזי אם $f\in C^1$ אז $y^1\equiv y^2$.

<u>הוכחה</u>: מתקיים לפי ההנחה

$$y^1(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y^1(s))ds$$
$$y^2(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y^2(s))ds$$

$$\Leftarrow\quad y^1(t)-y^2(t)=\int_{t_0}^{t}\left[f(s,y^1(s))-f(s,y^2(s))\right]ds$$

נתבונן בנורמה האופרטורית $N=\max_{(t,y)\in\Gamma}\|D_yf(t,y)\|<\infty$. כעת

$$|y^1(t)-y^2(t)|\le\int_{t_0}^{t}|f(s,y^1(s))-f(s,y^2(s))|\,ds\le$$
$$\le\int_{t_0}^{t}N|y^1(s)-y^2(s)|\,ds$$

ניקח $0<\tilde\eta<\eta$ כך ש- $N\tilde\eta<1$. נסתכל בקטע הסגור $\tilde I=[t_0,t_0+\tilde\eta]$ ב $\tilde I$ נתבונן בנורמה ב $C(\tilde I,\mathbb{R}^m)$:

$$\|y^1-y^2\|\le\int_{t_0}^{t}N\cdot ds\,\|y^1-y^2\|\le N\tilde\eta\,\|y^1-y^2\|\underset{\|y^1-y^2\|=0\ \text{אלא אם}}{<}\|y^1-y^2\|$$

לכן ב- $[t_0, t_0+\tilde{\eta}]$, $y_1 \equiv y_2$, אבל עכשיו אפשר ללכת ל-
$t_0+\tilde{\eta}+\tilde{\eta}$ ושם מתקיים אותו הדבר וסיימנו. (הערה: נניח שאפשר להמשיך
עם אותו $\tilde{\eta}$ ולכן אחרי זמן סופי נכסה את I). (11)

<u>מסקנה</u>: אם נסתכל במרחב $C(\bar{\bar{I}}, \mathbb{R}^m)$ ונסתכל בו על הקבוצה
הסגורה X של פונקציות $z(t)$ המקיימות $|z(t)| \le \alpha$
(כלומר $X = C(\bar{\bar{I}}, \overline{B(y_0,\alpha)})$) (חשבו למה היא סגורה!) אז
ההעתקה $(Tz)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,ds \in \mathbb{R}^m$ מקיימת
$$\|Tz^1 - Tz^2\| \le N\tilde{\eta}\,\|z^1 - z^2\| \qquad (N\tilde{\eta} < 1)$$
כלומר מצאנו העתקה $T: X \to X$ וקבוע $C = N\tilde{\eta} < 1$ כך ש-
$$\|Tz^1 - Tz^2\| \le C\|z^1 - z^2\|$$
כלומר, T העתקה מכווצת.

<u>דוגמאות</u>: $m=1$ $y' = f(t,y)$
$y(t_0) = y_0$
$y(t)$ פונקציה סקלרית

(12) $y' = y^2$ $y(t_0) = y_0$
כאן $f(t,y) = y^2$, כלומר f לא תלויה ב-t ורציפה
וגזירה לכן הכל. נבדוק מספיק רק שיתקיימו התנאים
של המשפט

$$\frac{dy}{y^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = t - t_0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} - (t - t_0)$$
$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - (t - t_0)}$$

אבל $\frac{1}{y_0} - \eta = 0$

חייבים להגביל רק $0 < \eta < \frac{1}{y_0}$

(6) 26.05.08
מד"ר

דוגמאות 8

① $y' = \sqrt{y}$ בודאי - מחפשים פתרונות רק ש- $y(t) \ge 0$

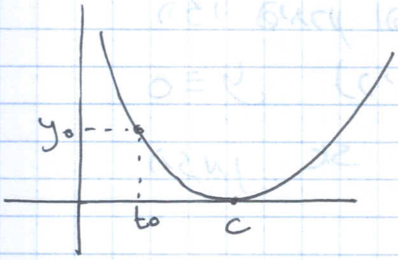
אז נרשום $\frac{dy}{\sqrt{y}} = dt$

אינטגרציה $\Rightarrow 2\sqrt{y} = t - C$

מה הולך כאן? אם $y \neq 0$ אנחנו מחפשים פונקציה y שמקיימת $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1$. בשימוש בכלל השרשרת יש לנו $\frac{d}{dt}(2\sqrt{y}) = 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{y} = t - C \Rightarrow y = \left(\frac{t-C}{2}\right)^2$

למרות שהנחנו ש- $y \neq 0$ הפתרון הנ"ל מקיים את המשוואה גם ב- $t = C$ איפה ש- $y = 0$.



(i) הבחנה: אם הפיתרון עובר דרך $(t_0, y_0) \neq (C, 0)$ (כאשר C הוא כזה ש- $y_0 = \left(\frac{t_0 - C}{2}\right)^2$) אזי הפיתרון יחיד בסביבה (לפי משפט משבוע שעבר). ב- $t_0 = C$ הטיעון הנ"ל לא עובד כי שם $f(t,y) = \sqrt{y}$ לא גזירה ברציפות.

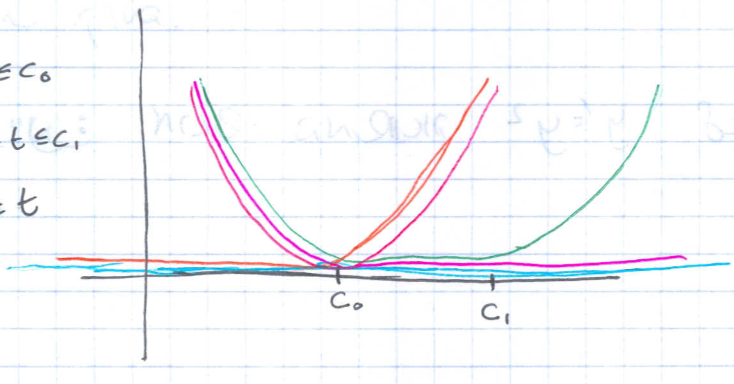
(ii) נתבונן ב- $y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-C}{2}\right)^2 & t \le C \\ 0 & t \ge C \end{cases}$. $y \in C^1(\mathbb{R})$, הוא אי-שלילית ומקיימת את המשוואה.

זה גם פיתרון של המשוואה והוא יכול להיות טוב למודלים שונים - למשל דעיכה של חומר או אוכלוסי"ה.

למעשה, יש מלא פיתרונות למשוואה:

למשל, לכל $c_0 \le c_1$

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-c_0}{2}\right)^2 & t \le c_0 \\ 0 & c_0 \le t \le c_1 \\ \left(\frac{t-c_1}{2}\right)^2 & c_1 \le t \end{cases}$$



הערה: בדיון הנ"ל התקיים תחת ההנחה ש- $\sqrt{y}$ התכוונו לשורש החיובי או השלילי. אפשר גם להתבונן במשוואה $(y')^2 = y$ או $y' = \pm\sqrt{y}$ ולבחור את הסימן לפי הסימן של y'. כל עוד לא נקבע הסימן, הפיתרון לא באמת יחיד כי יש פיתרון יחיד ל- $y' = +\sqrt{y}$ ופיתרון יחיד ל- $y' = -\sqrt{y}$.

(2) $y' = y^2$.

$$\frac{dy}{y^2} = dt$$

$$\text{אינטגרציה} \Rightarrow -\frac{1}{y} = t - C$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{C-t}$$

נניח שנתון $y(t_0) = 0$. לפי המשפטים יש לבעיית ההתחלה הזו פיתרון והוא יחיד. אז בסביבה של t_0 חייב להיות $y \equiv 0$ (כי זה בוודאי פיתרון) אבל אז נתקעים עם 0 כל הזמן. אז $y(t) = 0$ לכל t.

נניח ש- $y(t_0) = y_0 \neq 0$ ונחפש C. זה יהיה הפיתרון כי הפיתרון יחיד!

$$y_0 = \frac{1}{C - t_0} \Rightarrow C - t_0 = \frac{1}{y_0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{y_0} + t_0$$

$$\Leftarrow \quad y(t) = \frac{1}{(t_0 - t) + \frac{1}{y_0}}$$ זה הפיתרון היחיד שמקיים את בעיית ההתחלה.

נניח $0 < y_0$. מה קורה כאשר $t \uparrow t_0 + \frac{1}{y_0}$. אז $y(t) \uparrow +\infty$. זה לא סותר את המשפט כי במשפט עוסקים במלבן (דנידר במקרה הפרטי) ראינו האסימפטוטה ב- $t_0 + \frac{1}{y_0}$ רק מגבילה את גודל המלבנים אבל לא סותרת את קיומם.

נקודה מעניינת: מראש, במשוואה $y' = y^2$ לא היינו לצפות שיהיו בעיות...

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב- D

אם לכל $K \subset\subset D$ (K קומפקטית ב- D) קיים קבוע

$L_K > 0$ כך שאם $(t,\xi^1), (t,\xi^2) \in K$ אז

$$|f(t,\xi^1) - f(t,\xi^2)| \le L_K |\xi^1 - \xi^2|$$

ידוע שאם $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ אז f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי.
(מקסימום הגרדיאנט מבטא את מקסימום השינוי הלינארי)

נחזור לבעיית ההתחלה שלנו $y(t_0) = y_0$ ותחום בצילינדר
הסטאר $I = (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$, $\Gamma = \bar{I} \times B(y_0, \alpha)$

ניקח $\varphi \in C(\bar{I}, \mathbb{R}^m)$ כך ש- $|\varphi(t) - y_0| \le \alpha$ ונגדיר

$$\mathcal{G}\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

זה אינטגרל לגיטימי כי $(s, \varphi(s)) \in \bar{I} \times B(y_0,\alpha)$, כלומר הוא בצילינדר. לכן f מוגדרת ורציפה שם, אפשר לעשות אינטגרציה.

נסמן $M = \max_{\Gamma} |f|$. אז

$$|\mathcal{G}\varphi(t) - y_0| \le \int_{t_0}^{t} M\, ds = M(t - t_0)$$

$$\Rightarrow t \in \bar{I} \Rightarrow |\mathcal{G}\varphi(t) - y_0| \le \alpha$$

$$M\eta < \alpha$$

לכן $\mathcal{G}\varphi \in C(\bar{I}, \mathbb{R}^m)$; $|\mathcal{G}\varphi(t) - y_0| \le \alpha$.

נסמן ב- Ψ את קבוצת הפונקציות $\varphi \in C(\bar{I}, \mathbb{R}^m)$ כך ש- $|\varphi(t) - y_0| \le \alpha$. אז $\mathcal{G} : \Psi \to \Psi$ ו- $\mathcal{G}\varphi(t_0) = y_0$.

$$|\mathcal{G}\varphi(t) - \mathcal{G}\psi(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \big(f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\big)\, ds\right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))|\, ds \le L_\Gamma \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds \le$$

אם f ליפשיץ מקומי

$$\le L_\Gamma \underbrace{\|\varphi - \psi\|}_{} \cdot |t - t_0|$$

$$\|\varphi\| = \max_{\tau \in \bar{I}} |\varphi(\tau)|$$

לכן $|\mathcal{G}^2\varphi(t)-\mathcal{G}^2\psi(t)| \le L_r \int_{t_0}^{t} |\mathcal{G}\varphi(s)-\mathcal{G}\psi(s)|\,ds \le$

$$\le L_r\int_{t_0}^{t} L_r\|\varphi-\psi\|\cdot|s-t_0|\,ds \le L_r^2\|\varphi-\psi\|\cdot\frac{1}{2}(t-t_0)^2$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{G}^2\varphi-\mathcal{G}^2\psi\| \le \frac{1}{2}L_r^2\eta^2\|\varphi-\psi\|$$

באינדוקציה $\|\mathcal{G}^p\varphi-\mathcal{G}^p\psi\| \le \frac{1}{p!}L_r^p\eta^p\|\varphi-\psi\|$

עבור $p>>1$ אינדקס גבוה, יתקיים $\|\mathcal{G}^p\varphi-\mathcal{G}^p\psi\| \le \lambda\|\varphi-\psi\|$

עבור $\lambda<1$.

<u>הגדרה:</u> העתקה $\mathcal{G}^p:\Psi\to\Psi$ כזאת נקראת העתקה מכווצת.

<u>הערה:</u> $\Psi\subseteq C(I,\mathbb{R}^m)$ היא קבוצה סגורה.

<u>משפט ההעתקה המכווצת:</u> אם $A:\Psi\to\Psi$ העתקה מכווצת אזי קיימת לה בדיוק נקודת שבת אחת, כלומר נקודה $\theta\in\Psi$ כך ש- $A\theta=\theta$.

למה אחת בלבד? אם $A\theta_1=A\theta_2$ אז

$$\|\theta_2-\theta_1\| = \|A\theta_2-A\theta_2\| \le \lambda\|\theta_2-\theta_1\|$$

ואלא אם $\theta_1=\theta_2$ יש סתירה

את הקיום נוכיח אחר.

לכן, זה העתקה $\mathcal{G}^p:\Psi\to\Psi$ קיימת בדיוק נקודה אחת $z\in\Psi$ כך ש- $\mathcal{G}^pz=z$. נסמן ב- $y=\frac{1}{p}(z+\mathcal{G}z+\dots+\mathcal{G}^{p-1}z)$. היות ש- $z=\mathcal{G}^pz$ נובע ש- $z(t_0)=y_0$. לכן $y(t_0)=y_0$.

כמו כן, $|y(t_0)-y_0| \le \frac{1}{p}|(z(t)-y_0)+(\mathcal{G}z(t)-y_0)+\dots+(\mathcal{G}^{p-1}z(t)-y_0)| \le \frac{1}{p}\cdot p\alpha = \alpha$

$\Rightarrow y\in\Psi$. כעת קיבלנו נקודת שבת: $\mathcal{G}y=\frac{1}{p}(\mathcal{G}z+\dots+\mathcal{G}^pz)=y$

מצד שני, $\mathcal{G}y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds = y(t)$

אז מצאנו פתרון.

⑧ 28.05.08

אבי"ר

תזכורת:

$$Y=\{\varphi: C(\bar{I},\mathbb{R}^m) : |\varphi(t)-y_0|\le\alpha\}$$

$$\mathcal{G}\varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds$$

ראינו שהעתקה $\mathcal{G}^P$ היא מכווצת

אמרנו שבמקרה זה יש נקודת שבת יחידה. הוכחנו את היחידות.

נסתכל ב- $y=\mathcal{G}z\in Y$. אז

$$\mathcal{G}^P y=\mathcal{G}^P(\mathcal{G}z)=\mathcal{G}(\mathcal{G}^P z)=\mathcal{G}z=y$$

$\Leftarrow$ y נקודת שבת. אבל יש רק אחת. לכן $z=y$. $\Leftarrow$

$y=\mathcal{G}y$. $\Leftarrow$ $y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$

לכן פתרון המשוואה היא $y=\mathcal{G}y$ ואם פתרון אחר יקיים $u=\mathcal{G}u$. אז אז $u=\mathcal{G}^P u$, $y=\mathcal{G}^P y$

$$\Rightarrow\quad y-u=\mathcal{G}^P y-\mathcal{G}^P u$$

$$\Rightarrow\quad |y-u|\le\lambda|y-u| \quad\Leftrightarrow\quad y-u\equiv 0$$

במילים אחרות, הוכחנו את יחידות הפתרון בשימוש רק בתנאי ליפשיץ מקומי.

ניקח עכשיו איזשהו $u\in Y$. אז

$$\mathcal{G}^{P+1}u-y=\mathcal{G}^{P+1}u-\mathcal{G}^{P+1}y=\mathcal{G}^P(\mathcal{G}u)-\mathcal{G}^P(\mathcal{G}y)$$

$$\Rightarrow\quad |\mathcal{G}^{P+1}u-y|\le\lambda|\mathcal{G}u-y|$$

$$\Rightarrow\quad |\mathcal{G}^{P+2}u-y|\le\lambda|\mathcal{G}^2u-y|$$

וכן הלאה...

המרחק של הקבוצה $(u,\mathcal{G}u,\dots,\mathcal{G}^P u)$ מ- y קטן מפקטור λ אחרי הפעלה של $\mathcal{G}^P$.

המסקנה: לכל $u\in Y$ הסדרה $\{\mathcal{G}^k u\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- y.

נבחר $u_0\in Y$ ונתבונן בסדרה

המסקנה הלאה נקראת successive approximation

$$u_1=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,u_0(s))\,ds$$

$$u_{k+1}=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,u_k(s))\,ds$$

אז $u_k\longrightarrow y$.

משפט נקודת השבת של בנך / משפט ההעתקה המכווצת

תהי X קבוצה סגורה ב- $C(\bar{I}, \mathbb{R}^m)$. תהי $H: X \to X$ העתקה מכווצת, כלומר $\|H\varphi - H\psi\| \le \lambda \|\varphi - \psi\|$ $\quad \lambda < 1$ לכל $\varphi, \psi \in X$. אז קיימת בדיוק נקודה אחת $\bar{x} \in X$ רק ש- $H\bar{x} = \bar{x}$.

הוכחה: תהי $u \in X$ ונתבונן בסדרה $\{H^j u\}_{j=1}^{\infty}$ אז

$$\|H^2 u - Hu\| \le \lambda \|Hu - u\| = \lambda \beta$$
$$\|H^3 u - H^2 u\| \le \lambda \|H^2 u - Hu\| \le \lambda^2 \beta$$
$$\|H^4 u - H^3 u\| \le \lambda \|H^3 u - H^2 u\| \le \lambda^3 \beta$$
$$\vdots$$
$$\|H^{k+1} u - H^k u\| \le \|H^k u - H^{k-1} u\| \le \lambda^k \beta$$

$$\Rightarrow \|H^k u - H^j u\| \le \beta \sum_{\ell=j}^{k} \lambda^{\ell} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$$

לכן $\{H^k u\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ולכן מתכנסת. וכיוון ש-X סגורה $H^{k+1} u \to v \in X \Leftarrow H^k u \to v \in X$.

אבל H רציפה ולכן $v \leftarrow H^{k+1} u = H(H^k u) \to Hv$

$\Leftarrow$ $Hv = v$ $\Leftarrow$ v נקודת שבת.

לו הייתה עוד נקודת שבת $Hw = w$ אז

$$\|v - w\| = \|Hv - Hw\| \le \lambda \|v - w\|$$

$\Leftarrow$ $\|v - w\| = 0$ $\Leftarrow$ $v = w$.

11

טענה: קיים אינטרוול $I^{max} = (t_{min}, t_{max})$ כך שהפיתרון $y(t_0) = y_0$, $y(t)$ קיים ויחיד עבור $t \in I^{max}$ (מפני $(t, y(t)) \in D$ אם $t \in I^{max}$). אם $y(t)$ פיתרון על קטע J המכיל את t_0, וכך ש $y(t_0) = y_0$, אזי $J \subseteq I^{max}$

⑨ 4/6/08
מד"ר

~חזרה על החומר מהשיעור הקודם~

התחלנו לדבר על תחום הקיום המקסימלי של הפתרון.

משפט: נתונה בעיית ההתחלה $y'=f(t,y)$ (ליפשיצית מקומית) $y(t_0)=y_0$ (*). אז קיים קטע פתוח $I^{max}\subseteq\mathbb{R}$ ופתרון $y(t)$ רק ש- $t_0\in I^{max}$ ורק שאם z פתרון של (*) על קטע $t_0\in J\subseteq\mathbb{R}$ אז $J\subseteq I^{max}$.
ובפרט כל פתרון אחר של (*) הוא צמצום של $y(t)$.

הוכחה: נתבונן באוסף Φ של קטעים $J\subseteq\mathbb{R}$ (גם סגורים) הכוללים את t_0 רק שהפתרון קיים על J. בוודאי $\Phi\neq\emptyset$ (ממשפט הקיום הלוקאלי)
נסתכל באיחוד $\bigcup_{J\in\Phi}J\subseteq\mathbb{R}$. זהו קטע (שכולל) את t_0. נסמנו ב- I^{max}
את הפתרון המבוקש $y(t)$ נגדיר כמתלכד עם הפתרון על $J\in\Phi$, לכל J. בגלל היחידות זה מוגדר היטב. (כי אם יש J-ים שנחתכים הפתרון מתלכד על החיתוך)
נניח $I^{max}=[(t_{min},t_{max})]$ (רבוע/הסוגריים שמשמעם או פתוח או סגור).
נניח $t_{max}<\infty$ וש- $y(t)$ ניתן להמשכה רציפה ל- t_{max}, כלומר קיימת נקודה $(t_{max},\bar{y})\in D$ רק ש- $(t,y(t))\xrightarrow[t\to t_{max}]{}(t_{max},\bar{y})$
אבל אז ניתן לפתור את (*) בצילינדר סביב $(t_{max},\bar{y})$ ונקבל סתירה למקסימליות I^{max}. באותו אופן מראים שצד שמאל פתוח.
במילים אחרות, הפתרון $y(t)$ יוצא מכל קבוצה קומפקטית $K\subseteq D$ כאשר $t\to t_{max}$. אחרת, הייתה סדרת נקודות $t_j\uparrow t_{max}$ רק ש- $(t_j,y(t_j))\in K$ ואז אותו טיעון כמו קודם מוביל לסתירה.
☺

משפט התלות הרציפה: נסתכל בבעיית ההתחלה (IVP) $(y^j)'=f^j(t,y^j)$ $y^j(t_j)=x^j$ כאשר $x^j\xrightarrow[t_j\to t_0]{}y_0$ ונתבונן בבעיה $y'=f(t,y)$ $y_0=y(t_0)$
נניח ש- $f^j\to f$ במ"ש על כל קבוצה קומפקטית $K\subseteq D$. נסמן ב- $I^{j,max}$ את הקטע המקסימלי של הקיום של y^j. אזי לכל קטע סגור $[p,q]\subseteq I^{max}$ $[p,q]\subseteq I^{j,max}$ עבור j מספיק גדול. כמו כן, $y^j(t)\to y(t)$ במ"ש על $[p,q]$.

(10) 11.06.08

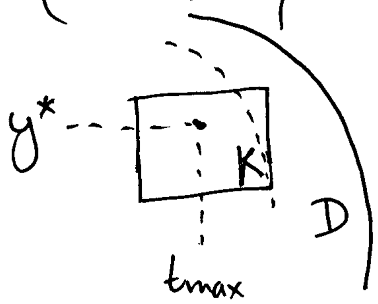
מד"ר

<u>משפט האינטרוול המקסימלי</u> - אנחנו יודעים שיש פיתרון יחיד על הקטע המקסימלי $I^{max}=(t_{min},t_{max})$; $y(t_0)=y_0$ $\quad t_0\in I^{max}$

<u>טענה</u>: נניח ש- $t_{max}<\infty$ ותהי $K\subseteq D$ קומפקטית. אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שאם $t>t_{max}-\varepsilon$ אז $(t,y(t))\in D\setminus K$ (כלומר המסלול יוצא מכל קבוצה קומפקטית)

<u>הוכחה</u>: נניח שלא. כלומר, קיימת תת סדרה $t_j\uparrow t_{max}$ כך ש- $(t_j,y(t_j))\in K$. אז, בה"כ, $(t_j,y(t_j))\to(t_{max},y^*)\in K$ (לכ

אך בה"כ כי אפשר להסתכל על תת סדרה שמקיימת זאת)



<u>קיים לכן</u> צילינדר קיום מקומי למשוואה

$\Gamma_{max}=[t_{max}-2\eta,t_{max}+2\eta]\times B(y^*,\alpha)$ כך ש-

$M2\eta<\alpha$; $K\subseteq U$ כאשר

U פתוחה ; $M=\max_{U}|f(t,y)|$

<u>לכן, עבור</u> j מספיק גדול, צילינדר הקיום $\Gamma_j=[t_j-\eta,t_j+\eta]\times B(y(t_j),\frac{\alpha}{2})$ יהיה מוכל ב- Γ_{max}.

אבל אז, כיוון ש- $t_j\to t_{max}$, עבור j מספיק גדול נקבל ש- $t_j+\eta>t_{max}$. הפיתרון $\tilde{y}(t)$ כך ש- $\tilde{y}(t_j)=y(t_j)$. $\tilde{y}$ הוא המשכה של y המגיעה אל מעבר ל- t_{max} וזו סתירה.

<u>משפט התלות הרציפה</u>: $f^j(t,y)\longrightarrow f(t,y)$ במ"ש על K קומפקט $K\subset D$. f_j תנאי ליפשיץ מקומי (קבוע שתלוי ב- j). מתקיים $(y^j)'=f^j(t,y^j)$; $y^j(t_j)=x^j$; $t_j\to t_0$; $x^j\to y_0$.

אם $t_0\in[p,q]\subseteq I^{max}$ אז שם $y^j\longrightarrow y$ במ"ש

בפרט, I_j^{max} (האינטרוול המקסימלי של y^j) מכיל את $[p,q]$ עבור j מספיק גדול.

<u>הוכחה</u>:

(1) בה"כ $\{t_0,t_j\}\subseteq[p,q]$ (במקרה אחר אפשר להרחיב את $[p,q]$ ונקבל את הנדרש)

(2) הקבוצה $\{(t,y(t)):t\in[p,q]\}$ קומפקטית כי היא תמונה של פונקציה

רציפה על קטע קומפקטי.

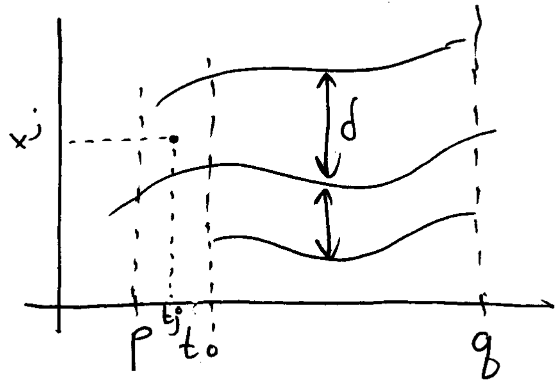
(2) $K=\{(t,x) : t\in[p,q],\ |x-y(t)|\le\delta\}$ קומפקטית. יתר נכון, קיים δ כך שהיא קומפקטית.

(3) יש $U\supseteq K$ פתוחה כך ש- $\bar{U}\subseteq D$ קומפקטית. ניקח $M=\max_j \max_{\bar{U}} |f^j(t,y)|$ (יש מקסימום כי ההתכנסות היא במ"ש על קומפקט). יהיו $0<\eta,\alpha$ כך ש- $M\eta<\alpha<\frac{1}{6}\delta$

נסתכל בצילינדר קיים $\Gamma_j=[t_j-\eta,t_j+\eta]\times B(x^j,\alpha)$

מתקיים $|y^j(t_0)-y(t_0)|\le\frac{\delta}{2}$; $|y^j(t_0)-x^j|\le M|t_j-t_0|$

(11) 16.06.08
מד"ר



$$K=\{(t,x): t\in[p,q], |x-y(t)|\le\delta\}$$

$y^j(t_j)=x^j$, $(y^j)'=f^j(t,y^j(t))$ $f^j\to f$

רוצים להראות שהמסלול של y^j (כלומר הגרף $t\mapsto y^j(t), y^j(t_j)=x^j$)

מתכנס במ"ש לגרף של $y(t), y(t_0)=y_0$ כאשר $j\to\infty$

מהנחה $(t_j,x^j)\to(t_0,y_0)$.

נניח את הדברים הבאים:

א $|y^j(t_0)-y_0|<\frac{\delta}{6}$ $y^j(t_j)=x^j$

ב קיים $t_0<\tau<q$ וכן, שלכל j

$$|y^j(\tau,t_j,x^j)-y(\tau,t_0,y_0)|\ge\delta/2$$

$$|y^j(t,t_j,x^j)-\underbrace{y(t,t_0,y_0)}|\le\delta \qquad t_0\le t\le\tau$$

סימון שאומר ש- $y(t_0)=y_0$.

אזי על הקטע $[t_0,\tau]$ מתקיים

(i) כל הפונקציות $y^j(t,t_j,x^j)$ חסומות במ"ש

(ii) מקטע הלה הן רציפות במידה אחידה (כי הנגזרת של

כולן חסומות $|(y^j)'|\le M$).

נשתמש ב- Arzela-Ascoli רק עבור ת"ס אבל נשמור

על האינדקס j ונקבל $y^j(t,t_j,x^j)\xrightarrow[\text{במ"ש}]{} z(t)$

עבור $t\in[t_0,\tau]$. כאשר $z(t_0)=y_0$

רואים ש- $y^j(t)=y^j(y_0)=\int_{t_0}^t f^j(s,y^j(s))\,ds$ $t_0\le t\le\tau$

$y^j(s)\to z(s)$ במ"ש. לכן $f^j(s,y^j(s))\to f(s,z(s))$ במ"ש

ולכן $z(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(s,z(s))\,ds$

ועכשיו סימנו כי זה מדויק אומר ש- $z'(t) = f(t, z(t))$
ב- $t_0 \le t \le \tau$ אבל מיחידות הפתרון בקטע הזה
מתקיים $z(t) \equiv y(t, t_0, y_0)$. אבל מצד שני (ב)

$$|z(\tau) - y(\tau, t_0, y_0)| \ge \frac{\delta}{2}$$

וזו סתירה. לכן אין כזה τ ולכן אין כזאת נקודה פריצה
כלומר לא יכולה להיות נקודה שבה כל הפתרון במרחק $\frac{\delta}{2}$.

מקרה פרטי: $f^j \equiv f$. אז המסקנה היא שהפתרון של
$y' = f(t,y)$ תלוי ברציפות בתנאי ההתחלה.

הערה: לכן $[p,q] \subseteq I^{j,max}_{t_j,x_j}$ אינטרוול הקיום המקסימלי
של $(y^j)' = f^j(t, y^j)$, $y^j(t_j) = x^j$ ל- j
מספיק גדול.

מערכות ליניאריות

$$(L) \qquad y' = A(t)\, y(t) + b(t)$$

כאשר $\begin{cases} A(t) \in Hom(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \\ b(t) \in \mathbb{R}^m \end{cases}$ רציפים על קטע $I = (\alpha, \beta)$

כלומר

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mm}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix}$$

$$y_j'(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{ji}(t) y_i(t) + b_j(t)$$

המשוואה כאן היא $y' = f(t,y)$ כאשר $f(t,y) = A(t)y + B(t)$
והתחום הוא $D = I \times \mathbb{R}^m$. $f(t,y)$ מקיימת תנאי
ליפשיץ מקומי: אם $[t_1, t_2] \subseteq (\alpha, \beta)$ אז לכל t

ש- $|f(t,\xi) - f(t,\theta)| \le L|\xi - \theta|$

כאשר $L = \max_{t\in[t_1,t_2]} \|A(t)\|$

והמקסימום קיים כי הנורמה האופרטורית של פונקציה רציפה היא פונקציה רציפה.

מסקנה: לבעיה (L) עם תנאי ההתחלה

(IV) $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m$

קיים פתרון יחיד באיזשהו קטע $(t_0-\theta, t_0+\eta) \subseteq I$ מקסימלי. למעשה, $I = (t_0-\theta, t_0+\eta)$.

הוכחה: $y' = A(t)y + b(t)$ (L) $y(t_0) = y_0$. ונניח ש- $t_0+\eta < \beta$, $\eta > 0$. נכפול סקלרית את (L) ב- $2y(t)$ ונקבל

$$2(y'(t), y(t)) = 2(A(t)y(t), y(t)) + 2(b(t), y(t))$$

$$\frac{d}{dt}\left(|y(t)|^2\right) \le 2\|A(t)\||y(t)|^2 + 2|b(t)||y(t)| \le$$

$$\le 2\|A(t)\|\|y(t)\|^2 + |b(t)|^2 + |y(t)|^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}|y(t)|^2 \le \gamma_1 |y(t)|^2 + \gamma_2$$

כאשר $\gamma_1 = \max_{t\in[t_0,t_0+\eta]} (2\|A(t)\|+1)$ $\gamma_2 = \max_{t\in[t_0,t_0+\eta]} |b^2(t)|$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\gamma_1 t}|y(t)|^2\right) \le \underbrace{\gamma_2 e^{-\gamma_1 t}}_{\text{חסום על } [t_0,t_0+\eta]}$$

$\Leftarrow$ $\frac{d}{dt}\left(e^{-\gamma_1 t}|y(t)|^2\right)$ חסום על $[t_0, t_0+\eta]$ ולכן $|y(t)|$ חסום על $[t_0, t_0+\eta)$. אבל הנחת המקסימליות של הקטע $(t_0-\theta, t_0+\eta)$ אומרת שאם $t_0+\eta < \beta$ אז $|y(t)| \xrightarrow[t\uparrow t_0+\eta]{} \infty$ וזאת סתירה לחסימות. לכן $t_0+\eta = \beta$. באופן דומה בצד השני $t_0-\theta = \alpha$.

המשוואה הלינארית הכללית מסדר m –

$$z^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+\dots+a_0(t)z(t)=r(t) \qquad (SCm)$$

כאשר $r(t),\ a_i(t)\in C(I)=C(\alpha,\beta)$ ומחפשים פונקציה $z\in C^m(I)$.

נגדיר $y(t)=\begin{pmatrix} z(t)\\ \vdots \\ z^{(m-1)}(t)\end{pmatrix}$ (וקטור באורך m)

$$y'(t)=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{m-1}(t)\end{pmatrix}}_{A(t)}\begin{pmatrix} z(t)\\ z'(t)\\ \vdots\\ z^{(m-1)}(t)\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\ r(t)\end{pmatrix}}_{b(t)}$$

<u>מסקנה</u>: $y(t)$ מקיים את (L). רציפות $A(t), b(t)$ נובעת מנתון הרציפות של $a_i(t), r(t)$.

להפך, נניח ש- $y(t)$ וקטור המקיים את (L) עם $A(t), b(t)$ הנ"ל אזי בפרט $y_2(t)=y_1'(t)$ וכן הלאה $y_{m-1}'(t)=y_m(t)$ כלומר אם $z(t)=y_1(t)$ אז $y_2(t)=z'(t),\dots,y_m(t)=z^{(m-1)}(t)$ ו-

$$y_m'(t)=z^{(m)}(t)=-a_0(t)z(t)-a_1(t)z'(t)-\dots-a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+r(t)$$

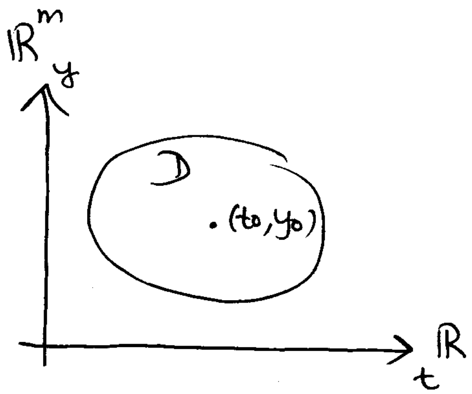
כלומר $z(t)=y_1(t)$ מקיים את (SCm).

אז תנאי ההתחלה הנתון כאן הוא $y(t_0)=y_0=\begin{pmatrix} z(t_0)\\ \vdots\\ z^{(m-1)}(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_0\\ \vdots\\ z_{m-1}\end{pmatrix}$

<u>משפט</u>: בהינתן תנאי ההתחלה $z(t_0)=z_0,\dots,z^{(m-1)}(t_0)=z_{m-1}$ ו- $t_0\in I$, ו- $z_0,\dots,z_{m-1}$ קבועים כלשהם, למשוואה SCm קיים פתרון יחיד $z(t)\in C^m(I)$ המוגדר בכל הקטע I.

(B) 18.6.08
מבר'

פתרונות לתרגילים - באתר של מתניה.



<u>תזכורת</u>:

D קבוצה פתוחה

$f(t,y) \in C(D,\mathbb{R}^m)$ רציפה.

$$y' = f(t,y)$$
$$y(t_0) = y_0$$

- משפט אוילר אומר שבסביבה מספיק קטנה של t_0 יש פתרון לבעיית ההתחלה.
- משפט פיקארד מדבר על יחידות: אם $f(t,y)$ ליפשיצית מקומית ב-y אז הפתרון הוא יחיד ב-D.
- משפט האינטרוול המקסימלי אומר שיש קטע פתוח $I^{max}_{t_0,y_0} = (t_{min}, t_{max})$ שבו יש פתרון יחיד ואם $t \nearrow t_{max}$ אז $y(t;t_0,y_0)$ "בורח" מכל קבוצה קומפקטית $K \subseteq D$ (במקרה ש-D חסומה זה אומר שהפונקציה בורחת לשפה) [זה בתנאים של משפט פיקארד].

<u>דוגמא</u>:
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$D = (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

אין כאן בכלל תלות ב-y אבל זה בוודאי ליפשיצי מקומית. פתרון הוא $y = \sqrt{t} + c$ וזו בדיוק דוגמא לזה שבקצה קטע הקיום הפתרון בורח לשפה (ולא לאינסוף!).

דיברנו על שני סוגי משוואות:

$$(L) \qquad y' = A(t)y + b(t)$$
$$(SC_m) \qquad z^{(m)} + a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t) + \dots + a_0(t)z(t) = r(t)$$

וראינו שכאן הכל טוב ויפה: איפה שהמקדמים קיימים גם הפתרון והוא יחיד.

נדבר כעת על משוואות הומוגניות

$$(LH) \qquad y' = A(t)\,y$$

$$(SCmH) \qquad z^{(m)} + a_{m-1}(t)\,z^{(m-1)}(t) + \dots + a_0(t)\,z(t) = 0$$

אנחנו רוצים להכניס פנימה פתרונות מרוכבים. אבל,
$A(t)$ תמיד ממשית!

נסתכל למשל במשוואה $x''(t) + x(t) = 0$ כאשר x סקלר.
קיים תמיד פתרון יחיד לכל $(x(t_0), x'(t_0))$ נתונים כאשר $t_0 \in \mathbb{R}$.

למשוואה הזאת יש לנו שני פתרונות: עבור $t_0 = 0$
$\sin t$ מתאים לתנאי התחלה $(0,1)$
$\cos t$ מתאים לתנאי התחלה $(1,0)$.

אבל אפשר גם לומר ש- e^{it} הוא פתרון כי

$$(e^{it})' = (\cos t + i\sin t)' = -\sin t + i\cos t$$

$$(e^{it})'' = (-\sin t + i\cos t)' = -\cos t - i\sin t = -e^{it}$$

$$\Rightarrow \quad (e^{it})'' + e^{it} = 0$$

באופן כללי, נניח ש- $y(t) \in \mathbb{C}^m$ פונקציה שרכיביה מרוכבים.
אז מגדירים

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\,y(t) + i\frac{d}{dt}\mathrm{Im}\,y(t)$$

לכן, לכל מספר מרוכב $\lambda \in \mathbb{C}$ (לינאריות!)

$$\frac{d}{dt}(\lambda y(t)) = \lambda \frac{d}{dt}y(t)$$

לכן, כאשר $y(t)$ (מרוכבת) תהיה פתרון של $y' = A(t)\,y$
אמ"מ $\mathrm{Re}\,y(t)$, $\mathrm{Im}\,y(t)$ הם פתרונות.
נוכיח, אם y פתרון אז

$$(\mathrm{Re}\,y(t))' = \mathrm{Re}(y'(t)) = \mathrm{Re}(A(t)y(t)) = A(t)\,\mathrm{Re}\,y(t)$$

$A(t)$ ממשית

אז אם נסמן $\xi(t) = \mathrm{Re}\,y(t)$ אז $\xi(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ ו- ξ פתרון.
באופן דומה מוכיחים את השאר.

נעיר רק שבמקרה שאם $y(t)$ פתרון (מרוכב) אזי גם $\lambda y(t)$ פתרון (מרוכב) כי

$$(\lambda y(t))' = \lambda y'(t) = \lambda A(t) y = A(t)(\lambda y(t))$$

<u>טענה:</u> אוסף הפתרונות של (LH) הם מרחב וקטורי ממימד m (ממד המטריצה A) מעל $\mathbb{C}$.

<u>הוכחה:</u> אם $y(t)$ פתרון אז $\lambda y(t)$ פתרון (ראינו).

אם y^1, y^2 פתרונות אז y^1+y^2 פתרון שכן

$$\begin{aligned}(y^1+y^2)' &= \left(Re(y^1+y_2) + i\, Im(y^1+y_2)\right)' = \\ &= Re(y^1+y_2)' + i\, Im(y^1+y_2)' = \\ &= Re(y^1)' + Re(y^2)' + i\left(Im(y^1)' + Im(y^2)'\right) = \\ &= (y^1)' + (y^2)' = Ay^1 + Ay^2 = A(y^1+y^2)\end{aligned}$$

אז זה אכן מרחב וקטורי שנסמנו $\mathcal{L}$.

נותר להוכיח ש- $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L} = m$. צריך להראות שקיימים בדיוק m וקטורים $y^1(t), \dots, y^m(t)$ כך ש-

(i) $\sum \lambda_i y^i(t) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

(ii) כל פתרון $y(t)$ מקיים $y(t) \equiv \sum \mu_i y^i(t)$

אז ניקח את y^i להיות הפתרון $y^i(t)$ רק ש-

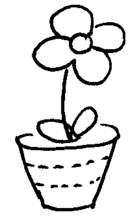
$$y^i(t_0) = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

אזי אם $\sum \lambda_i y^i(t) \equiv 0$ אזי קיים שוויון בנקודה שלנו $t_0 \in I$. אבל אז $\sum \lambda_i e^i = 0$ ומכיוון ש- $\{e^i\}$ בסיס נקבל $\lambda_i = 0$.

מצד שני, אם $y(t)$ הוא איזשהו פתרון אזי $y(t_0) = \sum \mu_i e^i$ כאשר $\mu_i = y(t_0)_i$ אבל אז $\tilde{y}(t) = \sum \mu_i y^i(t)$ פתרון של (LH) המסכים עם $y(t)$ ב- t_0. מהיחידות $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$ וזה מה שרצינו.

(15) 25.06.08
מד"ר

שיעור עם יורם לסט



הפוגה ללימוד פרקן נפרד

תזכורת קצרה על טורי חזקות:

* טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ כאשר $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$ ו-x משתנה ממשי.
הטור מתכנס בנקודה x אם קיים הגבול $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$.
הטור מתכנס בהחלט ב-x אם $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ מתכנס.
אם טור מתכנס בהחלט בנקודה אז הוא מתכנס שם.
* מבחן שימושי לקביעה אם טור מתכנס: אם $a_n \neq 0$ לכל n ו-
$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ אז הטור מתכנס בהחלט אם $l<1$ ומתבדר אם $l>1$. כאשר $l=1$ הקריטריון הזה לא נותן לנו כלום.
* אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מתכנס ב-$x=x_1$ אזי הטור מתכנס בהחלט לכל x שעבורו $|x-x_1| < |x_1-x_0|$. באופן דומה, אם הטור מתבדר ב-$x=x_1$ אזי הוא מתבדר לכל x שעבורו $|x-x_0| > |x_1-x_0|$.
* קיים $0 \le \rho \le \infty$ הנקרא רדיוס ההתכנסות של הטור כך ש-$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מתכנס בהחלט לכל x שעבורו $|x-x_0| < \rho$ ומתבדר לכל x שעבורו $\rho < |x-x_0|$.
עבור x שעבורו $\rho = |x-x_0|$ צריך לבדוק כל מקרה לגופו.
[אם הטור מתבדר לכל $x \neq x_0$ אז $\rho = 0$ ואם הוא מתכנס לכל x אז $\rho = \infty$].

דוגמה:

$a_n = e^{n!} \Rightarrow \rho = 0$

$a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \rho = \infty$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 1 \\ a_n = n^2 \\ a_n = \frac{1}{n^{17}} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho = 1$$

הקטע $|x-x_0| < \rho$ (עבור $\rho>0$) נקרא קטע ההתכנסות.

* אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ מתכנסים ל-
$f(x)$, $g(x)$ בהתאמה עבור $|x-x_0|<\rho$ (כאשר
ρ מינימום רדיוסי ההתכנסות של שני הטורים). אזי
לכל $|x-x_0|<\rho$ הדברים הבאים נכונים:

- $$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$$
  $$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
- הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה אינסוף פעמים לכל $|x-x_0|<\rho$. הנגזרות של f מתקבלות מגזירה פורמלית של הטור (טור גזירה איבר איבר):
  $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$
  $$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$
  $\vdots$ וכהלאה

  ורדיוס ההתכנסות של הטורים האלה הוא רדיוס ההתכנסות של הטור המקורי.
- a_n נתון ע"י $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
- הטור נקרא טור טיילור של f סביב x_0.

* אם $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ לכל x בקטע שבו ידוע ששני הטורים מתכנסים אזי $a_n = b_n$ לכל n. בפרט, אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$ בקטע בעל אורך חיובי אזי $a_n = 0$ לכל n.

* פונקציה f שיש לה פיתוח לטור טיילור סביב x_0, כלומר $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ (כלומר f גזירה אינסוף פעמים, הטור מתכנס ברדיוס חיובי ממש ויש שוויון בין הטור לפונקציה) נקראת אנליטית ב-x_0. ממה שראינו ברור שאם f, g אנליטיות ב-x_0 אז $f \pm g$, fg אנליטיות ב-x_0. ומשפט, אם $g(x_0) \neq 0$ אז גם f/g אנליטית ב-x_0.

* פולינומים הם פונקציות אנליטיות עם רדיוס התכנסות $\rho = \infty$.

עד כאן תזכרה בסיסית.

(16) 30.06.08
מד"ר

שיעור עם יורם לוס

אנחנו דנים במשוואות לינאריות מסדר שני מהצורה

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$$

כאשר P,Q,R פונקציות אנליטיות בקטע משותף כלשהו (בד"כ פולינומים)

הגדרה: נקודה x_0 שבה $P(x_0)\neq 0$ נקראת נקודה רגולרית של המשוואה. נקודה שבה $P(x_0)=0$ נקראת נקודה סינגולרית של המשוואה. [אם x_0 רגולרית אזי קיים קטע סביבה שבו $P(x)\neq 0$ וניתן באותו קטע להעביר את המשוואה לצורה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ שעבורה תקף משפט הקיום והיחידות].

פתרון בעזרת טורי חזקות

העיקרון הכללי: בהינתן נקודה רגולרית x_0 נחפש פתרון מהצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. נציב טור כזה במשוואה וננסה "לפתור" במובן של חישוב ה-a_n-ים.

דוגמא: $y''+y=0$ בקטע $(-\infty,\infty)$. ניקח $x_0=0$
כלומר נחפש $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. אז

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

$$\Rightarrow\quad 0=y''+y=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n$$

$$\Rightarrow\quad \forall n\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0$$

המשוואה הזו מגדירה איזשהו יחס רקורסיבי. למעשה המערכת הזו מאוד פשוטה. מקבלים:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0\qquad n=0,1,2,\dots$$

אם יודעים את a_0 ואת a_1 אז יודעים כבר את כולם.
זה נקרא יחס רקורסיה ובמקרה זה a_0 קובע את $a_2,a_4,a_6,\dots$
ו-a_1 קובע את $a_3,a_5,a_7,\dots$!

a_0 ו- a_1 לא ניתן לחשב מהמשוואה. אלה רק בעים באופן שרירותי. וזה הגיוני כי יש לנו משוואה לינארית מסדר שני אבל יש לנו שתי דרגות חופש. אז הקבועים החופשיים שלנו הם a_0 ו- a_1.

עבור הזוגיים קל לראות ש-

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{3\cdot 4} = +\frac{a_0}{4!}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = a_0\cdot\frac{(-1)^n}{(2n)!} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

ובאופן דומה עבור האי-זוגיים $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_1$

אבל כל הפתרון הוא $y(x) = a_0\sum\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$

וזה הפתרון הכלל' של המשוואה.

השאלה היא שמה שקיבלנו הוא $y = a_0\cos + a_1\sin$

משוואת Airy - $y'' = xy$ $\quad (R(x)=-x \quad Q(x)=0 \quad P(x)=+1)$

כל נקודה היא רגולרית אז ניקח $x_0 = x$

$$y = \sum a_n x^n \Rightarrow y'' = \sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}$$

לכן a_0 קובע את $a_3, a_6, a_9, \dots$

a_1 קובע את $a_4, a_7, \dots$

a_2 קובע את $a_5, a_8, \dots$

אבל אם מסתכלים במשוואה רואים שבהכרח $a_2 = 0$

(אז שוב נשארנו עם שתי דרגות חופש) לכן $a_2 = a_5 = a_8 = \dots = 0$

תרגיל: לפתח את הרקורסיה ולקבל

$$y = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)(3n-4)\dots(3\cdot 2)}\right] +$$

$$+ a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)(3n-3)\dots(4\cdot 3)}\right]$$

אז שוב קיבלנו פתרון מהצורה ... $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$ כאשר
y_1, y_2 פונקציות בת"ל המקיימות תנאי התחלה "קנוניים"
ב-0 (y_1, y_2 אלה נקראות פונקציות Airy):

$$y_1(0)=1 \qquad y_1'(0)=0$$
$$y_2(0)=0 \qquad y_2'(0)=1$$

<u>משפט</u>: אם x_0 נקודה רגילה של $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$
רק ש- $p=\frac{Q}{P}$ $q=\frac{R}{P}$ אנליטיות ב-x_0 אזי הפתרון
הכללי של משוואה זו בסביבה של x_0 הוא מהצורה

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 y_1(x)+a_1 y_2(x)$$

כאשר a_0, a_1 קבועים כלשהם ו-y_1, y_2 בת"ל והן
טורי חזקות בעלי רדיוס התכנסות שהוא לפחות כמו הרדיוס
המינימלי של רדיוסי ההתכנסות של p, q (דהיינו הן פונקציות
אנליטיות). יתר על כן, הקבועים של הטורים המתאימים
נותנים למציאה ע"י "הצבת הטור במשוואה".

<u>הערה</u>: במשפט הנ"ל $y_1(x)=1+b_2(x-x_0)^2+\dots$

$$y_2(x)=(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\dots$$

[לא בהכרח החזקות שמופיעות באחד לא מופיעות בשני!]
כלומר y_1 היא הפתרון המקיים $y_1(x_0)=1$

$y_1'(x_0)=0$

ו-y_2 היא הפתרון שמקיים $y_2'(x_0)=1$ $y_2(x_0)=0$.
[ממשפט הקיום והיחידות אכן קיימים כאלה].

<u>טענה</u> (ללא הוכחה): אם P ו-Q פולינומים ל-$\frac{P}{Q}$ אין
גורמים משותפים ו-$P(x_0)\neq 0$ אזי ל-$\frac{Q}{P}$ יש פיתוח בטור
חזקות סביב x_0 ורדיוס ההתכנסות שלו שווה למרחק בין
x_0 ל-0 המרוכב הקרוב ביותר של P.

<u>דוגמה</u>: רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של הפונקציה $\frac{1}{1+x^2}$
סביב 0 הוא 1 כי שורשי $1+x^2$ הם $\pm i$ ו- $d(0,\pm i)=1$

לדוגמה $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$

וקל לראות ממשפטים באינפי שרדיוס ההתכנסות הוא 1.

<u>הוכחת המשפט</u>: נתונה המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ ונניח בה"כ ש-$x_0=0$ ורדיוס ההתכנסות הוא 1. ע"י הזזה וכיווץ אפשר להגיע למקרה הכללי. נסמן $p(x)=\sum p_n x^n$ $q(x)=\sum q_n x^n$ שני הטורים בעלי רדיוס התכנסות ≥ 1.

צריך להוכיח שקיימים פתרונות מהצורה: $y=\sum a_n x^n$ בעלי רדיוס התכנסות ≥ 1 ושניתן לקבל את המקדמים $\{a_n\}$ ע"י "הצבה במשוואה". [מכאן ניתן גם לעבור לטורים סביב x_0 כלשהו ורדיוס התכנסות ρ כלשהו, ע"י שינוי משתנה. הטיפול ב-$x_0=0$; $\rho=1$ פה הוא לשם הפשטות].

מההנחה $y=\sum a_n x^n$ נקבל

$$y'' = \sum (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \qquad y' = \sum (n+1)a_{n+1}x^n$$

ע"י "הצבה במשוואה" נקבל:

$$\begin{aligned} 0 = y''+py'+qy &= \sum (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \\ &+ \left(\sum p_n x^n\right)\left(\sum (n+1)a_{n+1}x^n\right) + \\ &+ \left(\sum q_n x^n\right)\left(\sum a_n x^n\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{k=0}^{n}\left(p_{n-k}a_{k+1}(k+1) + q_{n-k}a_k\right)\right] \end{aligned}$$

וזה מגדיר יחס רקורסיה כי כל אחד מהמקדמים צריך להתאפס:

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\left(p_{n-k}a_{k+1}(k+1) + q_{n-k}a_k\right)$$

אז a_{n+2} תלוי ב-$a_0,\dots,a_n,a_{n+1}$ אבל אם יודעים מספר סופי של a_n אז יודעים את (הבא) אחריהם וכך נקבל את כולם. וברור שבחירת a_0 ו-a_1 מגדירה את a_n לכל $n \ge 2$.

2.7.08
א דר

שיעור עם יורם לוס

המשך הוכחת המשפט על קיום פתרון אנליטי:

ראינו שאם $p=\sum p_n x^n$, $q=\sum q_n x^n$ טורי חזקות בעלי רדיוס התכנסות ≥ 1 ואם $y=\sum a_n x^n$ הוא בעל רדיוס התכנסות חיובי ופותר את $y''+py'+qy=0$ אזי מתקיים יחס הרקורסיה

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}a_{k+1}(k+1)+q_{n-k}a_k\right] \qquad (*)$$

מכאן שבחירת a_0,a_1 מגדירה את a_n לכל $n\geq 2$.

[בפרט: $(a_0,a_1)=(0,1)$ ו-$(a_0,a_1)=(1,0)$ מגדירים לנו שני טורים עבור פתרונות המקיימים $(y(0),y'(0))=(0,1)$ ו-$(y(0),y'(0))=(1,0)$ בהתאמה.]

כדי להוכיח שבאופן הזה מתקבלים אכן פתרונות כנדרש נגדיר כעת את סדרת ה-a_n-ים ע"פ יחס הרקורסיה (*) (בהינתן a_0,a_1 כלשהם) ונראה שטור החזקות המתקבל הוא אכן בעל רדיוס התכנסות 1 לפחות.

יהי $\varepsilon>0$. היות שהטורים $\sum p_n x^n$, $\sum q_n x^n$ בעלי רדיוס התכנסות 1 לפחות, ולכן $q_n(1+\varepsilon)^{-n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ וגם $p_n(1+\varepsilon)^{-n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ [מציבים $\frac{1}{1+\varepsilon}$ בטורים]. לכן קיים $C_\varepsilon\geq 1$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ $|q_n|<C_\varepsilon(1+\varepsilon)^n$ ו-$|p_n|<C_\varepsilon(1+\varepsilon)^n$ (כי סדרה מתכנסת חסומה)

כמו כן, קיים $N\geq 1$ כך שעבור $n>N$ מתקיים $|q_n|<(1+\varepsilon)^n$ ו-$|p_n|<(1+\varepsilon)^n$ (כי החל ממקום מסוים $|q_n(1+\varepsilon)^{-n}|<1$ ובה"נ לגבי p_n). יהי כעת $n\geq C_\varepsilon(N+1)^2$ ויהי C_a מספר שעבורו מתקיים $|a_k|<C_a(1+\varepsilon)^k$ עבור $k=0,1,2,\dots,n+1$ (כאשר ה-a_k-ים מתקבלים מ-(*)).

מ-(*) נקבל כעת

שינוי קל של האינדקסים אבל זה יוצא אותו הדבר

$$|a_{n+2}| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{N}\left(|p_k||a_{n-k+1}|(n-k+1)+|q_k||a_{n-k}|\right) + \sum_{k=N+1}^{n}(\dots)\right]$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{N}\left(C_\varepsilon(1+\varepsilon)^k C_a(1+\varepsilon)^{n-k+1}(n-k+1)+C_\varepsilon(1+\varepsilon)^k C_a(1+\varepsilon)^{n-k}\right) + \sum_{k=N+1}^{n}(\dots)\right]$$

$$= \frac{Ca}{(n+1)(n+2)}\left[C_\varepsilon \sum_{k=0}^{N}\left((1+\varepsilon)^{n+1}(n-k+1) + (1+\varepsilon)^n\right) + \sum_{k=N+1}^{n}\left(\dots \right)\right]$$

$$\leq \frac{Ca(1+\varepsilon)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\left[C_\varepsilon \sum_{k=0}^{N}(n-k+2) + \sum_{k=N+1}^{n}(n-k+2)\right]$$

נשים לב ש- $\sum_{k=0}^{N}(n-k+2) \leq (N+1)(n+2)$ ו-

$$\sum_{k=N+1}^{n}(n-k+2) = (n-N)(n+2) - \sum_{k=N+1}^{n} k =$$

$$= (n-N)(n+2) - (n-N)\frac{n+N+1}{2}$$

$$\leq (n-N)\frac{n+2}{2}$$

ולכן

$$|a_{n+2}| \leq \frac{Ca(1+\varepsilon)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\left[C_\varepsilon (N+1)(n+2) + (n-N)\frac{n+2}{2}\right] =$$

$$= \frac{Ca(1+\varepsilon)^{n+1}}{n+1}\left[C_\varepsilon (N+1) + \frac{n-N}{2}\right] \leq$$

$$\leq \frac{Ca(1+\varepsilon)^{n+1}}{n+1}\left[\frac{n}{N+1} + \frac{n-N}{2}\right] \leq \frac{Ca(1+\varepsilon)^{n+1}\cdot n}{n+1} \leq$$

$n > C_\varepsilon (N+1)^2$

$\Rightarrow C_\varepsilon < \frac{n}{(N+1)^2}$

תרגיל

$$\leq Ca(1+\varepsilon)^{n+1} \leq Ca(1+\varepsilon)^{n+2}$$

$\Leftarrow$ נקבל באינדוקציה שלכל n מתקיים $|a_n| \leq Ca(1+\varepsilon)^n$
אזי לכל $|x| < \frac{1}{1+\varepsilon}$ $a_n x^n$ דועך אקספוננציאלית לאפס
והטור ~~מתכנס~~ $\sum a_n x^n$ מתכנס בהחלט. לכן רדיוס ההתכנסות של
$\sum a_n x^n$ הוא לפחות $\frac{1}{1+\varepsilon}$. היות ש-ε שרירותי נקבל
שרדיוס ההתכנסות הוא לפחות 1.

7/7/08
מד"ר

סיכום ביניים - מה למדנו עד כה ומה נעשה בהמשך...

$y' = f(t,y)$

1) קיום - אוילר
2) קיום ויחידות - פיקארד
3) אינטרוול מקסימלי
4) תלות רציפה ב- f

↓

$y' = A(t)y + b(t)$

1) קיום ויחידות
2) המערכת ההומוגנית - מרחב הפתרונות
3) המטריצה היסודית
4) משוואה סקלרית מסדר m - ורונסקיאן
5) המשוואה הלא הומוגנית

← משוואה סקלרית עם מקדמים קבועים
← משוואה מסדר 2 - ארי חקלות

?

המטריצה היסודית

$$\frac{d}{dt} y(t) = A(t)\, y(t)$$

$A(t) \in Hom(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ רציפה ב $I = (\alpha, \beta)$

ראינו שמרחב הפתרונות הוא מרחב ממד m מעל $\mathbb{C}$

תנאי ההתחלה הקנוני הוא $y^1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, y^m(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

תרגום למשוואה סקלרית הוא בעזרת $y(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \vdots \\ z^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$

יהיו $y^1(t),\dots,y^m(t)$ פתרונות בסיס. המטריצה

$$\Phi(t) = (y^1(t),\dots,y^m(t)) \in Hom(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^m)$$

נקראת מטריצה יסודית.

<u>עובדה 1</u>: העמודות של $\Phi(t)$ אינן תלויות ליניארית (מעל $\mathbb{C}$) לכל $t\in I$. כי אם לאיזשהו $\sum \lambda_i y^i(t_0)=0$ אז כיוון ש- $\sum \lambda_i y_i(t)$ פתרון, יחידות מחייבת ש- $\sum \lambda_i y^i(t)\equiv 0$ לכל $t\in I$.

<u>עובדה 2</u>: אוסף המטריצות היסודיות נתון בדיוק ע"י $\{\Phi(t)C\}$ כאשר $C\in Hom(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^m)$ מטריצה רגולרית של קבועים (כלומר לא תלויה ב- t).

<u>הוכחה</u>: אם $\tilde\Phi(t)$ מטריצה יסודית אחרת, בעלת עמודים $\tilde y^1,\dots,\tilde y^m$ אז

$$\tilde y^1 = \sum_{j=1}^m c_{j1} y^j$$
$$\vdots$$
$$\tilde y^m = \sum_{j=1}^m c_{jm} y^j$$

שהרי $\tilde y^i$ פתרונות; $\{y^j\}$ בסיס. אבל כותבים מטריציונית זה, בדיוק אומר ש-

$$(\tilde y^1,\dots,\tilde y^m) = (y^1,\dots,y^m)\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m}\\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & & c_{mm}\end{pmatrix}$$

ולמה C רגולרית? כי מה שיש פה זה מעבר בסיסים..
להפך, אם $C\in Hom(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^m)$ רגולרית אז $\Phi(t)C$ היא מטריצה שעמודיה פתרונות ובלתי תלויים ליניארית לכל $t_0\in I$ (כי בכל t_0 מדובר במכפלת מטריצות רגולריות). ☺

<u>עובדה 3</u>:
$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad (*)$$

זה שוויון מטריצות ונגזרה של $\Phi'(t)$ היא נגזרה איבר איבר והכפל הוא כפל מטריצות.

השוויון נובע מכך שהוא נכון לכל עמודה.

<u>טענה</u>: עכשיו נסתכל בשוויון (*) לגבי מטריצה כך ש $\Psi(t)\in C^1(I,Hom(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^m))$

... אם $\Psi(t_0)$ סינגולרית אז $\Psi(t)$ סינגולרית בכל מקום.

<u>הוכחה</u>: זה נובע מהיחידות. אם $\Psi(t_0)$ סינגולרית אז יש צירוף ליניארי לא טריוויאלי $\sum\lambda_i\Psi^i(t_0)=0$. אבל אז $y(t)=\sum\lambda_i\Psi^i(t)$ הוא פתרון של $y'(t)=A(t)y(t)$ המתלכד עם הפתרון הטריוויאלי ב- t_0. לכן $\sum\lambda_i\Psi^i(t)\equiv 0$ לכל t. כלומר היא סינגולרית בכל t.

<u>טענה</u>: $\frac{d}{dt}\det\Psi(t)=tr(A(t))\det\Psi(t)$

<u>הוכחה</u>:

$$\frac{d}{dt}\left[\det\begin{pmatrix}\Psi_1^1(t) & \dots & \Psi_1^m(t)\\ \vdots & & \\ \Psi_m^1(t) & \dots & \Psi_m^m(t)\end{pmatrix}\right] \underset{\text{להרהר}}{=} (**)$$

$$(**)=\det\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}\Psi_1^1(t) & \dots & \frac{d}{dt}\Psi_1^m(t)\\ \Psi_2^1(t) & \dots & \Psi_2^m(t)\\ \vdots & & \\ \Psi_m^1(t) & \dots & \Psi_m^m(t)\end{pmatrix}+\dots+\det\begin{pmatrix}\Psi_1^1(t) & \dots & \Psi_1^m(t)\\ \vdots & & \\ \Psi_{m-1}^1(t) & \dots & \Psi_{m-1}^m(t)\\ \frac{d}{dt}\Psi_m^1(t) & \dots & \frac{d}{dt}\Psi_m^m(t)\end{pmatrix}$$

נסמן $A(t)=(a_{ij}(t))$ אז ל- $k=1,\dots,m$ מתקיים

לפי (*): $\frac{d}{dt}\Psi_1^k(t)=\sum_{j=1}^m a_{k,j}(t)\Psi_j^k(t)=$

$= a_{1,1}(t)\Psi_1^k(t)+$ (קומבינציה ליניארית של שורות $2,\dots,m$)

סף

$$(**) = \det\begin{pmatrix} a_{11}(t)\psi_1^1(t) & \cdots & a_{11}(t)\psi_1^m(t) \\ \psi_2^1(t) & \cdots & \psi_2^m(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_m^1(t) & \cdots & \psi_m^m(t) \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \psi_1^1(t) & \cdots & \psi_1^m(t) \\ \vdots & & \\ \psi_{m-1}^1(t) & \cdots & \psi_{m-1}^m(t) \\ a_{mm}(t)\psi_m^1(t) & \cdots & a_{mm}(t)\psi_m^m(t) \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} \psi_1^1 \cdots \psi_1^m \\ \vdots \\ \psi_m^1 \cdots \psi_m^m \end{pmatrix} + \dots + a_{mm}\det\begin{pmatrix} \psi_1^1 \cdots \psi_1^m \\ \vdots \\ \psi_m^1 \cdots \psi_m^m \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}+\dots+a_{mn})\det\begin{pmatrix} \psi_1^1 \cdots \psi_1^m \\ \vdots \\ \psi_m^1 \cdots \psi_m^m \end{pmatrix} = tr(A(t))\det\Psi(t)$$

☺

<u>מסקנה</u>: $\det(\Psi(t)) = \det(\Psi(t_0))e^{\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau}$

<u>מסקנה</u>: $\Psi(t)$ סינגולרית ב- t_0 אמ"מ $\Psi(t)$ סינגולרית לכל t.

המקרה של $A(t)\equiv A$ מטריצה קבועה: אז $\psi'(t)=A\Psi(t)$!-
$\det\Psi(t) = \det\Psi(t_0)e^{(t-t_0)tr(A)}$. בפרט זה נכון אם $\Psi(t)=\Phi(t)$
מטריצה יסודית. במקרה זה, כלומר אם $A(t)\equiv A$
ניתן לרשום את המטריצה היסודית בצורה
מפורשת. (3י)

<u>טענה</u>: $\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}$ וש $\Phi(t_0)=I$

כאשר אם $B\in M_m(\mathbb{C})$ אז $e^B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!}$

(21)

כמה עובדות:

(1) הטור מתכנס כי

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|B^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|B\|^k = e^{\|B\|}$$

נורמה אופרטורית

(2)

$$\frac{d}{dt} e^{tB} = Be^{tB}$$

(כשמציבים את זה ל- A זו בדיוק המשוואה (*))

22 9/7/08
אד"ר

האוניברסיטה הפתוחה - מבוא למשוואות דיפרנציאליות
כרך שני, פרקים III - IV. (58 - 119)
כרך שלישי, פרק II (34-42)
אבחנות פתרון משוואות - במבחן נידרש לדעת רק לפתור משוואות כמו בתרגילים הפתורים שבעמודים האלה.

יום רביעי החל משבוע הבא - שיעור של שעתיים.

אנחנו עוסקים במשוואות הבאות:

$$(*)\ y^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+\dots+a_0(t)z(t)=0 \qquad y'=A(t)y(t)+b(t)\ (**)$$

לגבי (**) אנחנו יודעים את הדברים הבאים: אם $b(t)=0$

1. אמרנו מה זה מטריצה יסודית - $\Phi(t)=(y^1,\dots,y^m)$ כאשר $y^1,\dots,y^m$ פתרונות בת"ל של המשוואה ומקיימים $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$
2. $$\frac{d}{dt}\det\Phi(t)=(\operatorname{tr}A)\cdot\det\Phi(t)$$
3. אם $A(t)\equiv A$ קבועה אז $\Phi(t)=e^{tA}$!
$$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}$$

לגבי (*) אם $r(t)\equiv 0$ יש הדברים הבאים:

1. הוורונסקיאן:
$$W(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_m(t)\\ z_1'(t) & & z_m'(t)\\ \vdots & & \vdots\\ z_1^{(m-1)}(t) & & z_m^{(m-1)}(t)\end{pmatrix}$$

כאשר $z_1,\dots,z_m$ פתרונות בת"ל של המשוואה.

$$\frac{d}{dt}(\det(W(t)))=-a_{m-1}(t)(\det W(t))$$

$$\Rightarrow \det W(t)=\det W(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^{t}a_{m-1}(s)ds} \qquad \text{(Abel)}$$

② אפשר לעבור לצורה המטריצינית ע"י הגדרת

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ -a_0(t) & \dots & \dots & & -a_{m-1}(t) \end{pmatrix}$$

דוגמה: $z'(t) + a_0(t) z(t) = 0$ אז

$$W(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\det W(t) = \det W(t_0)$ קבוע!!

(גם ראינו את זה בתרגול...)

המשך תכונות של (**):

④ $\frac{d}{dt}(\det e^{tA}) = (\mathrm{tr} A) \det e^{tA}$

וזאת משוואה סקלרית אז ע"י פתרון $y'(t) = k(t) y$ נקבל

$\det(e^{tA}) = e^{(\mathrm{tr}A)t}$

ואם ניקח $t=1$ נקבל $\det(e^{A}) = e^{\mathrm{tr}A}$.

עבור המקרה הלא הומוגני: $y' = A(t) y(t) + b(t)$

הגדרה: פתרון פרטי הוא איזשהו פתרון אחד כלשהו של המשוואה. (עם איזשהו תנאי התחלה)

טענה: יהיו $y^{part,1}$, $y^{part,2}$ שני פתרונות פרטיים. אז $y(t) = y^{part,1} - y^{part,2}$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

מסקנה: יהי $\Phi(t)$ מטריצה יסודית (של הבעיה ההומוגנית) אז אוסף כל הפתרונות של הבעיה הלא הומוגנית היא הקבוצה

$$\{ y(t) = y^{part}(t) + \Phi(t) c \ : \ c \in \mathbb{C}^m \}$$

כאשר y^{part} פתרון פרטי נתון!

㉓

<u>טענה</u>: תהי $\Phi(t)$ מטריצה יסודית של הבעיה ההומוגנית ונסמן ב-

$$y(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1} y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds$$

אזי $y(t)$ היא פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית המקיים $y(t_0) = y_0$

<u>הוכחה</u>: נבדוק שמתקיים תנאי ההתחלה:

$$y(t_0) = y_0 + 0 = y_0$$

כעת נבדוק שזה מקיים את המשוואה:

$$y'(t) = \Phi'(t)\,\Phi(t_0)^{-1} y_0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds +$$

$$+ \Phi(t)\,\Phi(t)^{-1} b(t) =$$

$$= A(t)\,\Phi(t)\left[\Phi(t_0)^{-1} y_0\right] + A(t)\,\Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds + b(t) =$$

$$= A(t)\left[\Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1} y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds\right] + b(t) =$$

$$= A(t)\, y(t) + b(t)$$

⑪ ☺

זה נקרא שיטת הווריאציה של הפרמטרים.

מה קורה כש- $A(t) \equiv A$? אז $\Phi(t) = e^{tA}$

ואז מקבלים

$$\boxed{y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, ds}$$

<u>להזכיר</u>: $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$

למטריצה A השתמשנו בנוסחה $e^{(t+s)A}=e^{tA}e^{sA}$.

למה זה נכון? נסתכל ב- $e^{(t+s)A}$ כפונקציה (מטריציאלית) של $t\in\mathbb{R}$. נגזור אותה:

$$\frac{d}{dt}e^{(t+s)A} = A\cdot e^{(t+s)A}$$

$$\downarrow$$

$$\tau = t+s$$

$$\frac{d}{d\tau}e^{\tau s} = Ae^{\tau A}$$

לכן $e^{(t+s)A}$ היא מטריצה יסודית של $y'=Ay$. לכן $e^{(t+s)A}=e^{tA}\cdot C$ (כי גם e^{tA} יסודית). ניקח $t=0$ ונקבל $C=e^{sA}$.

למה שלא נשתמש בטור התכנסות להוכיח את זה: צריך להראות

$$e^{(t+s)A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t+s)^kA^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^kA^k}{k!}=e^{tA}e^{sA}$$

וזה לא קל כל כך. צריך לשחזר את מה שעשינו ל- e^{t+s} באינפי.

<u>הערת אזהרה:</u> בד"כ $e^{A+B}\neq e^A\cdot e^B$ (דוגמא בתרגול) עבור $A,B\in Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ וכו'.

מערכות אוטונומיות - מרחב פזה, סטבליות, מחזוריות

נתבונן במשוואה $z''+z=0$

בסיס לפתרונות מעל $\mathbb{C}$ הוא (e^{it},e^{-it})

ומעל $\mathbb{R}$ $(\cos t,\sin t)$

נכפול את המשוואה ב- $2z'(t)$ ונקבל

$$2z'(t)z''(t)+2z'(t)z(t)=0$$

$$\parallel$$

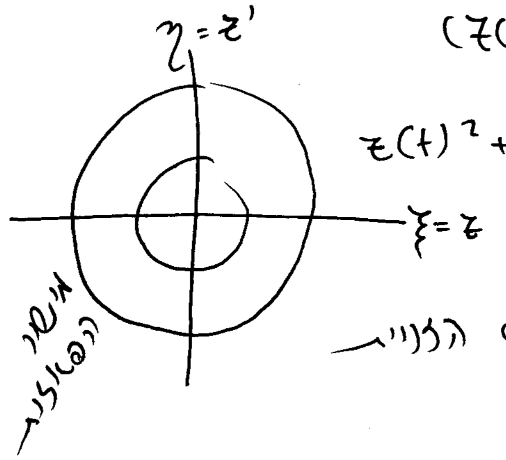
$$\frac{d}{dt}(z'(t)^2)+\frac{d}{dt}(z(t)^2)=0$$

מסקנה: כל פתרון של המשוואה יהיה כזה ש-

$$z'(t)^2 + z(t) = const = z'(t_0)^2 + z(t_0)^2$$

בפרט, נתרכז במקרה ש- $z(t)$ ממשי. נשתמש במישור $\mathbb{R}^2$

ובמישור הזה נשרטט את הקו $(z(t), z'(t))$



$$z(t)^2 + z'(t) = const$$

ניקח שוב את המשוואה ונרשום אותה במונחי $\rho(t), \omega(t)$ כאשר $\rho(t)$ הרדיוס ; $\omega(t)$ הזווית

כלומר $\rho(t)^2 = z(t)^2 + z'(t)^2$

אז $\rho(t) = const \Leftarrow \frac{d}{dt}(\rho(t)^2) = 0$

הקואורדינטות הפולריות

(i) $z(t) = \rho(t)\cdot\cos\omega(t)$

(ii) $z'(t) = \rho(t)\sin\omega(t)$

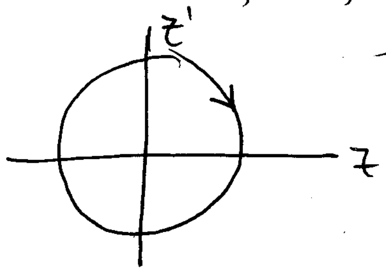
נגזור את (i) ונקבל $z'(t) = -\rho(t)\sin\omega(t)\,\omega'(t)$

נשווה עם (ii) ונקבל $\omega'(t) = -1 \Leftarrow -\omega'(t) = 1$

לכן המהירות הזוויתית קבועה והתנועה היא עם כיוון השעון.

כלומר, המסלול של $(z(t), z'(t))$ (כאשר $z(t)$ בכיוון האופקי)

הוא מעגלי בכיוון השעון כאשר הזווית משתנה בקצב קבוע של יחידה (מינוס ל-t). זאת התנועה ההרמונית על מעגל.



נשים לב שהמשוואה הזאת שחקרנו היא למעשה

$$y'(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

שפתרונה e^{tA}

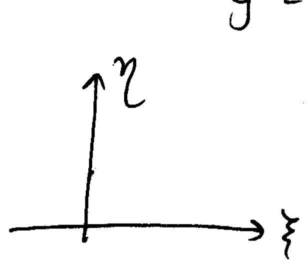
נרצה לדון במקרה של מטריצה 2×2 קבועה כללית.

מישור הפאזות (המסלולים) למשוואה $y' = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} y$

עבור $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ רק ש- $ad-bc \neq 0$.

הנקודה $y_0 = \binom{0}{0}$ היא נקודה קריטית. כלומר,

נקודה שבה $Ay_0 = 0$. כל פתרון שמתחיל



שם "נקודה" שבו: $y(t)\equiv\binom{0}{0}$. כיוון ש- $\det A\neq 0$ ב
נקודה $\binom{0}{0}\neq y_0$ הוא לא קריטית.

ע"י שינוי $\tilde{y}=Jy \leftarrow y$ כאשר J מטריצה ממשית רגולרית קבועה.

$$\tilde{y}'=Jy'=JAy=JAJ^{-1}\tilde{y}$$

מבחינת המישור (ξ,η) הטרנספורמציה J הוא אפינית.

סיווג "צורות קנוניות" ל- JAJ^{-1} :

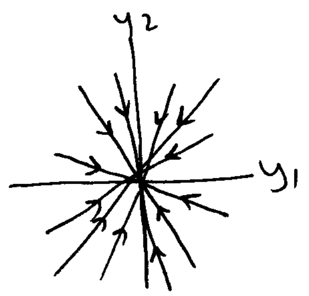
I $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \rightarrow$

$y_1'=\lambda y_1$
$y_2'=\lambda y_2$

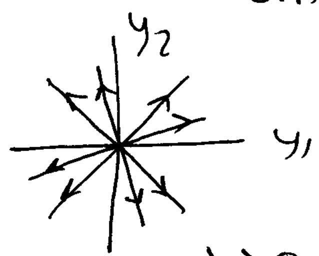
$\Rightarrow y_1=c_1e^{\lambda t} \quad y_2=c_2e^{\lambda t}$

$\Rightarrow y_1/y_2=c_1/c_2$

לכן המסלולים הם:



$\lambda<0$



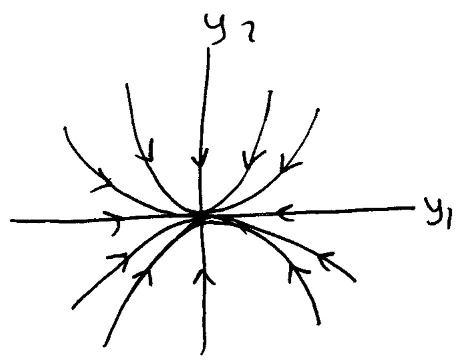
$\lambda>0$

המסלולים מכסים את המישור (משפט קיום) והם לא חותכים זה את זה (פרט ל $(0,0)$) (משפט היחידות).

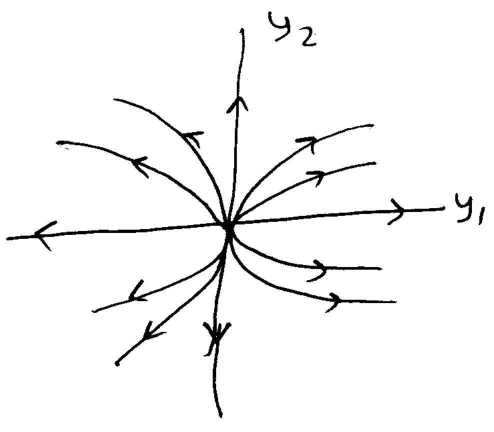
II $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ כאשר $\lambda\mu>0$ $\Leftarrow$ אז הפתרון הוא

$y_1=c_1e^{\lambda t}$
$y_2=c_2e^{\mu t}$

אז המסלולים הם



$\mu<\lambda<0$



$0<\mu<\lambda$

III)

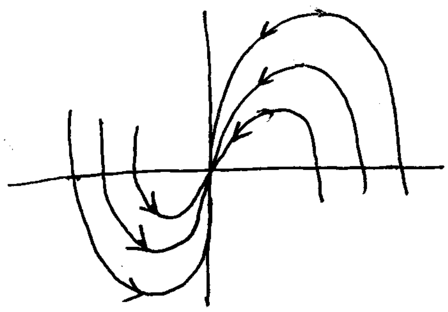
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \gamma & \lambda \end{pmatrix} \leftarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= \lambda y_1 \\ y_2' &= \gamma y_1 + \lambda y_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{\lambda t} \\ y_2 &= \gamma c_1 e^{\lambda t} + \lambda y_2 \end{aligned}$$

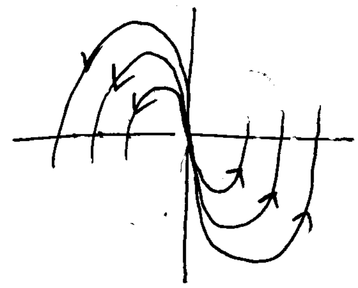
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(y_2 e^{-\lambda t}\right) = \gamma c_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 e^{-\lambda t} = \gamma c_1 t + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = (\gamma c_1 t + c_2) e^{\lambda t}$$

ואז המסלולים הם



$\lambda < 0$



$\lambda > 0$

(26) 16.07.08
מד"ר

(A) הגדרה: תהי $f\in C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$. המערכת $y'(t)=f(y)$ $\quad y(t_0)=y_0$
נקראות מערכת אוטונומית.

הערות:

① ייתכן ש- $f(y)$ מוגדרת רק על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^m$. אזי פתרונות קיימים רק אם $y(t)\in U$.

② היות שלא מניחים תנאי ליפשיץ אין הבטחת יחידות (כמו ב- $y'=\sqrt{y}$)

③ גם אם $f(y)$ "יפה" לא מובטח יש פתרון לכל $t\in\mathbb{R}$. למשל עבור $m=1$
$y'=y^2$. $f(y)=y^2$ היא יפה אבל אין פתרון בכל $\mathbb{R}$ (אלא אם $y\equiv 0$).

③ חשוב: אם $y(t)$ פתרון בתחום I אז גם $\tilde{y}(t)=y(t-\tau)$ פתרון ל- $\tau\in\mathbb{R}$ קבוע כאשר $t-\tau\in I$:

$$y((t_0+\tau)-\tau)=y_0 \qquad \frac{d}{dt}y(t-\tau)=f(y(t-\tau))$$

למשל, נשווה במקרה שהמד' אוטונומית למקרה שלא:

$$y'=2ty$$
$$y(t)=e^{t^2}$$
$$y(t-\tau)=e^{(t-\tau)^2}=e^{\tau^2}e^{t^2-2\tau t}$$
$$\frac{d}{dt}y(t-\tau)\neq 2ty(t-\tau)$$
אם היא הייתה אוטונומית היינו מקבלים שוויון

$$y'=ky$$
$$y(t)=e^{kt}$$
$$\tilde{y}(t)=y(t-\tau)=e^{k(t-\tau)}=e^{kt}e^{-k\tau}$$
$$\frac{d}{dt}\tilde{y}(t)=\frac{d}{dt}e^{k(t-\tau)}=ke^{(t-\tau)}=k\tilde{y}(t)$$

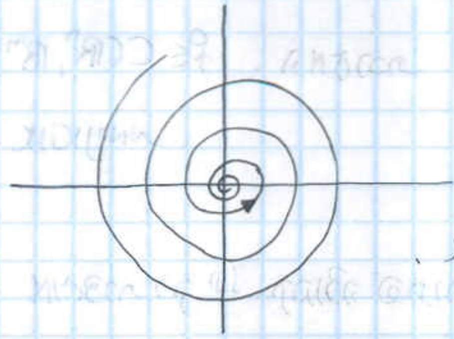
אז במערכת האוטונומית אכן יש שוויון אולו במד' הלא אוטונומית אין,
וזה מה שיפה במד' אוטונומית - במובן מסוים אין חשיבות לזמן.

חזרה לעניינים של השיעור הקודם.

• המקרה ש- $\mu=\alpha-i\beta$ $\quad \lambda=\alpha+i\beta$ $\quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$

$$Av=\lambda v$$
$$y(t)=ve^{\lambda t}$$
$$y'(t)=v\lambda e^{\lambda t}=A(ve^{\lambda t})=Ay(t)$$
$$\mathrm{Re}\,y(t)=(\mathrm{Re}\,v)\cdot e^{\alpha t}\cos\beta t-(\mathrm{Im}\,v)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

אם $\alpha<0$ מתקבל המסלול הבא:



במקרה הזה ה פתרון של
$y'=Ay$
בכל נקודה שהוא מתחיל
"קורס" אל הראשית.
כלומר, $|y(t)| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

אם $\alpha=0$ ~~יתקבל~~ כי אין שם קריסה וזה בדיוק מתאים למשוואה
שממנה התחלנו את הדיון: $z''+z=0 \longleftrightarrow A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$
במקרה המצב הזה נקרא center.

הגדרה: נניח שהנקודה 0 היא נקודה קריטית מבודדת של (A), כלומר:

(i) $f(0)=0$

(ii) $f(y)\neq 0$ עבור $0<|y|<\gamma$ ($\gamma>0$ מסוים)

נאמר שהנקודה 0 היא נקודה יציבה (stable "במובן של ציבור לא במובן של אורווה") אם לכל $0<\delta<\gamma$ קיים $\varepsilon>0$ רק ש-

$$|y_0|<\delta \Rightarrow |y(t;y_0)|<\varepsilon \quad t\geq 0$$

כאשר $y(t;y_0)$ הוא ה פתרון של (A) שמקיים $y(0;y_0)=y_0$.

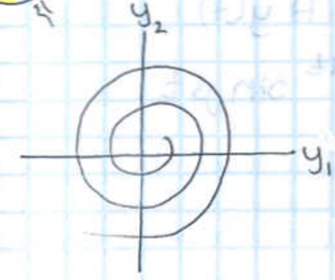
Q & A

• מה זה הגרף עם הספירלה?

$$y(t)=\underbrace{Re\,v}_{v^1}\cdot e^{\alpha t}\cos\beta t+\underbrace{Im\,v}_{v^2}\, e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$$

$$=\begin{pmatrix}v_1^1\\v_2^1\end{pmatrix}e^{\alpha t}\cos\beta t+\begin{pmatrix}v_1^2\\v_2^2\end{pmatrix}e^{\alpha t}\sin\beta t=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$|y(t)|^2=y_1(t)^2+y_2(t)^2\xrightarrow[t\to\infty]{}0$$



y_1,y_2 הם הרכיבים של הפונקציה

• משוואות לינאריות במקדמים קבועים:

$$L(D)z = z^{(m)} + a_{m-1} z^{(m-1)} + \dots + a_0 z = 0$$

$$L(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

פותרים את $L(\lambda)=0$ ומקבלים שורשים $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{C}$
עם ריבויים $\mu_1,\dots,\mu_r$ בהתאמה. אז הפתרונות היסודיים הם

$$\{t^k e^{\lambda_j t},\ j=1,\dots,r \quad 0\le k\le \mu_j-1\}$$

אלה פתרונות בלתי תלויים על הקטע!! שהם תלויים בנקודה אחת לא אומר שהם תלויים בקטע. המשפט שמדבר על הוורונסקיאן: אם הוורונסקיאן מתאפס בנקודה אחת אז הוא מתאפס בכולן...

האם $te^{\lambda_1 t}$, $te^{\lambda_2 t}$ $(\lambda_1\ne\lambda_2)$ יכולים להיות פתרונות מ"ס של משוואה מהצורה $z''+a_1(t)z'+a_0(t)z=0$.

נחשב וורונסקיאן:

$$\begin{vmatrix} te^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_2 t} \\ (1+t\lambda_1)e^{\lambda_1 t} & (1+t\lambda_2)e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t}\begin{vmatrix} t & t \\ 1+t\lambda_1 & 1+t\lambda_2\end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}(\lambda_2-\lambda_1)t^2$$

ברור שהוא מתאפס אך ורק ב-$t=0$ ולכן אם אנחנו מדברים על קטע קיים שמכיל את אפס מתקבלת סתירה ולכן אלה לא יכולים להיות פתרונות. אם הקטע לא מכיל את אפס אז הם יכולים להיות פתרונות.

נשים ♡ ש- $L(D)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}$ (D-אופרטור הגזירה). למשל,

$z''+z$ $\qquad L(D)e^{\lambda t} = \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^2+1\right)e^{\lambda t} = (\lambda^2+1)e^{\lambda t}$

$L(\lambda)=\lambda^2+1$

אז

(i) אם $\lambda=\lambda_i$ מקיים $L(\lambda_i)=0$ אז $L(D)e^{\lambda_i t}=L(\lambda_i)e^{\lambda_i t}=0$

(ii) נניח ש-λ_i בריבוי > 1

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L(D)e^{\lambda t} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(L(\lambda)e^{\lambda t}\right) = \left(L'(\lambda)+tL(\lambda)\right)e^{\lambda t}$$

נחליף את סדר הגזירות:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L(D)e^{\lambda t} = L(D)\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t} = L(D)\cdot te^{\lambda t} = \left(L'(\lambda)+tL(\lambda)\right)e^{\lambda t}$$

נציב $\lambda=\lambda_i$ ונקבל $L(D)(te^{\lambda_i t}) = 0$

אבל יתכן מתאפס כי הריבוי של $\lambda_i > 1$ ואז גם הנגזרת מתאפסת. (ואז לה גם פתרון...)

- אם $y'=Ay$ נניח הערכים העצמיים של A הם $\alpha\pm i\beta$, $\beta>0$
איך נחשב מטריצה יסודית (ממשית)?

$$\lambda = \alpha + i\beta \qquad v \in \mathbb{C}^2$$

$$Av = \lambda v$$

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

$\Leftarrow$ $ve^{\lambda t}$, $\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$ פתרונות בסיסיים. אז מטריצה יסודית מרוכבת היא $\tilde{\Phi}(t) = (ve^{\lambda t}, \bar{v}e^{\bar{\lambda}t})$. אבל החלקים הממשיים שלה הם גם מטריצה יסודית ממשית:

$$\Phi(t) = Re\,\tilde{\Phi}(t) \cdot \Big(\underbrace{Re(ve^{\lambda t})}_{y^1(t)} \quad \underbrace{Re(\bar{v}e^{\bar{\lambda}t})}_{y^2(t)}\Big)$$

(28) 21.7.08
מד״ר

תיקון לסוף של יום רביעי

$$y' = Ay \qquad A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$$

דנו במקרה $Av=\lambda v$ $\quad \beta>0 \quad \lambda=\alpha+i\beta$

אז $A\bar v=\bar\lambda\bar v$ והפתרונות המתאימים הם

$$y^1 = ve^{\lambda t} \qquad y^2=\bar v e^{\bar\lambda t}$$

ומכאן נובעת מטריצה יסודית

$$\tilde\Phi(t) = (y^1(t), y^2(t)) = (ve^{\lambda t}, \bar v e^{\bar\lambda t})$$

רוצים מטריצה יסודית ממשית Φ. אז יש C רגולרית
רק ש- $\Phi=\tilde\Phi C$. ואכן

$$(ve^{\lambda t},\bar v e^{\bar\lambda t})\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2i}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i}\end{pmatrix} = (Re(ve^{\lambda t}), Im(ve^{\lambda t}))$$

זאת מטריצה יסודית ממשית. אם נרשום $v=v^1+iv^2$

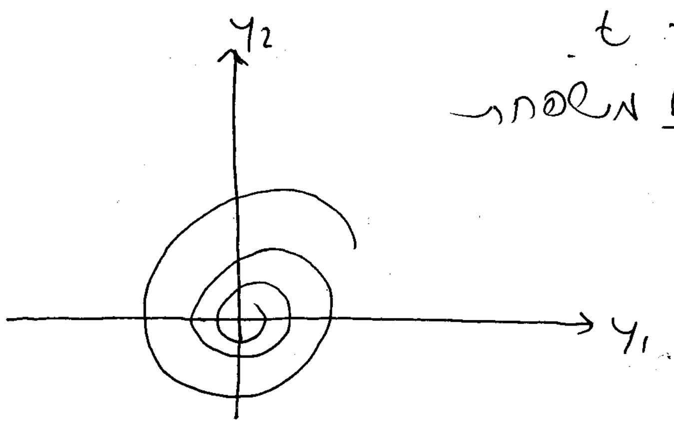
$$e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) = e^{\lambda t}=e^{\alpha t}e^{i\beta t}$$;

אז אפשר ממש לחשב באופן מפורש את $Re(ve^{\lambda t})$
ואת $Im(ve^{\lambda t})$.

ההבנה הגיאומטרית של הדוגמה הבאה:

(i) ראשית, ברור שמדובר בפתרון יחיד (לכל תנאי התחלה) שאינטרוול הקיום שלו הוא כל הישר (כלומר, "מסלול" המוגדר ל- $t\in\mathbb{R}$)

(ii) לא ציירנו את המשתנה t ובמקומו ציירנו את המסלול ב- $\mathbb{R}^2(y_1,y_2)$ עם פרמטר t.

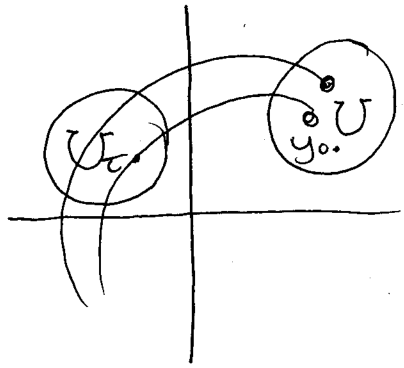


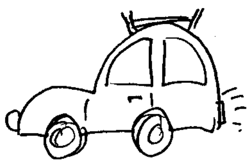
(iii) אנחנו מתרכזים בבחינת __כל__ משפחת המסלולים

(iv) אנו יודעים שהפתרון $y(t;y_0)$ (כך ש- $y(0;t_0)=y_0$)

תלוי באופן רציף וחח"ע בתנאי ההתחלה y_0.

$$U_\tau = \{y(\tau; y_0),\ y_0 \in U\}$$



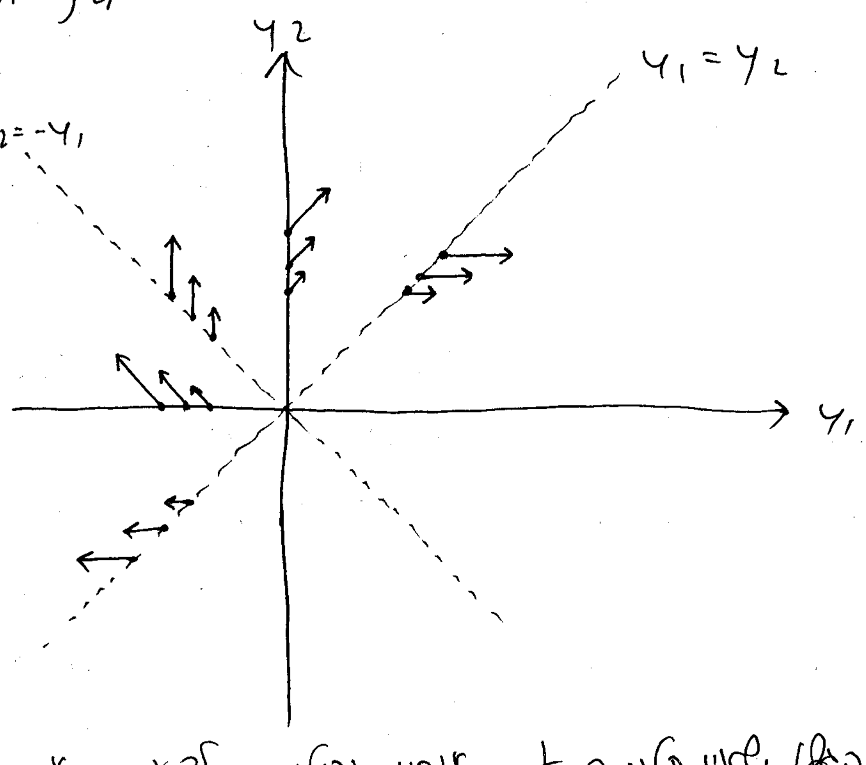


<u>הערה טכנית לגבי "שרטוט פתרון"</u>:

$y' = Ay$. Ay הוא "שדה וקטורי במישור הפאזה" ה"מוליך" את הפתרונות.

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$



באין תלות ב-t אנחנו יכולים לדעת את $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$ בכל נקודה $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

המסלולים חייבים להיות משיקים לשדה הנתון בכל נקודה במישור (למעט אפס)

סה"כ יוצאת מין ספירלה כזאת... לה קוראים קו אינטגרלי של השדה.

(ט) הפתרון הכללי נתון ע"י e^{tA}, כלומר

$$U_t = e^{tA}(U)$$

וידוע ש- $\det(e^{tA}) = e^{t\,trA}$. אז השטח של U_t הוא

$$|U_t| = |\det e^{tA}||U| = e^{t\,trA}|U|$$

אם $t>0$ אז $\operatorname{sign} tr A$ קובע את השטח קטן או גדל. במקרה שלנו $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; $trA = 2$ אז הקבוצה U מתנפחת. אז הספירלות יוצאות...

$$y^1(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad y^2(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

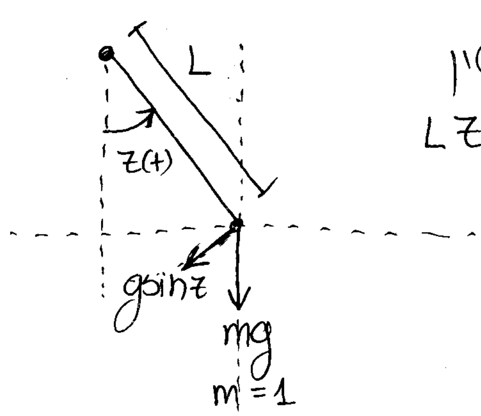
פתרונות יסודיים כלל $\Phi(t) = e^{tA}$

$$\Rightarrow y(t;y_0) = (y_0)_1 y^1(t) + (y_0)_2 y^2(t) =$$

$$= \underbrace{(y^1(t), y^2(t))}_{\Phi(t)}\begin{pmatrix}(y_0)_1\\(y_0)_2\end{pmatrix} = e^{tA} y_0$$

כאשר $y_0 = y(0;y_0) = (y_0)_1 y^1(0) + (y_0)_2 y^2(0)$

דוגמאות למערכות אוטונומיות לינאריות



I מטוטלת לא לינארית. לפי ניוטון

$$LZ''(t) = -g\sin Z(t)$$

(במטוטלת לינארית עושים קירוב $Z \approx \sin Z$ ואז הדברים פשוטים יותר...)

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}Z\\Z'\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}Z'\\-g\sin Z\end{pmatrix}$$

ונקבל מערכת אוטונומית:

$$y' = f(y) : \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -g\sin y_1\end{cases}$$

אנחנו רוצים למצוא את מישור הפאזה של הדבר הזה.

נכפול את $z''(t) = -g\sin z(t)$ ב-$z'(t)$:

$$Lz'(t)z''(t) = -g\,z'(t)\sin z(t)$$

הערה: ברור ש-f ליפשיצית כי היא גזירה ברציפות ולכן אין פה בכלל שאלה של קיום ויחידות.

$$\Rightarrow \frac{L}{2}\frac{d}{dt}z'(t)^2 = g\frac{d}{dt}\cos z(t)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2}z'(t)^2 = g(\cos z(t)-1)+E$$

אם $z(0)=0$ אז $E=\frac{L}{2}z'(0)^2\ge 0$

וזו האנרגיה הכוללת של המטוטלת (זו האנרגיה הקינטית שלה ב-$t=0$)

למעשה סיימנו לפתור כי מצאנו קשר פונקציונלי בין z ל-z'

ננתח את הפתרון:

א) אם $E=0$ הפתרון סטציונרי $z(t)\equiv 0$

כי אם $z(t)\neq 0$ אז $\cos z(t)-1<0$ וזה לא יכול להיות כי $\frac{L}{2}z'(t)^2\ge 0$.

ב) $0<E<2g$ אז $z(t)$ לא יכול להגיע לערך המקסימלי π (המטוטלת במצב הכי גבוה) אבל קיים ערך מקסימלי שבו $z'(t_0)=0$, $t_0\neq 0$.

$$g(\cos z(t_0)-1) = -E$$

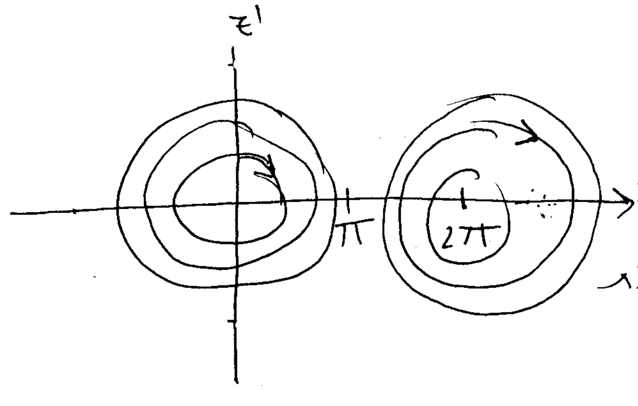
$$\Rightarrow \cos z(t_0)-1 = -\frac{E}{g}$$

$$\Rightarrow \cos z(t_0) = 1-\frac{E}{g}$$

$$\Rightarrow z(t_0) = \arccos\left(1-\frac{E}{g}\right) < \pi$$

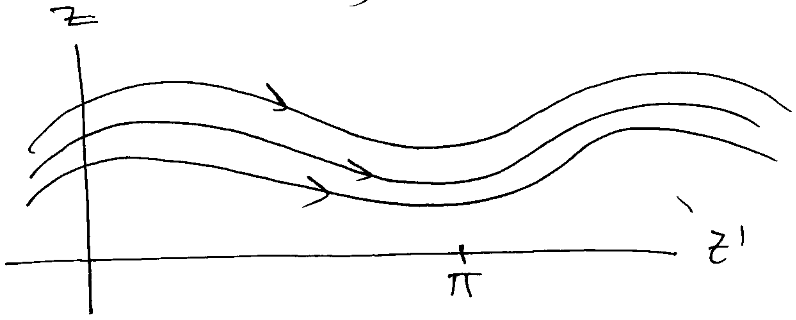
$$\Downarrow$$

$$0<E<2g$$



אלה המסלולים עבור אנרגיות E שונות שקטנות מ-$2g$.

(ג) $E>2g$ אז המטוטלת תנוע במעגלים שלמים.



השמגיעים למעלה נשארת אנרגיה קינטית כדי להמשיך לנוע.

(ד) $E=2g$ אז $ז'=0$ ונגמרת האנרגיה אז המטוטלת תיתקע בלמעלה. אבל היא תגיע לשם רק ב- $t=\infty$.

(31) 23.7.08
מפ"ד

מודל Lotka-Volterra

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a y_1(t) - b y_1(t) y_2(t) \\ -c y_2(t) + d y_1(t) y_2(t) \end{pmatrix} \qquad a,b,c,d>0$$

$y_1(t)$ - אוכלוסיית נטרפים

$y_2(t)$ - אוכלוסיית טורפים

מחפשים פתרונות ב- $\mathbb{R}^2_+$ (כלומר $y_1, y_2 \geq 0$)

$y^c = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ היא נקודה קריטית, כלומר $y(t) = y^c$ פתרון.

אבל מה קורה אם מתחילים בנקודה אחרת?

ע"י הכפלה ב- d של המשוואה הראשונה וב- b את השנייה

אפשר לקבל

$$y(0) = y_0$$

$$(1) \qquad d y_1'(t) + b y_2'(t) = a d y_1(t) - b c y_2(t)$$

וע"י הכפלת הראשונה ב- $\frac{c}{y_1}$ והשנייה ב- $\frac{a}{y_2}$ מתקבל

$$(2) \qquad c\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} + a\frac{y_2'(t)}{y_2(t)} = a d y_1(t) - b c y_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad c\frac{y_1'(t)}{y_1(t)} + a\frac{y_2'(t)}{y_2(t)} = a y_1'(t) + b y_2'(t)$$

אינטגרציה $\Rightarrow \quad c \log y_1(t) + a \log y_2(t) = d y_1(t) + b y_2(t) + \log K$

e בחזקת $\Rightarrow \quad y_1(t)^c e^{-d y_1(t)} y_2(t)^a e^{-b y_2(t)} = K > 0$

$$\Rightarrow \quad y_1^c e^{-d y_1} y_2^a e^{-b y_2} = K$$

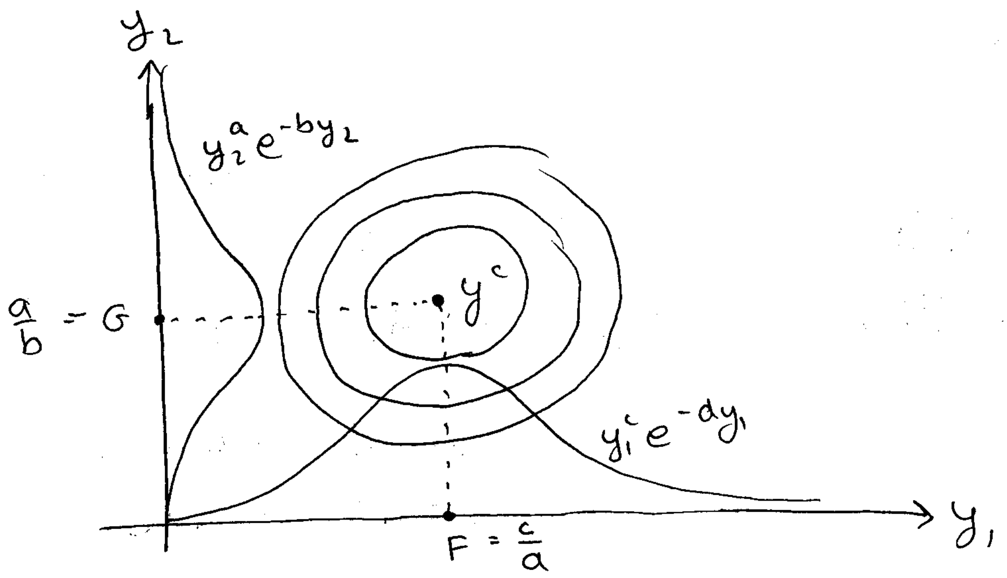
זה המסלול!

המסלול הוא קומפקטי כי K קבוע (כמובן $K < FG$).

$$F = \max_{0<x<\infty} x^c e^{-dx} = \frac{c}{d} \qquad G = \max_{0<x<\infty} x^a e^{-bx} = \frac{a}{b} \qquad \text{נסמן}$$

נגזרה והשוואה לאפס

מעניין, קיבלנו את הנקודה הקריטית...



אם נתחיל ב- $t=0$ במצב y_0 רק ש-

(הרבה טורפים מעט נטרפים) $(y_0)_2 < \frac{a}{b}$ $(y_0)_1 > \frac{c}{d}$

אז נקבל ל- $t>0$ (אבל קטן) $y_1'(t)>0$ $y_2'(t)>0$

לפי המשוואה המקורית. לאט עד ש- $y_2'(t_0) = \frac{a}{b}$ ושם

$y_1'(t_0)$. מכאן נתחיל עם $y_1(t)<0$ $t>t_0$, ועדיין

$y_2'(t)>0$. וכן הלאה. רק מתקבלים "מעגלים" שראינו

סביב y^c.

Q & A

• מישור הפאזות של מד"ה קשורה לקפיץ עם חיכוך:

$$mz'' + cz' + kz = 0$$

נכפול ב- z' ונקבל

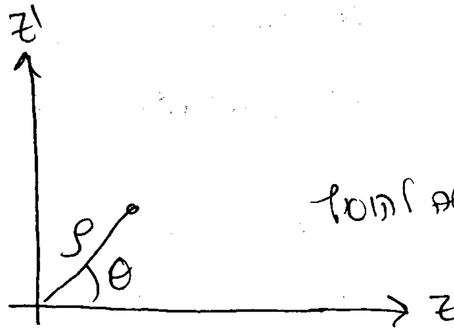
$$mz'z'' + c(z')^2 + kz'z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(z')^2 + c(z')^2 + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}z'(t)^2 + \frac{k}{2}z(t)^2\right) = -cz'(t)^2$$

נעבור לקואורדינטות פולריות. נסמן

$$\rho^2 = \frac{m}{2}(z')^2 + \frac{k}{2}z^2$$



$$\rho^2 = \frac{m}{2}(z')^2 + \frac{k}{2} z^2$$

$$z' = \rho \sin\theta$$

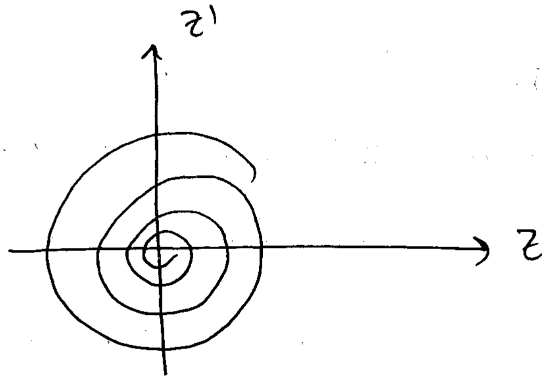
כאן דרוש למעשה להוסיף
דיון של שיר
למשקלות
אבל אנחנו
רוצים להדגים את העיקרון

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t)^2 = -c\,\rho(t)^2 \sin^2\theta(t)$$

$$\Rightarrow \quad 2\cancel{\rho(t)}\rho'(t) = -c\,\rho(t)^{\cancel{2}} \sin^2\theta(t)$$

$$\Rightarrow \quad 2\rho'(t) = -c\,\rho(t)\sin^2\theta(t)$$

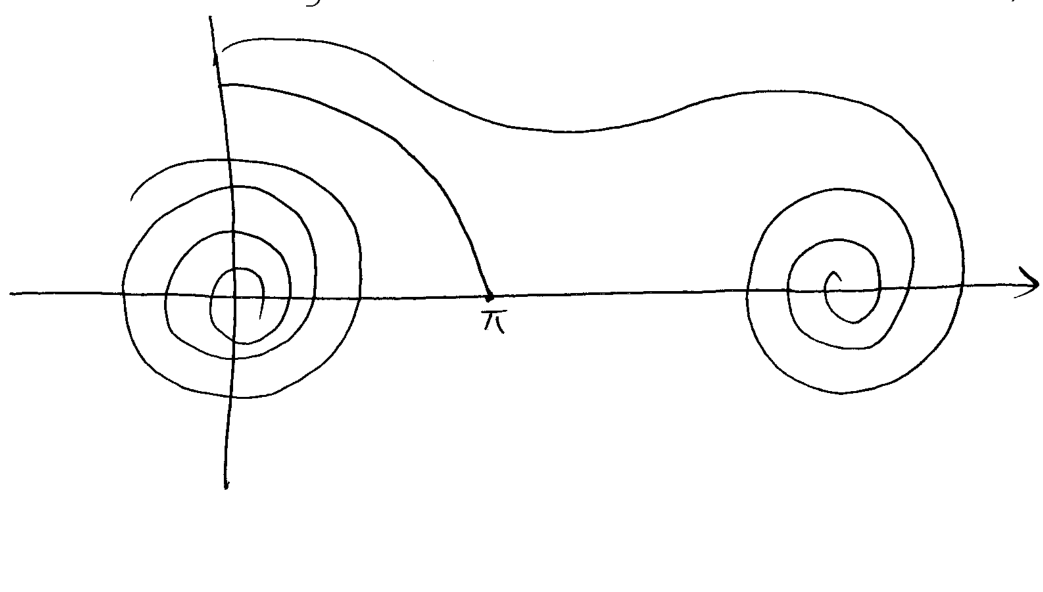


איך רושמים את המערכת הזאת כמערכת מסדר ראשון?

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}$$

איך מוצאים נקודות קריטיות של דבר כזה? אלה נקודות שנשלחות ע"י המטריצה לראשית. אבל המטריצה הפיכה אז הנקודה הקריטית היחידה היא $\binom{0}{0}$ לשם נכנסים הפתרונות...

• איך נראים המסלולים של מטוטלת לא לינארית עם חיכוך?



- נתונות m פונקציות וקטוריות (C^1) מ"ת $y^1(t),\dots,y^m(t)\in\mathbb{R}^m$
  כלומר $\exists t_0\in(\alpha,\beta) : \sum_{i=1}^{m} c_i y^i(t_0) = 0 \not\Rightarrow c_1=c_2=\dots=c_m=0$, $c_i\in\mathbb{R}$

  אפריורית זה נותן להן אפשרות להיות פתרונות יסודיים.
  האם בהכרח קיימת משוואה $y'(t)=A(t)y(t)$ כך
  שאלה הפתרונות היסודיים שלה?
  אם כן, אז יש m עמודות $\Phi(t)=(y^1(t),\dots,y^m(t))$
  וזו המטריצה היסודית והיא מקיימת $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$
  $$\Rightarrow A(t)=\Phi'(t)[\Phi(t)]^{-1}$$
  ואז אם הייתה $A(t)$ היא חייבת להיות כזאת.
  אבל זה גם עובד בכיוון ההפוך. אז $A(t)$ לחלוטין
  נקבעת ע"י הפתרונות!

- נניח $\lambda_1\neq\lambda_2$ ממשיים. אזי אם $te^{\lambda_1 t}$ פתרון של משוואה
  המתאימה (מסדר 2, מקדמים קבועים) אזי חייב $e^{\lambda_1 t}$ להיות
  פתרון. כנ"ל ל-$e^{\lambda_2 t}$. אבל אז $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ הם פתרונות
  יסוד. אבל $te^{\lambda_1 t}$ לא קומבינציה לינארית שלהם...
  גם לא יכול להיות ש-$te^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_2 t}$ פתרונות יסוד...

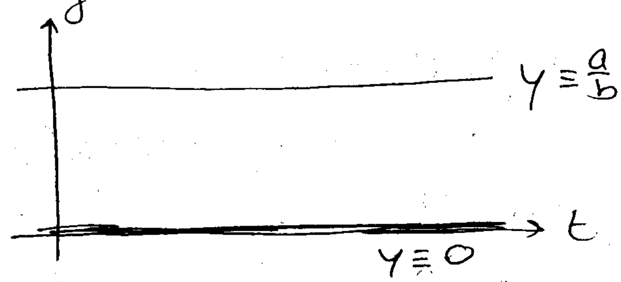
(33) 28.04.08
מד"ר

המבחן - השאלות הטכניות של משוואות במקדמים קבועים
יהיו מתוך האוניברסיטה הפתוחה.
השאלות התיאורטיות יהיו דומות לתרגילים.

<u>תזכורת למשוואה הלוגיסטית</u>: $y_0 = y(0)$ $\quad y' = y(a-by)$

כאשר $a,b>0$; $y(t)\in\mathbb{R}$.

יש למשוואה שני פתרונות קבועים וכל פתרון אחר לא יכול לחצות
אותם:



זה המודל של Verhulst להשתנות אוכלוסיה:

$$y' = ay - by^2 = y(a-by)$$

גידול

הקטנה למשל מכמות מזון שקטנה

הגידול ממותן ע"י גודל האוכלוסיה

הפרת a לפונקציה מחזורית: נניח שהמשוואה היא

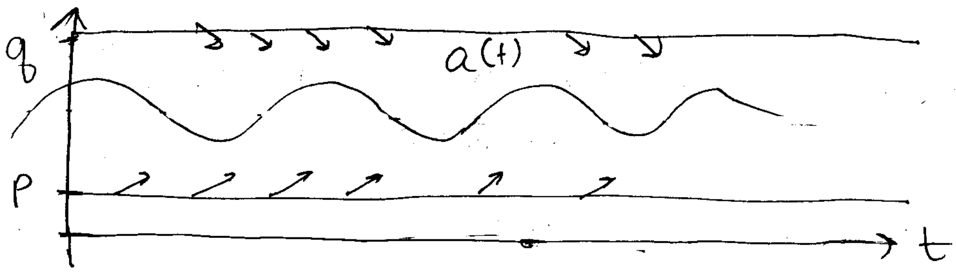
$$y'(t) = y(t)[a(t) - by(t)] \qquad b>0$$

$a(t)>0$ מחזורית ורציפה .. $a(t+T)=a(t)$ $\quad T>0$ מחזור

זה מבטא את זה שקצב הגידול של האוכלוסיה מחזורי
בהתאם לעונות השנה למשל. בהכללה הפשוטה הזאת
אנחנו מיד מאבדים שתי תכונות של המשוואה:

- הפרדת משתנים
- אוטונומיות

אז $a(t)$ נראית משהו כזה

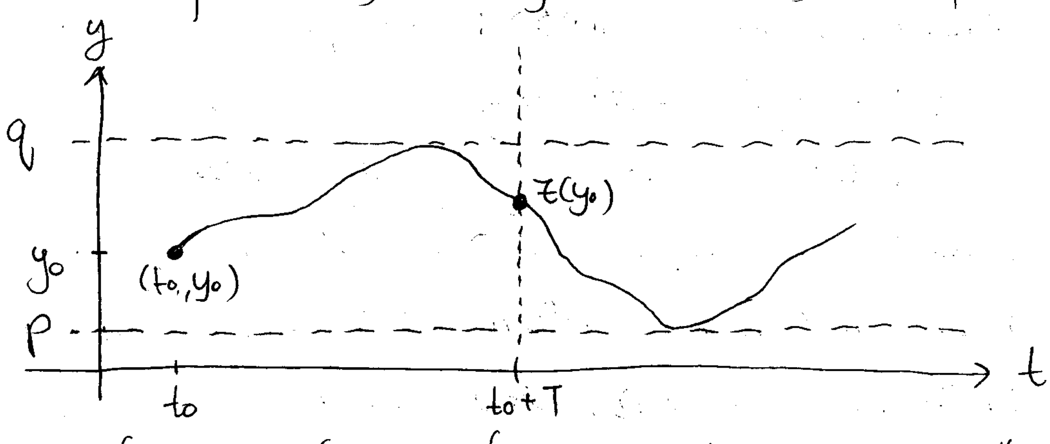


הליפשיציות מבטיחה לנו שיש פתרון יחיד בכל זמן לכל תנאי התחלה.

$$f(t,y) = y(a(t)-by)$$
$$y' = f(t,y)$$

$$\Rightarrow \quad f(t,p) = p(a(t)-bp) > 0$$

כאשר $0<p<\min a(t)$ כך ש- $a(t)-bp>0$
(זה אפשרי ע"י לקיחת $p>0$ מספיק קטן כך ש- $0<p<\frac{1}{b}\min a(t)$). לכן עבור p-ים כאלה הנגזרת חיובית, כלומר הפונקציה עולה.
אם $q>p$ כך ש- $a(t)-bq<0$ אז $f(t,q)<0$.
לכן פתרון הנמצא על הקו $y\equiv p$ עולה (כאשר t עולה) והפתרון שנמצא על הקו $y\equiv q$ יורד (כאשר t עולה).
לכן פתרון שמתחיל ב- (t_0,y_0) נראה כך:



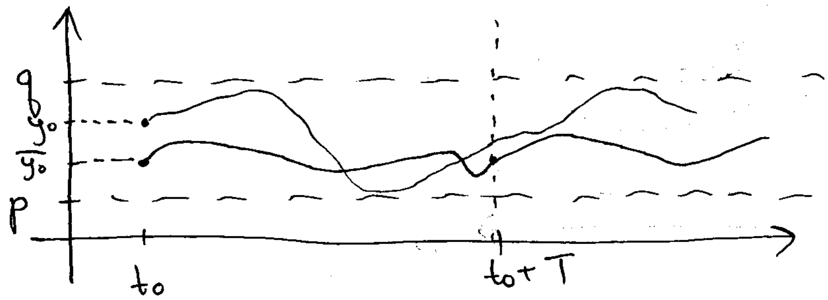
ברור מ"הנראות הכיוון" שהפתרון לא ינוס לברוח. כלומר, אם נסתכל בפתרון $y(t)$ שמקיים $y(t_0)=y_0\in[p,q]$ כי לכל $t>t_0$ חייב להיות (בגלל סימני $f(t,p), f(t,q)$) ש- $y(t)\in[p,q]$.
מהגיעו ל- t_0+T הוא מקבל ערך $z(y_0)\in[p,q]$ ולכן

$z:[p,q]\to[p,q]$ העתקה רציפה (לפי המשפט של תלות רציפה בתנאי ההתחלה).

<u>הגדרה</u>: ההעתקה $z:[p,q]\to[p,q]$ נקראת העתקת Poincaré.

להעתקה הנ"ל יש נקודת שבת, כלומר קיים $\bar{y}_0 \in [p,q]$ כך ש- $z(\bar{y}_0)=\bar{y}_0$. בגלל מחזוריות a, הפתרון הנ"ל $y(t;t_0,\bar{y}_0)$ יחזור על עצמו אחרי t_0+T, כלומר $y(t+T;t_0,\bar{y}_0)=y(t;t_0,\bar{y}_0)$ עבור $t_0\le t\le t_0+T$.

<u>מסקנה</u>: למשוואה ישנו לפחות פתרון מחזורי יחיד.



<u>הערה</u>: ההעתקה $z:[p,q]\to[p,q]$ היא מונוטונית, כלומר
$y_{0,1}>y_{0,2} \Rightarrow z(y_{0,1})>z(y_{0,2})$
<u>למה?</u> יש שני פתרונות שמתחילים אחד מעל השני ואנחנו יודעים שבכל הדרך הם אחד מעל השני. אחרת, הם היו נחתכים, אבל זו סתירה ליחידות...

<u>משפט Poincaré-Bendixson</u>

תהי $y'=f(y)$ מערכת אוטונומית במישור $y\in\mathbb{R}^2$

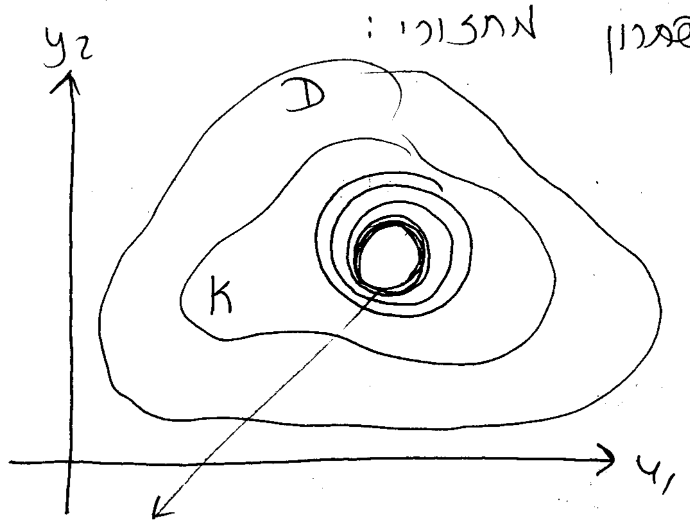
$$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(y_1,y_2)\\f_2(y_1,y_2)\end{pmatrix}$$

$f(y)$ ליפשיצית ($\Leftarrow$ יש קיום ויחידות) מוגדרת בתחום פתוח $D\subseteq\mathbb{R}^2$. תהי $K\subseteq D$ קומפקטית כך ש-

① קיים פתרון $y(t;\bar{P})$ ($y(0;\bar{P})=\bar{P}$ עבור $\bar{P}\in K$)

כך ש- $y(t;\bar{P}) \in K$ לכל $t \geq 0$.
ⓑ ב-K אין נקודות קריטיות של המערכת, כלומר אין נקודות אפס של f. $\Leftarrow$ $f|_K \neq 0 \in \mathbb{R}$

משפט: בתנאים לעיל, קיימת אחת משתי האפשרויות:
ⓐ הפתרון $y(t;\bar{P})$ הוא מחזורי (והמסלול סגור במישור הפאזה (y_1,y_2)).
ⓑ $y(t;\bar{P})$ מתכנס לפתרון מחזורי:



דוגמה: Lotka-Volterra:

$$f_1(y_1,y_2) = ay_1 - by_1y_2$$
$$f_2(y_1,y_2) = -cy_2 + dy_1y_2$$

כל פתרון ראינו ש-

$$y_1^a e^{-by_1} y_2^c e^{-dy_2} \equiv C \qquad 0 \leq C < FG$$

כאן $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (הרביע הראשון) !-

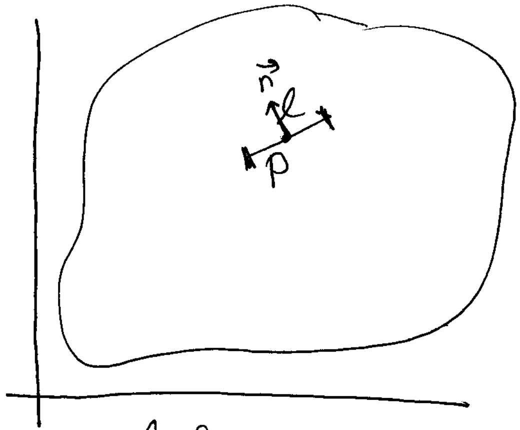
$K = \{(y_1,y_2) : y_1^a e^{-by_1} y_2^c e^{-dy_2} = C\}$ - ברור שכל

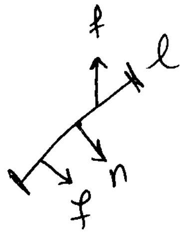
קבוצה סגורה וחסומה ואין בה נקודות קריטיות כי אם $C = FG$.
אז אלה בדיוק התנאים של המשפט ולכן מהמשפט או שהפתרון הוא מחזורי או שהוא מתכנס למחזורי. אבל במקרה זה מתגדרת K מגדיר שהיא כבר למעשה המסלול ומדובר בפתרון מחזורי.
מתניה כותב: משפט PB נותן שקיים (א) המסלול מחזורי או (ב) מתכנס למסלול מחזורי. אבל אז כל המסלול המחזורי $y_1^a e^{-by_1} y_2^c e^{-dy_2} = C$ ולכן הוא חייב

להתלכד עם המסלול.

__הוכחת המשפט__ (ספק 16 ב- Coddington-Levinson):

(א) __קטע טרנסוורסלי:__ תהי $P\in D$ נקודה לא קריטית. קטע פתוח ישר l (המכיל את P) יקרא טרנסוורסלי לשדה f אם $\vec{n}\cdot f\neq 0$ (מכפלה סקלרית) כאשר $\vec{l}\perp\vec{n}$ (כלומר f לא באותו כיוון כמו l). זה אומר ש- $f|_l$ "מצביע" תמיד לאותו כיוון יחסית ל-l (מטעמי רציפות לא יכול להיות המצב:





תמיד יש קטע כזה אם ניקח l מספיק קטן.

(ב) תהי $P\in D$ נקודה לא קריטית ויהי $y(t;P)$ הפתרון דרכה. יהי l קטע טרנסוורסלי ב- P. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים עיגול Γ_ε שמרכזו ב- P, כך שלכל $Q\in\Gamma_\varepsilon$, הפתרון $y(t;Q)$ יחתוך את l ב- $|t|\le\varepsilon$.

__הוכחה:__ נניח שמשוואת l היא $ay_1+by_2+c=0$. נתבונן במשוואה

$$L(t,\xi,\eta)=ay_1(t;\xi,\eta)+by_2(t;\xi,\eta)+c=0$$

כאשר $Q=Q(\xi,\eta)$. זוהי משוואה ב- 3 נעלמים t,ξ,η. כאשר $t=0$, $(\xi,\eta)=(\xi_0,\eta_0)=P$ המשוואה מתקיימת

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Big|_{t=0,(\xi,\eta)=(\xi_0,\eta_0)=P}=(a,b)\cdot f(P)\neq 0$$

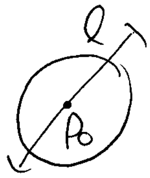
מכפלה סקלרית

$\Leftarrow$ לפי משפט הפונקציות הסתומות, עבור עיגול מספיק קטן Γ_ε סביב P, קיים פתרון יחיד $t(\xi,\eta)$ של $L=0$. ה- t הזה הוא רציף ו- $t(\xi_0,\eta_0)=0$ $\Leftarrow$ $|t|<\varepsilon$ אם Γ_ε בעל רדיוס מספיק קטן.

36 30.7.08

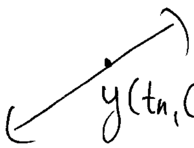
משפט: $y'=f(y)$ מערכת אוטונומית במישור $y\in\mathbb{R}^2$.
$f(y)$ ליפשיצית מוגדרת בתחום פתוח $D\subseteq\mathbb{R}^2$. נניח
שיש $K\subseteq D$ קומפקטית כך ש-
א) קיים פתרון $y(t;\bar P)\subseteq K\subseteq D$ $\quad t\ge 0$
ב) ב-K אין נקודות קריטיות.
אזי $y(t;\bar P)$ סגור (מחזורי) או מתכנס למסלול סגור (מחזורי).

הוכחה.
א) l טרנסוורסלי - עשינו
ב) l טרנסוורסלי, $P_0\in l$. לכל $\varepsilon>0$ קיים כדור Γ_ε שמרכזו P_0 כך שלכל נקודה $Q\in\Gamma_\varepsilon$, $y(t;Q)\in l$ עבור $|t|<\varepsilon$. - עשינו



ג) (לב העניין) יהי l טרנסוורסלי! - $y(t;Q)$ מסילה המוכלת ב-K לכל $0\le t$ (לפי הנחות המשפט יש לפחות אחת כזאת). אזי לכל קטע $[t_1,t_2]$ ב-$(0,\infty)$ המסילה תחתוך את l לכל היותר מספר סופי של פעמים. יתר על כן, נקודות החיתוך יהיו מסודרות בסדר מונוטוני המתאים לערכיהן ב-t.

הוכחה: נניח שקיימות אינסוף נקודות $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq[t_1,t_2]$ כך ש-$y(t_n;Q)\in l$. מדובר בקטע סופי סגור



אזי בה"כ $t_n\to\bar t\in[t_1,t_2]$. לכן $y(\bar t;Q)\in l$ (בגלל רציפות). אבל

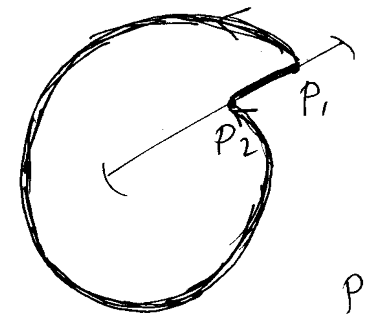
$$\frac{y(\bar t;Q)-y(t_n;Q)}{\bar t-t_n}\longrightarrow y'(\bar t;Q)=f(y(\bar t;Q))$$

אבל המנה הנ"ל מקבילה ל-l ולכן גם הגבול מקביל ל-l, כלומר $f(y(\bar t,Q))\parallel\vec l$ וזו סתירה.

לכן, בהינתן מספר סופי של נקודות חיתוך

$P_1=y(\tau_1,Q)\in l$
$\vdots$
$P_j=y(\tau_j,Q)\in l$

כאשר $t_1 \le \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j \le t_2$ נסתכל בקו הסגור
C המורכב מקטע המסילה $y(t;Q)$ $\tau_1 \le t \le \tau_2$ ומ
קטע הישר $P_1P_2 \subseteq l$. C לא חותך את עצמו
בגלל היחידות.



לפי משפט ז'ורדן ל-C יש תחום פנימי U_p
ותחום חיצוני U_o. אזי P_3 לא יכולה להיות
על הקטע P_1P_2 כי המסילה ב-P_3 מכוונת
מ-U_p ל-U_o והכיוון הזה בקטע P_1P_2
נוגד את כיוון השדה (הנחת הטרנסוורסליות של l)
וכן הלאה. לכן $P_1, P_2, P_3, \dots$ מסודרות על l
בסדר התואם את $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$

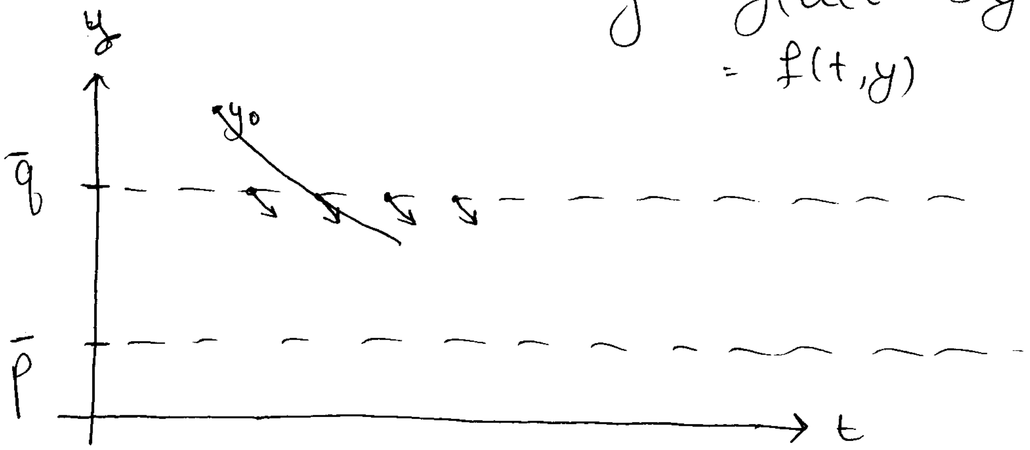
(3) אם $y(t;\bar P)$ מחזוריות אז גמרנו. אחרת, בוודאי
קיימת נקודת גבול $S = \lim_{n\to\infty} y(t_n, \bar P)$ (כי המסילה
היא ב-K שהיא קומפקטית) כאשר $t_n \uparrow \infty$ כלשהי
רק שיש התכנסות; $S \in K$.
משפט הקיום מבטיח שקיימת מסילה $y(t;S) = C_s$ עבור
$0 \le t < \bar t$. למשל, $\bar t = \infty$ ו- $C_s \subseteq K$; נניח
ש- $0 < \bar t < \infty$. נגדיר $P_n = y(t_n;\bar P) \to S$
נסתכל במסילות $y(t;P_n)$. לכן $y(t;P_n) \xrightarrow{\text{במ"ש}} y(t,S)$
(ממשפט התלות הרציפה). לכן $y(t;S) \subseteq K$ עבור
$t < \bar t$ לכן $y(\bar t;S) \in K$. אבל אם כך, לפי משפט
האינטרוול המקסימלי, ניתן להמשיך את $y(t,S)$ מעבר
ל-$\bar t$. כל נקודה של C_s היא גבול של נקודות $y(t;\bar P)$
כי לכל t אז $y(t_n+t;\bar P) \to y(t;S)$. לכן C_s
כולה מורכבת מנקודות גבול של $y(t;\bar P)$

(ד) ההתכנסות $P_n \to S$ גוררת, לפי שלב ב', שאם l
קטע טרנסוורסלי המכיל את S, קיימות נקודות חיתוך P_n^* של
$y(t;\bar P)$ השואפות מונוטונית ל-S. כך ש- $|t_n^* - t_n| < \varepsilon$

(לפי שלב ב). רק ו-$\{t_n^*\}$ אותו סדר כמו $\{t_n\}$
אבל P_n^* סדרה מונוטונית המתכנסת ל-S (כי $P_n \to S$
(שלב ג')

Q&A

• $y' = y(a(t)-by) = f(t,y)$



$\bar q$ מקיים $a(t)-b\bar q<0$ ושם השדה מכוון כלפי מטה.
אם $q>\bar q$ אז $a(t)-bq<-\eta<0$ וגם שם השדה מכוון כלפי מטה. אז פתרון שמתחיל ב-y_0 שמעל $\bar q$ בהכרח יורד למטה, חוצה את $\bar q$ ונתקע שם. אבל הפתרון הזה בוודאי לא מתבדר. אבל ראינו שכן יש לפחות פתרון מתבדר אחד.

יהי $y(t)$ פתרון כך ש- $y(0)=y_0>\bar q$. אז

(i) קיים $0<t_0<\infty$ כך ש- $y(t_0)=\bar q$

(ii) $y(t)\le \bar q$ לכל $t\ge t_0$

הוכחה:

(ii) הפתרון קיים באינטרוול $[t_0,t_0+\eta)$. מספיק להראות שבאינטרוול הזה $y(t)\le\bar q$. נסתכל בקבוצה $\{\tau\in[t_0,t_0+\eta): y(\tau)>\bar q\}$ ונניח בשלילה שהיא לא ריקה. אז יש לקבוצה חסם תחתון $\bar\tau\in[t_0,t_0+\eta)$ מטעמי רציפות, $y(\bar\tau)\ge\bar q$ (כי קיימת סדרה $t_n\downarrow\bar\tau$ כך ש- $y(t_n)>\bar q$). $y(\bar\tau)=\bar q$ כי אחרת גם $y(\bar\tau-\delta)>\bar q$ עבור δ מספיק קטן.

$$0 < \frac{y(t_n) - y(\bar{\tau})}{t_n - \bar{\tau}} \longrightarrow y'(\bar{\tau}) = f(\bar{\tau}, y(\bar{\tau})) =$$

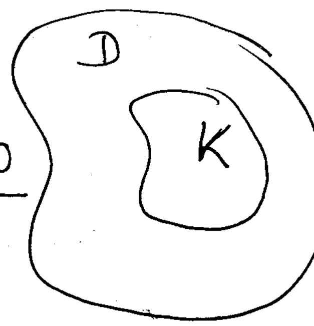
$$= f(\bar{\tau}, \bar{q}) < 0$$

וזו סתירה.

(i) ממשפט האינטרוול המקסימלי.

(38) 4.8.08
מד"ר

$K \subseteq D$ קומפקטית. $y(t;\bar p) \subseteq K$ $t \geq 0$



ונניח ש- $y(t;\bar p)$ אינו מחזורי.

<u>סיכום שלב ה</u>: ניקח $K \ni S = \lim_{n\to\infty} y(t_n;\bar p)$

כאשר $t_n \uparrow +\infty$; $t_{n+1}-t_n>2$. ומסלול

$C_S = y(t;S)$ מקיים $\{y(t;S), t\geq 0\} \subseteq K$

וכל נקודה של C_S היא נקודת גבול.

אם l קו טרנסוורסלי ב-S ($S \in l$) אזי על l,

סדרת נקודות $\{P_n^*\} \to S$ באופן מונוטוני, $P_n^* \in \{y(t;\bar p)\}$

אם $P_n^* = P_{n+1}^*$ אזי $y(t;\bar p)$ מסלול סגור (כי

$P_n^* = y(t_n^*;\bar p)$, $P_{n+1}^* = y(t_{n+1}^*;\bar p)$; $t_n^* < t_{n+1}^*$)

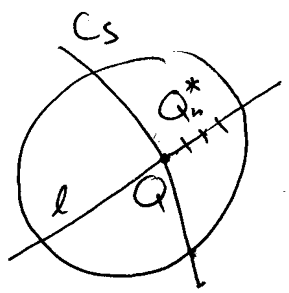
אם עבור n מסוים, $P_n^* = S$, אז מהמונוטוניות

ומההתכנסות גם $P_{n+1}^* = S$ וחזרנו למקרה הקודם.

נשארנו לכן עם סדרה מלאה (כלומר נקודות שונות) $P_n^* \to S$.

<u>שלב ז - *finale*</u>: נסתכל בנקודה Q שהיא

נקודת גבול של נקודות ב- C_S.



לפי השלב הקודם, אם l קו טרנסוורסלי, $Q \in l$

אזי קיימות עליו נקודות (מסודרות מונוטונית)

$C_S \ni Q_n^* \to Q$.

אם Q_n^* "נעצרת" (כלומר $Q_n^* = Q_{n+1}^*$) אזי

C_S מחזורי (בגלל האוטונומיות מרגע שהוא מחזורי

"והחל ממקום מסוים" זה אומר שהוא כולו מחזורי)

אחרת, אז Q_n^* סדרה מלאה. אבל כל Q_n^* היא נקודת

גבול של $y(t;\bar p)$ (ראינו ש- $Q_n^* \in C_S$) אבל, לפי

השלב הקודם קיימת סדרה $y(t;\bar p) \ni P_{n_j}^* \to Q_n^*$ וגם $P_{n_j}^* \in l$

(כי l תמיד טרנסוורסלי, כלומר הוא יכול להיות הקו הטרנסוורסלי

של כולם). כדי לא להגיע לסתירה עם המונוטוניות (כי

חיתוכי $y(t;\bar p)$ עם l יכול להיות רק סדרה מונוטונית)

חייב להתקיים שסדרה אחת $\{P_{n_j}^*\}_j$ היא סופית. כלומר

$P_{n_{j+1}}^* = P_{n_j}^* = Q_n^*$. אבל אז $y(t;\bar p)$ כן מחזורית.

אם הנחנו שהגבול מתבדרות אף בהכרח Q_n^* נעצרות על C_s
מתבדרות (ולכן $Q\in C_s$) וקטרנסוורסלי l רק ש- $Q\in l$
המסילה C_s חותכת את l רק ב- Q).
ניתן להראות ש-$y(t;\bar p)$ אינה מתכנסת אפי C_s
(שהגדרתה להיות מתבדרת): ללכת את כל נקודות ועגבל
האפשריות של $y(t;\bar p)$ במובן של $y(t_n;\bar p)\longrightarrow Q$ כאשר $t_n\uparrow$.
אבל זה נובע מהטענה הבאה: תהי $\omega^+=\{Q=\lim_{t_n\uparrow\infty} y(t_n;\bar p)\}$
אזי ω^+ קשירה, טופולוגית מתקיים ש- $\omega^+=C_1\cup C_2$ כאשר
C_1, C_2 סגורות לא ריקות וזרות.

<u>הוכחת הטענה</u>: נניח שלא ותהיינה $a\in C_1$, $b\in C_2$
נסמן $\delta=\min_{\substack{x\in C_1\subseteq K\\ y\in C_2\subseteq K}}|x-y|>0$ (לכן $\delta>0$ כי זה מרחק בין שתי קבוצות קומפקטיות).
נניח ש- $y(t_n,\bar p)\xrightarrow[t_n\uparrow\infty]{} a$, $y(s_n;\bar p)\xrightarrow[s_n\uparrow\infty]{} b$
עבור n מספיק גדול

$$|y(t_n;\bar p)-a|<\frac{\delta}{2} \qquad |y(s_n;\bar p)-b|<\frac{\delta}{2}$$
$$|y(t_n;\bar p)-b|>\frac{\delta}{2} \qquad |y(s_n;\bar p)-a|>\frac{\delta}{2}$$

לכן, בפרט, עבור n מספיק גדול

$$dist(y(t_n,\bar p),C_1)<\frac{\delta}{2}$$
$$dist(y(t_n;\bar p),C_2)>\frac{\delta}{2}$$
$$dist(y(s_n;\bar p),C_1)<\delta/2$$

הפונקציה $dist(x;C_1)$ רציפה ב- $x\in K$;
$y(t;\bar p)$ רציפה ב-t. לכן $dist(y(t;\bar p),C_1)$ פונקציה
רציפה ב-t. לכן תהיה סדרה $r_n\uparrow\infty$ כך ש-
$dist(y(r_n;\bar p),C_1)=\delta/2$. ניקח ת"ס מתכנסת
$y(r_n;\bar p)\longrightarrow Q$. $dist(Q,C_1)\ge\frac{\delta}{2}$.

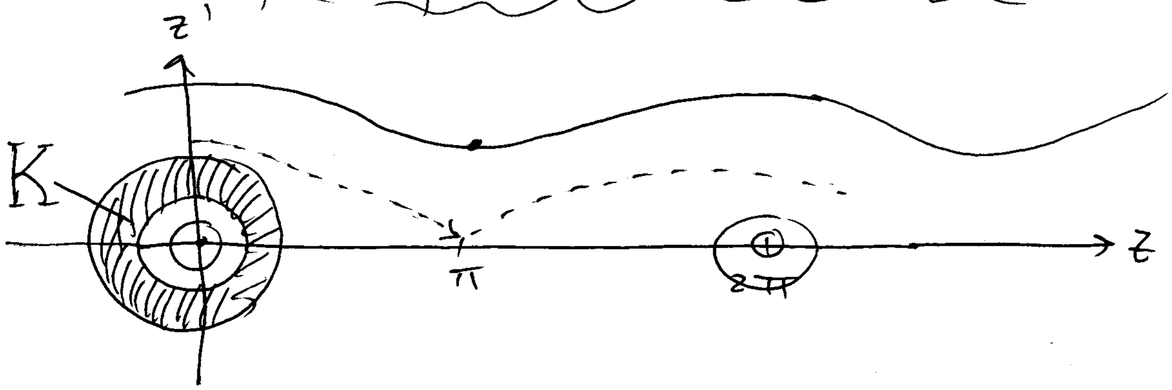
$$dist(y(r_n;\bar p),C_2)\ge\frac{\delta}{2}\Rightarrow dist(Q,C_2)\ge\frac{\delta}{2}$$

$Q\in\omega^+$ נקודת גבול שלא שייכת ל- C_1 או ל- C_2
וזו סתירה.

מסקנה: אם $y(t;\bar{p})$ אינה מחזורית אזי המסלול הגבולי C_s הוא מחזורי ומכיל את כל נקודות הגבול של $y(t;\bar{p})$ ($\omega^+ = C_s$) שהרי אחרת, הייתה $\omega^+ = C_s \cup C$ כאשר $C \subseteq K$ קבוצה לא ריקה ו- $C \cap C_s = \emptyset$. אבל ראינו שזה לא יתכן (צריך להוכיח). בזאת סיימנו להוכיח את Poincaré-Bendixson

---

התנהגות בסביבת נקודה קריטית



$k>0$

$$L z''(t) + g\sin z(t) = 0$$
$$E = \frac{L}{2} z'(t)^2 + g(1-\cos z(t))$$

K מכילה כל מסלול עם $E>0$ מספיק קטן. כל מסלול חייב להיות מחזורי, כי הוא נושא E קבוע.

הגדרה. תהי $y' = f(y)$ מערכת אוטונומית. $y' = f(y)$
$f(y) \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה. נקודה $\bar{p} \in D$ תיקרא **קריטית** אם $f(\bar{p}) = 0 \in \mathbb{R}^m$.
נקודה קריטית $\bar{p}$ תיקרא **סטבילית** אם מתקיים התנאי הבא: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $Q \in B(\bar{p}, \delta)$ אז $y(t;Q) \in B(\bar{p}, \varepsilon)$ לכל $0 \le t$.

<u>טענה:</u> תהי $V \in C^1(D)$ (גזירה ברציפות ממשית) כך ש-

(i) בכל D, $(\nabla V, f) \le 0$ (מכפלה סקלרית)

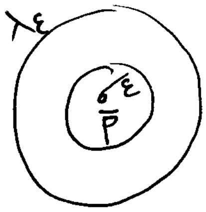
(ii) קבוע $0 < \varepsilon_0$ מסוים $V(\bar{P}) < V(P)$ עבור $P \in B(\bar{P}, \varepsilon_0) \setminus \{\bar{P}\}$

($\bar{P}$ נקודה קריטית). אזי $\bar{P}$ סטבילית.

<u>הוכחה:</u> ניקח $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. ויהי $\lambda_\varepsilon = \min_{s \in \partial B(\bar{P}, \varepsilon)} V(s) > V(\bar{P})$

(לפי (ii)). ניקח $0 < \delta < \varepsilon$ רק ש-

$\max_{s \in \overline{B(\bar{P}, \delta)}} V(s) < \lambda_\varepsilon$. תהי $Q \in B(\bar{P}, \delta)$



נסתכל במסלול $y(t; Q)$.

$$\frac{d}{dt} V(y(t;Q)) \overset{\text{השרשרת}}{=} (\nabla V(\dots), y'(t;Q)) =$$

$$\overset{\text{המשוואה}}{=} (\nabla V(\dots), f(\dots)) \overset{(i)}{\le} 0$$

לכן $V(y(t;Q))$ אינה עולה (ב-t). לכן

$$V(y(t;Q)) \le \max_{s \in \overline{B(\bar{P}, \varepsilon)}} V(s) \le \lambda_\varepsilon$$

ומכאן ש- $y(t;Q)$ לא יכול לחתוך את $\partial B(\bar{P}, \varepsilon)$ (כי שם ערך V לפחות $\lambda_\varepsilon > \max_{B(\bar{P}, \varepsilon)} V(s)$.)

לכן המסלול קיים בכל זמן $t \ge 0$ ותמיד מוכל ב- $B(\bar{P}, \varepsilon)$.

וזו בדיוק סטביליות. ☺

פונקציה V זו נקראת פונקציית ליאפונוב של המערכת.