<u>תזכורת:</u> קבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$ היא פתוחה אם לכל $x\in A$ קיים כדור $B(x,r)\subseteq A$.

קבוצה $B\subset\mathbb{R}^n$ היא סגורה אם משלימתה פתוחה.

נקודה x היא גבול של סדרה $\{x^k\}$ אם לכל כדור $B(x,r)$ סביב x, קיים m שאחרי בכדור כך שלכל $k>m$, $x^k\in B(x,r)$.

<u>טענה:</u> קבוצה $C\subseteq\mathbb{R}^n$ היא סגורה אמ"מ לכל $\{x^n\}\subseteq C$ מתכנסת ל-x, גם $x\in C$.

<u>הוכחה:</u> נניח ש-C סגורה, ותהי $\{x^n\}\subseteq C$, $\lim x^n=x$. נניח בשלילה $x\notin C$. לפי ההגדרה, $\overline{C}$ פתוחה ולכן קיים כדור $B(x,r)\subseteq\overline{C}$. בפרט, אין נקודה מהסדרה $\{x^n\}$ בכדור, בסתירה להגדרת ההתכנסות.

נניח כעת שלכל סדרה $\{x^n\}\subseteq C$ מתכנסת, גם הגבול איבר ב-C. נראה כי $\overline{C}$ פתוחה. יהא $x^0\in\overline{C}$. נתבונן בסדרת הכדורים $B_n=B(x^0,\frac{1}{n})$. אם קיים n עבורו $B(x^0,\frac{1}{n})\subseteq\overline{C}$, סיימנו. אם לא אז לכל n קיים $x^n\in C$ עבורו $x^n\in B(x^0,\frac{1}{n})$. אזי הסדרה $\{x^n\}$ מתכנסת ל-x^0 $\Leftarrow$ $x^0\in C$, סתירה. ▨

קבוצה $K\subset\mathbb{R}^n$ תיקרא קומפקטית אם לכל סדרה $\{x^n\}\subset K$ יש תת-סדרה שמתכנסת לגבול ב-K.

<u>משפט:</u> עבור קבוצה $K\subset\mathbb{R}^n$, התנאים הבאים שקולים:

(א) K קומפקטית.

(ב) K סגורה וחסומה.

(ג) לכל כיסוי פתוח של K יש תת-כיסוי סופי.

(ד) לכל אוסף $\{S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ של קבוצות סגורות של K (<u>ביחס ל-K</u>) כך שכל חיתוך של מס' סופי של קבוצות (תתי) אינו ריק, גם $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}S_\gamma\neq\emptyset$.
נקרא "תכונת החיתוך הסופי"

<u>הוכחה חלקית:</u> <u>(א) $\Leftarrow$ (ב)</u> נניח K קומפקטית. אם K לא חסומה אזי לכל n קיים $x^n\in K$ כך ש-$x^n\notin B(0,n)$, כלומר $n<|x^n|$. הסדרה $\{x^n\}$ אינה מכילה תת-סדרה מתכנסת (התורמות של איברים שואפים לאינסוף), בסתירה לקומפקטיות. אם K לא סגורה אזי קיימת $\{x^n\}\subseteq K$ מתכנסת ל-x כך ש-$x\notin K$. אולם מקומפקטיות, יש תת-סדרה $\{x^{n_k}\}$ שמתכנסת לגבול ב-K. כל תת-סדרה של סדרה מתכנסת, מתכנסת אף היא לאותו גבול $\Leftarrow$ $x\in K$, סתירה. לכן קומפקטית $\Leftarrow$ סגורה וחסומה.

אם K סגורה וחסומה, תהי $\{x^n\}\subset K$ סדרה. נתבונן בקואורדינטה הראשונה. הסדרה $\{x_1^n\}\in\mathbb{R}$ הינה חסומה (כי $\{x^n\}$ חסומה) ולכן לפי משפט בולצנו-ויירשטראס, יש לה תת-סדרה מתכנסת $\{x_1^{n_k}\}$.

כעת נתבונן בסדרה $\{x_2^{n_k}\}$. נוכל למצוא תת-סדרה מתכנסת $\{x_2^{n_{k_l}}\}$. נמשיך כך עם כל הקואורדינטות (רק מס' סופי!) ונקבל תת-סדרה שמתכנסת בכל קואורדינטה. תת-סדרה זו מתכנסת גם בנורמה של $\mathbb{R}^n$ כי אם רוצים שיתקיים $|x^m-x|<\varepsilon$ לכל $m>m_0$, נבחר m_0 מספיק גדול כך שלכל $1\le i\le n$ יתקיים $|x_i^m-x_i|<\sqrt{\varepsilon^2/n}$ לכל $m>m_0$, ואז $|x^m-x|=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i^m-x_i)^2}<\varepsilon$. לבסוף, K סגורה ולכן גם הגבול של תת-הסדרה הינו איבר ב-K.

<u>הערה:</u> הגרירה א <= ב הינה נכונה תמיד, הגרירה ב <= א נכונה רק לפעמים.

אולי לא להראות →
<u>ג <=> ד</u> נניח שכל כיסוי פתוח של K יש תת-כיסוי סופי. תהי $\{S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ משפחה של קבוצות סגורות ב-K בעלת תכונת החיתוך הסופי. אזי $\{K\setminus S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ הינן פתוחות ב-K. כעת, אם $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma=\phi$ אז $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(K\setminus S_\gamma)=K$ ולכן $\{K\setminus S_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ מהווה כיסוי פתוח של K <= יש תת כיסוי סופי $\{K\setminus S_i\}_{i=1}^m$. אזי $\bigcup_{i=1}^m(K\setminus S_i)=K$ ולכן $\bigcap_{i=1}^m S_i=\phi$, בסתירה לתכונת החיתוך הסופי.

בכיוון השני, נניח ~~...~~ שכל משפחה של קבוצות סגורות ב-K בעלת תכונת החיתוך הסופי, החיתוך של כל המשפחה אינו ריק. יהי $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma$ כיסוי פתוח של K <= $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(V_\gamma\cap K)$ כיסוי פתוח של K <= הקבוצות $S_\gamma=K\setminus(V_\gamma\cap K)$ הינן סגורות ביחס ל-K וחיתוכן ריק <= קיימת תת-~~...~~ משפחה סופית $\{S_i\}_{i=1}^m$ שחיתוכה ~~...~~ ריק <= $\bigcap_{i=1}^m(K\setminus(V_\gamma\cap K))=\phi$ <= $\bigcup_{i=1}^m(V_\gamma\cap K)=K$ <= יש תת-כיסוי סופי.

<u>ד <= א</u> נניח ש-K אינו קומפקטי. אזי קיימת סדרה $\{x^n\}\subset K$ שאין לה תת סדרה מתכנסת. נתבונן בקבוצות $F_m=\{x^n\}_{n=m}^{\infty}$. קבוצות אלו מוכלות ב-$K$ והינן סגורות ביחס ל-K כי אין להן גבול חלקי בתוך K. כמו-כן, ברור שהחיתוך של כל כמות סופית של F_m-ים אינו ריק. לכן ל-$\{F_m\}$ ~~...~~ מקיימת תכונת החיתוך הסופי ולכן $\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m\neq\phi$, סתירה.

<u>א <= ג</u> נוכיח טענה קצת יותר חלשה: נראה שכל כיסוי <u>בן מניה</u> יש תת-כיסוי סופי.
יהי $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$ כיסוי בן מניה של K. אם אין לו תת-כיסוי סופי אז בפרט, לכל j, $\bigcup_{i=1}^{j}V_i$ אינו כיסוי של K. אזי לכל j, קיים $x^j\in K\setminus\bigcup_{i=1}^{j}V_i$. לסדרה $\{x^j\}$ יש תת-סדרה מתכנסת $\{x^{j_k}\}$ וגבולה $\overset{x}{\text{איבר}}$ ב-K. אולם לכל j_0 ולכל $j\geq j_0$ מתקיים $x^j\in K\setminus\bigcup_{i=1}^{j_0}V_i$. הקבוצה $K\setminus\bigcup_{i=1}^{j_0}V_i$ הינה סגורה ולכן אם $x^{j_k}\in K\setminus\bigcup_{i=1}^{j_0}V_i$ החל ממקום מסוים והסדרה $\{x^{j_k}\}$ מתכנסת אז גם גבולה איבר ב-$K\setminus\bigcup_{i=1}^{j_0}V_i$. קיבלנו <u>שלכל</u> j_0, $x\in K\setminus\bigcup_{i=1}^{j_0}V_i$, אבל אז $x\in K\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i$, בסתירה לכך ש $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$ הינו כיסוי של K. ▨

<u>הערה:</u> כדי להשלים את הוכחת המשפט נותר להוכיח שמכל כיסוי אפשר להוציא כיסוי בן מניה. זה נובע מכך שכל קבוצה קומפקטית היא ספרבילית וממשפט Lindelöf שאומר שבמרחב ספרבילי, מכל כיסוי אפשר להוציא כיסוי בן מניה.

<u>תזכורת:</u> עבור $K\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית, הגדרנו נורמה על $C(K,\mathbb{R}^m)$ ע"י $\|f\|=\max_{x\in K}|f(x)|$.
מה היא התכנסות בנורמה זו?

אם $f_n\xrightarrow[\text{בנורמה}]{}f$ אז $\|f_n-f\|\to 0$ <= $\sup_{x\in K}|f_n(x)-f(x)|\to 0$ <= לכל ε קיים n_0 כך שלכל n_0 מהחל, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ <u>לכל</u> $x\in K$ <= <u>בדיוק</u> ההגדרה של התכנסות במ"ש של פונקציות!

קבוצה $A\subset C(K,\mathbb{R}^m)$ היא <u>סגורה</u> אם לכל סדרה $\{f_n\}\subset A$ עם $f_n\xrightarrow[\text{בנורמה}]{}f$, מתקיים $f\in A$.

המשפט שהוכחנו בהרצאה, שאם $\{f_n\}\subset C(K,\mathbb{R}^m)$ ו-$\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ל-f אז גם $f\in C(K,\mathbb{R}^m)$ בעצם אומר ש-$C(K,\mathbb{R}^m)$ סגורה.

שאלה: האם קבוצת הפונקציות $\{f_n\}$ כאשר $f_n(x)=x^n$ הינה סגורה ב- $C([0,1])$?

תשובה: כן! אמנם סדרה זו מתכנסת במובן **נקודתי** לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$, אבל ההתכנסות אינה במידה שווה. אם מתבוננים לפי "במידה שווה", אין גבול לסדרה. במונחי נורמה, הסדרה $\{f_n\}$ אינה סדרת קושי בנורמה שלנו (כי לכל ε ולכל n קיימים $n_1,n_2>n$ וקיים $x\in[0,1]$ כך ש $|f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|=|x^{n_1}-x^{n_2}|>\varepsilon$ ולכן $\|f_{n_1}-f_{n_2}\|>\varepsilon$). לכן לפי הטענה מתחילת השיעור, הקבוצה היא סגורה ב- $C([0,1])$.

דוגמא להעתקה מכווצת: נגדיר $T:C[0,1]\to C[0,1]$ ע"י $Tf(x)=\alpha\int_0^x f^2(t)dt$. עבור אילו ערכי α ההעתקה מכווצת?

פתרון: רוצים לבדוק האם לכל $f_1,f_2\in C[0,1]$ (קיים $C<1$ כך ש) מתקיים $\|Tf_1-Tf_2\|<C\|f_1-f_2\|$. מתקיים

$$\|Tf_1-Tf_2\|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\alpha\int_0^x f_1^2(t)dt-\alpha\int_0^x f_2^2(t)dt\right|=\sup_{x\in[0,1]}\alpha\left|\int_0^x (f_1^2(t)-f_2^2(t))dt\right|=$$

$$=\sup_{x\in[0,1]}\alpha\left|\int_0^x (f_1(t)-f_2(t))(f_1(t)+f_2(t))dt\right|\le\sup_{x\in[0,1]}\alpha\left|\int_0^x \|f_1-f_2\|(f_1(t)+f_2(t))dt\right|=$$

$$=\sup_{x\in[0,1]}\alpha\|f_1-f_2\|\left|\int_0^x (f_1(t)+f_2(t))dt\right|$$

היינו רוצים לחסום איכשהו את f_1,f_2 אבל אין לנו איך. לכן נראה שלא נקבל העתקה מכווצת, לשום ערך α. ואכן, אם ניקח $f_n(x)=n$ אז $Tf_n(x)=\alpha\int_0^x n^2dt=\alpha xn^2$ ולכן אם נציב $0, f_n$ לתוך הנוסחה, נקבל $\|Tf_n-T0\|=\alpha n^2$ ו- $\|f_n-f_0\|=n$ ולכן אין C כנדרש.

לעומת זאת, אם במקום להביט במרחב $C[0,1]$ כולו היינו מגבילים את עצמנו לכדור היחידה הסגור $\{f\in C[0,1]:\|f\|\le 1\}$, היינו יכולים לחסום $\left|\int_0^x f_1(t)+f_2(t)dt\right|\le\int_0^x 2dt=2x$ ולכן $\|Tf_1-Tf_2\|\le\sup_{x\in[0,1]}\alpha\|f_1-f_2\|\cdot 2x=2\alpha\|f_1-f_2\|$, ולכן אם $\alpha<\frac{1}{2}$ אז ההעתקה היא אכן מכווצת.

אם $\alpha\ge\frac{1}{2}$, נוכל להתבונן בפונקציות $f_0(x)\equiv 1$ ו- $f_n(x)\equiv 1-\frac{1}{n}$. מתקיים $\|f_0-f_n\|=\frac{1}{n}$ ו-

$$\|Tf_0-Tf_n\|=\sup_{x\in[0,1]}\alpha\left|\int_0^x 1dt-\int_0^x(1-\tfrac{1}{n})^2dt\right|=\sup_{x\in[0,1]}\alpha x\left(1-(1-\tfrac{1}{n})^2\right)=\alpha\cdot\left(\tfrac{2}{n}-\tfrac{1}{n^2}\right)$$

ולכן $\frac{\|Tf_0-Tf_n\|}{\|f_0-f_n\|}=\alpha(2-\frac{1}{n})\xrightarrow[n\to\infty]{}2\alpha\ge 1$ ולכן לא קיים $C<1$ עבורו $\|Tf_0-Tf_n\|<C\|f_0-f_n\|$ לכל n, ולכן ההעתקה אינה מכווצת.

פתרון משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון בשיטת הפרדת משתנים

← **תזכורת:** אם נוכל לרשום את המשוואה הדיפרנציאלית שלנו בצורה $\underline{M(x,y)}\,dx+\underline{N(x,y)}\,dy=0$ כאשר קיימת פונקציה $G(x,y)$ עבורה $\frac{dG}{dx}=M(x,y)$ ו- $\frac{dG}{dy}=N(x,y)$, אזי הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית הוא $G(x,y)=C$. משוואה כזו נקראת משוואה **מדויקת**.

לפני הדוגמה → **דוגמא:** נתונה המשוואה $y'+\frac{y+x}{y-x}=0$. נרשום אותה בצורה $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{x-y}\Leftarrow(y+x)dx+(y-x)dy=0$.

כאן לא רואים מיד פונקציה $G(x,y)$ כפי שרצינו.

← לפעמים המשוואה עצמה אינה מדויקת אך אם נכפיל אותה בפונקציה מסוימת, נקבל משוואה מדויקת.

דוגמא: נתונה המשוואה $\frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{2x}$. נרשום $3y\,dx+2x\,dy=0$. משוואה זו אינה מדויקת אך אם נכפיל אותה ב- x^2y נקבל משוואה מדויקת $3x^2y^2dx+2x^3y\,dy=0$ כי אם $G(x,y)=x^3y^2$ אז $\frac{\partial G}{\partial x}=3x^2y^2$ ו- $\frac{\partial G}{\partial y}=2x^3y$ ולכן הפתרון הכללי של המשוואה החדשה **וגם של המקורית** הוא $x^3y^2=c \Rightarrow y^2=\frac{c}{x^3}$.

← מקרה כללי בו ניתן (ע"י הכפלה בפונקציה מסוימת) להגיע למשוואה מדויקת הוא משוואה מהצורה $f_1(x)g_2(y)\,dx+f_2(x)g_1(y)\,dy=0$. במקרה זה נכפיל בפונקציה $\frac{1}{f_2(x)g_2(y)}$ ונקבל $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=0 \Rightarrow$ עבור $G(x,y)=\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy$ נקבל $\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{g_1(y)}{g_2(y)}$ ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=c$.

מכיון שבשיטה זו במהלך הפתרון הפונקציות התלויות ב- x נפרדות מהפונקציות התלויות ב- y, שיטה זו נקראת **הפרדת משתנים**.

דוגמא: פתור את המשוואה $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2(y+1)}{y^2(x-1)}$.

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה $x^2(y+1)dx+(x-1)y^2dy=0$. לפי השיטה לעיל, נכפיל את המשוואה ב- $\frac{1}{(y+1)(x-1)}$ ונקבל $\frac{x^2}{x-1}dx+\frac{y^2}{y+1}dy=0$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\int\frac{x^2}{x-1}dx+\int\frac{y^2}{y+1}dy=c \Rightarrow \int\frac{x(x-1)+(x-1)+1}{x-1}dx+\int\frac{y(y+1)-(y+1)+1}{y+1}dy=c$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+\frac{y^2}{2}-y+\ln|y+1|=c.$$

← לפעמים במשוואה עצמה אי אפשר לבצע הפרדת משתנים אבל אפשר לעשות קודם שינוי משתנים ואז לקבל משוואה אותה ניתן לפתור בעזרת הפרדת משתנים. דוגמא לכך היא משוואה **הומוגנית**.

פונקציה $f(x,y)$ נקראת **הומוגנית מסדר m** אם $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$.

משוואה מהצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ תיקרא **הומוגנית** אם $M(x,y), N(x,y)$ הומוגניות מאותו סדר.

אם נתונה משוואה הומוגנית, ניתן לבצע שינוי משתנה $v=\frac{y}{x}$ ונקבל משוואה חדשה $P(x,v)dx+Q(x,v)dv=0$ הניתנת להפרדת משתנים.

דוגמא: נתונה המשוואה $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$. נשים לב שהיא הומוגנית מסדר 3 ולכן נבצע החלפת משתנה $v=y/x$ (ומכאן $y=vx \Rightarrow dy=x\,dv+v\,dx$) ונקבל

$$(x^3+(vx)^3)dx-3x(vx)^2(v\,dx+x\,dv)=0 \Rightarrow (x^3+(vx)^3-3x^3v^3)dx-3x^4v^2dv=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3(1-2v^3)dx-3x^4v^2dv=0 \Rightarrow (1-2v^3)dx-3xv^2dv=0 \Rightarrow$$ זו משוואה מהצורה לעיל ואפשר לבצע הפרדת משתנים. נקבל משוואה חדשה $\frac{1}{x}dx-\frac{3v^2}{1-2v^3}dv=0$ וניתן לפתור ואז להציב בפתרון $v=y/x$.

← לסיום, זה מקרה בו ניתן להגיע ע"י הצבה למשוואה שניתן לפתור ע"י הפרדת משתנים הוא משוואה מהצורה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ כאשר $M(x,y), N(x,y)$ פונקציות לינאריות.

* אם $M(x,y)=a_1x+b_1y+c_1, N(x,y)=a_2x+b_2y+c_2$ כאשר $a_1b_2-b_1a_2=0$ אז ע"י ההצבה $a_1x+b_1y=t$, $dy=\frac{dt-a_1dx}{b_1}$ מקבלים משוואה $P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$ הניתנת להפרדת משתנים.

* אם $M(x,y)=a_1x+b_1y+c_1$, $N(x,y)=a_2x+b_2y+c_2$ כאשר $a_1b_2-b_1a_2\neq0$ אז ע"י הצבה $x=x'+h$, $y=y'+k$ כאשר $x=h$, $y=k$ הם פתרונות מערכת המשוואות $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$, מגיעים למשוואה ההומוגנית $(a_1x'+b_1y')dx'+(a_2x'+b_2y')dy'=0$ אותה נוכל לפתור בשיטה שתארנו לעיל.

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

הצגת הבעיה: נתונה לנו משוואה $y'(x)=\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ עבור F רציפה. רוצים למצוא:

(א) פתרון כללי - כל הפונקציות הגזירות ברציפות $y(x)$ המקיימות את המשוואה.

(ב) פתרון פרטי (בעיית ערך התחלה) - פתרון $y(x)$ המקיים תנאי התחלה מסוים, למשל $y(x_0)=y_0$.

בדרך כלל נרצה גם לדעת האם כל הפתרונות מוגדרים על כל הישר או שיש פתרונות המוגדרים רק בחלק מהישר.

דוגמא: המשוואה הלוגיסטית (Verhulst, 1838): $\frac{dy}{dt}=y(a-by)$, $\overbrace{\text{עם תנאי התחלה}}^{t\geq 0 \text{ עבור}}$ $y(0)=y_0$.

משמעות: הפונקציה $y(t)$ מייצגת גודל של אוכלוסיה מסויימת בזמן t. a הינו קצב הגידול הטבעי אם לא היו הפרעות ו- $(-by)$ מציין את הבעיה של ריבוי האוכלוסיה בגידול שלה.

אנחנו מעוניינים לפתור את המשוואה, ובעיקר לשלוט עבור הפתרונות, מהו $\lim_{t\to\infty} y(t)$, כלומר מה קורה עם האוכלוסיה אחרי "הרבה זמן". נפתור דוגמא זו בהמשך השיעור.

דרך הפתרון: תחילה נרשום את המשוואה בצורה של תבנית דיפרנציאלית: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

עבור M,N רציפות. למשל, במשוואה הלוגיסטית נקבל $y(a-by)dt-dy=0$.

אפשר (בשלב זה) לראות ברישום זה רישום פורמלי בלבד. אולם ניתן גם לחשוב שבצורה בזאת המשוואה הופכת לשדה וקטורי במשתנים (x,y) ובהמשך נראה משמעות גאומטרית של שדה זה בהקשר של זרימה המתאימה למשוואה.

מתי נוכל לפתור? המקרה הבסיסי ביותר בו המשוואה ניתנת לפתרון הוא כאשר השדה הוקטורי $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ הינו משמר. כלומר, כאשר קיימת פונקציה $\phi(x,y)$ גזירה כך ש- $\nabla\phi = M(x,y)dx+N(x,y)dy$ הגרדיאנט

או במילים אחרות: $\frac{\partial\phi}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial\phi}{\partial y}=N(x,y)$.

משוואה כזו נקראת מדוייקת והפתרון הכללי שלה הוא $\phi(x,y)=c$.

תזכורת מאינפי: $\overbrace{\text{השדה } M(x,y)dx+N(x,y)dy}^{\text{אם } U \text{ פשוטה ו- } M,N\in C^1(U) \text{ אז}}$ משמר אם ורק אם $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

[אגב, כיוון אחד ברור: אם קיימת ϕ כנ"ל אז $\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$ וזו בדיוק הטענה שלנו.]

כיצד נפתור משוואה מדוייקת? לפיכך, כשנתונה משוואה בצורת תבנית דיפרנציאלית, תחילה נבדוק בעזרת הנגזרות החלקיות האם היא מדוייקת. אם כן, נוכל למצוא את ϕ בדרך הבאה: מקיים $M(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ולפיכך $\phi=\int M(x,y)dx+f(y)$ (פונקציה שהיא אולי תלויה ב-y) אבל $N(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}$ ולכן $N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+f'(y)$

ומכאן נוכל למצוא את $f(y)$ ולפיכך גם את ϕ.

הערה: נוכל לחזור אחורה ולראות ש- $\phi(x,y)=c$ הוא אכן פתרון של המשוואה המקורית (בצורה $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$).

"ניזכר" ש- y הוא פונקציה של x ונגזור את המשוואה לפי x. נקבל $\frac{d}{dx}\left(\phi(x,y(x))\right)=0$

$$\Leftarrow \quad 0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(x,y)dx+\int N(x,y)dy\right)=M(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)\frac{dy}{dx}dx\right)=M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}$$

$\Leftarrow$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ ולכן זה אכן פתרון של המשוואה המקורית.

$\boxed{\text{אולי לא להראות בשיעור}}$

דוגמא: מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^3+3y}{3x+y-1}$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורת תבנית דיפרנציאלית: $\underbrace{(2x^3+3y)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(3x+y-1)}_{N(x,y)}dy=0$

נבדוק האם המשוואה מדוייקת: $\frac{\partial M}{\partial y}=3=\frac{\partial N}{\partial x}$ $\Leftarrow$ מדוייקת.

נחפש ϕ מתאימה: $\frac{\partial \phi}{\partial x}=M(x,y)=2x^3+3y \Rightarrow \phi=\int(2x^3+3y)dx+f(y)=\frac{1}{2}x^4+3xy+f(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y}=N(x,y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^4+3xy+f(y)\right)=3x+y-1 \Rightarrow 3x+f'(y)=3x+y-1 \Rightarrow f'(y)=y-1 \Rightarrow f(y)=\frac{1}{2}y^2-y+c$

ולכן בסה"כ $\phi(x,y)=\frac{1}{2}x^4+3xy+\frac{1}{2}y^2-y+c$. $\Leftarrow$ **פתרון כללי**: $\frac{1}{2}x^4+3xy+\frac{1}{2}x^2-y=c$.

מה קורה אם המשוואה אינה מדויקת? אם המשוואה אינה מדויקת, עדיין ניתן לפתור אותה אם ניתן להביא אותה לצורה מדוייקת ע"י הכפלת שני האגפים בפונקציה רציפה שאינה מתאפסת. כלומר, אם קיימת $\mu(x,y)\neq 0$ רציפה כך שהמשוואה $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$ מדוייקת אזי מכיוון ש- $\mu(x,y)\neq 0$ כל פתרון של המשוואה המקורית הוא פתרון של המשוואה החדשה ולהיפך, ולכן ניתן לפתור את המשוואה המקורית.

במקרה כזה $\mu(x,y)$ נקרא **גורם אינטגרציה**.

כיצד מחפשים גורם אינטגרציה? בניגוד למקרה הקודם בו היתה לנו שיטה כללית כיצד לפתור את המשוואה במקרה שהיא מדוייקת, כאן אין כלל כיצד אפשר לגלות גורם אינטגרציה באופן כללי. אולם יש מס' מקרים פרטיים בהם הדבר אפשרי.

(א) אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$ היא פונקציה של x בלבד, אזי $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

(ב) אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=g(y)$ היא פונקציה של y בלבד, אזי $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

(ג) אם המשוואה ניתנת להיכתב בצורה $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ כאשר $f(xy)\neq g(xy)$

אזי $\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{xy(f(xy)-g(xy))}$ הוא גורם אינטגרציה.

דוגמא: מצא פתרון כללי של המשוואה $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$.

פתרון: תחילה נבדוק האם המשוואה היא מדוייקת. $\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq y=\frac{\partial N}{\partial x}$ $\Leftarrow$ לא מדוייקת.

נבדוק האם מתקיימים תנאים (א) או (ב). נשים לב שההפרש $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=y$ הינו "פשוט יחסית" ולכן יש מקום לקוות שהנסיון יצליח. ואכן, $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}$ הינה פונקציה של x בלבד ולכן $e^{\int\frac{1}{x}dx}$ הינו גורם אינטגרציה. מתק"מ $e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$

ולכן המשוואה $x(x^2+y^2+x)dx+x\cdot xy\,dy=0$ היא מדויקת. ואכן, עכשיו $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy=\frac{\partial N}{\partial x}$.

נחפש ϕ מתאימה: $\frac{\partial \phi}{\partial x}=x^3+xy^2+x^2 \Rightarrow \phi=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3+f(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y}=N \Rightarrow x^2y+f'(y)=x^2y \Rightarrow f'(y)=0 \Rightarrow f(y)=c$

ולכן **הפתרון הכללי** הוא $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3=c$.

הפרדת משתנים מקרה נוסף בו אפשר למצוא בקלות גורם אינטגרציה הוא משוואה מהצורה $f_1(x)g_2(y)dx+f_2(x)g_1(y)dy=0$. במקרה זה, ע"י גורם האינטגרציה $\frac{1}{f_2(x)g_2(y)}$ נקבל משוואה מדוייקת $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=0$ ועכשיו ברור שהפתרון הכללי הוא $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy=c$.

שיטה זו, הנקראת <u>הפרדת משתנים</u>, הינה חשובה ונפוצה יחסית.

<u>דוגמא:</u> פתור את משוואת הלוגיסטיקה $\frac{dy}{dx}=y(a-by)$ עבור $x\geq 0$, עם תנאי התחלה $y(0)=y_0$.

<u>פתרון:</u> נרשום את המשוואה בצורת תבנית דיפרנציאלית: $y(a-by)dx-dy=0$.

נשים לב שהמשוואה הינה בצורה המתאימה להפרדת משתנים. היינו רוצים להשתמש בגורם אינטגרציה $\frac{1}{y(a-by)}$, אולם כיצד נדע לכך שהוא מוגדר?

נשים לב שאם קיים x_0 כך ש- $y(x_0)$ מקיים $a-by(x_0)=0$ אז הפונקציה $y(x)\equiv y(x_0)$ הינה פתרון של המשוואה עם תנאי התחלה. בהמשך הקורס נראה שממשפט הקיום והיחידות נובע שאין פתרונות נוספים המקיימים תנאי התחלה זה. לכן אם נמצא את הפתרון הזה, נוכל להניח $a-by\neq 0$. לגבי y עצמה, מהצגת השאלה (y = גודל אוכלוסיה) נובע שמחפשים פתרון עבורו y חיובי בכל התחום. לכן נוכל לחלק ב- y ורק לזכור אח"כ שהוא לא מתאפס. נקבל משוואה $dx-\frac{1}{y(a-by)}dy=0$

ולכן הפתרון הכללי הוא $\int 1\,dx-\int\frac{1}{y(a-by)}dy=c$

נחשב: $\int\frac{1}{y(a-by)}dy=?$

נרשום $\frac{1}{y(a-by)}=\frac{c_1}{y}+\frac{c_2}{a-by}$ ונבצע השוואת מקדמים. נקבל $\begin{cases}c_1a=1\\ c_2-c_1b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=1/a\\ c_2-b/a=0\Rightarrow c_2=b/a\end{cases}$

ולכן $\int\frac{1}{y(a-by)}dy=\int\frac{1/a}{y}dy+\int\frac{b/a}{a-by}dy=\frac{1}{a}\ln|y|+\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{1}{b}\right)\ln|a-by|=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right|$

ולכן הפתרון הכללי הוא $\boxed{x-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right|=c}$

נציב ~~בתנאי~~ בתנאי ההתחלה $y(0)=y_0$ ונקבל $-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y_0}{a-by_0}\right|=c$ ולכן

הפתרון המבוקש הוא $x-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right|=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y_0}{a-by_0}\right|$. נרצה להגיע להצגת y כפונקציה של x.

נקבל $ax=\ln\left|\frac{y}{a-by}\right|-\ln\left|\frac{y_0}{a-by_0}\right|=\ln\left|\frac{y}{y_0}\,\frac{a-by_0}{a-by}\right|$

ומכאן $e^{ax}=\frac{y}{y_0}\,\frac{a-by_0}{a-by}=\left(\frac{a-by_0}{y_0}\right)\cdot\frac{y}{a-by}\Rightarrow\left(\frac{a\,y_0}{a-by_0}\right)e^{ax}(a-by)=y\Rightarrow$

$\Rightarrow y\left(1+b\left(\frac{y_0}{a-by_0}\right)e^{ax}\right)=\left(\frac{y_0}{a-by_0}\right)e^{ax}\cdot a\Rightarrow y=\frac{\left(\frac{y_0}{a-by_0}\right)ae^{ax}}{1+b\left(\frac{y_0}{a-by_0}\right)e^{ax}}=\frac{a/b}{1+\frac{a-by_0}{by_0}e^{-ax}}$

כלומר בסה"כ $\boxed{y(x)=\frac{a/b}{1+\frac{a-by_0}{by_0}e^{-ax}}}$. בפרט, כאשר $x\to\infty$ נקבל $y(x)\to a/b$,

כלומר גודל האוכלוסיה שואף ל- a/b, ללא תלות בערך ההתחלה.

נציין שגם עבור הפתרון ה"חריג" שמצאנו $y\equiv y(x_0)$, מתקיים $a-by(x_0)=0\Leftarrow y(x_0)=\frac{a}{b}$. כלומר, משמעות פתרון זה היא שאם האוכלוסיה ההתחלתית היא בגודל a/b אז היא אינה משתנה. לפיכך, גם פתרון זה אינו "יוצא דופן" מבחינת התנהגות גודל האוכלוסיה.

<u>"שיטת ~~[illegible]~~ החלפת משתנים"</u>: לפעמים המשוואה הדיפרנציאלית אינה באף אחת מהצורות שהוזכרו לעיל אבל אפשר להביא אותה לצורה כזו ע"י החלפת משתנים. דוגמא בולטת למקרה זה היא משוואה <u>הומוגנית</u>.

<u>הגדרה:</u> פונקציה $M(x,y)$ תיקרא <u>הומוגנית מסדר k</u> אם לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k M(x,y)$ (לכל x,y). תבנית דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ תיקרא הומוגנית מסדר k אם הפונקציות $M(x,y), N(x,y)$ הינן הומוגניות מסדר k.

בהינתן משוואה הומוגנית (מכל סדר), ניתן להגדיר משתנה חדש $v(x)$ ע"י $y=vx$ (ומכאן $dy=vdx+xdv$) ואז המשוואה המקורית תהפוך למשוואה מהצורה $P(x,v)dx+Q(x,v)dv=0$ הניתנת להפרדת משתנים.

לאחר שפותרים את המשוואה, יש לחזור לפתרון המשוואה המקורית ע"י הצבה $y=vx$.

<u>דוגמא:</u> מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$.

<u>פתרון:</u> המשוואה הינה הומוגנית מסדר 3. נבצע החלפת משתנה $y=vx$ ונקבל

$$(x^3+(vx)^3)dx-3x(vx)^2(vdx+xdv)=0 \Rightarrow x^3(1+v^3)dx-3x^3v^3dx-3v^2x^4dv=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3(1-2v^3)dx-3v^2x^4dv=0 \underset{x\neq 0 \text{ אם}}{\Rightarrow} (1-2v^3)dx-3v^2xdv=0$$

לכן לפי שיטת הפרדת המשתנים, ניתן להשתמש בגורם האינטגרציה $\frac{1}{(1-2v^3)x}$ ונקבל משוואה

$$\frac{1}{x}dx-\frac{3v^2}{1-2v^3}dv=0$$

ומכאן פתרון כללי:

$$\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{3v^2}{1-2v^3}dv=c \Rightarrow \ln x+\frac{1}{2}\ln(1-2v^3)=c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln x+\ln(1-2v^3)=c' \Rightarrow \ln(x^2(1-2v^3))=c' \Rightarrow x^2(1-2v^3)=c''$$

לסיום, נציב $y=vx \Leftarrow v=y/x$ ונקבל

$$x^2\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)=c'' \Rightarrow \boxed{x^2-2\frac{y^3}{x^3}=c''}$$

<u>משוואת ריקטי</u> (Riccati)

לסיום, דוגמא נוספת בה מועילה החלפת משתנים היא משוואת <u>ריקטי</u>. בכיתה תלמדו שכל משוואה <u>לינארית</u> מסדר ראשון (כלומר, מהצורה $\frac{dy}{dx}=q_1(x)+q_2(x)y$) ניתנת לפתרון בצורה פשוטה יחסית. משוואת ריקטי הינה משוואה מהצורה $\frac{dy}{dx}=q_1(x)+q_2(x)y+q_3(x)y^2$ בקטע $I\subset\mathbb{R}$, כאשר q_1,q_2,q_3 הינן פונקציות רציפות של x.

במקרה זה, <u>אם ידוע פתרון $y_1(x)$</u> אז ניתן להגדיר פונקציה חדשה $v(x)=\frac{1}{y(x)-y_1(x)}$ ונקבל משוואה לינארית $v'(x)=-(q_2(x)+2q_3(x)y_1(x))v(x)-q_3(x)$ שאותה ניתן לפתור כמו בכיתה.

לא נעשה היום דוגמא למשוואה כזו מכיוון שעדיין לא נלמד בכיתה פתרון משוואות לינאריות.

<u>הערה לסיום:</u> במהלך רוב השיעור הזה (פרט לפתרון המשוואה הלוגיסטית) עסקנו בפתרונות כלליים ולא בדקנו איזה פתרונות מוגדרים רק על חלק מהציר. נחזור לעניין זה בשיעורים הבאים.

משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול מס' 3 - אביב תשס"ח

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון - המשך

תזכורת: נתונה לנו משוואה מסדר ראשון: $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$, ורושמים אותה בצורת תבנית דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. ראינו בשבוע שעבר:

(א) משוואות מדויקות - יודעים לבדוק האם מדויקת ויודעים לפתור אם כן.

(ב) גורם אינטגרציה - אין דרך כללית למצוא גורם אינטגרציה. ראינו מקרה בו ניתן למצוא:

(ב1) הפרדת משתנים - אם המשוואה היא מצורה מסויימת, יודעים מהו גורם האינטגרציה ואז יודעים לפתור.

חומר חדש: כאן ניתן עוד מקרים בהם אפשר לדעת מהו גורם האינטגרציה.

(ב2) אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$ הינה פונקציה של x בלבד, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

(ב3) אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=f(y)$ הינה פונקציה של y בלבד, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

דוגמא 1: אם המשוואה היא מדויקת אז $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=0$ תלויה ב-x בלבד, ולכן $e^{\int f(x)dx}=e^{c}$ הוא גורם אינטגרציה. מכיוון ש-(e^c) הוא קבוע, זה בסופו אומר שהמשוואה עצמה היא מדויקת, כפי שאכן הנחנו.

דוגמא 2: מצא פתרון כללי של המשוואה $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$.

פתרון: מתקיים $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}$ היא פונקציה של x בלבד, ולכן $e^{\int \frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$ הוא גורם אינטגרציה. נכפיל בו ונקבל משוואה $(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2y\,dy=0$ שהיא אכן מדויקת. נחפש ϕ מתאימה:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=x^3+xy^2+x^2 \Rightarrow \phi=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3+f(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2y \Rightarrow x^2y+f'(y)=x^2y \Rightarrow f'(y)=0 \Rightarrow f(y)=c \Rightarrow \phi(x,y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y^2+c$$

ולכן הפתרון הכללי (בצורה סתומה) הוא $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y^2=c$. ■

(ב4) אם המשוואה ניתנת להיכתב בצורה $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$, כאשר $f(xy)\neq g(xy)$, אז $\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{xy(f(xy)-g(xy))}$ הוא גורם אינטגרציה.

הערה: מפאת קוצר הזמן לא ניתן דוגמא לשיטה זו. דוגמאות ניתן למצוא בספר של סדרת Schaum ובספרים נוספים.

ענין חדש: נדבר כעת לסוג אחר של משוואות שיש דרך "מסודרת" לפתור אותן.

(ו) משוואות לינאריות מסדר ראשון

נתונה משוואה מהצורה $\frac{dy}{dt}=a(t)y(t)+b(t)$, כאשר $a(t),b(t)$ רציפות.

מתברר שיש דרך כללית לפתור כל משוואה מהצורה הזאת, והיא מתבססת על האבחנה הבאה:

נגדיר $u(t)=e^{-\int a(t)dt}$. אז $(u(t)y(t))'=u'(t)y(t)+u(t)y'(t)=$

$$=-a(t)e^{-\int a(t)dt}y(t)+e^{-\int a(t)dt}y'(t)=e^{-\int a(t)dt}\left(y'(t)-a(t)y(t)\right)$$

אולם לפי המשוואה המקורית, $(y'(t)-a(t)y(t))=b(t)$ ולכן נקבל $\boxed{(u(t)y(t))'=b(t)u(t)}$.

וכעת ניתן לעשות אינטגרציה לפי t לשני האגפים ונקבל $u(t)y(t)=\int b(t)u(t)dt$

ומכאן

$$\boxed{y(t)=e^{\int a(t)dt}\left(\int e^{-\int a(t)dt}b(t)\,dt+c\right)}$$

<u>הערה:</u> למעשה, גם סוג משוואה זה הוא תת-סוג של הקודם כי המשוואה המתקבלת לאחר ההכפלה ב- $u(t)$ היא מדויקת ולכן למעשה $u(t)$ הוא גורם אינטגרציה.

<u>דוגמא:</u> מצא פתרון כללי של המשוואה $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y+x^2+3x-2$

<u>פתרון:</u> לפי הנוסחה לעיל, נקבל

$$y(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}(x^2+3x-2)\,dx+c\right)=$$

$$=e^{\ln x}\left(\int e^{-\ln x}(x^2+3x-2)\,dx+c\right)=x\left(\int\frac{1}{x}(x^2+3x-2)\,dx+c\right)=$$

$$=x\left(\tfrac{1}{2}x^2+3x-2\ln x+c\right)=\tfrac{1}{2}x^3+3x^2-2x\ln x+cx$$

ולכן הפתרון הכללי הוא $\boxed{y(x)=\frac{1}{2}x^3+3x^2-2x\ln x+cx}$.

<u>ענין חדש:</u> (ז) נעבור לנושא האחרון (בשלב זה) בפתרון משוואות מסדר ראשון: <u>החלפת משתנים</u>.

בהרבה מקרים המשוואה המקורית אינה מאחת הצורות אותן אנחנו יודעים לפתור אולם ניתן להעביר אותה לצורה כזו ע"י החלפת משתנים מתאימה. בדרך כלל, כמו באינטגרציה רגילה, אין דרך מסודרת למצוא את החלפת המשתנים הדרושה, אולם ישנם מספר מקרים בהם יש החלפת משתנים קבועה שעובדת תמיד.

(13) משוואות הומוגניות

<u>הגדרה:</u> פונקציה $M(x,y)$ תיקרא הומוגנית מסדר n אם לכל λ מתקיים (לכל x,y) $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n M(x,y)$

תבנית דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ תיקרא הומוגנית אם הפונקציות $M(x,y),N(x,y)$ הינן הומוגניות מאותו סדר.

בהינתן משוואה הומוגנית, ניתן להשתמש בהחלפת משתנים $v=\frac{y}{x}\Leftarrow dy=xdv+vdx$

(זה שקול ל- $\frac{dy}{dx}=x\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot 1$ וזו אכן הנגזרת של המכפלה $y=vx$) ואז מקבלים משוואה מהצורה $P(x,v)dx+Q(x,v)dv=0$ הניתנת להפרדת משתנים.

__דוגמא:__ פתור את המשוואה $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$.

__הערה:__ משוואה זו מתאימה גם לאחד הכללים הקודמים שמצינו היום. לאיזה? [גורם אינטגרציה כ"2]

__פתרון:__ המשוואה היא הומוגנית מסדר שני ולכן נציב $v=y/x$, נקבל

$$(3x(xv)+(xv)^2)dx+(x^2+x(xv))(xdv+vdx)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x^2v+x^2v^2)dx+x^3dv+x^2vdx+x^3vdv+x^2v^2dx=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x^2v+x^2v^2+x^2v+x^2v^2)dx+(x^3+x^3v)dv=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(2v^2+4v)dx+x^3(1+v)dv=0 \Rightarrow (2v^2+4v)dx+x(1+v)dv=0$$

זו משוואה הניתנת להפרדת משתנים ע"י גורם אינטגרציה $\frac{1}{x(2v^2+4v)}$. נקבל

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1+v}{2v^2+4v}dv=0$$

ומכאן הפתרון כללי. $\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1+v}{2v^2+4v}dv=c$

נחשב: $\int\frac{1+v}{2v^2+4v}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{a}{v}+\frac{b}{v+2}\right)dv=\frac{1}{4}\int\frac{1}{v}+\frac{1}{v+2}dv=\frac{1}{4}(\ln v+\ln(v+2))$

השוואת מקדמים:

$a(v+2)+bv=1+v$

$\begin{cases}2a=1\\a+b=1\end{cases}\Rightarrow a=b=\frac{1}{2}$

ולכן הפתרון כללי: $\ln x+\frac{1}{4}\ln v+\frac{1}{4}\ln(v+2)=c$

או באופן שקול: $x\cdot v^{1/4}\cdot(v+2)^{1/4}=c$

וכעת נציב $v=y/x$ ונקבל $x\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{1/4}\cdot\left(\frac{y}{x}+2\right)^{1/4}=c$

ומכאן $x^3y\left(\frac{y}{x}+2\right)=c^4=c'$

ולסיום הפתרון הוא $\boxed{x^2y^2+2x^3y=c}$

2 3 משוואות בהן $M(x,y),N(x,y)$ לינאריות אך לא הומוגניות:

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$$

במקרה זה יש הבדל בין המקרים $a_1b_2-a_2b_1=0$ ו- $a_1b_2-a_2b_1\neq0$.

I 2 3 אם $a_1b_2-a_2b_1=0$ אז עושים החלפת משתנה $t=a_1x+b_1y$

(ומכאן $dy=\frac{dt-a_1dx}{b_1}$) ומקבלים משוואה מהצורה $P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$

הניתנת להפרדת משתנים.

II 2 3 אם $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ אז עושים החלפת משתנים $\begin{cases}x=\tilde{x}+h\\y=\tilde{y}+k\end{cases}$ כאשר $\begin{cases}x=h\\y=k\end{cases}$

הם פתרונות מערכת המשוואות $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$, ומתקבלת המשוואה $(a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y})d\tilde{x}+(a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y})d\tilde{y}=0$

שהיא הומוגנית וניתן לפתור אותה כמו במקרה 1 3.

__הערה:__ מפאת קוצר הזמן לא נראה דוגמאות לשיטה זו. דוגמאות ניתן למצוא בתרגיל בית מס' 2 (שאלה ו').

(3 3) <u>משוואת ברנולי:</u> אם נתונה משוואה מהצורה $\frac{dy}{dx}+yP(x)=y^nQ(x)$, נוכל לרשום אותה בצורה $y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{-n+1}P(x)=Q(x)$, ואז נבצע החלפת משתנה $v=y^{-n+1}$ (ומכאן $\frac{dv}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ ולסיכום $y^{-n}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{n-1}\frac{dv}{dx}$)

ולכן נקבל $-\frac{1}{n-1}\frac{dv}{dx}+v\cdot P(x)=Q(x)$ ואם נכניס את $-\frac{1}{n-1}$ לתוך P,Q נקבל $\frac{dv}{dx}+v\cdot\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)$, וזו כבר משוואה לינארית רגילה שאנחנו יודעים לפתור. לאחר שפותרים אותה, צריך להציב בפתרון $v=y^{-n+1}$ כדי לחזור ל- y.

<u>דוגמא:</u> המשוואה שראינו בהרצאה, $y'=y^2$, הינה משוואת ברנולי. נרשום אותה בצורה $y^{-2}y'=1$ ונציב $v=y^{-1}$. נקבל משוואה $-\frac{dv}{dx}+0=1$ $\Leftarrow$ $\frac{dv}{dx}=-1$ $\Leftarrow$ $v=-x+c$ $\Leftarrow$ $y^{-1}=-x+c$ $\Leftarrow$ $\boxed{y=-\frac{1}{x-c}}$ וזה אכן הפתרון שראינו בכיתה.

(4 3) הסוג האחרון שנראה הוא <u>משוואת ריקטי (Riccati):</u> זו היא משוואה מהצורה $\frac{dy}{dx}=q_1(x)+q_2(x)y+q_3(x)y^2$, כאשר q_1,q_2,q_3 פונקציות רציפות של x.

במקרה זה אין שיטה כללית למצוא פתרון, אולם <u>אם כבר מצאנו פתרון</u> $y_1(x)$, נוכל לבצע החלפת משתנים $v(x)=\frac{1}{y(x)-y_1(x)}$ ולקבל משוואה חדשה $\frac{dv}{dx}=-(q_2(x)+2q_3(x)y_1(x))v(x)-q_3(x)$, שהינה משוואה לינארית ונוכל לפתור אותה בדרך הרגילה.

<u>הערה:</u> דוגמא למשוואת ריקטי מופיעה בתרגיל בית מס' 2 (שאלה 3).

<u>הערה:</u> בנוסף לנושאים הרשומים כאן, נרצה לדבר בתרגול בעל פה (בקצרה) על שלושה נושאים:

(א) תזכורת למושג "קבוצה סגורה" ב- $C(K,\mathbb{R}^m)$" – התכנסות בנורמה שלנו היא התכנסות במ"ש.

(ב) שאלות מילוליות (שאלות 4,5 בתרגיל מס' 2).

(ג) מושג המעטפת (שאלות 6,7,8 בתרגיל מס' 2).

משוואות מסדר ראשון - המשך

בשבוע שעבר התחלנו לראות משוואות אותן ניתן לפתור באמצעות הצבה. הסוג הראשון שראינו היה <u>משוואות הומוגניות</u> אותן ניתן לפתור באמצעות ההצבה $v=y/x$. נמשיך לסוגים הבאים.

(2ד) משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$, כלומר תבניות בהן $M(x,y), N(x,y)$ לינאריות אך לא הומוגניות.

<u>אינטואיציה:</u> היינו רוצים לעשות החלפת משתנים לינארית (כלומר מהצורה $\begin{cases}\tilde{x}=x+h\\ \tilde{y}=y+k\end{cases}$) ש"תבלע" את הקבוע ותיצור משוואה הומוגנית. מתברר שזה אפשרי אם $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

(I 2ד) אם $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ אז עושים החלפת משתנה $\begin{cases}x=\tilde{x}+h\\ y=\tilde{y}+k\end{cases}$ כאשר $\begin{cases}x=h\\ y=k\end{cases}$ הם פתרונות מערכת המשוואות $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$. מתקבלת המשוואה $(a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y})d\tilde{x}+(a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y})d\tilde{y}=0$, שהיא הומוגנית.

(II 2ד) אם $a_1b_2-a_2b_1=0$ אז השיטה הקודמת לא תעבוד כי <u>למערכת</u> המשוואות הנ"ל יש או ∞ פתרונות או 0 פתרונות. לצורך זאת, נשים לב שבמקרה זה המשוואה היא מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(\alpha(a_1x+b_1y)+c_2)dy=0$ ובצורה הזו רואים שכדאי לעשות החלפת משתנה $t=a_1x+b_1y$ (ומכאן $dy=\frac{dt-a_1dx}{b_1}$) ומתקבלת משוואה מהצורה $P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$ הניתנת להפרדת משתנים.

<u>הערה:</u> דוגמא לשיטה זו מופיעה בתרגיל בית מס' 2 (שאלה 1ב').

(3ד) <u>משוואות ברנולי:</u> אם נתונה משוואה מהצורה $\frac{dy}{dx}+yP(x)=y^nQ(x)$, נוכל לרשום אותה בצורה $y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{-n+1}P(x)=Q(x)$ ולבצע החלפת משתנה $v=y^{-n+1}$ (ומכאן $\frac{dv}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ ולכן $y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-n+1}\frac{dv}{dx}$) ונקבל משוואה $\frac{1}{-n+1}\frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x)$, וכעת אם נכניס את $\frac{1}{-n+1}$ לתוך $P(x),Q(x)$, נקבל $\frac{dv}{dx}+\tilde{P}(x)v=\tilde{Q}(x)$, וזו משוואה לינארית שכבר יודעים לפתור.

<u>דוגמא:</u> כדוגמא שראינו בהרצאה, $y'=y^2$ הינה משוואת ברנולי. נרשום אותה בצורה $y^{-2}\frac{dy}{dx}=1$ ונציב $v=y^{-1}$. נקבל משוואה $y=\frac{1}{-x+c} \Leftarrow v=-x+c \Leftarrow \frac{dv}{dx}=-1 \Leftarrow -\frac{dv}{dx}+0=1$, וזה אכן הפתרון שראינו בכיתה.

4.3) **משוואת ריקטי (Riccati):** זוהי משוואה מהצורה $\frac{dy}{dx}=q_1(x)+q_2(x)y+q_3(x)y^2$,

כאשר q_1,q_2,q_3 פונקציות רציפות של x. במקרה כזה אין נוסחה כללית למציאת פתרון

אולם אם כבר מצאנו פתרון $y_1(x)$, ניתן לבצע החלפת משתנים $v(x)=\frac{1}{(y-y_1)(x)}$ ונקבל:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{(y-y_1)^2}\left[(y-y_1)'\right] \underset{\text{הצבה במשוואה המקורית}}{=} -\frac{1}{(y-y_1)^2}\left[q_1+q_2y+q_3y^2-q_1-q_2y_1-q_3y_1^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{(y-y_1)^2}\left(q_2(y-y_1)+q_3(y^2-y_1^2)\right) = -\frac{y-y_1}{(y-y_1)^2}\left(q_2+q_3(y+y_1)\right) = -\frac{1}{y-y_1}\left(q_2+q_3(y+y_1)\right) = (*)$$

כעת נרצה להביע הכל בעזרת v. מקיים $v=\frac{1}{y-y_1}$ ולכן $y-y_1=\frac{1}{v} \Leftarrow y=\frac{1}{v}+y_1$. נקבל

$$(*) = -v\left(q_2+q_3\left(\frac{1}{v}+y_1+y_1\right)\right) = -q_2v-q_3-2q_3y_1v = -\left(q_3+(q_2+2q_3y_1)v\right)$$

ולכן עבור (x,v) נקבל את המשוואה $\frac{dv}{dx}=\left(-q_2(x)-2q_3(x)y_1(x)\right)v-q_3(x)$ שהיא לינארית ואותה כבר יודעים לפתור.

דוגמא: בתרגיל בית 2 הופיעה המשוואה $y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2$ (שאלה 3).

זוהי משוואת ריקטי, וכתוב רמז ניתן פתרון $y_1(x)=\frac{1}{x}$. לפיכך ניתן לבצע $v(x)=\frac{1}{(y-y_1)(x)}$

ונקבל משוואה $\frac{dv}{dx}=\left(+\frac{1}{x}-2\cdot 1\cdot\frac{1}{x}\right)v-1 \Leftarrow$

$\Leftarrow \frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x}v-1 \Leftarrow$ לפי הכלל לפתרון משוואות לינאריות נקבל:

$$v(x)=e^{\int-\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot(-1)\,dx+c\right)=e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}\cdot(-1)\,dx+c\right)=\frac{1}{x}\left(\int -x\,dx+c\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^2+c\right)=-\frac{1}{2}x+\frac{c}{x}$$

ומכאן נקבל $\frac{1}{(y-y_1)(x)}=-\frac{1}{2}x+\frac{c}{x} \Leftarrow \frac{1}{y-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}x+\frac{c}{x} \Leftarrow$

$\Leftarrow y-\frac{1}{x}=\frac{x}{-\frac{1}{2}x^2+c} \Leftarrow \boxed{y=\frac{x}{-\frac{1}{2}x^2+c}+\frac{1}{x}}$ וזהו פתרון המשוואה שלנו.

פתרונות סינגולריים ומעטפת

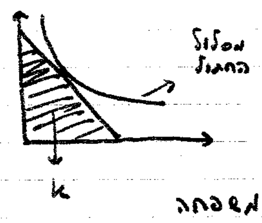
יש מקרים בהם קיימים פתרונות נוספים של המשוואה הדיפרנציאלית אותם אי אפשר למצוא ע"י הצבת ערך מסוים של c למשפחה של הפתרונות הכלליים. פתרונות אלו נתונים ע"י **המעטפת** של משפחת הפתרונות הכלליים. עבור משפחה חד פרמטרית $\{f(x,y,c)\}$ של פונקציות בשני משתנים (x,y) בתחום I, פונקציה $\varphi(x,y)$ תיקרא **מעטפת** של המשפחה אם לכל $x_0\in I$ קיים c עבורו הפונקציה $f(x,y,c)$ משיקה עם $\varphi(x,y)$ בנקודה x_0 הן בערכה והן בערך הנגזרת שלה. ניתן לראות (שאלה 7 בתב' 2) שאם המשפחה $\{f(x,y,c)\}$ פותרת משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון אז גם מעטפת שלה מהווה פתרון של המשוואה.

בהמשך הקורס נלמד על מעטפות בצורה מעמיקה יותר. היום נראה כיצד באופן טכני מוצאים מעטפה של משפחת פונקציות.

<u>הטכניקה:</u> בהינתן משפחת פונקציות $\{f(x,y,c)=0\}$ המוגדרות בצורה סתומה, מוצאים את המעטפת ע"י פתרון שתי המשוואות
$$\begin{cases} f(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial}{\partial c}(f(x,y,c))=0 \end{cases}$$
, כאשר בגזירה החלקית לפי c מתייחסים אליו כמשתנה בלתי תלוי ולא כפונקציה של x,y. פתרון שתי המשוואות מאפשר לחלץ את c ולקבל פונקציה ב- x,y ללא c.

<u>דוגמא:</u> חתול מטייל ברביע המישור $\left\{\begin{smallmatrix} 0<x \\ 0<y \end{smallmatrix}\right\}$ כך שהשטח שמקבל המשיק למסלול שלו עם הצירים נשאר קבוע k. מצא את מסלול החתול.

תג' מס' 2 שאלה 8



<u>פתרון:</u> ברור שהמסלול של החתול הוא המעטפת של קבוצת המשיקים שלו, כלומר של קבוצת הישרים המקבלים שטח k בינם לבין הצירים. נציג משפחה זו כמשפחה חד פרמטרית. אם נק' החיתוך של הישר עם הצירים הם $(a,0)$, $(0,b)$ אז משוואתו היא $y=-\frac{b}{a}x+b$. מתקיים $\underbrace{\frac{ab}{2}=k}_{\text{שטח משולש}}$ ולפיכך $a=\frac{2k}{b}$ ולכן $y=-\frac{b^2}{2k}x+b \Rightarrow \boxed{y+\frac{b^2}{2k}x-b=0}$. קיבלנו משפחה חד פרמטרית הנתונה בצורה סתומה. נגזור לפי b ונקבל $\frac{b}{k}x-1=\frac{\partial}{\partial b}\left(y+\frac{b^2}{2k}x-b\right)=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{k}{b}}$. נציב במשוואה המקורית ונקבל $y+\frac{b^2}{2k}\cdot\frac{k}{b}-b=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{b}{2}}$. כעת, כדי לחלץ את b נכפיל את שתי המשוואות ונקבל $\boxed{xy=\frac{k}{2}}$ וזוהי משוואת המעטפת.

כמובן שמדובר במשוואה של היפרבולה ולכן מסלול החתול הוא היפרבולה.

שיטת Successive Approximation

בחלק זה של התרגול נציג את ההוכחה ה"קלאסית" למשפט הקיום והיחידות של Picard.

הצגת הבעיה: נתון תחום פתוח $D \subseteq \mathbb{R}^n$, שהנקודות בו מסומנות כצורה $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. נתונה פונקציה $f\in C(D,\mathbb{R}^{n-1})$.
נתון גם קטע פתוח $I\subseteq\mathbb{R}$. רוצים למצוא פונקציה $y(t)\in C^1(I,\mathbb{R}^{n-1})$ כך ש:
(א) לכל $t\in I$ מתקיים $(t,y(t))\in D$. (ב) לכל $t\in I$, $y'(t)=f(t,y(t))$.

משמעות: $y(t)$ מסמנת את הפונקציה הוקטורית אותה רוצים למצוא. הווה שלה הוא $(n-1)$ קואורדינטות והנגזרת מתבצעת לכל קואורדינטה בנפרד. מחפשים פתרון בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$ כך ש $(y(t))$ מוגדר בתחום D.

בע"ת תנאי התחלה: בנוסף לתנאים לעיל, דורשים שהפתרון יקיים $y(t_0)=y_0$, עבור $t_0\in I$ ו- $(t_0,y_0)\in D$.
לצורך הוכחת משפטי הקיום והיחידות השתמשנו בניסוח שקול של הבעיה:

ניסוח שקול: בתנאים לעיל, רוצים למצוא פונקציה $y\in C(I,\mathbb{R}^{n-1})$ כך ש- $(t,y(t))\in D$ לכל $t\in I$ ומתקיים (לכל $t\in I$) $y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$.
ברור שפתרון כזה שקול לפתרון בע"ת תנאי ההתחלה.

הגדרה: תהי $K\subset D$ קומפקטית. הפונקציה f תיקרא ליפשיצית ב- K אם קיים קבוע L_K כך שלכל $(t,y_1);(t,y_2)\in K$ מתקיים $|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le L_K|y_1-y_2|$.

משפט Picard: נתבונן בקבוצה קומפקטית $\Gamma=[t_0-\eta,t_0+\eta]\times\overline{B(y_0,\alpha)}\subset D$. נסמן $M=\max_{(t,y)\in\Gamma}|f(t,y)|$
ונניח שמתקיים $M\eta<\alpha$. נניח גם ש- f מקיימת תנאי ליפשיץ ב- Γ. אזי לבע"ת תנאי ההתחלה שהוצגה לעיל קיים פתרון יחיד ב- $I=(t_0-\eta,t_0+\eta)$.

הוכחת קיום: (1) נגדיר על המרחב $C(\bar{I},\mathbb{R}^{n-1})$ העתקה $G\phi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds$, לכל $\phi\in C(\bar{I},\mathbb{R}^{n-1})$.

(2) נסמן ב- Y את קבוצת הפונקציות $Y=\{\phi\in C(\bar{I},\mathbb{R}^{n-1}) \mid \phi(t)\in\overline{B(y_0,\alpha)} \text{ לכל } t\in\bar{I}\}$.
ראשית, נוכיח שאם $\phi\in Y$ אז $G\phi\in Y$. ואכן, לכל $s\in\bar{I}$ מתקיים $\phi(s)\in\overline{B(y_0,\alpha)}$
ולכן $|f(s,\phi(s))|\le M$. לפיכך, $|G\phi(t)-y_0|\le\int_{t_0}^{t}|f(s,\phi(s))|\,ds\le M|t-t_0|\le M\eta\underset{\text{הנחה}}{<}\alpha$
ולכן $G\phi(t)\in\overline{B(y_0,\alpha)}$ לכל $t\in\bar{I}$.

(3) נבחר $\phi\in Y$ כלשהו ונתבונן בסדרה $\{\phi,G\phi,G^2\phi,G^3\phi,\dots\}$. אנו נטען כי סדרה זו היא סדרת קושי ולפיכך מתכנסת ואז נראה שהגבול הוא פתרון של בע"ת תנאי ההתחלה (זאת מפני שהגבול הוא נק' שבת של G וכך גם הפתרון).

(4) נשים לב שלכל שתי פונקציות $\phi,\psi\in Y$ מתקיים

$$|G\phi(t)-G\psi(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}\big(f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s))\big)ds\right|\le\int_{t_0}^{t}|f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s))|\,ds\le$$

ליפשיציות

$$\le \int_{t_0}^{t} L_p |\phi(s)-\psi(s)|\,ds \le L_p \underbrace{\|\phi(s)-\psi(s)\|}_{\text{נורמת סופרמום}} \int_{t_0}^{t} 1\,ds = L_p\|\phi-\psi\|\,|t-t_0|$$

5. באותו אופן, נוכל לקבל

$$|G^2\phi(t)-G^2\psi(t)| \le \int_{t_0}^{t} L_p|G\phi(s)-G\psi(s)|\,ds \le \int_{t_0}^{t} L_p^2\|\phi-\psi\|\,|s-t_0|\,ds = L_p^2\|\phi-\psi\|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|\,ds =$$
$$= L_p^2\|\phi-\psi\|\cdot\frac{1}{2}|t-t_0|^2$$

6. אם נמשיך באינדוקציה באותה דרך, נקבל $|G^m\phi(t)-G^m\psi(t)| \le L_p^m\|\phi-\psi\|\dfrac{|t-t_0|^m}{m!}$

מכיוון שבמקרה שלנו $|t-t_0|\le\eta$, נקבל $\|G^m\phi-G^m\psi\| \le L_p^m\|\phi-\psi\|\dfrac{\eta^m}{m!}$.

<u>הערה:</u> השלבים עד כאן הופיעו גם בהוכחה שניתנה בכיתה. לאחר מכן נטען שעבור m מספיק גדול, ההעתקה G^m היא מכווצת ולכן יש לה נק' שבת ובעזרת נק' שבת זו מצאנו נק' שבת של G. אנחנו נמשיך בצורה אחרת.

7. <u>טענה:</u> הסדרה $\{G^m(\phi)\}_{m=0}^{\infty}$ הינה סדרת קושי, לכל $\phi\in Y$.

<u>הוכחה:</u> רוצים להראות שלכל ε ק"מ m_0 כך שלכל $m_1,m_2>m_0$ מתקיים $\|G^{m_1}\phi-G^{m_2}\phi\|<\varepsilon$.

נבחר m_0 מספיק גדול כדי שיתקיים $2\alpha\cdot L_p^{m_0}\cdot\dfrac{\eta^{m_0}}{(m_0)!}<\varepsilon$. זה אפשרי כי $\lim\limits_{m\to\infty} 2\alpha\cdot L_p^m\cdot\dfrac{\eta^m}{m!}=0$

כעת, לכל $\phi\in Y$ ולכל $m_1,m_2>m_0$ מתקיים:

$$\|G^{m_1}\phi-G^{m_2}\phi\| = \|G^{m_0}(G^{m_1-m_0}\phi)-G^{m_0}(G^{m_2-m_0}\phi)\| \le L_p^{m_0}\|G^{m_1-m_0}\phi-G^{m_2-m_0}\phi\|\frac{\eta^{m_0}}{(m_0)!} \le$$

[illegible] מנוסחה לעיל כי $G^{m_1-m_0}\phi,\ G^{m_2-m_0}\phi\in Y$

$$\le L_p^{m_0}\frac{\eta^{m_0}}{(m_0)!}\Big(\sup_{t\in I}|G^{m_1-m_0}\phi(t)-G^{m_2-m_0}\phi(t)|\Big) \le L_p^{m_0}\frac{\eta^{m_0}}{(m_0)!}\cdot(2\alpha) < \varepsilon$$

כי $G^{m_1-m_0}\phi(t)\in B(y_0,\alpha)$ וכנ"ל עבור $G^{m_2-m_0}\phi(t)$; הנחה

8. מכיוון ש-Y הינו מרחב שלם, נובע מכך כי הסדרה $\{G^m\phi\}$ מתכנסת, לכל $\phi\in Y$. בפרט, מכיוון ש-G רציפה, מתקיים $G(\lim\limits_{m\to\infty}G^m\phi)=\lim\limits_{m\to\infty}G(G^m\phi)=\lim\limits_{m\to\infty}G^m\phi$ ולפיכך, הגבול של הסדרה הוא נק' שבת של G, כלומר פתרון של המשוואה. זה מסיים את ההוכחה. ∎

<u>הערה:</u> למעשה, הוכחנו כאן לא רק קיום של פתרון אלא גם שמכל פונקציה "מספיק קרובה" ($\phi\in Y$) ממנה מתחילים, אפשר להגיע אל הפתרון ע"י סדרה של קירובים $\{G^m\phi\}$. שיטה זו של קירובים נקראת successive approximation.

פסח

תרגיל: להראות שכל הפתרונות של המשוואה $xy'+y=0$ בחצי הישר $x>0$ מוגדרים על כל חצי הישר ונתונים ע"י $xy=c$, לכל $c\in\mathbb{R}$. (מותר לחלק ב-x כי התחום הנתון)

תרג' מס' 3 שאלה 4א'

פתרון: תחילה נמצא פתרון כללי של המשוואה ~~[illegible]~~ בדרך הרגילה. נרשום $y'=-\frac{1}{x}y+0$. זו משוואה ליניארית ולכן פתרונה הוא $y=e^{\int-\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot 0+c\right)=ce^{-\ln x\, dx}=\frac{c}{x}$

או באופן שקול $xy=c$. נותר לנו להוכיח יחידות של הפתרונות בכל התחום $x>0$.

לשם כך נרצה להשתמש במשפט Picard. תחילה נראה שהפונקציה $f(x,y)=-\frac{y}{x}$ הינה ליפשיצית בכל קטע סגור $[a,b]$. (פורמלית, בודקים ליפשיציות בקבוצה קומפקטית $K\subseteq\mathbb{R}^2$ ולכן מותר לנו לשים גם הגבלות על y אבל לא נזדקק לכך). לכל $x\in[a,b]$ $\underbrace{\text{מתקיים}}_{}$ ולכל y_1,y_2

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|-\frac{y_1}{x}+\frac{y_2}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\right||y_1-y_2|\le\frac{1}{a}|y_1-y_2|$$

ולכן מתקיימת ליפשיציות עם קבוע ליפשיץ $\frac{1}{a}$.

לפיכך, עבור נק' התחלה (x_0,y_0), מובטח לנו פתרון יחיד בקטע $[x_0-\eta,x_0+\eta]$ עם תמונה $y\in\overline{B(y_0,\alpha)}=[y_0-\alpha,y_0+\alpha]$ אם עבור $M=\sup_{\substack{x\in[x_0-\eta,x_0+\eta]\\ y\in[y_0-\alpha,y_0+\alpha]}}|f(x,y)|=\sup\left|-\frac{y}{x}\right|$ (בתוך התחום) מתקיים $M\eta<\alpha$.

נניח, למשל, $\alpha=y_0$ כדי לא להסתבך עם $y=0$ (אם כי נראה שאין צורך כי לא חילקנו ב-y בשום מקום). מתקיים $M=\sup_{\substack{x\in[x_0-\eta,x_0+\eta]\\ y\in[0,2y_0]}}\left|-\frac{y}{x}\right|=\frac{2y_0}{x_0-\eta}$

ולכן אם ניקח $\eta=\frac{x_0}{3}$, נקבל $M=\frac{2y_0}{\frac{2}{3}x_0}=\frac{3y_0}{x_0}$

ולפיכך $M\eta=\frac{3y_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{3}=y_0=\alpha$. פורמלית, נצטרך לקחת η קצת יותר קטן כדי שיתקיים $M\eta<\alpha$. בסה"כ, קיבלנו קיום ויחידות בקטע $[\frac{2x_0}{3},\frac{4x_0}{3})$ לכל $x_0>0$. מכיוון שניתן לכסות את הקרן $x>0$ ע"י ~~[illegible]~~ קטעים חופפים מסוג זה (~~[illegible]~~ הקטעים יהיו $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$, לכל n שלם), ניתן לקבל יחידות בכל הישר. [נשים לב שהתחום בו מובטחת יחידות תקף לכל y_0 ולכן עבור כל תנאי התחלה ניתן להמשיך לכל הישר ולא ניתקע באמצע עם y_0 "לא מתאים"]

עבור $y=0$ ו-α כלשהו, ניקח $\eta=\frac{x}{2}$ ונקבל $M=\sup_{\substack{x\in[\frac{x_0}{2},\frac{3x_0}{2}]\\ y\in[-\alpha,\alpha]}}\left|-\frac{y}{x}\right|=\frac{\alpha}{\frac{x_0}{2}}=\frac{2\alpha}{x_0}$

ולפיכך $M\eta=\frac{2\alpha}{x_0}\cdot\frac{x_0}{2}=\alpha$ ולכן נקבל יחידות בקטע $(\frac{x_0}{2},\frac{3x_0}{2})$.

הערה: ~~[illegible]~~ דרך אחרת להוכיח שהפתרונות מוגדרים בכל התחום $x>0$ היא להשתמש במשפט המבטיח לפיו הפתרון "מתפוצץ" (שואף לאינסוף) בקצה תחום ההגדרה שלו. אצלנו, אם $y>0$ אז $y'=-\frac{y}{x}<0$ ולכן אם הפתרון הוא חיובי אז הוא מונוטוני יורד כאשר x גדל, ובדומה אם הפתרון הוא שלילי אז הוא מונוטוני עולה כאשר x גדל => הוא לא "בורח" לאינסוף" => יש מוגדרות

בכל הקטע (a,∞) החל מ-a מסוים. בכיוון השני, נניח שתחום המוגדרות אינו כל $0<x$ (בבנחה סגע)
אלא רק החל מ-a. אזי צריך להתקיים $\lim_{x\searrow a}|y(x)|=\infty$. אבל לכל $a<x$ מתקיים
$y'=-\frac{y}{x}>-\frac{y}{a}$ ולכן הפתרון חסום מלמטה ע"י הפתרון של המשוואה $y'=-\frac{1}{a}y$, שהוא
$y=e^{-\frac{1}{a}x}$ ופתרון זה אינו שואף ל-∞ עבור $x\searrow a$. בדומה נקבל עבור y שלילי. לפיכך,
תחום המוגדרות הוא אכן כל x חיובי.

__הערה:__ באמצע הפתרון שעשינו כאן ראינו בעצם שיטה כללית להעריך תחום מוגדרות של פתרון: מחליפים את המשוואה במשוואה "פשוטה יותר" שהפתרון שלה "גדול יותר" מהפתרון של המקורית (כי הנגזרת גדולה יותר). אם הפתרון של המשוואה החדשה עדיין __לא__ מתפוצץ אז כך גם פתרון המשוואה המקורית. בדומה, אם נחליף במשוואה בה הפתרון "קטן יותר" אז __אם__ הוא "מתפוצץ" אז כך גם פתרון המשוואה המקורית. נראה כעת תרגיל שמדגים שימוש בטכניקה זו.

__תרגיל:__ (ת"ב מס' 3 שאלה 2א') הראה שהאינטרוול המקסימלי I^{max} לקיום פתרון של המשוואה $\frac{dy}{dx}=y^2+y^4$ עם תנאי התחלה $y(0)=1$ מקיים $(-\infty,\frac{1}{6})\subseteq I^{max}\subseteq(-\infty,\frac{1}{3})$.

__פתרון:__ ראשית, נשים לב שלפי המשוואה, $\frac{dy}{dx}\geq 0$ ולכן כל פתרון הוא מונוטוני עולה. לפיכך, אם נחליף את המשוואה במשוואה עם נגזרת חיובית קטנה יותר, נקבל משוואה שתחום הקיום של הפתרון שלה (עם אותו תנאי התחלה) מכיל את תחום הקיום של המשוואה שלנו.
נתבונן במשוואה $\frac{dy}{dx}=y^4$. כאן שנגזרתה קטנה מהנגזרת שלנו. הפתרון הכללי שלה הוא $y=(c-3x)^{-1/3}$ ולכן עבור תנאי ההתחלה $y(0)=1$, נקבל $c=1 \Leftarrow y=(1-3x)^{-1/3} \Leftarrow$ תחום הקיום של הפתרון הוא $(-\infty,1/3) \Leftarrow$ קיבלנו $I^{max}\subseteq(-\infty,1/3)$.

בכיוון השני, מכיוון שהפתרונות הם מונוטוניים, לכל $0<x$ מתקיים $y(x)\geq y(0)=1$ ולפיכך $y^4\geq y^2$. לכן אם נחליף את המשוואה ב-$\frac{dy}{dx}=2y^4$, תחום קיום הפתרון של המשוואה החדשה יהיה מוכל בתחום הקיום שלנו. הפתרון הכללי הוא $y=(c-6x)^{-1/3}$, ועבור $y(0)=1$ נקבל $c=1 \Leftarrow y=(1-6x)^{-1/3} \Leftarrow$ תחום קיום $(-\infty,1/6)$. לפיכך, תחום הקיום של הפתרון שלנו מקיים $[0,1/6)\subset I^{max}$. עבור x שליליים, שיקולים דומים נותנים להחליף במשוואה $\frac{dy}{dx}=2y^2$ שפתרונה הכללי הוא $y=(c-2x)^{-1} \Leftarrow$ עבור $y(0)=1$, $y=(1-2x)^{-1} \Leftarrow$ תחום קיום $(-\infty,1/2) \Leftarrow$ נקבל $(-\infty,0]\subset I^{max}$. [לא ניתן להסיק לגבי $(0,1/2)$ כי בקטע זה הנגזרת של הפתרון שלנו דווקא גדולה יותר.] לכן בסה"כ $(-\infty,\frac{1}{6})\subset I^{max}\subset(-\infty,\frac{1}{3})$ כנדרש.

__הערה:__ הדרך למצוא באיזו פונקציה להחליף היא פשוט "ניסוי וטעייה" - לנסות משוואות "פשוטות" שדומות למקורית.

מציאת קטע קיום מקסימלי של פתרונות בז"א תנאי התחלה

תרגיל: (ת"ב 4 שאלה מס' 4)

תהי $f(t,y):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ פונקציה וקטורית גזירה ברציפות (לפי t וגם לפי y). תהי $U\subset\mathbb{R}^m$ קבוצה פתוחה וחסומה. נניח שלכל $y\in\partial U$ ולכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(t,y)=0$. יהי $y(t)$ פתרון של המשוואה $y'(t)=f(t,y)$ המקיים $y(t_0)\in U$ עבור $t_0\in\mathbb{R}$ כלשהו. להוכיח שתחום הקיום של הפתרון הוא כל הישר.

פתרון: ראשית, נשים לב שהגזירות ברציפות לפי y מבטיחה ליפשיציות. אכן, לכל K קומפקטית הפונקציה $\left|\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)\right|$ הינה רציפה ב-K ולכן מקבלת שם מקסימום, שנסמנו M_K. כעת, לכל $(t,y_1),(t,y_2)\in K$, לפי משפט ערך הביניים של לגרנז' קיים $c\in K$ עבורו

$$M_K\ge\left[\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)\right](c)=\frac{|f(t,y_1)-f(t,y_2)|}{|y_1-y_2|}$$

ולכן $f(t,y)$ הינה ליפשיצית ב-K עם קבוע ליפשיץ M_K. לכן נוכל להשתמש במשפט <u>היחידות</u>.

נניח בשלילה שתחום הקיום המקסימלי הוא לא כל הישר, אז בה"כ הפתרון "מפסיק להתקיים" בנק' t_1. לפי המשפט על אינטרוול מקסימלי, כאשר $t\nearrow t_1$ הפתרון "מתפוצץ", כלומר יוצא מחוץ לכל קבוצה קומפקטית. בפרט, מכיוון ש-U חסומה, הפתרון יוצא מחוץ ל-U.

מכיוון שנתון $y(t_0)\in U$, ממשפט ערך הביניים נובע שקיים t_2 כך ש-$y(t_2)\in\partial U$.

כעת, נשים לב, שהפונקציה $y(t)\equiv y(t_2)$ [פונקציה קבועה] הינה פתרון של המשוואה המקורית! אכן, נגזרתה היא 0 וזה מתאים לכך שלכל $t\in\mathbb{R}$, $f(t,y(t_2))=0$ כי $y(t_2)\in\partial U$. לפיכך, מיחידות הפתרון (תחת תנאי התחלה $y(t_2)$) נובע שגם הפתרון המקורי הוא $y(t)\equiv y(t_2)$, בסתירה לכך ש-$y(t_0)\in U$. לכן אינטרוול הקיום הוא כל הישר, מש"ל. ▨

תרגיל: (ת"ב 3 שאלה מס' 2 ב')

מצא את תחום הקיום המקסימלי של פתרון בז"א תנאי ההתחלה $\frac{dy}{dx}=y^4+y^2+1$ עם תנאי התחלה $y(0)=1$.

פתרון: שוב נשתמש במשפט האינטרוול המקסימלי. הפתרון מוגדר בכל הקטע הפתוח (x_{min},x_{max}) ושואף לאינסוף בקצות הקטע. מכיוון שהנגזרת היא חיובית, הפתרון הוא מונוטוני עולה ב-x. לפיכך, אם נחליף אותו בפונקציה שנגזרתה קטנה יותר עם אותו תנאי התחלה $y(0)=1$, נקבל שהפונקציה החדשה שואפת לאינסוף "רחוק יותר". פורמלית, אם נסמן ב-(x'_{min},x'_{max}) את תחום הקיום המקסימלי של פתרון המשוואה $\frac{dy}{dx}=g(x,y)$ עם תנאי התחלה $y(0)=1$ עבור $0\le g(x,y)\le y^4+y^2+1$, נקבל $(x_{min},x_{max})\subseteq(x'_{min},x'_{max})$. זה יאפשר לנו לעבור למשוואה נוחה יותר.

נתבונן במשוואה $\frac{dy}{dx}=y^2+1$ (ברור ש- $0\le y^2+1\le y^4+y^2+1$). ניתן לרשום אותה בצורה $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y^2+1}$ ולכן פתרונה הכללי הוא $x=\operatorname{arctg}(y)+c$, ועם תנאי ההתחלה $y(0)=1$ נקבל $x+\pi/4=\operatorname{arctg}(y)$ $\Leftarrow$ $y=\operatorname{tg}(x+\pi/4)$. תחום הקיום של הפתרון הזה הוא $(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ ולכן תחום הקיום של פתרון המשוואה המקורית מקיים $I^{max}\subseteq(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$.

יציבות ביחס לשינוי בתנאי ההתחלה

תרגיל: (תב' 4 שאלה מס' 5) תהי $f(t,y):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ פונקציה וקטורית גזירה ברציפות. נסמן ב- $y(t;\tau,x)$ את הפתרון בעי"ת תנאי ההתחלה $y'(t)=f(t,y)$ עם תנאי התחלה $y(\tau)=x$. להוכיח כי קיים $\bar{t}>0$ וקיימת $U\subset\mathbb{R}^m$ סביבה פתוחה של 0 כך שמתקיים:

(א) לכל $x\in U$, הקטע $[0,\bar{t}]$ מוכל באינטרוול הקיום המקסימלי של $y(t;0,x)$.

(ב) לכל $s\in[0,\bar{t}]$, ההעתקה $x\to\Phi_s(x)=y(s;0,x)$ מעתיקה את U באופן חח"ע לקבוצה פתוחה U_s (כאשר $y(s;0,x)$ הוא הערך של הפונקציה $y(t;0,x)$ בנקודה $t=s$).

(ג) ההעתקה ההפוכה $\Phi_s^{-1}:U_s\to U$ הינה רציפה.

פתרון: תחילה נרשום את המשפט על יציבות ביחס לשינוי בתנאי ההתחלה בו נשתמש:

משפט: בהינתן משוואה דיפרנציאלית כמתואר בתרגיל, נסמן ב- $I^{max}_{\tau,x}=(t_{min}(\tau,x),t_{max}(\tau,x))$ את תחום הקיום המקסימלי של הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y(\tau)=x$ [אותו מסמנים $y(t;\tau,x)$]

אזי: (א) $\liminf\limits_{(\tau,x)\to(t_0,y_0)} t_{max}(\tau,x)\ge t_{max}(t_0,y_0)$

(ב) $\limsup\limits_{(\tau,x)\to(t_0,y_0)} t_{min}(\tau,x)\le t_{min}(t_0,y_0)$

(ג) לכל קטע סגור $[a,b]\subseteq I^{max}_{t_0,y_0}$, הפתרונות $y(t;\tau,x)$ מתכנסים במידה שווה בקטע $[a,b]$ לפתרון $y(t;t_0,y_0)$ כאשר $(\tau,x)\to(t_0,y_0)$.

הערה: מהמשפט נובע שאם $[a,b]\subseteq I^{max}_{t_0,y_0}$ אז $[a,b]\subseteq I^{max}_{\tau,x}$ אם $|(\tau,x)-(t_0,y_0)|$ קטן מספיק.

המשך הפתרון: (א) נתבונן במשוואה עם תנאי התחלה $y(0)=0$. נסמן את תחום הקיום של הפתרון $I^{max}_{0,0}$. לפי המשפט, לכל $[a,b]\subseteq I^{max}_{0,0}$ אם $|(0,x)-(0,0)|$ קטן מספיק אז $[a,b]\subseteq I^{max}_{0,x}$. קיים t_0 כך ש- $[0,t_0]\subseteq I^{max}_{0,0}$. לכן, קיימת $U\subseteq\mathbb{R}^m$ סביבה פתוחה של 0 כך שלכל $x\in U$, $[0,t_0]\subseteq I^{max}_{0,x}$, כלומר הקטע $[0,t_0]$ מוכל באינטרוול הקיום המקסימלי של $y(t;0,x)$. [הקבוצה U היא העונה לדרישה $|(0,x)-(0,0)|$ קטן מספיק.]

(ב) תחילה נראה כי ההעתקה $x \to \Phi_s(x)=y(s;0,x)$ הינה חח"ע. נניח כי $\Phi_s(x_1)=\Phi_s(x_2)$.
נתבונן בפתרון המשוואה המקורית עם תנאי ההתחלה $y(s)=\Phi_s(x_1)=\Phi_s(x_2)$. מכיון ש- $s<t_0$
ו- $x\in U$, s נמצאת בתחום הקיום המקסימלי של הפתרון עם תנאי התחלה $y(0)=x_1$.
לכן מיחידות נקבל ש- 0 נמצא בתחום הקיום של הפתרון עם תנאי ההתחלה $y(s)=\Phi_s(x_1)$
ושהפתרון מקיים $y(0)=x_1$. [מתחילים מקטע קטן סביב s בו הפתרון עבור תנאי התחלה
$y(s)=\Phi_s(x_1)$ מוגדר וגם הפתרון עם תנאי התחלה $y(0)=x_1$ מוגדר. מכיון ששניהם מוגדרים
בקטע $y(s)$, הם מתלכדים. כעת מרחיבים לקטע גדול יותר וממשיכים עד שמגיעים ל- 0.]
משיקולים דומים עבור הפתרון עם תנאי התחלה $y(0)=x_2$ נקבל שהפתרון עם תנאי התחלה
$y(s)=\Phi_s(x_2)$ מקיים $y(0)=x_2$. אולם מכיון ש- $\Phi_s(x_1)=\Phi_s(x_2)$, מדובר באותו פתרון ולכן
מתקיים $x_1=x_2$ $\Rightarrow$ ההעתקה $x\to\Phi_s(x)$ הינה חח"ע.

כעת נראה שהטווח שלה הנו קבוצה פתוחה. יהי $y(s;0,x_0)\in U_s$. לפי אותו שיקול כמו
קודם, תחום הקיום של פתרון המשוואה המקורית עם תנאי התחלה $y(s)=y(s;0,x_0)$ מכיל את
הקטע $[0,s]$. לפיכך, לפי המשפט, אם (s^*,y') קרובה מספיק ל- $(s,y(s;0,x_0))$ אז
תחום של הפתרון בע"ה ההתחלה $y(s^*)=y'$ מכיל את הקטע $[0,s]$. יתרה מזאת, מכיון שפתרון זה
מתכנס במ"ש בקטע $[0,s]$ לפתרון הבע"ה עם תנאי התחלה $y(s)=y(s;0,x_0)$,
נקבל שכאשר $(s^*,y')\to(s,y(s;0,x_0))$, הערך $y(0;s^*,y')$ הינו קרוב כרצוננו ל- x_0.
מכיון ש- $x_0\in U$ ו- U פתוחה, נובע מכך שקיימת סביבה V' של $(y(s;0,x_0))$ כך
שלכל $y'\in V'$ מתקיים $y(0;s^*,y')=x'\in U$, אולם במקרה כזה, $y'=\Phi_s(x')\in U_s$.
לפיכך, לכל $y(s;0,x_0)\in U_s$ מצאנו סביבה V המוכלת ב- U_s המכילה אותו $\Rightarrow$ U_s פתוחה.

(ג) צריך להראות שאם $y(s;0,x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} y(s;0,x_0)$ אז $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. כמו בסעיף
הקודם, מתבוננים בפתרון הבע"ה עם תנאי התחלה $y(s)=y(s;0,x_0)$. תחום הקיום שלו מכיל
את הקטע $[0,s]$ ולכן עבור n מספיק גדול, תחומי הקיום של הבעיות עם תנאי התחלה
$y(s)=y(s;0,x_n)$ מכילים את הקטע $[0,s]$ ומתכנסים במידה שווה לפתרון של הבע"ה $y(s)=y(s;0,x_0)$.
בפרט, מכיון ש- $x_n=y(0;0,x_n)$ [הערך בנק' $t=0$ של הפתרון עם תנאי התחלה
$y(s)=y(s;0,x_n)$. זה נובע מיחידות מכיון שלפי ההגדרה, $y(s;0,x_n)$ הוא הערך בנק' s
של פתרון בע"ה ההתחלה עם התנאי $y(0)=x_n$] ו- $x_0=y(0;0,x_0)$, נקבל $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$,
כנדרש.

הערה: נשים לב שהרציפות של Φ_s^{-1} בדיוק שקולה לרציפות של Φ_s, מכיוון שניתן להציג את Φ_s^{-1} כ Φ_{-s}, כלומר, ניתן להביט על הנקודה $(s,y(s;0,0))$ כמרכז וסביבה לפתח את מה שפיתחנו עבור $(0,0)$ ואז במקום "לנוע ימינה" למרחק s ניתן "לנוע שמאלה" למרחק s ונקבל את Φ_s^{-1} כ"סוג של" Φ_s.

שימוש במשפט היחידות להוכחת זהויות

תרגיל: להוכיח את הנוסחה: $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}\right)$.

נ"ג 4 ולה מס' 29

פתרון: תחילה בודקים את המשוואה הדיפרנציאלית $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}=0$ בשתי דרכים שונות ומוצאים שמחד, הפתרון שלה נתון ע"י הנוסחה $\arcsin x+\arcsin y=c$, ומאידך, הפתרון נתון ע"י הנוסחה $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=c^*$. כעת, ממשפט היחידות נוכל שלכל c^* קיים $c=f(c^*)$ יחיד כך שהפתרונות $\begin{cases}\arcsin x+\arcsin y=c\\ y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=c^*\end{cases}$ מזדהים (עבור תנאי התחלה $x=0$ ו- y מתאים). נציב $x=0$ ונקבל

$$\arcsin\left(y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}\right)=\arcsin x+\arcsin y \Leftarrow \arcsin(c^*)=c \Leftarrow \begin{cases}\arcsin y=c\\ y=c^*\end{cases}$$

וזו בדיוק הנוסחה שהתבקשנו להוכיח.

פתרון משוואות לינאריות הומוגניות

תזכורת: הגדרה: פונקציה מטריציונית $t \longmapsto A(t)\in Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ תיקרא רציפה אם כל הפונקציות $\{a_{i,j}(t)\}_{i,j=1}^{m}$ במטריצה הן רציפות. [דוגמא: $t\longmapsto \begin{pmatrix} t+2 & t^2\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ הינה רציפה.]

לפעמים קוראים למשוואות כנ"ל "מערכת משוואות לינאריות".

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית לינארית הינה משוואה מהצורה $y'(t)=A(t)y(t)+b(t)$, כאשר $A(t)$ פונקציה מטריציונית רציפה, בקטע פתוח I ו- $b(t)\in C(I,\mathbb{R}^m)$. הפתרון מקיים $y(t)\in C^1(I,\mathbb{R}^m)$.

הגדרה: בעיית תנאי התחלה מתקבלת מהמשוואה לעיל ע"י תוספת התנאי $y(t_0)=y_0$, עבור $t_0\in I$.

הגדרה: משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר m הינה משוואה מהצורה

$$z^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+\dots+a_1(t)z'(t)+a_0(t)z(t)=r(t),$$

כאשר לכל $1\le i\le m$, $a_i(t)\in C(I)$.

בעיית תנאי התחלה מתקבלת ע"י תוספת התנאים $z(t_0)=z_0, z'(t_0)=z_1,\dots,z^{(m-1)}(t_0)=z_{m-1}$, עבור $t_0\in I$.

טענה: נוכל להפוך כל משוואה $\overset{\text{לינארית}}{\frown}$ מסדר m למערכת משוואות לינאריות ע"י הגדרת $y(t)=(z(t),z'(t),\dots,z^{(m-1)}(t))\in C(I,\mathbb{R}^m)$ ומטריצה

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{m-2}(t) & -a_{m-1}(t)\end{pmatrix}$$

אכן, מהמשוואה המקורית נובע שמתקיים $y'(t)=A(t)y(t)+b(t)$ עבור $b(t)=(0,0,\dots,0,r(t))$. גם תנאי ההתחלה $z(t_0)=z_0, z'(t_0)=z_1,\dots, z^{(m-1)}(t_0)=z_{m-1}$ עובר לתנאי התחלה $y(t_0)=y_0$ במערכת המשוואות (שכן $y_0\in\mathbb{R}^m$).

משפט הקיום והיחידות: לבע"ת תנאי ההתחלה כאמור לעיל, קיים פתרון יחיד המוגדר בכל הקטע (a,b).

הגדרה: אם $b(t)\equiv 0$ עבור מערכת המשוואות, או $r(t)=0$ עבור המשוואה מסדר m, המערכת (או המשוואה) תיקרא הומוגנית.

משפט: מרחב הפתרונות של משוואה הומוגנית מסדר m הינו מרחב וקטורי מסדר m מעל $\mathbb{C}$.
[הפונקציה $A(t)$ הינה ממשית אבל לתנאי ההתחלה ולפתרון מרשים להיות מרוכבים. למעשה, בגלל ש- $A(t)$ ממשית אפשר לפרק את תנאי ההתחלה והפתרון לחלקים ממשי ומדומה ולפתור בנפרד.]

הערה: עד כאן החומר שנלמד בהרצאה.

מסקנה: על מנת למצוא את כל הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית מסדר m עלינו למצוא m פתרונות בת"ל, שיהוו בסיס למרחב הפתרונות. כיצד נדע שהפתרונות הינם בלתי תלויים לינארית?

תשובה: בונים מטריצה שהעמודות שלה הם הפתרונות. אם לכל t הדטרמיננטה של המטריצה אינה 0 אז הפתרונות הינם בת"ל.

$$\begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_m(t)\\ z_1'(t) & & z_m'(t)\\ z_1^{(2)}(t) & \dots & z_m^{(2)}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ z_1^{(m-1)}(t) & \dots & z_m^{(m-1)}(t)\end{pmatrix}$$

<u>טענה:</u> אם קיים t_0 עבורו הדטרמיננטה היא 0 אז לכל t הדטרמיננטה היא 0.

<u>הוכחה:</u> אם עבור t_0, הדטרמיננטה היא 0 אז עמודות המטריצה הינן תלויות לינארית. כלומר, קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ כך ש-

$$\begin{cases}\lambda_1 z_1(t_0)+\dots+\lambda_m z_m(t_0)=0\\ \lambda_1 z_1'(t_0)+\dots+\lambda_m z_m'(t_0)=0\\ \vdots\\ \lambda_1 z_1^{(m-1)}(t_0)+\dots+\lambda_m z_m^{(m-1)}(t_0)=0\end{cases}$$

במקרה כזה, הפונקציה $z(t)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i z_i(t)$ הינה פתרון של המשוואה המקורית (כי מרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי שמכיל את $z_1,\dots,z_m$) שמקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases}z(t_0)=0\\ z'(t_0)=0\\ \vdots\\ z^{(m-1)}(t_0)=0\end{cases}.$$

אולם גם $z\equiv 0$ הינו פתרון של המשוואה (כי היא הומוגנית) שמקיים את אותו תנאי התחלה, ולכן ממשפט היחידות נובע $\sum\lambda_i z_i(t)\equiv 0$, כלומר $\sum\lambda_i z_i(t)=0$ לכל t. בפרט, לכל t הדטרמיננטה של המטריצה היא 0.

<u>הערה:</u> למטריצה שבנינו קוראים <u>הורונסקיאן</u> (Wronskian) של המערכת, נעסוק עליו בהרחבה בהרצאה.

<u>תרגיל:</u> נתבונן במשוואה $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ בקטע $I=(\alpha,\beta)$, כאשר $p(t),q(t)$ רציפות בקטע. יהיו $y_1(t),y_2(t)$ שני פתרונות בת"ל בקטע.

ג"ב מס' 5 שאלה 5

(א) הוכח כי ל- $y_1(t),y_2(t)$ אין נק' קיצון משותפת.

(ב) <u>משפט Sturm:</u> הוכח כי בין כל שני אפסים עוקבים של $y_1(t)$ בקטע (אם יש כאלה) יש בדיוק אפס אחד של $y_2(t)$.

<u>פתרון:</u> (א) נרשום את מטריצת הורונסקיאן של y_1,y_2. נקבל $\begin{pmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{pmatrix}$. אם t_0 מסוים הינו נק' קיצון של y_1 וגם של y_2 אז $y_1'(t_0)=y_2'(t_0)=0$ ולכן הדטרמיננטה של המטריצה ב- t_0 היא 0. אולם אז לפי הטענה לעיל, הדטרמיננטה לכל t היא 0 ולכן הפתרונות הם תלויים לינארית, סתירה. לכן אין לפתרונות נק' קיצון משותפת.

(ב) נתבונן בשני ~~[illegible]~~ אפסים עוקבים של $y_1(t)$ אותם נסמן ב- t_1,t_2. נצטמצם לקטע (t_1,t_2). גם בקטע זה $p(t)$, $q(t)$ רציפות וקיימים הפתרונות $y_1(t),y_2(t)$. נתבונן בפונקציה $z(t)=\frac{y_2(t)}{y_1(t)}$ בקטע (t_1,t_2). היא מוגדרת כי $y_1(t)\neq 0$ בקטע (האפסים t_1,t_2 הם עוקבים). נגזרתה היא $\frac{y_2(t)y_1'(t)-y_1(t)y_2'(t)}{[y_1(t)]^2}$. נשים לב שהמונה הוא הדטרמיננטה של הורונסקיאן שראינו לעיל (עד כדי סימן) ולכן הוא אינו מתאפס בקטע. לפיכך, מכיוון ש- $z(t)\in C^1((t_1,t_2))$, נקבל ממשפט ערך הביניים ש- $z(t)$ הינה פונקציה <u>מונוטונית</u> בקטע (t_1,t_2). נניח בשלילה ש- $y_2(t)$ אינה מתאפסת בקטע (t_1,t_2), ולפיכך גם $z(t)$ אינה מתאפסת בו. לפי משפט ערך הביניים, הסימן שלה בקטע הוא קבוע ולכן נניח בה"כ שהיא חיובית בקטע. נשים לב שמכיוון ש- $(t_1,t_2)\subset(\alpha,\beta)$, $y_1(t),y_2(t)$ הינן חסומות ב- (t_1,t_2). נסמן את החסם ב- M. כמו-כן, נסמן את החסם התחתון של $|y_2(t)|$ בקטע ב- m. $\underbrace{m}_{(m>0 \text{ כי } y_2(t) \text{ אינה מתאפסת ב- } [t_1,t_2])}$ מתקיים $\lim_{t\searrow t_1} z_1(t)=\lim_{t\nearrow t_2} z_2(t)=\infty$ (מכנה שואף ל- 0)

שים לב שלא יתכן ש- $y_1(t),y_2(t)$ שניהם מתאפסים אז הם תלויים לינארית.

ומונה חסום מלמעלה ע"י M). לדוגמא כאן, ניקח $t_3\in(t_1,t_2)$ כלשהו ונקבל $|z(t_3)|\le\frac{M}{|y_1(t_3)|}$.

לפיכך, לא יתכן ש- z מונוטונית ב- (t_1,t_2), סתירה.

לכן יש <u>לפחות</u> אפס אחד של $y_2(t)$ ב- (t_1,t_2). אם יש לפחות שני אפסים כאלה אז מטיעון דומה למה שעשינו קודם, יש ביניהם אפס של $y_1(t)$, בסתירה לכך ש- t_1,t_2 הן אפסים <u>עוקבים</u> של $y_1(t)$. לכן בין t_1,t_2 <u>קיים</u> אפס <u>יחיד</u> של $y_2(t)$, כנדרש.

מציאת פתרונות כלליים עבור משוואה במקדמים קבועים

נדון במקרה בו "המקדמים" של המשוואה – הפונקציות $a_0(t),a_1(t),\dots,a_{m-1}(t)$ – הינן קבועות.

במקרה כזה נהוג להחליף את סימן הגזירה באופרטור D, וכך המשוואה נרשמת בצורה

$$(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)y=0. \qquad (*)$$

במקרה כזה, מתבוננים בביטוי <u>כפולינום</u> ב- D ומפרקים אותו לגורמים (מעל $\mathbb{C}$).

מקבלים ביטוי פורמלי

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\dots(D-\lambda_m)y=0. \qquad (**)$$

ניתן להראות שכאשר מתייחסים אל D כאל אופרטור, הביטוי $(**)$ שקול לביטוי $(*)$.

<u>דוגמא:</u> בהינתן המשוואה $y^{(3)}-y^{(2)}-4y'+4y=0$, נרשום אותה בצורה $(D^3-D^2-4D+4)y=0$.

נפרק את הפולינום לגורמים ונקבל $(D-1)(D-2)(D+2)y=0$. פירוש ביטוי זה, אם נתייחס ל- D כאל אופרטור, הוא

$$(D-1)(D-2)[(D+2)y]=(D-1)(D-2)(y'+2y)=$$
$$=(D-1)[y''+2y'-2y'-4y]=(D-1)(y''-4y)=y'''-y''-4y'+4y$$

וזו אכן המשוואה המקורית.

למשוואה $(**)$ קוראים לפעמים <u>המשוואה האופיינית</u> של $(*)$ ולשורשים קוראים <u>השורשים האופייניים</u>.

בהינתן הצורה $(**)$, נרצה למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

(א) אם $\lambda_1\ne\lambda_2\ne\dots\ne\lambda_m$ אז הפתרונות $e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\dots,e^{\lambda_m t}$ הינם m פתרונות בת"ל ולכן הפתרון הכללי הוא $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\dots c_me^{\lambda_m t}$.

(ב) אם λ_i מופיע k פעמים אז במקום הפתרון $e^{\lambda_i t}$, יופיעו k פתרונות בת"ל: $e^{\lambda_i t},te^{\lambda_i t},t^2e^{\lambda_i t},\dots,t^{k-1}e^{\lambda_i t}$. שאר הפתרונות – כמו במקרה הקודם.

(ג) אם $\lambda_j=\alpha+\beta i$ אז מכיוון שהמקדמים הם ממשיים, גם $\alpha-\beta i$ הוא שורש של הפולינום.

במקרה כזה, בעקרון מופיע בפתרון $c_1e^{(\alpha+\beta i)t}+c_2e^{(\alpha-\beta i)t}$, כלומר

$$c_1e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+c_2e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$

אולם מכיוון שבצד ימין של המשוואה יש 0, החלק המדומה מצטמצם ומתקבלים שורשים ממשיים בלבד.

נקבל בסה"כ שהגורם בפתרון הכללי במקרה זה הוא $e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)$.

לפי המשפט היסודי של האלגברה, שלוש האפשרויות האלה מכסות את כל המקרים האפשריים.

<u>דוגמא:</u> מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y^{(6)}+9y^{(4)}+24y^{(2)}+16y=0$.

<u>פתרון:</u> נרשום בצורת אופרטור: $(D^6+9D^4+24D^2+16)y=0$. נפרק את הפולינום לגורמים ונקבל

$((D^2+1)(D^2+4)^2)(y)=0 \Leftarrow$ שורשים $\Leftarrow i,-i,2i,-2i,2i,-2i$ הפתרון הכללי הוא

$y=c_1\cos t+c_2\sin t+C_3\cos 2t+c_4 t\cos 2t+c_5\sin 2t+c_6 t\sin 2t$.

פתרון משוואות לינאריות הומוגניות במקדמים קבועים

תזכורת: ראינו בהרצאה, שמרחב הפתרונות של משוואה הומוגנית מסדר m הינו מרחב וקטורי ממימד m מעל $\mathbb{C}$. לפיכך, על מנת למצוא את כל פתרונות המשוואה, עלינו למצוא m פתרונות בת"ל.

ניסוח שקול של המשוואה: לשם נוחות, נרשום את המשוואה בצורה אופרטורית, כלומר נחליף את הנגזרת $\frac{d}{dx}$ באופרטור גזירה שיסומן ב- D. בהינתן משוואה במקדמים קבועים: $y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$,

בכתיב האופרטורי נרשום $(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)y=0$. (*)

נשים לב שהכתיב מאוד דומה לפולינום, ואכן תיכף נתייחס אליו כך.

פירוק הפולינום לגורמים: נפרק את הפולינום לגורמים מעל $\mathbb{C}$: $D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\dots(D-\lambda_m)$.

במקרה כזה, ניתן לרשום את המשוואה בצורה $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdot\dots\cdot(D-\lambda_m)y=0$. (**)

ניתן לראות שאם מתייחסים ל- D כאל אופרטור, המשוואה החדשה אכן שקולה למקורית.

דוגמא: בהינתן המשוואה $y^{(3)}-y^{(2)}-4y'+4y=0$, נרשום אותה בצורה אופרטורית: $(D^3-D^2-4D+4)y=0$.

נפרק את הפולינום לגורמים ונקבל: $(D-1)(D-2)(D+2)y=0$. נבדוק שהמשוואה שהתקבלה שקולה למקורית:

$$(D-1)(D-2)[(D+2)y]=(D-1)(D-2)(y'+2y)=(D-1)(y''+2y'-2y'-4y)=(D-1)(y''-4y)=y^{(3)}-y^{(2)}-4y'+4y$$

וזה אכן שקול למשוואה המקורית.

הערות: (א) למשוואה (**) קוראים המשוואה האופיינית של (*) ולשורשים $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ קוראים שורשים אופייניים.

(ב) סדר הופעת השורשים במשוואה (**) אינו משנה, מכיוון שאופרטורים מהסוג $(D-\lambda_1)$, $(D-\lambda_2)$ מתחלפים ביניהם.

מציאת פתרון המשוואה ההומוגנית: לאחר שרשמנו את המשוואה האופיינית, יש שיטה כללית שמאפשרת למצוא את פתרונות המשוואה ההומוגנית. הפתרונות תלויים בשורשי הפולינום $\lambda_1,\dots,\lambda_m$.

עניין חשוב ← (א) אם $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\dots\neq\lambda_m$ וכל הפתרונות ממשיים אז $e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\dots,e^{\lambda_m t}$ הם m פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית.

הוכחה: אם $y=e^{\lambda_1 t}$ אז $(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)y=$

$$=\lambda_1^m e^{\lambda_1 t}+a_{m-1}\lambda_1^{m-1}e^{\lambda_1 t}+\dots+a_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+a_0e^{\lambda_1 t}=e^{\lambda_1 t}(\lambda_1^m+a_{m-1}\lambda_1^{m-1}+\dots+a_1\lambda+a_0)=0$$

כי זה שורש של הפולינום האופייני

ואותו דבר עבור $\lambda_2,\dots,\lambda_m$.

מדוע הפתרונות בת"ל? נתבונן בוורונסקיאן:

$$W(t)=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_m t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m e^{\lambda_m t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{m-1}e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m^{m-1}e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}$$

מכיוון ש- $e^{\lambda_i t}\neq0$ לכל i,t, נקבל $\det W(t)\neq0$

אם ורק אם הדטרמיננטה של מטריצה פשוטה יותר אינה מתאפסת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

ואכן ידוע שדטרמיננטה זו (נקראת Van der Monde) אינה מתאפסת.

לכן הפתרונות אכן בת"ל ומכיוון שמצאנו m פתרונות, הם מהווים בסיס למרחב הפתרונות.

ענין חדש ← ב) אם השורשים ממשיים אבל השורש λ_i מופיע בריבוי k אז בנוסף לפתרון $e^{\lambda_i t}$ יופיעו $k-1$ פתרונות נוספים $te^{\lambda_i t}, t^2e^{\lambda_i t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda_i t}$.

<u>הוכחה במקרה $m=2$:</u> במקרה זה, המשוואה האופיינית היא מהצורה $(D-\lambda)^2y=0$.

נרשום אותה כמערכת של שתי משוואות: $\begin{cases}(D-\lambda)y=v\\(D-\lambda)v=0\end{cases}$. נפתור תחילה את השניה.

$(D-\lambda)v=0 \Leftarrow$ לפי השיטה שראינו קודם, $v=e^{\lambda t}$ בסיס למרחב הפתרונות. לכן פתרון כללי הוא $v=c_1e^{\lambda t}$. כעת נפתור את המשוואה הראשונה: $(D-\lambda)y=c_1e^{\lambda t} \Leftarrow y'-\lambda y=c_1e^{\lambda t}$.

זו משוואה לינארית מסדר ראשון, והפתרון נתון ע"י הנוסחה

$$y=e^{\int\lambda dt}\left(\int e^{-\int\lambda dt}c_1e^{\lambda t}dt\right)=$$
$$=e^{\lambda t}\left(\int e^{-\lambda t}c_1e^{\lambda t}dt\right)=e^{\lambda t}\left(\int c_1dt\right)=e^{\lambda t}(c_1t+c_2)$$

ולכן הפתרון הכללי נתון ע"י הנוסחה $y=c_1te^{\lambda t}+c_2e^{\lambda t}$, כפי שראינו לעיל.

נראה בנוסף שהפתרונות $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$ הינם בת"ל. נתבונן במטריצת הוורונסקיאן. $W(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ \lambda e^{\lambda t} & (1+\lambda t)e^{\lambda t}\end{pmatrix}$

ומתקיים

$$\det W(t)=e^{\lambda t}\cdot(1+\lambda t)e^{\lambda t}-\lambda e^{\lambda t}\cdot te^{\lambda t}=e^{2\lambda t}(1+\lambda t-\lambda t)=e^{2\lambda t}\neq 0$$

ולכן הפתרונות אכן בת"ל.

<u>דוגמא:</u> פתור את המשוואה $y^{(4)}+6y^{(3)}+5y^{(2)}-24y'-36y=0$.

<u>פתרון:</u> נרשום בצורה אופרטורית: $(D^4+6D^3+5D^2-24D-36)y=0$. נפרק את הפולינום לגורמים ונקבל משוואה אופיינית $(D-2)(D+2)(D+3)^2(y)=0$. לכן לפי הכלל שראינו לעיל, בסיס למרחב הפתרונות הוא הפתרונות: $y_1=e^{-2t}, y_2=e^{2t}, y_3=e^{-3t}, y_4=te^{-3t}$.

ענין חדש ← ג) אם לפולינום יש שורש מרוכב - ראשית, נזכור שמכיוון שמקדמי הפולינום הם ממשיים, אם λ מרוכב הוא שורש של הפולינום אז גם $\bar\lambda$ שורש שלו. על שני השורשים $\lambda, \bar\lambda$ נרצה להפעיל את אותו השיקול כמו עבור שני שורשים ממשיים שונים, ונקבל פתרונות $e^{\lambda t}, e^{\bar\lambda t}$. נרצה לקבל מהם פתרונות ממשיים.

נשים לב שעבור פונקציה מרוכבת $f(t)=\mathrm{Re}\,f(t)+i\,\mathrm{Im}\,f(t)$ מתקיים $f'(t)=[\mathrm{Re}\,f(t)]'+i[\mathrm{Im}\,f(t)]'$ ולכן מכיוון שאצלנו מקדמי המשוואה הם ממשיים, אם מתקיים $(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)f=0$ אז מתקיימות שתי משוואות: $\begin{cases}(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)[\mathrm{Re}\,f]=0\\ i\cdot(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)[\mathrm{Im}\,f]=0\end{cases}$ ולכן $\mathrm{Re}\,f, \mathrm{Im}\,f$ גם הם פתרונות של המשוואה המקורית.

לסיכום, אם $\lambda=a+bi$ אז מהפתרון $e^{\lambda t}=e^{at+bit}=e^{at}(\cos bt+i\sin bt)$ נקבל בעצם שני פתרונות: $y_1(t)=e^{at}\cos bt, y_2(t)=e^{at}\sin(bt)$. לכאורה זה אומר כי כך נקבל יותר פתרונות מאשר שורשים של הפולינום. אולם נשים לב שבמקרה כזה הפתרונות המתאימים ל- $\bar\lambda$ הם: $y_3(t)=e^{at}\cos(-bt), y_4(t)=e^{at}\sin(-bt)$, שהם כמובן תלויים לינארית בפתרונות שהוצגו ע"י λ. לכן בסה"כ $\lambda, \bar\lambda$ "גורמים" שני פתרונות בת"ל.

נבדוק שהפתרונות $e^{at}\cos(bt), e^{at}\sin(bt)$ הם אכן בת"ל. נתבונן במטריצת הוורונסקיאן:

$$W=\begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\sin bt \\ e^{at}(-\sin bt\cdot b+a\cos bt) & e^{at}(\cos bt\cdot b+a\sin bt) \end{pmatrix}$$

מהק"ם

$$\det W(t)=e^{2at}\left(b\cos^2 bt+a\cos bt\sin bt+b\sin^2 bt-a\sin bt\cos bt\right)=$$

$$=e^{2at}\left(b(\cos^2 bt+\sin^2 bt)\right)=be^{2at}\neq 0$$

ולכן הפתרונות אכן בת"ל.

סיכום: אם $\lambda=a+bi$ הוא שורש של הפולינום האופייני אז $y_1=e^{at}\cos bt$, $y_2=e^{at}\sin bt$ הינם פתרונות בת"ל של המשוואה.

עניין חשוב ← (3) אם לפולינום יש $\underbrace{\text{שורש}}_{\lambda=a+bi}$ מרוכב מריבוי k – אפשר לראות שבשיקולים שעשינו לגבי שורש ממשי מריבוי k, לא השתמשנו בממשיות שלו. ניתן לבצע שיקולים דומים עבור שורש מרוכב, ונקבל פתרונות:

$$y_1=e^{at}\cos bt,\ y_2=e^{at}\sin bt,\ y_3=te^{at}\cos bt,\ y_4=te^{at}\sin bt,\ \dots,\ y_{2k-1}=t^{k-1}e^{at}\cos bt,$$
$$y_{2k}=t^{k-1}e^{at}\sin bt.$$

דוגמא: מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $y^{(6)}+9y^{(4)}+24y^{(2)}+16y=0$.

פתרון: נרשום בצורה אופרטורית: $(D^6+9D^4+24D^2+16)y=0$. נפרק את הפולינום לגורמים:

$(D^2+1)((D^2+4)^2)y=0$ ⇐ שורשים $\pm i,\pm 2i,\pm 2i$ ⇐ הפתרון הכללי הוא

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3\cos 2t+c_4\sin 2t+c_5 t\cos 2t+c_6 t\sin 2t.$$

הערה: אם יש זמן, נעבור על הפתרון של שאלות 6,7 בתרגיל מס' 5. ניתן לפתור בשני דרכים: או הצבה ישירה או ע"י התבוננות בוורונסקיאן.

פתרון מערכת משוואות לינארית הומוגנית

<u>בעיה:</u> רוצים למצוא פתרון של מערכת המשוואות $y'(t)=Ay(t)$, כאשר A מטריצה של קבועים.

<u>פתרון:</u> נראה להראות שהפתרון נתון ע"י המטריצה $\exp(At)$, כאשר באופן כללי $\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

לשם כך נצטרך להראות שהטור אכן מתכנס ושהפונקציה המתקבלת מקיימת את המשוואה.

<u>הערה:</u> כאשר אומרים שהפתרון נתון ע"י מטריצה, משמעות הדבר היא <u>שכל עמודה של המטריצה</u> היא פתרון של המשוואה. הסיבה לכך היא שאם נרשום מטריצה B בצורה $B=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ [וקטורי עמודה] אז לכל A מתקיים $AB=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. בפרט, אצלנו אם מתקיים $[\exp(At)]'=A[\exp(At)]$ אז לכל עמודה v_i של $\exp(At)$ נקבל $[v_i]'=Av_i$ ולכן v_i הוא פתרון של המשוואה $y'(t)=Ay(t)$.

יתרה מכך, פתרונות אלה הם בת"ל מכיוון שאם נציב $t=0$ במטריצה $\exp(At)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}$, נקבל I (כי כל איברי הטור עבור $k\geq 1$ מתאפסים ועבור $k=0$ מקבלים I עפ"י הגדרת חזקת 0). מכיוון ש $\det I\neq 0$ רואים שהוורונסקיאן של הפתרונות אינו מתאפס עבור $t=0$ $\Leftarrow$ אינו מתאפס בשום מקום $\Leftarrow$ הפתרונות בת"ל.

לפיכך, עמודות המטריצה מהוות בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה.

<u>הוכחת התכנסות הטור:</u> כל מטריצה $n\times n$ אפשר לראות כוקטור ב- $\mathbb{R}^{n^2}$. אולם כדי לנצל טוב יותר את התכונות המיוחדות של מטריצות, נתבונן בנורמה אחרת (לא הסטנדרטית) על המרחב $\mathbb{R}^{n^2}$.

<u>הגדרה:</u> עבור מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, נגדיר $\|A\|=\sup\limits_{v\in\mathbb{R}^n}\frac{\|Av\|}{\|v\|}$, כאשר $\|Av\|,\|v\|$ הן נורמה אוקלידית רגילה ב- $\mathbb{R}^n$. נורמה זו נקראת <u>נורמה אופרטורית</u> על A.

<u>טענה:</u> לכל A,B מתקיים $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$.

<u>הוכחה:</u> לכל $v_0\in\mathbb{R}^n$ מתקיים
$$\frac{\|AB(v_0)\|}{\|v_0\|}=\frac{\|A(Bv_0)\|}{\|v_0\|}=\frac{\|A(Bv_0)\|}{\|Bv_0\|}\frac{\|Bv_0\|}{\|v_0\|}\leq$$
$$\leq\sup_{v\in\mathbb{R}^n}\frac{\|Av\|}{\|v\|}\cdot\sup_{v\in\mathbb{R}^n}\frac{\|Bv\|}{\|v\|}=\|A\|\|B\|$$

ולכן גם $\|AB\|=\sup\limits_{v\in\mathbb{R}^n}\frac{\|ABv\|}{\|v\|}\leq\|A\|\|B\|$

<u>עובדה:</u> המרחב $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם הנורמה שהגדרנו הינו מרחב נורמי שלם. יתרה מזאת, מכיוון שניתן להכפיל את איבריו (כפל מטריצות) והכפל מקיים $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$, המרחב הוא אלגברת בנך.

<u>טענה:</u> הטור $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u> נראה שהוא מתכנס בנורמה האופרטורית. מכיוון ש $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם נורמה זו הוא מרחב שלם, מספיק להוכיח שסדרת הסכומים החלקיים היא סדרת קושי, כלומר, לכל ε קיים N כך שלכל $m_2\geq m_1\geq N$, $\left\|\sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{A^k}{k!}\right\|<\varepsilon$.

נשים לב שמאי השוויון $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$ נובע ש- $\|A^m\|\leq\|A\|^m$ לכל m. לפיכך,
$$\left\|\sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{A^k}{k!}\right\|\underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq}\sum_{k=m_1}^{m_2}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|=\sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{1}{k!}\|A^k\|\leq\sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{1}{k!}\|A\|^k$$

כעת, טור המספרים $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$ מתכנס (ל $e^{\|A\|}$) ולכן סדרת הסכומים החלקיים שלו היא

סדרת קושי. לכן, קיים (לכל ε) N כך שלכל $N<m_1,m_2$ מתקיים $\sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{\|A\|^k}{k!}<\varepsilon$. עבור אותו N, נקבל

$$\left\|\sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{A^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=m_1}^{m_2}\frac{\|A^k\|}{k!}<\varepsilon$$

לכן, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ אכן מתכנס.

<u>מסקנה:</u> מכיוון שבמרחב ממימד סופי, כל הנורמות הן שקולות, הטור מתכנס גם בנורמה הרגילה של $\mathbb{R}^{n^2}$ וגם בכל קואורדינטה בנפרד.

<u>הוכחת פתרון המשוואה:</u> נתייחס ל $\exp(At)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}$ כאל פונקציה של t עם מקדמים מטריציוניים ונגזור אותה לפי t.
מכיוון שהטור מתכנס בנורמה [וכן חסום מלמעלה ע"י טור מספרים, לכל t בקטע מסוים] ניתן לגזור אותו איבר איבר. נקבל $[\exp(At)]' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\cdot(tA)^{k-1}\cdot A}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot A = A\exp(At)$. לכן $\exp(At)$ אכן פותר את המשוואה.

<u>הערה:</u> כל שיטות הפתרון שלמדנו בשבוע שעבר הם למעשה מקרים פרטיים של השיטה הכללית שהוצגה כאן. אולם צריך להשתמש בהן אם אפשר מכיוון שבדרך כלל אקספוננט של מטריצה הוא קשה לחישוב. בהרצאה נראה דוגמא מעשית של חישוב אקספוננט של מטריצה.

<u>פתרון משוואה ליניארית לא הומוגנית במקדמים קבועים</u>

<u>בעיה:</u> נתונה המשוואה (*) $y^{(m)}+a_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t)+\dots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=b(t)$. רוצים למצוא פתרון כללי.

<u>טענה:</u> אם y_1,y_2 פתרונות של המשוואה (*) אז y_1-y_2 פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה $y^{(m)}+a_{m-1}(t)y^{(m-1)}+\dots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=0$ (**).

<u>הוכחה:</u> מליניאריות אופרטור הגזירה נקבל

$$(y_1-y_2)^{(m)}+a_{m-1}(t)(y_1-y_2)^{(m-1)}+\dots+a_1(t)(y_1-y_2)'+a_0(t)(y_1-y_2)=$$
$$=y_1^{(m)}-y_2^{(m)}+a_{m-1}(t)(y_1^{(m-1)}-y_2^{(m-1)})+\dots+a_0(t)(y_1-y_2)=\left[y_1^{(m)}+a_{m-1}(t)y_1^{(m-1)}+\dots+a_0(t)y_1\right]-$$
$$-\left[y_2^{(m)}+a_{m-1}(t)y_2^{(m-1)}+\dots+a_0(t)y_2\right]\underset{\text{נתון}}{=}b(t)-b(t)=0$$

<u>טענה:</u> בצורה דומה נקבל שאם y_1 פתרון של (*) ו- y_2 פתרון של (**) אז y_1+y_2 פתרון של (*).

<u>מסקנה:</u> נסמן את מרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית (**) ב- V [כזכור, זהו מרחב וקטורי ממימד m].
נסמן ב- y_0 פתרון מסוים של (*). אזי מרחב הפתרונות של (*) הוא $\{y_0+y : y\in V\}=y_0+V$.
לכן, על מנת למצוא את כל הפתרונות של משוואה לא הומוגנית, מספיק לפתור את ההומוגנית המתאימה ולמצוא פתרון אחד של המשוואה הלא הומוגנית.

מכאן והלאה נניח שהמקדמים קבועים.

<u>שיטה כללית למציאת פתרון:</u> נתחיל בשיטה כללית (אך מסובכת) למציאת פתרון בודד של המשוואה הלא הומוגנית. נרשום את המשוואה בצורה אופרטורית: $(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)y=b(t)$. נפרק את ~~המשוואה~~ הפולינום (ב-D) לגורמים: $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(D-\lambda_m)y=b(t)$. כעת נהפוך את המשוואה למערכת של m

משוואות מסדר ראשון ע"י הוספת משתנים "פיקטיביים":
$$\begin{cases}(D-\lambda_m)y=y_1\\(D-\lambda_{m-1})y_1=y_2\\\vdots\\(D-\lambda_1)y_{m-1}=b(t)\end{cases}$$

למעשה, הערך של $y_{m-1},\dots,y_1$ אינו מעניין אותנו אבל הוא יעזור לנו למצוא את $y(t)$. נפתור את המשוואות מהסוף להתחלה. המשוואה האחרונה היא $y'_{m-1}-\lambda y_{m-1}=b(t)$. זו משוואה לינארית מסדר ראשון והפתרון הוא $y_{m-1}=e^{\int\lambda dt}\left(\int e^{-\int\lambda dt}b(t)dt\right)=e^{\lambda t}\left(\int e^{-\lambda t}b(t)dt\right)$. נציב את y_{m-1} במשוואה השניה מהסוף: $(D-\lambda_2)y_{m-2}=y_{m-1} \Leftarrow$ $y'_{m-2}-\lambda_2y_{m-2}=e^{\lambda t}\left(\int e^{-\lambda t}b(t)dt\right)$. גם זו משוואה מסדר ראשון. נמשיך כך ולאחר שנפתור m משוואות מסדר ראשון נקבל פתרון של המשוואה המקורית.

הערה: כל שלב, בפתרון של המשוואה מסדר ראשון מוסיף קבוע. אולם מכיוון שאנחנו מחפשים רק פתרון אחד (כלשהו) של המשוואה, נוח לבחור ערך שרירותי של הקבוע (בדרך כלל 0) וזה קצת יקצר את החישובים.

מסקנה: מצאנו שיטה כללית למציאת פתרון של המשוואה הלא הומוגנית, אולם השיטה דורשת לפתור m משוואות לינאריות מסדר ראשון $\Leftarrow$ לחשב הרבה אינטגרלים. האם ניתן לעשות משהו פשוט יותר?

תשובה: במקרה הכללי - לא. אולם אם יש לנו דרך טובה לנחש מהי הצורה הכללית של הפתרון אז יש שתי שיטות הרבה יותר קצרות:

(א) אם $b(t)$ הינה יחסית פשוטה (מהצורה $e^{\alpha t}\cdot \underbrace{P_n(t)}_{\text{פולינום}}\cdot\begin{cases}\sin\beta t\\\cos\beta t\end{cases}$ או חלק מגורמים אלה) אז יש שיטה פשוטה יחסית שנקראת שיטת ~~[illegible]~~ השוואת המקדמים (Undetermined coefficients) אותה נלמד היום. בשיטה זו מחפשים פתרון שדומה בצורתו ל- $b(t)$.

(ב) שיטת וריאציית הפרמטרים (Variation of Parameters) - בשיטה זו מחפשים פתרון שדומה בצורתו לפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה. שיטה זו תילמד בהרצאה.

שיטת השוואת המקדמים

שיטה זו מתאימה בכך ש- $b(t)$ הינה בעלת צורה פשוטה יחסית. נראה תחילה שניתן לפשט את הצורה של $b(t)$:

טענה: יהי y_1 פתרון של המשוואה $y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+a_0y=b_1(t)$ ויהי y_2 פתרון של המשוואה $y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+a_0y=b_2(t)$. אזי y_1+y_2 הינו פתרון של המשוואה
$$y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+a_0y=b_1(t)+b_2(t)$$

הוכחה:
$$[y_1+y_2]^{(m)}+a_{m-1}[y_1+y_2]^{(m-1)}+\dots+a_0[y_1+y_2]\underset{\text{לינאריות הנגזרת}}{=}(y_1^{(m)}+a_{m-1}y_1^{(m-1)}+\dots+a_0y_1)+$$
$$+(y_2^{(m)}+a_{m-1}y_2^{(m-1)}+\dots+a_0y_2)\underset{\text{נתון}}{=}b_1(t)+b_2(t)$$

מסקנה: נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים גם אם $b(t)$ הינו סכום של גורמים מהצורה $e^{\alpha t}P_n(t)\cdot\begin{cases}\sin\beta t\\\cos\beta t\end{cases}$.

טענה: נניח שנתונה המשוואה $y^{(m)}+a_{m-1}y^{(m-1)}+\dots+a_0y = e^{\alpha t}\underbrace{P_n(t)}_{\text{פולינום ממעלה } n}\cdot\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$ (*), כאשר $0,\alpha,\beta$ אינם שורשים של הפולינום האופייני. אזי קיים פתרון פרטי של המשוואה (*) מהצורה

$$y(t)= e^{\alpha t}\left(c_n t^n+c_{n-1}t^{n-1}+\dots+c_1t+c_0\right)\cos\beta t+e^{\alpha t}\left(c_n' t^n+\dots+c_1't+c_0\right)\sin\beta t$$

, כאשר $c_1,\dots,c_n,c_1',\dots,c_n'$ קבועים אותם ניתן למצוא ע"י השוואת מקדמים כפי שיתואר בהוכחה.

הוכחה: נתחיל מהמקרה בו $b(t)$ הינו פולינום $P_n(t)$ ממעלה n (כלומר, $\alpha=\beta=0$). נניח שהפתרון הוא מהצורה $y(t)=c_nt^n+c_{n-1}t^{n-1}+\dots+c_1t+c_0$ ונציב אותו במשוואה. נקבל

$$\left[c_nn(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)t^{n-m}+\dots+c_m m(m-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot t^0\right]+\left[a_{m-1}c_n n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+2)t^{n-m+1}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+a_{m-1}c_{m-1}(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot1\cdot t^0\right]+\dots+\left[a_0c_nt^n+\dots+a_0c_0\right]=b(t)=P_n(t)=b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\dots+b_1t+b_0$$

נבצע השוואת מקדמים של חזקות של t ונקבל $n+1$ משוואות:

$$\begin{cases}a_0c_n=b_n\\ a_0c_{n-1}+a_1nc_n=b_{n-1}\\ a_0c_{n-2}+a_1(n-1)c_{n-1}+a_2n(n-1)c_n=b_{n-2}\\ \quad\vdots\\ a_0c_0+a_1c_1+a_2\cdot2c_2+a_3\cdot3\cdot2\cdot c_3+\dots+a_n\cdot n!\cdot c_n=b_0\end{cases}$$

נשים לב ש- $a_0\neq0$ כי אחרת 0 היה שורש של הפולינום האופייני. לכן ניתן לפתור את כל המשוואות בזו אחר זו (למשל, $c_n=\frac{b_n}{a_0}$, $c_{n-1}=\frac{b_{n-1}-a_1n\frac{b_n}{a_0}}{a_0}$ וכו'). כאשר מגיעים למשוואה מס' k לאחר שפתרנו את המשוואות שמעליה, נקבל ע"י העברת אגפים $a_0c_k=\left[\begin{array}{c}\text{ביטוי}\\ \text{שכולו}\\ \text{ידוע}\end{array}\right]$ ומכיוון ש- $a_0\neq0$, זה קובע ביחידות את c_k.

לפיכך, קיים פתרון יחיד למערכת המשוואות ועבורו מתקיים שוויון בכל המקדמים $\Leftarrow$ $y(t)=c_nt^n+\dots+c_0$ הוא אכן פתרון של המשוואה (*).

בשבוע הבא נמשיך (כנראה) לעסוק בפתרון משוואות לינאריות לא הומוגניות, נשלים את הוכחת הטענה הזו [ליתר דיוק, סביר שנתחיל אותה בשבוע הבא] ונדון במקרה בו $0,\alpha,\beta$ יכולים להיות שורשים של הפולינום האופייני.

פתרון משוואות ליניאריות אי הומוגניות (במקדמים קבועים)

בתרגול זה נכיר שתי שיטות למציאת פתרון פרטי למשוואה ליניארית אי-הומוגנית. השיטה הראשונה היא
וריאציית הפרמטרים - שיטה כללית יותר שעובדת גם כשהמקדמים אינם קבועים אולם דורשת יותר עבודה,
והשוואת המקדמים - שיטה פשוטה יותר שעובדת כאשר המקדמים הם קבועים והחלק האי-הומוגני פשוט יחסית.

תזכורת: מציאת פתרון פרטי כלשהו של המשוואה הלא הומוגנית מספיקה (בצירוף פתרון המשוואה ההומוגנית המתאימה) כדי למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה האי הומוגנית.

שיטת וריאציית הפרמטרים

תרגיל: (ת"ב מס' 6 שאלה 3א') נתונה המשוואה $z^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+\dots+a_0(t)z(t)=r(t)$, כאשר $a_{m-1}(t),\dots,a_0(t),r(t)$ פונקציות ממשיות רציפות בקטע $I=(\alpha,\beta)$. יהי $\{z_1(t),\dots,z_m(t)\}$ בסיס לפתרונות המשוואה ההומוגנית המתאימה ויהי
$$W(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_m(t)\\ z_1'(t) & & z_m'(t)\\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{(m-1)}(t) & \dots & z_m^{(m-1)}(t)\end{pmatrix}$$
הוורונסקיאן שלהם.

הראו כי ניתן למצוא פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית, שהינו מהצורה $z^{part}(t)=u_1(t)z_1(t)+\dots+u_m(t)z_m(t)$, כאשר $\{u_1(t),\dots,u_m(t)\}$ פונקציות גזירות ברציפות ב- I ומקיימות את מערכת המשוואות
$$W(t)\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\\ \vdots\\ u_m'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\ r(t)\end{pmatrix}.$$

פתרון: תחילה נמצא פונקציות $\{u_1(t),\dots,u_m(t)\}$ העונות לדרישות השאלה. נשים לב ש- $W(t)$ אינו מתאפס בשום נקודה (וורונסקיאן של פתרונות בת"ל) ולכן ניתן להגדיר מטריצה הפכית $[W(t)]^{-1}$. יתרה מזאת, ניתן להראות ש $[W(t)]^{-1}$ הינה פונקציה מטריציונית רציפה של t. [הוכחה מופיעה בפתרון תרגיל הבית].

לפיכך, אם ניקח $\begin{pmatrix}u_1'(t)\\ \vdots\\ u_m'(t)\end{pmatrix}=[W(t)]^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\ r(t)\end{pmatrix}$, יתקיים $W(t)\begin{pmatrix}u_1'(t)\\ \vdots\\ u_m'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\ r(t)\end{pmatrix}$. מכאן נקבל
שעבור $c\in I$ כלשהו, סדרת הפונקציות
$$\begin{pmatrix}u_1(t)\\ \vdots\\ u_m(t)\end{pmatrix}=\underbrace{\int_c^t [W(s)]^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\ r(s)\end{pmatrix}ds}_{\text{אינטגרל בכל קואורד' של פונקציה וקטורית}}$$
עונה על הדרישות לעיל.

כעת ניקח $\{u_1(t),\dots,u_m(t)\}$ כלשהן המקיימות את הדרישות לעיל (אחרי שהראינו שתמיד קיימות כאלה) ונתבונן ב- $z^{part}(t)=u_1(t)z_1(t)+\dots+u_m(t)z_m(t)$. נרצה להראות ש- $z^{part}(t)$ מהווה פתרון של המשוואה האי הומוגנית.

טענת עזר: לכל $0\le k\le m-1$ מתקיים $(z^{part})^{(k)}=\sum_{i=1}^m z_i^{(k)}u_i(t)$.

הוכחה: באינדוקציה על k. עבור $k=0$, זו בדיוק הגדרת $z^{part}(t)$. נניח שהוכחנו עד k ונבדוק עבור $k+1$.
$$(z^{part})^{(k+1)}=[(z^{part})^{(k)}]'=\Big(\sum_{i=1}^m z_i^{(k)}u_i\Big)'=\sum_{i=1}^m\big(z_i^{(k+1)}u_i+z_i^{(k)}u_i'\big)=\sum_{i=1}^m z_i^{(k+1)}u_i+\sum_{i=1}^m z_i^{(k)}u_i'=\sum_{i=1}^m z_i^{(k+1)}u_i$$
[שוויון זה נובע מכך שהשורה ה- k במערכת המשוואות $W(t)\begin{pmatrix}u_1'(t)\\ \vdots\\ u_m'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\ r(t)\end{pmatrix}$ היא בדיוק $\sum_{i=1}^m z_i^{(k)}u_i'=0$.]

הערה: מכאן אפשר לראות מה האינטואיציה מאחורי התנאי על ה $\{u_i\}$-ים. התנאי דואג לכך שהנגזרות של הפתרון z^{part} יהיו פשוטות יחסית, מכיוון שבכל גזירה חלק מהנגזרות מתאפסות.

כדומה לנגזרת הראשונה נקבל
$$(z^{part})^{(m)} = [(z^{part})^{(m-1)}]' = \left(\sum_{i=1}^{m} z_i^{(m-1)} u_i\right)' =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (z_i^{(m)} u_i + z_i^{(m-1)} u_i') = \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m)} u_i + \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m-1)} u_i' = \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m)} u_i + r(t)$$

[שוויון זה נובע מכך שהשורה האחרונה במערכת $W(t)\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t)\end{pmatrix}$ היא $\sum_{i=1}^{m} z_i^{(m-1)} u_i' = r(t)$.]

כעת, נציב את $z^{part}(t)$ במשוואה האי הומוגנית המקורית ונקבל
$$(z^{part})^{(m)} + a_{m-1}(t)(z^{part})^{(m-1)} + \dots + a_0(t) z^{part} = \left(\sum_{i=1}^{m} z_i^{(m)} u_i + r(t)\right) + a_{m-1}(t) \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m-1)} u_i + \dots + a_0(t) \sum_{i=1}^{m} z_i u_i =$$
$$= r(t) + \sum_{i=1}^{m} \left(z_i^{(m)} u_i + a_{m-1}(t) z_i^{(m-1)} u_i + \dots + a_0(t) z_i u_i\right) = r(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i \underbrace{\left(z_i^{(m)} + a_{m-1}(t) z_i^{(m-1)} + \dots + a_0(t) z_i\right)}_{\text{שווה ל-0 כי } z_i(t) \text{ פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה}} = r(t)$$

ולכן $z^{part}(t)$ הוא אכן פתרון של המשוואה המקורית. ■

<u>תרגיל:</u> מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $z''' + z' = \tan t$, בתחום $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

תרג' מס' 6 שאלה 4א'

<u>פתרון:</u> תחילה נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה. $z''' + z' = 0$ $\Leftarrow$ פולינום אופייני $\lambda^3 + \lambda = 0$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ שורשים אופייניים $0, \pm i$ $\Leftarrow$ פתרון כללי של ההומוגנית $z(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$.

כעת נחפש פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית בשיטת וריאציית הפרמטרים, תוך שימוש בפתרונות $\{1, \sin t, \cos t\}$ של המשוואה ההומוגנית.

לפי השיטה שראינו לעיל, רוצים למצוא תחילה פתרון למערכת המשוואות $W(t)\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t)\end{pmatrix}$, שהיא במקרה שלנו $\begin{pmatrix} 1 & \sin t & \cos t \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{tg} t\end{pmatrix}$. מהמשוואה השניה נקבל $\cos t\, u_2'(t) - \sin t\, u_3'(t) = 0$ $\Leftarrow$

$\boxed{u_2'(t) = \operatorname{tg} t \cdot u_3'(t)}$ $\Leftarrow$. נציב במשוואה השלישית ונקבל $\cancel{\cos}^{-\sin} t \operatorname{tg} t\, u_3'(t) - \cos t\, u_3'(t) = \operatorname{tg} t$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\frac{-\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos t} u_3'(t) = \operatorname{tg} t$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{\cos t} u_3'(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$ $\Leftarrow$ $\boxed{u_3'(t) = \sin t}$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\boxed{u_2'(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos t}}$ $\Leftarrow$ נציב במשוואה הראשונה ונקבל $u_1'(t) + \sin t \frac{\sin^2 t}{\cos t} + \cos t \sin t = 0$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $u_1'(t) + \frac{\sin t}{\cos t}(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0$ $\Leftarrow$ $\boxed{u_1'(t) = -\operatorname{tg} t}$

קיבלנו $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{tg} t \\ \frac{\sin^2 t}{\cos t} \\ \sin t\end{pmatrix}$ ומכאן ע"י אינטגרציה נקבל

$(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (\ln(\cos t), -\sin(t) - \ln(\operatorname{tg}(\pi/4 - t/2)), -\cos t)$.

לסיכום, לפי השיטה לעיל, פתרון פרטי של המשוואה המקורית נתון ע"י:
$$z^{part}(t) = \sum_{i=1}^{3} z_i(t) u_i(t) = 1 \cdot \ln(\cos t) + \sin t(-\sin t - \ln(\operatorname{tg}(\pi/4 - t/2))) + \cos t(-\cos t) =$$
$$= \ln(\cos t) - \sin^2 t - \sin t \ln(\operatorname{tg}(\pi/4 - t/2)) - \cos^2 t = -1 + \ln(\cos t) - \sin t \ln(\operatorname{tg}(\pi/4 - t/2))$$

סיום, הפתרון הכללי של המשוואה הינו $\boxed{c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t + \ln(\cos t) - \sin t \ln(\operatorname{tg}(\pi/4 - t/2))}$.

שיטת השוואת המקדמים

טענה: נתונה המשוואה $z^{(m)}+a_{m-1}z^{(m-1)}+\ldots+a_0z=e^{\alpha t}\underbrace{P_n(t)}_{\text{פולינום ממעלה } n}\cdot\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$ כאשר $0,\alpha,\beta$ אינם שורשים של הפולינום האופייני של המשוואה ההומוגנית המתאימה. אזי קיים פתרון פרטי של המשוואה האי-הומוגנית מהצורה $z(t)=e^{\alpha t}(c_nt^n+\ldots+c_0)\sin\beta t+e^{\alpha t}(c_n't^n+\ldots+c_0)\cos\beta t$, כאשר $c_0,\ldots,c_n,c_0',\ldots,c_n'$ קבועים אותם נוכל למצוא בעזרת השוואת מקדמים כפי שיתואר להלן.

הוכחה במקרה פרטי: נניח שאגף ימין של המשוואה הוא פולינום $P_2(t)=b_2t^2+b_1t+b_0$, כאשר 0 אינו שורש אופייני של המשוואה ההומוגנית המתאימה. נניח שקיים פתרון למשוואה מהצורה $z(t)=c_2t^2+c_1t+c_0$. נציב במשוואה:

$$z^{(2)}+a_1z^{(1)}+a_0z=2c_2+a_1(2c_2t+c_1)+a_0(c_2t^2+c_1t+c_0)\underset{\text{נתון}}{=}b_2t^2+b_1t+b_0$$

נדרוש השוואת מקדמים של חזקות t ונקבל מערכת משוואות: $\begin{cases}a_0c_2=b_2\\ a_0c_1+2a_1c_2=b_1\\ a_0c_0+a_1c_1+2c_2=b_0\end{cases}$. נשים לב שמתקיים $a_0\neq 0$ כי אחרת 0 היה שורש אופייני. לכן נוכל לפתור את המשוואה הראשונה ולקבל $\boxed{c_2=\frac{b_2}{a_0}}$.

כעת עוברים למשוואה השניה ומשתמשים בכך ש- $a_0\neq 0$ ובכך ש- c_2 כבר ידוע. נקבל $\boxed{c_1=\frac{b_1-2a_1c_2}{a_0}}$ ⟹ $\boxed{c_1=\frac{b_1-\frac{2a_1b_2}{a_0}}{a_0}}$.

בדומה, נפתור את המשוואה השלישית ונקבל $\boxed{c_0=\frac{b_0-2c_2-a_1c_1}{a_0}}$ ⟸ $\boxed{c_0=\frac{1}{a_0}\left(b_0-\frac{2b_2}{a_0}-\frac{a_1}{a_0}\left(b_1-\frac{2a_1b_2}{a_0}\right)\right)}$.

כעת אם נציב את $z(t)=c_2t^2+c_1t+c_0$ במשוואה, נקבל שהוא אכן פתרון (כי יש שוויון במקדם של כל חזקה של t).

הערה: במקרה של פולינום כללי ממעלה n, נקבל מערכת של $n+1$ משוואות אותן נוכל לפתור בזו אחר זו כמו במקרה $n=2$ שראינו כרגע. אם הפולינום מוכפל ב- $e^{\alpha t}$ או ב- $\sin\beta t$, ניתן לעשות רדוקציה למקרה בו הפתרון הוא פולינום בלבד (אבל עם מקדמים שונים) וצריך להכפיל את הפתרון המתקבל ב- $e^{\alpha t}$ וב- $\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$ (צירוף לינארי של שניהם). כך מוכיחים את הטענה במקרה הכללי.

טענה: נתונה המשוואה $z^{(m)}+a_{m-1}z^{(m-1)}+\ldots+a_0z=e^{\alpha t}P_n(t)\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$. אזי:

(א) אם 0 שורש מריבוי s של הפולינום האופייני וגם $\alpha=\beta=0$ אז קיים פתרון מהצורה $\underbrace{P_{n+s}(t)}_{\text{פולינום ממעלה } n+s}$.

(ב) אם α שורש מריבוי s של הפאל אז קיים פתרון מהצורה $e^{\alpha t}P_{n+s}(t)$ ($\underbrace{\text{וגם } \beta=0}$)

(ג) אם β שורש מריבוי s וגם $\alpha=0$ אז

קיים פתרון מהצורה $\underbrace{P_{n+s}}_{\text{פולינום נוסף ממעלה } n+s}(t)\cos\beta t+\underbrace{P_{n+s}(t)}_{\text{פולינום ממעלה } n+s}\sin\beta t$

הערה: הכלל באנחה בטענה זו הוא שאם אחד המחוברים בפתרון האי-הומוגני שווה למחובר בפתרון ההומוגני, צריך להכפיל את הפתרון האי-הומוגני בחזקה המינימלית של t שתגרום להם להיות שונים.

מפאת קוצר הזמן לא נוכיח טענה זו.

<u>תרגיל:</u> למצוא פתרון כללי של המשוואה $z''+z=\cos t$.

דף מס' 6 שאלה 4ג'

<u>פתרון:</u> תחילה נפתור משוואה הומוגנית מתאימה. $z''+z=0$ ⇐ פה"א $\lambda^2+1=0$ ⇐ שורשים $\pm i$ ⇐ פתרון כללי $c_1\cos t+c_2\sin t$. נמצא פתרון פרטי של האי-הומוגנית בעזרת השוואת מקדמים. מכיוון ש- $\cos t$ הינו פתרון של ההומוגנית, נחפש פתרון מהצורה $\alpha_1 t\cos t+\alpha_2 t\sin t$. נקבל

$$z''+z=[\alpha_1 t\cos t+\alpha_2 t\sin t]''+[\alpha_1 t\cos t+\alpha_2 t\sin t]=[\alpha_1\cos t+\alpha_2\sin t-\alpha_1 t\sin t+\alpha_2 t\cos t]'+[\alpha_1 t\cos t+$$

$$+\alpha_2 t\sin t]=[-\alpha_1\sin t+\alpha_2\cos t-\alpha_1\sin t-\cancel{\alpha_1 t\cos t}+\alpha_2\cos t-\cancel{\alpha_2 t\sin t}+\cancel{\alpha_1 t\cos t}+\cancel{\alpha_2 t\sin t}=2\alpha_2\cos t-2\alpha_1\sin t$$

ולכן אם נשווה מקדמים של $\sin t,\cos t$ נקבל $\begin{cases}2\alpha_2=1\\-2\alpha_1=0\end{cases}$ ⇐ $\begin{cases}\alpha_2=1/2\\\alpha_1=0\end{cases}$ ⇐ $z^{part}=\frac{1}{2}t\sin t$

⇐ פתרון כללי: $\boxed{z(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2}t\sin t}$.

<u>תרגיל:</u> למצוא פתרון כללי של המשוואה $z'''-2z''-z'+2z=e^{4t}$.

דף מס 6 שאלה 4ב'

<u>פתרון:</u> פתרון משוואה הומוגנית מתאימה - פה"א $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$ ⇐ שורשים $2,\pm 1$ ⇐ פתרון כללי של ההומוגנית $c_1e^{2t}+c_2e^{t}+c_3e^{-t}$. נחפש פתרון של האי-הומוגנית בשיטת השוואת מקדמים. $\lambda=4$ אינו שורש של הפה"א ולכן נחפש פתרון מהצורה $z^{part}=\alpha e^{4t}$. נציב ונקבל:

$$z'''-2z''-z'+2z=\alpha e^{4t}(4^3-2\cdot4^2-4+2)=\alpha e^{4t}\cdot 30$$

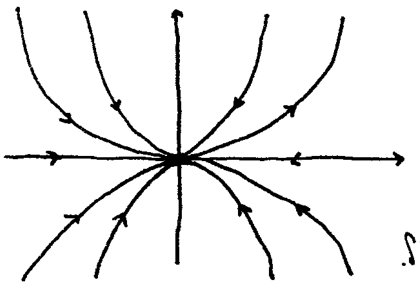
נעזר השוואת מקדמים ונקבל $30\alpha=1$ ⇐ $\alpha=\frac{1}{30}$ ⇐ $z^{part}=\frac{1}{30}e^{4t}$ ⇐ פתרון כללי: $\boxed{c_1e^{2t}+c_2e^{t}+c_3e^{-t}+\frac{1}{30}e^{4t}}$.

מערכות משוואות אוטונומיות במישור ומישור הפזה של הפתרונות

הקדמה: עד עכשיו, כאשר ניסינו לפתור משוואות דיפרנציאליות, הדבר שעניין אותנו הוא כיצד מתנהג הפתרון $y(t)$ כפונקציה של t. כעת המטרה שלנו היא אחרת: נרצה "להעלים" את t ולעסוק בקשר בין הקואורדינטות השונות של וקטור הפתרון - למשל (במקרה של משוואה ולא מערכת) בקשר בין y ל- y'.

הגדרה: בהינתן $f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$ רציפה, המערכת $y'(t)=f(y(t))$ [כלומר, אגף ימין תלוי ב- $y(t)$ בלבד ואין תלות ישירה ב- t] נקראת **אוטונומית**.

התכונות במערכת אוטונומית מאפשרות "להעלים" את t - מכיוון שקל לבדוק שאם $y(t)$ פתרון של מערכת אוטונומית אז גם $\tilde{y}(t)=y(t-t_0)$ פתרון שלה. לכן, במערכת אוטונומית לא משנה לנו מהו $y(t)$ עבור t מסוים אלא רק מה הקשר בין y ל- y'.



נעסוק בעיקר במקרה של מערכות משוואות בשני משתנים ואז המטרה שלנו תהיה "לצייר" את ה"מסלולים" האפשריים של הפתרונות $y(t)=\begin{pmatrix} y(t)_1 \\ y(t)_2 \end{pmatrix}$ כאשר כל מסלול נקבע ע"י נקודת התחלה $y(t_0)=y_0$ ומתאר את ה"תנועה" של הנקודה $\begin{pmatrix} y(t)_1 \\ y(t)_2 \end{pmatrix}$ כאשר t גדל. ראה דוגמא משמאל.

הערה: אם מתקיימת ליפשיציות אז מיחידות הפתרון נובע שהמסלולים אינם נחתכים.

בשיעור היום נעסוק במערכות לינאריות אוטונומיות בשני משתנים עם מקדמים קבועים, כלומר $y'(t)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y(t)$ כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ קבועים ומניחים $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$.

זה מבטיח לנו שיש רק נק' קיפאון $\overbrace{\text{אחת}}^{\text{(נק' קריטית)}}$ של הפתרון [כלומר נקודה בה $y'(t)=0$] והיא $y(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [שימו לב, אנחנו מגדירים נקודה לפי ערך $y(t)$ שלה ולא לפי ערך t שלה כי אמרנו שאפשר לשנות אותו בקלות].

המטרה שלנו היא לחקור את התנהגות הפתרונות בסביבת הנקודה הקריטית, לקבוע את אופיה (צומת, נק' אוכף, ספירלה או מרכז) ולקבוע האם היא יציבה אסימפטוטית, יציבה או לא יציבה.

תרגיל: (תג' מס' 7 שאלות 2,3) נתבונן במערכת $y'(t)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y(t)$ ונסמן $p=a+d,\ q=ad-bc,\ \Delta=p^2-4q$. אזי:

(א) אם $\Delta\geq 0,\ q>0$ אז $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא צומת.

(ב) אם $q<0$ אז $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא נק' אוכף.

(ג) אם $\Delta<0,\ p\neq 0$ אז $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא ספירלה.

(ד) אם $q>0,\ p=0$ אז $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא מרכז.

(ה) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ יציבה אסימפטוטית אם $q>0,\ p<0$.

(ו) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ יציבה אם $q>0,\ p=0$.

(ז) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ לא יציבה אם $q<0$ או $p<0$.

פתרון: תחילה נמיין את אופי הנקודה הקריטית $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ לפי הערכים העצמיים של המטריצה $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. לאחר מכן נשתמש במשפט ויטה כדי לראות לאילו ערכים עצמיים כל מקרה בשאלה שלנו מתאים.

הערה: מיון אופי הנק' הקריטית לפי הע"ע נעשה גם בהרצאה אולם בהרצאה תחילה השתמשו בדמיון מטריצות כדי להעביר את המטריצה לצורה נוחה יותר. כתוצאה מכך, הפתרון המתקבל (שנראה "יפה יותר") מתאר פונקציה לינארית של הפתרון האמיתי. אנחנו נחשב את הפתרון האמיתי. הדרך שהוצגה בהרצאה תואמת לספר Coddington-Levinson, הדרך שלנו היא לפי פרק 9.2 בספר של Boyce-diPrima.

תזכורת: נתבונן במערכת $y'=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}y$ ונניח ש- $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ הינם וע"ע של $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ עם ע"ע λ, μ בהתאמה. אזי הפתרון הכללי של המשוואה הוא $y(t)=c_1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}+c_2\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}e^{\mu t}$.

[אכן, מתקיים $y'(t)=c_1\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}+c_2\mu\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}e^{\mu t}=c_1A\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}+c_2A\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}e^{\mu t}=A\left(c_1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}+c_2\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}e^{\mu t}\right)=Ay(t)$]

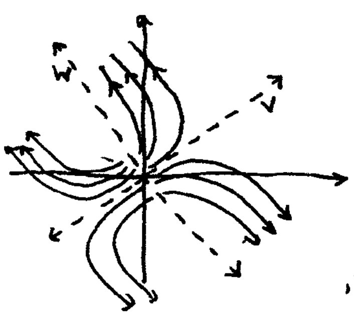
חזרה לפתרון: על מנת לתאר את המסלולים במישור הפאזה ולאפיין את הנק' הקריטית, נבדוק לאן שואף הפתרון כאשר $t\to\infty$ וכאשר $t\to-\infty$.

[**הערה:** אם רוצים לצייר את המסלולים יותר במדויק, כדאי לבחור כמה ישרים, למשל $x=0$, $y=0$, $x=y$, $y=-x$, ולצייר את קווי השדה הוקטורי על ישרים אלה. אז נוכל "לחבר" את הקוים כדי לקבל את המסלולים.]

נחלק למקרים:

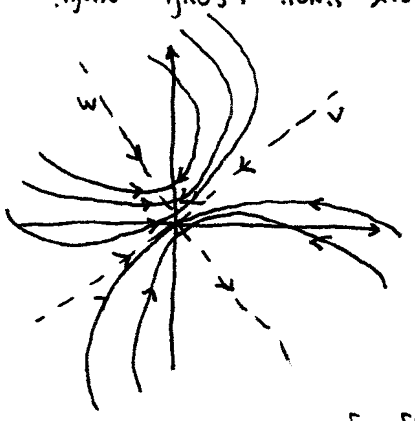
(א) <u>שני ערכים עצמיים ממשיים שווי סימן:</u> מקרה זה מתחלק לשני מקרים:

(א1) <u>$0<\lambda<\mu$:</u> כאשר $t\to\infty$, $\left\|c_1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}\right\| \underset{\text{זניח לעומת}}{<<} \left\|c_2\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}e^{\mu t}\right\|$

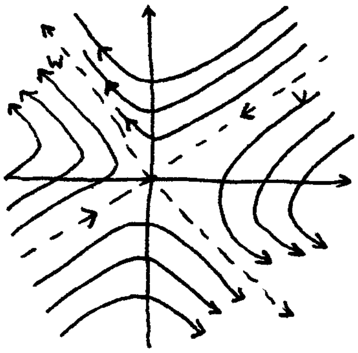


ולכן הפתרון שואף בנורמה ל-∞ <u>והשיפוע</u> שלו שואף ל- $\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$. יוצא דופן יחיד הוא $c_2=0$ שאז הפתרון הוא $c_1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}$ - גם הוא שואף בנורמה ל-∞ אולם השיפוע שואף ל- $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$. כאשר $t\to-\infty$, הפתרון שואף בנורמה ל-0 ובשיפוע ל- $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ אלא אם כן $c_1=0$ ואז בשיפוע ל- $\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$. המסלולים מתוארים משמאל. ברור ש $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ אינה יציבה. במקרה זה הנק' הקריטית נקראת <u>צומת</u>.

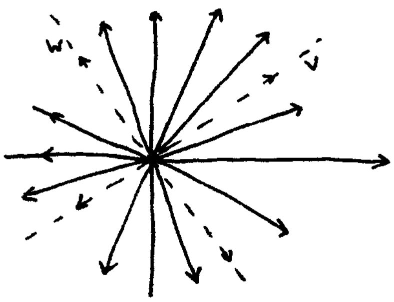
[נוכל להשוות את המסלולים עם הדוגמא שראינו לעיל. נראה ש"סובבנו" את המפה ו"ניפחנו" אותה. זה באמת בדיוק מה שעושה טרנספורמציה לינארית לפתרון.]



(א2) <u>$0>\lambda>\mu$</u>: למעשה, מקרה זה הוא בדיוק ההיפך של המקרה הקודם. כל מה שקרה במקרה הקודם כאשר $t\to\infty$ קורה כאן כאשר $t\to-\infty$ ולהיפך. לכן המסלולים נראים כמו קודם, רק בכיוון ההפוך. גם כאן הנק' הקריטית נקראת צומת והפעם ברור שהיא יציבה אסימפטוטית כי <u>כל</u> פתרון (אפילו לא רק פתרון "קרוב" לנק' הקריטית) דועך אקספוננציאלית ל-0.

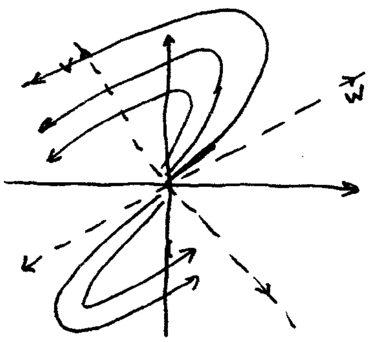


ב) <u>שני ערכים עצמיים ממשיים שוני סימן:</u> נניח $\mu>0>\lambda$. במקרה זה ברור שכאשר $t\to\infty$ הפתרון שואף ל- $c_2\binom{w_1}{w_2}e^{\mu t}$ ובפרט ל-∞ בנורמה. אולם אם $c_2=0$ אז הפתרון שואף ל- $c_1\binom{v_1}{v_2}e^{\lambda t}$ ובפרט ל-0 בנורמה. לכן כאן כל המסלולים <u>חוץ מאחד</u> שואפים ל-∞ בנורמה כאשר $t\to\infty$. בדומה, כאשר $t\to-\infty$, כל המסלולים מלבד $c_2\binom{w_1}{w_2}e^{\mu t}$ ששואף ל-0 בנורמה, שואפים ל- $c_1\binom{v_1}{v_2}e^{\lambda t}$, ובפרט ל-$\infty$ בנורמה. במקרה זה הנק' הקריטית נקראת <u>נק' אוכף</u> וברור שאינה יציבה.



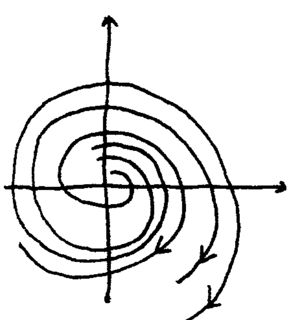
[כך נראים המסלולים כאשר $\lambda<0$]

ג) <u>ערכים עצמיים שווים</u> (ערך עצמי כפול) <u>עם שני וע"ע בת"ל:</u> במקרה זה הצורה הכללית של הפתרון היא $y=c_1\binom{v_1}{v_2}e^{\lambda t}+c_2\binom{w_1}{w_2}e^{\lambda t}$, או באופן שקול $y=e^{\lambda t}\left(\underbrace{c_1\binom{v_1}{v_2}+c_2\binom{w_1}{w_2}}_{\text{קבוע בהינתן } c_1,c_2}\right)$ ולכן כל מסלול הינו קרן ישרה שיוצאת מהראשית. יש להבדיל בין המקרים $\underline{\lambda<0}$ ו- $\underline{\lambda>0}$. אם $\lambda<0$ אז כאשר $t\to\infty$ הפתרון שואף ל-0 בנורמה ובפרט יציב אסימפטוטית. אם $\lambda>0$ אז כאשר $t\to\infty$ הפתרון שואף ל-∞ בנורמה ולכן הנק' הקריטית לא יציבה.
גם במקרה זה הנק' הקריטית נקראת <u>צומת</u>.



[כך נראים המסלולים כאשר $\lambda<0$]

ד) <u>ערכים עצמיים שווים עם וע"ע אחד בלבד:</u> במקרה זה הצורה הכללית של הפתרון היא $\left(\left(c_1\binom{v_1}{v_2}+c_2\binom{w_1}{w_2}\right)+c_2\binom{w_1}{w_2}t\right)e^{\lambda t}$. ברור שכאשר $t\to\infty$ הפתרון שואף ל- $c_2\binom{w_1}{w_2}te^{\lambda t}$. בפרט, אם $\lambda>0$ אז הפתרון שואף בנורמה ל-∞ ולכן אין יציבות, ואם $\lambda<0$ אז הפתרון שואף ל-0 ויש יציבות אסימפטוטית. <u>הכיוון</u> של הפתרון כאשר $t\to\infty$ שואף ל- $\binom{w_1}{w_2}$, ~~[illegible]~~ וכאשר $t\to-\infty$ הכיוון נשאר $\binom{w_1}{w_2}$ והפתרון שואף ל-0 אם $\lambda>0$ ושואף בנורמה ל-∞ אם $\lambda<0$. קצת יותר קשה לתאר את המסלולים במקרה זה והנה מה שמתקבל.
גם במקרה זה הנק' הקריטית נקראת <u>צומת</u>.

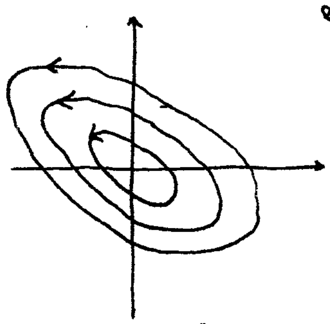


[כך נראים המסלולים כאשר $\lambda<0$]

ה) <u>ערכים עצמיים מרוכבים שאינם מדומים טהורים:</u> גם כאן ניתן לפתור באמצעות וקטורים עצמיים אבל יוצא מסובך אז "נתגבר" ונשתמש בדמיון מטריצות כמו בהרצאה. אם הע"ע הם $\lambda\pm i\mu$ אז נוכל ע"י דמיון להעביר את המטריצה לצורה $\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ -\mu & \lambda\end{pmatrix}$ ואז ע"י מעבר לקואורדינטות קוטביות [כלומר, מציגים $a+bi$ בתור $r(\cos\theta+i\sin\theta)$] מקבלים שהפתרון הוא ~~[illegible]~~ $c_1e^{\lambda t}\begin{pmatrix}\cos(-\mu t+c_2)\\ \sin(-\mu t+c_2)\end{pmatrix}$. רואים שמבחינת "הזווית" המסלול מסתובב במעגלים בתדירות קבועה, אולם המרחק מהראשית משתנה - שואף ל-∞ (בנורמה) כאשר $t\to\infty$ אם $\lambda>0$ ושואף ל-0 אם $\lambda<0$. לכן המסלול הוא ספירלה (וכך מכונה גם הנק' הקריטית) ואין יציבות אם $\lambda>0$ ויש יציבות אסימפטוטית אם $\lambda<0$.

~~[illegible]~~ באופן כללי יותר, אם לא נעזרים בדמיון מטריצות, הפתרון עדיין דומה לספירלה אבל הוא יכול להיות מוזז ומנופח / מכווץ - כל מה שיכולה לשנות טרנספורמציה לינארית. היציבות אינה משתנה.

(ו) שורשים מדומים טהורים: למעשה, זהו מקרה פרטי של הסעיף הקודם. אם נשתמש בדמיון מטריצות, נקבל מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ ואז הפתרון הכללי יהיה מהצורה $c_1\begin{pmatrix} \cos(-\mu t+c_2) \\ \sin(-\mu t+c_2) \end{pmatrix}$ כלומר פתרון מחזורי שנע במעגל סביב הראשית. במקרה זה יש יציבות אבל לא יציבות אסימפטוטית (כי לא מתקרבים לראשית) והנק' הקריטית מכונה מרכז. אם לא משתמשים בדמיון מטריצות, המסלולים הם אליפסות, לאו דווקא מקבילות לצירים, סביב הראשית. היציבות אינה משתנה - יש יציבות אך לא אסימפטוטית (אמנם המרחק לראשית מתקצר אבל רק עד גבול מסוים).


[המסלולים במקרה הכללי יותר]

נחזור כעת לשאלה שלנו. כזכור, הפולינום האופייני של מטריצה 2×2 A הינו $P(\lambda)=\lambda^2-(tr\,A)\lambda+\det A$ אצלנו $tr\,A=a+d=p$, $\det A=ad-bc=q$. כמו-כן, $\Delta=p^2-4q$ היא הדיסקרימיננטה של המשוואה הריבועית. לסיכום, אם λ_1,λ_2 הם שורשי הפולינום האופייני אז מתקיים $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=p \\ \lambda_1\lambda_2=q \end{cases}$. לכן:

(א) אם $\Delta\geq0$, $q>0$ אז יש שני שורשים (כי $\Delta\geq0$) ומכפלתם חיובית ולכן הם שווי סימן. מתקבל אחד המקרים א', ב', ג' וכפי שאמרנו בכולם הנק' הקריטית היא צומת.

(ב) אם $q<0$ אז לא יתכן שהשורשים מרוכבים צמודים (כי אז הייתה מכפלתם חיובית) ולכן יש שני שורשים $\overbrace{\text{שוני}}^{\text{ממשיים}}$ סימן (כי מכפלתם שלילית) <= מתקבל מקרה ב' <= נקודת אוכף.

(ג) אם $\Delta<0$, $p\neq0$ אז השורשים מרוכבים צמודים (כי $\Delta<0$) ולא מדומים טהורים (כי סכומם $\neq0$) ולכן מתקבל מקרה ה' <= ספירלה.

(ד) אם $q>0$, $p=0$ אז לא יתכן שהשורשים ממשיים (כי סכומם 0 ולכן הם שוני סימן ואז מכפלתם קטנה מ-0 בניגוד לנתון) ולכן השורשים מרוכבים צמודים, והם מדומים טהורים כי סכומם 0 <= מתקבל מקרה ו' <= מרכז.

(ה) אם $q>0$, $p<0$ אז או שיש שני שורשים ממשיים שליליים או שיש שני שורשים מרוכבים צמודים בעלי חלק ממשי שלילי. בשני המקרים ראינו שהפתרונות שואפים ל-0 כאשר $t\to\infty$ <= יש יציבות אסימפטוטית.

(ו) אם $q>0$, $p=0$ אז (כמו בסעיף ד') יש שני שורשים צמודים מדומים טהורים ולכן הנק' הקריטית היא מרכז <= יש יציבות אך לא אסימפטוטית.

(ז) אם $q<0$ אז יש שני שורשים ממשיים שוני סימן <= נק' אוכף <= אין יציבות.

אם $p>0$ אז קיים לפחות שורש אחד עם חלק ממשי חיובי <= לפי מה שראינו במקרים השונים, זה מספיק כדי שלא תהיה יציבות.

השלמות מתרגילי בית מס' 6, 7

נפתח בשני תרגילים קצרים לחימום:

תרגיל: (ת.ב. מס' 6 שאלה 8) למצוא את כל הפונקציות הממשיות שהן גזירות פעמיים ברציפות על כל הישר ומקיימות $f'(t)=f(-t)$ $\forall t$.

פתרון: נגזור את שני אגפי המשוואה: $f''(t)=[f(-t)]'=-f'(-t)\underset{\text{בגלל המשוואה}}{=}-f(-(-t))=-f(t)$ $\Leftarrow$ $f''(t)+f(t)=0$.

זו משוואה לינארית במקדמים קבועים וקל לראות שהפתרון הכללי שלה נתון ע"י $f(t)=\alpha\sin t+\beta\cos t$.

נציב במשוואה שלנו: $\alpha\cos t-\beta\sin t=f'(t)=f(-t)=-\alpha\sin t+\beta\cos t$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\alpha(\sin t+\cos t)=\beta(\sin t+\cos t)$ $\Leftarrow$ זה נכון לכל t ולכן בהכרח $\alpha=\beta$. קיבלנו שהפתרון חייב לקיים $f(t)=\alpha(\sin t+\cos t)$. נראה שכל פונקציה כזו היא אכן פתרון. מתקיים

$\alpha(\cos t-\sin t)=f'(t)=f(-t)=\alpha(-\sin t+\cos t)$ $\Leftarrow$ אכן המשוואה מתקיימת.

לכן הפתרון הוא $\boxed{f(t)=\alpha(\cos t+\sin t),\ \text{לכל}\ \alpha\in\mathbb{R}.}$

תרגיל: (ת.ב. מס' 7 שאלה 5) יהי $z(t)$ פתרון למשוואה $z''(t)+az'(t)+bz(t)=0$, עבור $a,b\in\mathbb{R}$. נניח ש- $z(t)$ מקיים: $\begin{cases}z(0)=z(1)\\ z'(0)=z'(1)\end{cases}$. להוכיח כי הפתרון מחזורי, כלומר $z(t+1)=z(t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר פונקציה חדשה $\tilde{z}(t)=z(t+1)$. כפי שראינו בשיעור הקודם, מכיוון שהמשוואה היא אוטונומית ו- $z(t)$ פתרון שלה, נובע מכך שגם $\tilde{z}(t)$ פתרון שלה. מתקיים $\begin{cases}\tilde{z}(0)=z(1)=z(0)\\ \tilde{z}'(0)=z'(1)=z'(0)\end{cases}$ ולכן שתי הפונקציות $z(t),\tilde{z}(t)$ מקיימות אותם תנאי התחלה בנק' $t=0$. לכן לפי משפט היחידות, $z(t)=\tilde{z}(t)$ $\Leftarrow$ $z(t)=z(t+1)$ $\forall t$, מש"ל.

נעבור לתרגיל קצת יותר מסובך - נוסחת אבל למציאת פתרון נוסף למשוואה לינארית מסדר שני.

תרגיל: (ת.ב. מס' 6 שאלה 9) (א) נתונה המשוואה $z''(t)+a_1(t)z'(t)+a_0(t)z(t)=0$ כאשר הפונקציות $a_0(t),a_1(t)$ ממשיות ורציפות בקטע $I=(\alpha,\beta)$. יהי $z_1(t)$ פתרון שאינו מתאפס באף נק' בקטע. להוכיח כי פתרון נוסף בלתי תלוי בראשון נתון ע"י $z_2(s)=z_1(s)\int_{t_0}^{s}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)}{z_1(t)^2}dt$, עבור $t_0\in I$ כלשהו.

(ב) ידוע שלמשוואה $tz''(t)-2z'(t)+\frac{t^2+2}{t}z(t)=0$ בקטע $0<t<\pi$ קיים פתרון $z_1(t)=t\sin t$. למצוא פתרון נוסף שאינו תלוי בראשון.

הערה: במובן מסוים, השיטה למציאת פתרון במשוואה בסעיף א' (שנקראת "נוסחת אבל") דומה לשיטה שלמדנו לפתרון משוואת ריקטי (משוואה מהצורה $y'(t)=a_2(t)y^2(t)+a_1(t)y(t)+a_0(t)$). גם שם בהינתן פתרון אחד הייתה לנו שיטה למצוא פתרון נוסף.

פתרון: (א) נניח ש- $z_2(t)$ הוא פתרון נוסף של המשוואה שאינו תלוי לינארית ב- $z_1(t)$. נובע מכך שהוורונסקיאן שלהם - $\det\begin{pmatrix}z_1(t) & z_2(t)\\ z_1'(t) & z_2'(t)\end{pmatrix}$ אינו מתאפס בשום נקודה בקטע. לפיכך, מתקיים

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right)}_{\text{מוגדרת בכל הקטע כי } z_1(t) \text{ אינה מתאפסת בקטע}} = \frac{z_2(t)z_1'(t)-z_1(t)z_2'(t)}{[z_1(t)]^2} = \frac{-\det W(t)}{[z_1(t)]^2}$$

לפי נוסחה שלמדנו בהרצאה, בהינתן $t_0\in I$ מתקיים $\det W(t)=\det W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)$.

לפיכך, נקבל

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right) = \frac{-\det W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)}{[z_1(t)]^2}$$

נבצע אינטגרציה לשני האגפים:

$$\int_{t_0}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right) = \int_{t_0}^{s}\frac{-\det W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)}{[z_1(t)]^2}\,dt$$

ומכאן

$$\frac{z_2(s)}{z_1(s)}-\frac{z_2(t_0)}{z_1(t_0)} = -\det W(t_0)\int_{t_0}^{s}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)}{[z_1(t)]^2}\,dt\,.$$

כדאי לשים לב שמכיון שהמשוואה היא הומוגנית ו- $z_1(t)$, $z_2(t)$ פתרונות שלה, גם $\tilde{z}(t)=z_2(t)-\frac{z_2(t_0)}{z_1(t_0)}z_1(t)$ הוא פתרון שלה וברור שגם הוא אינו תלוי ב- $z_1(t)$, ומקיים $\tilde{z}(t_0)=0$. לכן נוכל (ע"י החלפת $z_2(t)$ ב- $\tilde{z}(t)$) להניח בה"כ כי $z_2(t_0)=0$. נקבל

$$\frac{z_2(s)}{z_1(s)} = -\det W(t_0)\int_{t_0}^{s}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)}{[z_1(t)]^2}\,dt$$

לסיום, שוב נשתמש בהומוגניות ונחליף את הפתרון $z_2(t)$ ב- $\tilde{z}_2(t)=\frac{-1}{\det W(t_0)}z_2(t)$ ונקבל

$$\tilde{z}_2(s)=z_1(s)\int_{t_0}^{s}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)}{[z_1(t)]^2}\,dt$$

, וזו הנוסחה שרצינו לקבל.

(ב) מכיון ש- t אינו מתאפס בקטע, נוכל לחלק בו ולקבל $z''(t)-\frac{2}{t}z'(t)+\frac{t^2+2}{t^2}z(t)=0$.

על מנת להציב בנוסחה לעיל, נחשב תחילה את $\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)$. נקבל

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{2}{\theta}d\theta\right)=\exp\left(2\ln t-2\ln(t_0)\right)=\exp\left(2\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right)=\left(\frac{t}{t_0}\right)^2$$

ולכן לפי הנוסחה, קיים פתרון מהצורה

$$z_2(s)=(s\sin s)\int_{t_0}^{s}\frac{(t/t_0)^2}{(t\sin t)^2}dt=(s\sin s)\int_{t_0}^{s}\frac{1}{t_0^2}\frac{1}{\sin^2 t}dt=$$
$$=(s\sin s)\cdot\frac{1}{t_0^2}\cdot[-\cot s+\cot t_0]$$

על מנת לאפס את $\cot t_0$, נציב $t_0=\frac{\pi}{2}$ (מותר להציב כל t_0 בקטע I) ונקבל

$z_2(s)=(s\sin s)\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot(-\cot s)=\frac{-4}{\pi^2}s\cdot\cos s$. מכיון שמותר להכפיל בקבוע פתרון כי המשוואה היא הומוגנית,

נקבל בסה"כ $\boxed{z_2(s)=s\cos s}$.

הערה: לשם נוחות הכתיבה, כדאי יהיה להחליף בסימון בין s ל- t.

תרגיל: (גב מס 7 שאלה 4) נתונה המשוואה $mz''(t)+cz'(t)+kz(t)=0$ [זוהי המשוואה הלינארית למסה קשורה לקפיץ עם חיכוך כאשר $z(t)$ הוא המרחק מנק' שווי המשקל בזמן t, m היא המסה, k הוא קבוע הקפיץ ו- c הוא מקדם החיכוך]. לנתח את התנהגות הפתרון כתלות בפרמטרים, להציג אותו במישור הפזה.

פתרון: בהרצאה הוצג פתרון של התרגיל בעזרת מעבר לקואורדינטות קוטביות. אנחנו נראה כאן כיצד התרגיל נובע מיידית משאלה 2 בגב מס' 7, אותה עשינו בשיעור שעבר.

תחילה נהפוך את המשוואה למערכת משוואות לינאריות. לשם כך נבחר משתנה נוסף $z'(t)$ ואז נקבל מערכת $\begin{pmatrix}z(t)\\z'(t)\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\-k/m & -c/m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z(t)\\z'(t)\end{pmatrix}$ [זו הדרך הסטנדרטית להפוך משוואה מסדר n למערכת משוואות מסדר ראשון]. כעת בסימונים של שאלה 2 נקבל $p=-c/m$, $q=k/m$,

$\Delta = p^2-4q = \left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m} = \frac{1}{m^2}(c^2-4km)$. לפיכך אם $c^2<4mk$ וגם $c>0$ אז $(p\neq 0, \Delta<0) \Rightarrow$ הנקודה הקריטית היא ספירלה. אם $c^2<4mk$ וגם $c=0$ אז $(p=0,\Delta<0) \Rightarrow$ הנק' היא מרכז.

אם $c^2>4mk$ אז יש לפולינום האופייני שני שורשים ממשיים ומכיוון ש- $q=\frac{k}{m}>0$ ו- $p=-\frac{c}{m}<0$ נקבל שהשורשים שווי סימן ושליליים $\Rightarrow$ הנק' הקריטית היא צומת ואפשר לנתח את הפתרון ולהראות שהוא מתכנס לנק' שיווי המשקל ללא אוסצילציות. אם רוצים לדייק, צריך לחשב את הוקטורים העצמיים של המטריצה ואז אפשר לתאר את הפתרון במישור הפאזה כמו שעשינו בשבוע שעבר.

תרגיל: נתונה המערכת האוטונומית $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_2(t)\\-y_1(t)^2\end{pmatrix}$.　　תש"ס מס' 7 שאלה 6

(א) להראות שכל פתרון מקיים $\frac{2}{3}y_1(t)^3+y_2(t)^2=\text{const}$ ולשרטט את תמונת המסלולים במישור הפאזה.

(ב) האם הפתרון העובר בנק' $(-1,\sqrt{2/3})$ קיים לכל $t\in\mathbb{R}$?

פתרון: (א) הטענה שקולה לכך שמתקיים $\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}y_1(t)^3+y_2(t)^2\right)=0 \Rightarrow 2y_1(t)^2y_1'(t)+2y_2(t)y_2'(t)=0$.

אולם לפי המשוואה, $y_2'(t)=-y_1(t)^2$ וכן $y_1'(t)=y_2(t)$ ולכן $2y_1(t)^2y_1'(t)=-2y_2'(t)y_2(t)$

ולכן מתקיים $2y_1(t)^2y_1'(t)+2y_2(t)y_2'(t)=0$, כנדרש.

המסלולים במישור הפאזה הינם בעצם העקומים האליפטיים מהצורה $y^2=-\frac{2}{3}x^3+c$, לכל $c\in\mathbb{R}$.

(ב) נשים לב שמתקיים $\frac{2}{3}\cdot(-1)^3+(\sqrt{2/3})^2=0$ ולכן הפתרון העובר בנק' $(-1,\sqrt{2/3})$ הינו הפתרון המקיים $\frac{2}{3}y_1(t)^3+y_2(t)^2=0$. נניח ש $(y_1(t_0),y_2(t_0))=(-1,\sqrt{2/3})$. נראה שהפתרון קיים לכל $t\geq t_0$.

נשים לב שכל זמן מתקיים $\begin{cases}y_1(t)<0\\y_2(t)>0\end{cases}$ (כפי שמתקיים עבור t_0), מתקיים $\begin{cases}y_1'(t)>0\\y_2'(t)<0\end{cases}$ ולכן הקואורדינטה הראשונה עולה והשניה יורדת ושתיהן לא שואפות ל- ∞ ולכן הפתרון ממשיך להתקיים. משיקולי רציפות, על מנת שהמצב $\begin{cases}y_1(t)<0\\y_2(t)>0\end{cases}$ ישתנה, צריך שיהיה קיים t_1 עבורו $y_1(t_1)=0$ או $y_2(t_1)=0$. אולם מכיוון שהפתרון מקיים $\frac{2}{3}y_1(t)^3+y_2(t)^2=0$, נובע מכך שאם $y_1(t_1)=0$ אז $y_2(t_1)=0$ ולהיפך. לפיכך, המצב יכול להשתנות רק אם קיים t_1 עבורו $\begin{cases}y_1(t_1)=0\\y_2(t_1)=0\end{cases}$. אולם הפונקציה $f\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2(t)\\-y_1(t)^2\end{pmatrix}$ הינה ליפשיצית בסביבת הנקודה $\begin{cases}y_1=0\\y_2=0\end{cases}$ ולכן ממשפט היחידות, הפתרון שלנו היה מתלכד עם הפתרון $\begin{cases}y_1(t)\equiv0\\y_2(t)\equiv0\end{cases}$, בסתירה לנתון.

לכן המצב $\begin{cases}y_1(t)<0\\y_2(t)>0\end{cases}$ נשמר לכל $t\geq t_0$ ולכן הפתרון מוגדר לכל $t\geq t_0$.

בעיות על מישור הפאזה

תרגיל: נתונה המערכת האוטונומית $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t)^2 \end{pmatrix}$.

מבחן מועד ב

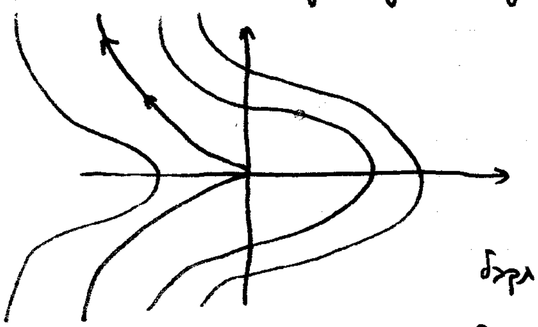
(א) להראות כי כל פתרון מקיים $\frac{2}{3}y_1(t)^3 + y_2(t)^2 = const$, ולשרטט את תמונת המסלולים במישור הפאזה.

(ב) האם הפתרון העובר בנק' $(-1, \sqrt{2/3})$ קיים לכל $t \in \mathbb{R}$?

פתרון: (א) המשוואה $\frac{2}{3}y_1(t)^3 + y_2(t)^2 = const$ שקולה (ע"י גזירת שני האגפים) למשוואה $2y_1(t)^2 y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t) = 0$

נשים לב שלפי הנתון מתקיים $-y_1(t)^2 = y_2'(t)$ וכן $y_1'(t) = y_2(t)$ ולכן

$2y_1(t)^2 y_1'(t) + 2y_2(t)y_2'(t) = -2y_2'(t)y_2(t) + 2y_2(t)y_2'(t) = 0$, כנדרש.



מכאן נובע שהמסלולים הם העקומות המקיימות $\frac{2}{3}y_1^3 + y_2^2 = c$, לכל $c \in \mathbb{R}$. זו משוואה הדומה לעקומה אליפטית (משוואה הבלתי היא $y^2 = x^3 + ax + b$).

המסלולים נראים כרוך כמתואר משמאל, כאשר המסלול ה"חד" מתקבל עבור $c=0$. [באופן כללי, c היא נק' החיתוך של המסלול עם ציר x.]

(ב) נשים לב שמכיוון ש- $\frac{2}{3}(-1)^3 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 0$, הפתרון המדובר הוא זה שמקיים $0 = \frac{2}{3}y_1^3(t) + y_2^2(t)$

כלומר $c=0$). נוכל לחשב אותו בצורה מפורשת יותר: $-\frac{2}{3}y_1^3(t) = y_2^2(t) \Leftarrow \boxed{y_2(t) = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}(y_1(t))^3}}$.

נציב במשוואה הראשונה ונקבל $y_1'(t) = y_2(t) \Leftarrow y_1'(t) = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}(y_1(t))^3}$. ~~זו משוואה דיפרנציאלית~~

~~שאותה צריך לפתור ובמבחן הכללי היא $y_1(t) = \left(\frac{t}{3} - c\right)^{-2}$. נניח שהפתרון שלנו מקיים $y_1(t_0) = -1$~~

~~ונקבל $\left(\frac{t}{3} - c\right)^{-2} = -1$~~ את הסימן לפני השורש נוכל לקבוע לפי תנאי ההתחלה. נשים לב

שמתקיים $y_1'(t) = y_2(t)$ ולכן כל עוד $y_2(t) > 0$, $y_1(t)$ מונוטונית עולה ב- t. כמו כן,

$y_2'(t) = -y_1(t)^2$ ולכן $y_2(t)$ מונוטונית יורדת ב- t. לפיכך, אם הפתרון שלנו מקיים $(y_1(t_0), y_2(t_0)) = (-1, \sqrt{2/3})$

אז לכל $t < t_0$ מתקיים $y_2(t) \geq \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$ ולכן $y_1(t) \leq -1 < 0$. לפיכך, נמצאים במסלול המסומן בחץ

במישור הפאזה לעיל. כפי שאמרנו, בתחום זה $y_1'(t) = y_2(t) > 0$ ולכן המשוואה המתקבלת היא

$\boxed{y_1'(t) = +\sqrt{-\frac{2}{3}(y_1(t))^3}}$. זוהי משוואה דיפרנציאלית אותה יודעים לפתור, והפתרון הכללי

הוא $\boxed{y_1(t) = -\left(\frac{1}{\sqrt{6}}t - c\right)^{-2}}$

בתחום בו $\frac{1}{\sqrt{6}}t > c$ (אכן, $y_1'(t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}t - c\right)^{-3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{-\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}t - c\right)\right)^3} \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{6}}t - c\right|$

וזה חיובי רק אם $\frac{1}{\sqrt{6}}t > c$). אצלנו הפתרון מקיים $y_1(t_0) = -1$ ולכן $-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}t_0 - c\right)^{-2} = -1$

$\Leftarrow \frac{1}{\sqrt{6}}t_0 - c = 1 \Leftarrow c = \frac{1}{\sqrt{6}}t_0 - 1 \Leftarrow$ הפתרון קיים רק אם $\frac{1}{\sqrt{6}}t > \frac{1}{\sqrt{6}}t_0 - 1 \Leftarrow t > t_0 - \sqrt{6}$

$\Leftarrow$ הפתרון "מתפוצץ" עבור $t = t_0 - \sqrt{6}$ ובפרט אינו קיים לכל t. זוהי דוגמא לכך שלמרות

שהמסלול במישור הפאזה נראה "יפה", הפתרון מתפוצץ. אגב, הפתרון קיים לכל $t \geq t_0$.

תרגיל: נתונה המערכת האוטונומית $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(e^{y_2(t)})y_1(t)-\cos(e^{y_1(t)})y_2(t)\\ \cos(e^{y_2(t)})y_1(t)+\sin(e^{y_1(t)})y_2(t)\end{pmatrix}$.

תב"ך 7 / שאלה 7

להראות כי לכל נקודה $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$, הפתרון המק"מ $y(0)=(\xi,\eta)$ קיים לכל $t\in\mathbb{R}$.

פתרון: כמו שראינו כבר, נחסום את הפתרון מלמעלה ומלמטה בפתרונות של משוואות פשוטות יותר.

עבור $t\geq 0$, נתבונן במשוואה $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$ (*). נמצא פתרון שלה: הע"ע הם $0,2$, עם וקטורים עצמיים $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ בהתאמה. לפיכך, הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. נשים לב שלכל y_1,y_2 מתקיים

$$(**)\begin{cases}\sin(e^{y_2})y_1-\cos(e^{y_1})y_2\leq|y_1|+|y_2|\\ \cos(e^{y_2})y_1+\sin(e^{y_1})y_2\leq|y_1|+|y_2|\end{cases}$$

ולכן אם ניקח בתרון פרטי y^0 של (*) המק"מ $y^0(0)=(2|\xi|,2|\eta|)$, נקבל שפתרון זה הינו גדול יותר (בערך מוחלט) לכל $t\geq 0$ מהפתרון המקורי שלנו. אכן, אם נסמן את הפתרון המקורי שלנו $y^1(t)$ אז מתקיים $y^0(0)>|y^1(0)|$. טוענים שיחס זה מתקיים גם לכל $t\geq 0$. אם לא, אז קיים t_0 מינימלי עבורו $y^0(t_0)\not>|y^1(t_0)|$, ולכן בה"כ בקואורדינטה הראשונה מתקיים $y_1^1(t_0)=y_1^0(t_0)$. קיבלנו $\begin{cases}y_1^0(0)>y_1^1(0)\\ y_1^0(t_0)=y_1^1(t_0)\end{cases}\Leftarrow$ קיים $0\leq t_1\leq t_0$ עבורו $(y_1^1)'(t_1)>(y_1^0)'(t_1)$ אבל לפי ההנחה, $y^1(t_1)<|y^0(t_1)|$ ולכן מאי-השוויונים (**) נובע ש- $(y_1^1)'(t_1)\leq(y_1^0)'(t_1)$, סתירה.

לכן הפתרון שלנו חסום מלמעלה ע"י $y^0(t)$ שהוא קיים לכל $t\geq 0$. בדומה, הפתרון חסום ~~מלמטה~~ מלמטה ע"י $-y^0(t)$ שגם הוא קיים לכל $t\geq 0$.

עבור $t\leq 0$ נתבונן במשוואה $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$ שפתרונה הכללי הוא $\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+c_2e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ונחסום את הפתרון שלנו ע"י פתרונות שלה.

[צריך משוואה נוספת כי הפעם רוצים לחסום את הנגזרת לא מלמעלה אלא מלמטה עבור y_1,y_2 חיוביים ולהיפך עבור y_1,y_2 שליליים.]

מחיבור התוצאות עבור $t\geq 0$ ו- $t\leq 0$ מקבלים שהפתרון קיים לכל $t\in\mathbb{R}$ כנדרש.

פתרון משוואות מסדר שני בעזרת טורי חזקות

תרגיל: נתונה משוואת לז'נדר: $(1-t^2)z''(t)-2tz'(t)+\alpha(\alpha+1)z(t)=0$, עבור $\alpha>-1$ ממשי.

תב"ך 6 / שאלה 6

(א) לכתוב שני פתרונות בסיס $z_1(t),z_2(t)$ כטורי חזקות בקטע $(-1,1)$ כך שהוורונסקיאן שלהם ב- $t=0$ שווה למטריצה היחידה.

(ב) להראות כי אם α הוא טבעי זוגי אז $z_1(t)$ הוא פולינום מסדר α ולחשב את ארבעת הפולינומים הראשונים.

(ג) להראות כי אם α טבעי אי-זוגי אז $z_2(t)$ פולינום מסדר α ולחשב את ארבעת הפולינומים הראשונים.

פתרון: נשתמש במשפט הכללי הבא על פתרון משוואות מסדר שני בעזרת טורי חזקות:

משפט: אם נתונה המשוואה $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ ובנקודה x_0 מתקיים ש- $\frac{Q(x)}{P(x)}, \frac{R(x)}{P(x)}$ הינן אנליטיות ב- x_0 אזי הפתרון הכללי של המשוואה בסביבת x_0 נתון ע"י טור החזקות $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ כאשר a_0,a_1 קבועים ו- y_1,y_2 הינם פתרונות בת"ל של המשוואה שהם אנליטיים ב- x_0. יתרה מזאת, רדיוס ההתכנסות של הטורים y_1,y_2 הינו לפחות המינימום בין רדיוסי ההתכנסות של $\frac{Q(x)}{P(x)}, \frac{R(x)}{P(x)}$ סביב x_0.

בתרגיל שלנו, הפונקציות $\frac{-2t}{1-t^2}, \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}$ הינן אנליטיות ב- $t=0$ והטורים שלהם סביב $t=0$ הינם בעלי רדיוס התכנסות 1. לכן נחפש פתרונות בצורת טורי חזקות סביב $t=0$ ומובטח לנו קיום הפתרון ב $(-1,1)$, כנדרש בשאלה.

נניח שהפתרון הוא $z(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$. אזי $z'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}$, $z''(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$.

נציב במשוואה ונקבל: $(1-t^2)z''(t)-2tz'(t)+\alpha(\alpha+1)z(t)=0$

$$\Leftarrow \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^n+\alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n+\alpha(\alpha+1)a_n\Big)t^n=0$$

$$\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}-\big(n(n+1)-\alpha(\alpha+1)\big)a_n\Big)t^n=0$$

לפי משפט היחידות של הפיתוח לטור חזקות, שני טורים שווים רק אם כל המקדמים שווים ולכן מתקיים

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=[n(n+1)-\alpha(\alpha+1)]a_n \Rightarrow a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

מנוסחת הרקורסיה הזו נקבל ש- a_0,a_1 יכולים להבחר באופן שרירותי וכן מתקיים

$$a_{2n}=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1)}{(2j+1)(2j+2)}a_0=\frac{1}{(2n)!}\left(\prod_{j=0}^{n-1}[2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1)]\right)a_0$$

ובדומה $a_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}\left(\prod_{j=0}^{n-1}[(2j+1)(2j+2)-\alpha(\alpha+1)]\right)$.

על מנת לבחור פתרונות בת"ל בצורה הפשוטה ביותר נציב $\begin{pmatrix}a_0=1\\a_1=0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}a_0=0\\a_1=1\end{pmatrix}$ ונקבל שני פתרונות:

$$z_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\prod_{j=0}^{n-1}[2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1)]t^{2n}\ ,\qquad z_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\prod_{j=0}^{n-1}[(2j+1)(2j+2)-\alpha(\alpha+1)]t^{2n+1}$$

נחשב וורונסקיאן ב- $t=0$. נשים לב ש- $z_1(t)$ מכילה רק חזקות זוגיות של t ולכן $z_1'(0)=0$. כמו כן, $z_2(0)=0$. הבדיקה מראה שמתקיים $z_1(0)=z_2'(0)=1$ (למעשה, אלו הם a_0,a_1 אותם אנחנו בחרנו להיות 1) ולכן הוורונסקיאן של הפתרונות ב- $t=0$ הינו מטריצת היחידה, כנדרש.

(2) אם α זוגי, אזי לכל n זוגי עבור $2n>\alpha$, המכפלה המגדירה את $z_1(t)$ קיים האיבר $(\alpha(\alpha+1)-\alpha(\alpha+1))$ שמאפס את כל המכפלה ולכן נותרים רק האיברים עד $n=\alpha/2$.

לכן הפתרון המתקבל הוא $z_1(t)=\sum_{n=0}^{\alpha/2}\frac{1}{(2n)!}\prod_{j=0}^{n-1}\left[2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1)\right]t^{2n}$

שהוא אכן פולינום ממעלה α. ארבעת הפולינומים הראשונים הם:

$$P_0(t)=1\ ,\quad P_2(t)=1-3t^2\ ,\quad P_4(t)=1-10t^2+\frac{35}{3}t^4\ ,\quad P_6(t)=1-21t^2+63t^4-\frac{231}{5}t^6$$

(ג) אם α אי-זוגי, אז לכל n עבורו $\alpha<2n+1$, במכפלה המגדירה את $z_2(t)$ מופיע הגורם $(\alpha(\alpha+1)-\alpha(\alpha+1))$ שמאפס את המכפלה ולכן כמו קודם נקבל

$$z_2(t)=\sum_{n=0}^{\frac{\alpha-1}{2}}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\prod_{j=0}^{n-1}\left[(2j+1)(2j+2)-\alpha(\alpha+1)\right]\right)t^{2n+1}$$

שהוא אכן פולינום ממעלה α. הצבה מראה שארבעת הפולינומים הראשונים הם:

$$P_1(t)=t\ ,\quad P_3(t)=t-\frac{5}{3}t^3\ ,\quad P_5(t)=t-\frac{14}{3}t^3+\frac{21}{5}t^5\ ,\quad P_7(t)=t-9t^3+\frac{99}{5}t^5-\frac{429}{35}t^7.$$