(1) 13.05.08
(תרג') אמפ"ר

המתרגל: נתן קלר - nkeller@math

שעת קבלה: בקראה יום ג' $14^{00}-17^{00}$ קנדה

יש תרגילי בית אבל אין חובת הגשה אי שיגיש תרגילים יבדקו

יש בוחן אמצע שמהווה 25% מהציון הסופי.

ב-owl יופיעו פתרונות של התרגילים ו השאר באתר של מתניה. התרגול הראשון מופיע באתר.

תזכורת:

- קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא פתוחה אם לכל $x\in A$ קיים כדור $B(x,r)\subseteq A$.
- קבוצה $B\subseteq\mathbb{R}^n$ היא סגורה אם $B^c=\mathbb{R}^n\setminus B$ פתוחה.
- סדרה $\{x^m\}\subseteq\mathbb{R}^n$ מתכנסת ל-x אם לכל כדור $B(x,r)$ קיים M שעבור מספר רק שלכל $m>M$, $x^m\in B(x,r)$.
(זאת בעצם הכללה של ההגדרה מאינפי 1 ל-$\mathbb{R}^n$)

טענה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא סגורה אמ"מ לכל $\{x^m\}\subseteq A$ המתכנסת ל-x אז $x\in A$.

הגדרה: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם לכל סדרה $\{x^m\}\subseteq K$ יש תת סדרה $\{x^{m_k}\}$ שמתכנסת לגבול ב-K.

משפט: עבור $K\subseteq\mathbb{R}^n$ התנאים הבאים שקולים:

(א) K קומפקטית

(ב) K סגורה וחסומה

(ג) לכל כיסוי פתוח של K (= אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ של קבוצות פתוחות רק ש- $K\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha$ יש תת-כיסוי סופי.

(3) לכל משפחה של תת-קבוצות של K הסגורות ביחס ל-K (= אם יש סדרה מתכנסת מהקבוצה לגבול ב-K אז הגבול הוא כבר בקבוצה)

אם החיתוך של כל תת-משפחה סופית אינו ריק אז גם $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma \neq \emptyset$

__הערה__: סעיף (ה) נמצא במשפט באופן מיוחד ל- $\mathbb{R}^m$. סעיפים (א), (ג), (ד) שקולים לכל מרחב מטרי וכן בכל מרחב מטרי קומפקטיות גוררת סגירות וחסימות. אבל לא בכל מרחב מטרי קבוצה סגורה וחסומה היא קומפקטית.

__תזכורת__: ב- $C(K,\mathbb{R}^m)$ הגדרנו __נורמה__ $\|f\| = \sup_{x\in K}|f(x)|$

מהי התכנסות בנורמה הזאת?

אם $f_k \xrightarrow{\text{בנורמה}} f$ אז לכל $0<\varepsilon$ קיים k_0 כך שלכל $k>k_0$

$\varepsilon > \|f_k - f\| \Leftarrow \varepsilon > \sup_{x\in K}|f_k(x)-f(x)| \Leftarrow$ לכל

$x\in K$ $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon \Leftarrow$ f_k מתכנסת ל- f __במידה שווה__.

קבוצה $A\subseteq C(K,\mathbb{R}^m)$ היא סגורה אם לכל סדרה $\{f_n\}$ שמתכנסת ל- f בנורמה, גם $f\in A$. כלומר אם $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ אז $f\in A$. נשים לב שההגדרה הזו לא מגוחכת כי ידוע שסדרת פונקציות רציפות שמתכנסות במידה שווה לגבול, הגבול הוא רציף אז בהכרח $f\in C(K,\mathbb{R}^m)$. מה שמעניין הוא אם f הוא גם ב- A

__הערה__: $C(K,\mathbb{R}^m)$ היא דוגמה מצוינת למרחב שבו קבוצה סגורה וחסומה היא לא בהכרח קומפקטית. משפט Arzela-Ascoli נותן את הקשר בין סגירות וחסימות לקומפקטיות - צריך שהסדרה תהיה גם רציפה במידה אחידה וחסומה במידה אחידה. אחרי שאנחנו יודעים את זה לסדרות המעבר לקבוצות כלליות הוא טריוויאלי.

__שאלה__: האם הקבוצה $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $f_k(x) = x^k$ סגורה ב- $C[0,1]$?

__תשובה__: כן! אמנם הסדרה מתכנסת נקודתית, אבל אינה מתכנסת במ"ש ולכן לא בנורמה. לכן, לפי ההגדרה בתחילת השיעור הקבוצה סגורה (בפרט כי אין לה גבול ב- $C[0,1]$).

<u>הגדרה</u>: תהי $X\subseteq C(K,\mathbb{R}^n)$. העתקה $T:X\to X$ נקראת <u>מכווצת</u> אם קיים $c<1$ כך שלכל $f,g\in X$

$$\|Tf-Tg\|\le c\|f-g\|$$

<u>דוגמה</u>: נגדיר $T:C[0,1]\longrightarrow C[0,1]$ ע"י $Tf(x)=\alpha\int_0^x f^2(t)\,dt$
עבור אילו ערכי $\alpha\ge 0$, T מכווצת?

<u>פתרון</u>: נחשב:

$$\|Tf-Tg\| = \sup_{x\in K}\left|\alpha\int_0^x f^2(t)\,dt-\alpha\int_0^x g^2(t)\,dt\right| =$$

$$=\sup_{x\in K}\alpha\left|\int_0^x (f^2(t)-g^2(t))\,dt\right| =$$

$$=\sup_{x\in K}\alpha\left|\int_0^x (f(t)-g(t))(f(t)+g(t))\,dt\right| \le$$

$$\le \sup_{x\in K}\alpha\|f-g\|\left|\int_0^x (f(t)+g(t))\,dt\right|$$

לא קשה לנחש שהתשובה ש- T לא מכווצת. נניח סדרה $f_k(x)\equiv k$.
אז $\|f_k-0\|=k$ - !

$$\|Tf_k-T0\| = \sup_x\alpha\int_0^x k^2\,dt = \sup_x \alpha\cdot k^2\cdot x = \alpha k^2$$

לכן לא קיים $c<1$ כך ש- $\|Tf_k-T0\|\le c\|f_k-0\|$ לכל k.
לכן T לא מכווצת, פרט ל- $\alpha=0$.

<u>אבל</u>, אם נגדיר $T:X\to X$ כאשר $X=\{f\in C[0,1]:\|f\|\le 1\}$
אז

$$\|Tf-Tg\|\le\sup_x\alpha\|f-g\|\left|\int_0^x (f(t)+g(t))\,dt\right| \le$$

$$\le\sup_x\alpha\|f-g\|\,2x = 2\alpha\|f-g\|$$

לכן אם $\alpha<\frac{1}{2}$ ההעתקה מכווצת. תרגיל: להראות
ע"י דוגמה שאם $\alpha\ge\frac{1}{2}$ ההעתקה לא מכווצת.

נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון: $\frac{dy}{dx}=-3y^2x$
ניתן לרשום כמשוואה כללית בצורה $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

<u>הגדרה</u>: אם קיימת פונקציה $G(x,y)$ כך ש-

$$\frac{\partial G}{\partial x}=M(x,y) \qquad \frac{\partial G}{\partial y}=N(x,y)$$

אז הפתרון הכללי של המשוואה המקורית הוא $G(x,y)=c$.

לפעמים אי אפשר למצוא מייד G כזו אבל אם נכפול את המשוואה בפונקציה מסויימת, נוכל למצוא G מתאימה. במקרה כזה, $G(x,y)=c$ הם פיתרון למשוואה המקורית.

<u>דוגמה</u> (הפרדת משתנים): אם המשוואה היא מהצורה

$$f_1(x)\, g_2(y)\, dx + f_2(x)\, g_1(y)\, dy = 0$$

נוכל לכפול ב- $\frac{1}{g_2(y) f_2(x)}$ ונקבל

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = 0$$

ואז מתאימה לנו

$$G(x,y) = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy$$

אכן $G(x,y)=c$ פיתרון של' נהדרני

(3) 20.05.08

ת' מפל

היום נלמד כמה שיטות לפתרון משוואות שונות ומשונות.

נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון $y'(x) = \frac{dy}{dx} = F(x,y)$

פתרון כללי של המשוואה הוא קבוצת כל הפונקציות $y(x) \in C^1(I)$ שמקיימות את המשוואה.

פתרון פרטי (או בעיית תנאי התחלה) הוא כל הפונקציות (גם רק אחת) מאוד מקיים שיש רק אחת) $y \in C^1(I)$ שהן פתרון של המשוואה וגם מקיימות $f(x_0) = y_0$.

דוגמה: $y(t)$ היא פונקציה שמייצגת גודל של אוכלוסיה בזמן $t=0$. a הוא קצב הגידול של האוכלוסיה אם שום דבר לא מפריע. $(-by)$ הוא הפגיעה מגודל האוכלוסיה כתוצאה מהגבלות (משל, דגים בבריכה) לכן y נתונה ע"י הנוסחה $y'(t) = y(a-by)$

נרצה לפתור את המשוואה ולמצוא $y(t)$ עם תנאי התחלה $y(0)=y_0$ ובעיקר לדעת מהו $\lim_{t\to\infty} y(t)$. משוואה זו קוראים המשוואה הלוגיסטית (Verhulst, 1838).

איך פותרים משוואות מסדר ראשון? תחילה נרשום את המשוואה בצורה תבנית דיפרנציאלית $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

למשל, עבור המשוואה הלוגיסטית: $y(a-by)dt - dy = 0$

(אפשר לחשוב על זה כסדר הגיוני ולא אם השדה משמר אנחנו יודעים לפתור אותה. מי שלא יודע מה זה - לא משנה)

משוואות מדויקות: אם קיימת פונקציה $\phi(x,y) \in C^1(I')$ ($I' \subseteq \mathbb{R}^2$) כך ש- $\nabla\phi = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ (כלומר $\frac{\partial\phi}{\partial x} = M$ $\frac{\partial\phi}{\partial y} = N$) אז הפתרון הכללי של המשוואה הוא $\phi(x,y) = c$.

תזכורת מאינפי: אם U פתוחה ו- $M, N \in C^1(U)$ אז קיימת ϕ רק אם"ם $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. במקרה כזה המשוואה נקראת מדויקת.

כיצד מוצאים את ϕ ?

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow \phi = \int M(x,y)\,dx + \underbrace{f(y)}$$

ייתכן קבוע
ייתכן פונקציה של y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + f'(y) = N(x,y)$$

מכאן אפשר למצוא את $f(y)$ וכך גם את ϕ

<u>דוגמה:</u> מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3+3y}{3x+y-1}$$

<u>פתרון:</u> נרשום בצורה של תבנית דיפרנציאלית:

$$\underbrace{(2x^3-3y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(3x+y-1)}_{N(x,y)}dy = 0$$

ונבדוק האם המשוואה מדויקת:
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Leftarrow$ המשוואה מדויקת ואפשר להפעיל את השיטה שראינו קודם.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x^3-3y \Rightarrow \phi(x,y) = \int (2x^3+3y)\,dx + f(y) =$$
$$= \frac{1}{2}x^4 + 3xy + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x+y-1 \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}x^4+3xy\right) + f'(y) = 3x+y-1$$
$$\Rightarrow \cancel{3x} + f'(y) = \cancel{3x} + y - 1$$
$$\Rightarrow f(y) = \frac{1}{2}y^2 - y + C$$

לכן התשובה היא
$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + 3xy + \frac{1}{2}y^2 - y = C$$

אם היה לנו תנאי התחלה היינו מציבים אותו ומוצאים את C.

—

אם המשוואה אינה מדויקת אבל קיימת פונקציה $\mu(x,y) \neq 0$ כך ש-
$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$
היא מדויקת, אז הפתרונות של המקורית הם $\phi(x,y) = C$ של המשוואה המדויקת. במקרה זה, $\mu(x,y)$ נקרא <u>גורם אינטגרציה</u>.

הפרדת משתנים:

אם המשוואה היא מהצורה

$$f_1(x)g_2(y)\,dx + f_2(x)g_1(y)\,dy = 0$$

! אם $f_2(x)g_2(y) \neq 0$ אז $\frac{1}{f_2(x)g_2(y)}$ הוא גורם אינטגרציה,

ואכן, אם נכפיל בו נקבל

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0$$

וזו כמובן משוואה מדוייקת ופתרונה הוא

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C$$

תרגיל: מצא פתרון של המשוואה הלוגיסטית $\frac{dy}{dx} = y(a-by)$

עם תנאי התחלה $y(0) = y_0$.

פתרון: נרשום $y(a-by)\,dx - dy = 0$

נרצה לעשות הפרדת משתנים, כלומר גורם האינטגרציה $\frac{1}{y(a-by)}$ אבל יש לנו בעיה כי המכנה יכול להתאפס. נראה סביר להניח ש- $y \neq 0$ אז נניח את זה ובסוף נוודא שזה אכן מה שקיבלנו. כמו כן, יכול להיות $y(x) = \frac{a}{b}$. בעתיד נראה שאם קיים x_0 עבורו $a - by(x_0) = 0$ אז ממשפט הקיום והיחידות נובע שהפתרון היחיד שמקיים את זה הוא $y \equiv \frac{a}{b}$ קבוע. והאמת היא שאם קיים x_0 שעבורו $y(x_0) = 0$ אז הפתרון קבוע $y \equiv 0$. בכל אופן, מתקבלת משוואה מדויקת

$$dx - \frac{1}{y(a-by)}\,dy = 0$$

והפתרון הוא

$$\int 1\,dx - \int \frac{1}{y(a-by)}\,dy = C$$

וע"י אינטגרציה מתקבל

$$x - \frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right| = C$$

עם תנאי התחלה $y(0) = y_0$ נקבל $C = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y_0}{a-by_0}\right|$

אז הפתרון הוא

$$x - \frac{1}{a}\ln\left|\frac{y}{a-by}\right| = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{y_0}{a-by_0}\right|$$

פתרנו עבור y כפונקציה של x ומקבלים

$$y(x) = \frac{a/b}{1+\frac{a-by_0}{by_0}e^{-ax}}$$

מסקנה: לא משנה מה היה הגודל ההתחלתי של האוכלוסיה,
אחרי הרבה זמן יהיו בערך $\frac{a}{b}$.

5

27.05.08
ת' מד"ר

• תזכורת: איך נראית קבוצה סגורה ב- $C(K,\mathbb{R}^m)$?
ההתכנסות שמדברים עליה היא התכנסות במידה שווה. אם ההתכנסות לא במידה שווה הסדרה לא מעניינת אותנו.
למשל, קבוצת הפולינומים לא סגורה.
דוגמה לא טובה: x^n על $[0,1]$. הסדרה לא מתכנסת במ"ש אבל זה שהגבול הנקודתי שלה הוא לא פולינום לא מעניין אותנו בכלל.
דוגמה טובה: $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש ל- e^x שהיא לא פולינום...

• בספר של Schaum יש דוגמאות לשימושים של מד"ר בגיאומטריה והפיסיקה - בעיות מילוליות.

• חתול מטייל ברביע הראשון של המישור ולמסלול שלו התכונה הבאה: בכל נקודה המשיק למסלול יוצר משולש עם הצירים והשטח של המשולש הזה קבוע לכל אורך המסלול.
הקשר למעטפת - משיק זו בדיוק פונקציה שמתלכדת עם המסלול בערך ובנגזרת. אז המסלול של החתול הוא המעטפת של המשיקים האלה.
המשוואה שיוצאת היא קשה! יש טריק והוא יופיע בפתרונות.

משוואות מסדר ראשון - המשך

נתונה משוואה $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$. רושמים אותה בצורת תבנית דיפרנציאלית
$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$
מתי יודעים לפתור את המשוואה?

ג) משוואה מדויקת - אם קיים $\phi(x,y)$ כך ש-

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N$$

אז הפיתרון הכללי הוא $\phi(x,y) = c$. יודעים לבדוק אם משוואה היא מדויקת ואם כן, אז יודעים לפתור.

ד) גורם אינטגרציה - אם קיימת $\mu(x,y) \neq 0$ כך ש-

$$\mu(x,y) M(x,y)\,dx + \mu(x,y) N(x,y)\,dy = 0$$

הוא מדויקת אז הפיתרון של המקורית הוא הפיתרון של המדויקת. $\mu(x,y)$ נקרא גורם אינטגרציה.

מקרים שבהם ניתן למצוא גורם אינטגרציה בצורה שיטתית:

(1) הפרדת משתנים - אם המשוואה בצורה

$$f_1(x) g_2(y)\,dx + f_2(x) g_1(y)\,dy = 0$$

אז $\frac{1}{f_2(x) g_2(y)}$ גורם אינטגרציה ויודעים לפתור בקלות את המשוואה המתקבלת

(2) אם מתקיים $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ פונקציה של x בלבד, אז $e^{\int f(x)dx}$ גורם אינטגרציה.

(3) אם מתקיים $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = g(y)$ פונקציה של y בלבד, אז $e^{-\int g(y)dy}$ גורם אינטגרציה.

<u>דוגמה</u>: מצא פיתרון כללי של המשוואה

$$\underbrace{(x^2+y^2+x)}_{M}\,dx + \underbrace{xy}_{N}\,dy = 0$$

<u>פיתרון</u>: מתקיים

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x)$$

לכן $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x + c} = cx$ גורם אינטגרציה.

נכפול ונקבל $(x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + x^2y\,dy$

קל לראות שקיבלנו משוואה מדויקת

נחפש ϕ מתאימה.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^3 + xy^2 + x^2 \Rightarrow \phi(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + h(y)$$

⑥ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 y \Rightarrow x^2 y + h'(y) = x^2 y$

$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c$

לכן פיתרון כללי הוא $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$

④ אם המשוואה ניתנת לכתיבה בצורה

$$y f(xy)\,dx + x g(xy)\,dy = 0$$

אז $\frac{1}{xy(f(xy)-g(xy))} = \frac{1}{Mx-Ny}$ הוא גורם אינטגרציה.

③ משוואות לינאריות -

נתונה משוואה מהצורה $(*)\quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

כאשר $a(t), b(t)$ רציפות. נוכל לפתור אותה (תמיד)

בעזרת ההבחנה הבאה: נסמן $u(t) = e^{-\int a(t)dt}$

(לא נוסיף קבוע באינטגרציה. מותר כי צריך פעם אחת ומשם הוא קבוע לא צריך)

אז מתקיים

$$(u(t)y(t))' = u(t)y'(t) + u'(t)y(t) =$$
$$= u(t)y'(t) - a(t)e^{-\int a(t)dt}y(t) =$$
$$= u(t)[y'(t) - a(t)y(t)] =$$
$$\overset{(*)}{=} u(t)b(t)$$

ואז $u(t)y(t) = \int u(t)b(t)\,dt$ ולכן

$$y(t) = \frac{1}{u(t)}\int u(t)b(t)\,dt =$$
$$= e^{\int a(t)dt}\left(\int e^{-\int a(t)dt}b(t)\,dt\right)$$

נשים לב שבמקרה זה $u(t)$ הוא גורם אינטגרציה.

<u>דוגמה</u>: מצא פיתרון כללי של המשוואה

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y + x^2 + 3x - 2$$

<u>פתרון</u>: נשתמש בנוסחה לעיל:

$$y(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int e^{-\int\frac{1}{x}dx}(x^2+3x-2)\right) =$$
$$= e^{\ln x}\left(\int e^{-\ln x}(x^2+3x-2)\,dx\right) =$$

$$= x\left(\int\left(x+3-\frac{2}{x}\right)dx\right) =$$

$$= x\left(\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+c\right) = \frac{1}{2}x^3+3x^2-2x\ln x+cx$$

הערה: $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|$. אבל אנחנו מחפשים פיתרון רציף ואין ברור שהפיתרון לא יכול להיות רציף ב-0. רק הנחנו ש- $x>0$ ואז $\int\frac{1}{x}dx=\ln x$.

ד) החלפת משתנים - לפעמים המשוואה המקורית היא לא אחת מהצורות לעיל אבל אפשר להגיע לצורה רצויה בעזרת החלפת משתנים.

בדרך כלל, אין שיטה איזו החלפת משתנים לעשות אבל יש מקרים בהם יש החלפת משתנים שיטתית.

1) משוואות הומוגניות: פונקציה $f(x,y)$ היא הומוגנית מסדר n אם לכל λ מתקיים $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$

תהיה דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ היא הומוגנית אם $M(x,y), N(x,y)$ הומוגניות מאותו סדר.

בהינתן משוואה הומוגנית, מבצעים החלפת משתנים $v=\frac{y}{x}$ ואז $dy=vdx+xdv$ ומקבלים משוואה

$$P(x,v)dx+Q(x,v)dv=0$$

הניתנת להפרדת משתנים.

דוגמה: $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$ זו משוואה הומוגנית מסדר 2. נציב $v=\frac{y}{x}$ ונקבל

$$(3xvx+(vx)^2)dx+(x^2+xvx)(vdx+xdv)=0$$

מפשטים ומקבלים

$$x^2(2v^2+4v)dx+x^3(1+v)dv=0$$

פותרים בעזרת הפרדת משתנים ומקבלים $x^4v(v+2)=C$

מציבים $y=vx$ ומקבלים $x^3y\left(\frac{y}{x}+2\right)=C$

כלומר $x^2y^2+2x^3y=C$.

(7)

3.6.08
ג׳ אדר

אחר ההרצאה נדבר על תחומי קיום ואז נוכל לפתור חלק מתרגול 3.
היום נסיים עם משוואות מסדר ראשון

משוואות מסדר ראשון

① משוואות מדויקות
② גורם אינטגרציה
③ משוואות ליניאריות
④ החלפת משתנים

① משוואות הומוגניות

② משוואות מהצורה $(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(a_2x+b_2y+c_2)\,dy=0$
כאשר a_i,b_i,c_i קבועים.

אינטואיציה: היינו רוצים לבצע החלפת משתנים מהצורה

$$\begin{cases} x=\tilde{x}+h \\ y=\tilde{y}+k \end{cases}$$

כך שהקבועים c_1,c_2 "יעלמו" ונקבל משוואה הומוגנית מסדר ראשון. מתברר שזה אפשרי אם $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. במקרה הזה, ניקח $(x=h,\ y=k)$ פתרון של מע׳ המשוואות

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

ונעשה החלפת משתנים כמתואר למעלה. נקבל משוואה הומוגנית

$$(a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y})\,d\tilde{x}+(a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y})\,d\tilde{y}=0$$

אם $a_1b_2-a_2b_1=0$ אז קיים α כך ש- $\binom{a_2}{b_2}=\alpha\binom{a_1}{b_1}$ ואז המשוואה היא מהצורה

$$(a_1x+b_1y+c_1)\,dx+(\alpha(a_1x+b_1y)+c_2)\,dy=0$$

אז נעשה החלפת משתנה $v=a_1x+b_1y$ ונקבל משוואה מהצורה $P(x,v)\,dx+Q(x,v)\,dv=0$ הניתנת להפרדת משתנים.

דוגמא: שאלה 1ב׳ בתרגול מס׳ 2.

③ משוואת ברנולי: בהינתן המשוואה $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$

נוכל לרשום אותה בצורה $y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{-n+1}P(x)+Q(x)$. נסמן

נציב $V=y^{-n+1}$ ואז $\frac{dv}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ ולכן

$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{dv}{dx}$ ולכן המשוואה תהפוך ל-

$\frac{1}{-n+1}\cdot\frac{dv}{dx}=P(x)V+Q(x)$ ואם נגדיר $\tilde{P}(x)=P(x)(-n+1)$, $\tilde{Q}(x)=Q(x)(-n+1)$

נקבל $\frac{dv}{dx}=\tilde{P}(x)V+\tilde{Q}(x)$ וזו משוואה לינארית.

דוגמה: נתונה המשוואה $y'=y^2$. עבור $y\neq 0$ נרשום

אותה בצורה $y^{-2}y'=1$. ונעשה החלפת משתנים $V=y^{-1}$

ונקבל משוואה $\frac{dv}{dx}=-1$ $\Leftarrow$ $V=-x+C$

$\Leftarrow$ $y=\frac{1}{-x+C}$ וזה אכן הפתרון שאינו מהרצאה.

④ משוואת ריקטי (Riccati): בהינתן משוואה מהצורה

$$\frac{dy}{dx}=q_1(x)+q_2(x)y+q_3(x)y^2$$

אין שיטה כללית למציאת פיתרון, אבל בהינתן פיתרון y_1 נוכל

לעשות הצבה $V=\frac{1}{y-y_1}$ ונקבל:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{(y-y_1)^2}(y'-y_1')=$$

$$=-\frac{1}{(y-y_1)^2}\left[q_1+q_2y+q_3y^2-q_1-q_2y_1-q_3y_1^2\right]=$$

$$=-\frac{1}{(y-y_1)^2}\left[q_2(y-y_1)+q_3(y^2-y_1^2)\right]=$$

$$=-\frac{y-y_1}{(y-y_1)^2}\left[q_2+q_3(y+y_1)\right]$$

נרצה לבטא הכל ע"י V. מתקיים $V=\frac{1}{y-y_1}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{V}=y-y_1$

$\Leftarrow$ $y=\frac{1}{V}+y_1$. לכן נקבל

$$\frac{dV}{dx}=-V\left(q_2+q_3\left(\frac{1}{V}+y_1+y_1\right)\right)=$$

$$=-(q_2V+q_3+2y_1q_3V)=-q_3-V(q_2+2q_3y_1)$$

וזו משוואה לינארית.

דוגמה: לפתור את המשוואה $y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2$

בהינתן פיתרון $y_1(x)=\frac{1}{x}$.

פיתרון: נציב $V=\frac{1}{y-y_1}$ ונקבל $\frac{dv}{dx}=-1+\frac{1}{x}V-2\cdot\frac{1}{x}\cdot V$

סומר $\frac{dv}{dx} = -1 - \frac{1}{x}v$. נפתור לפי הנוסחה לפתרון משוואה לינארית:

$$v(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{1}{x}dx}(-1)dx + c\right) =$$
$$= e^{-\ln x}\left(-\int e^{\ln x}dx + c\right) =$$
$$= \frac{1}{x}\left(-\int x\,dx + c\right) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$$

לכן $\frac{1}{y-\frac{1}{x}} = \frac{c}{x} - \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{c}{x} - \frac{x}{2}}$.

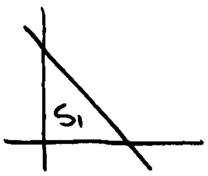
פתרונות סינגולריים ומעטפת

בהינתן משפחה $\{f(x,y,c)=0\}$ של פונקציות עם פרמטר c, המהוות פתרון של משוואה דיפרנציאלית ממעלה ראשונה, גם המעטפת של המשפחה מהווה פתרון של אותה משוואה.

כיצד מוצאים את המעטפת?

בהינתן ההצגה הסתומה של המשפחה בצורה $f(x,y,c)=0$ פותרים את המשוואה $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$ ורק מחלצים את c ומציבים בפונקציה.

דוגמה: מצאו מעטפת של משפחת הישרים עבורם השטח S_1 הוא קבוע c.



פתרון: נקודות החיתוך של הישר עם הצירים הן $(a,0)$, $(0,b)$ (השטח $ab=2c$) אז
משוואת הישר היא $y=(-\frac{b}{a})x+b$ ומכיוון ש- $a=\frac{2c}{b}$
נקבל משוואה $y=-\frac{b^2}{2c}x - b$ אבל נוכל להציג את אוסף הישרים כמשפחה חד-פרמטרית מפרמטר b המתאימה למשוואה הסתומה $y+\frac{b^2}{2c}x - b = 0$, כדי למצוא את משוואת המעטפת נגזור לפי b ונקבל $\frac{b}{c}x - 1 = 0$
$\Rightarrow x=\frac{c}{b}$ נציב במשוואה המקורית ונקבל $y=-\frac{b^2}{2c}\cdot\frac{c}{b} + b = \frac{b}{2}$
בסה"כ קיבלנו $x=\frac{c}{b}$ $y=\frac{b}{2} \Rightarrow xy=\frac{c}{2}$
לכן משוואת המעטפת היא $xy=\frac{c}{2}$, כלומר היפרבולה.
וזו התשובה לשאלה עם התחלה.

⑨ 10.6.08
ת' מד"ר

היום נלמד את ההוכחה הקלאסית של משפט הקיום והיחידות של פיקארד ואולי נוסיף כמה דברים יותר פרקטיים.

משפט הקיום והיחידות של פיקארד

<u>הבעיה</u>: נתון תחום פתוח $D \subseteq \mathbb{R}^n$ שאת הנקודות בו מייצגים בצורה $(t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ וכן נתונה פונקציה $f\in C(D,\mathbb{R}^{n-1})$ (רציפה).
נתון גם קטע $I\subseteq\mathbb{R}$. רוצים למצוא פונקציה $y\in C^1(I,\mathbb{R}^{n-1})$ (גזירה ברציפות) כך ש-

(א) לכל $t\in I$, $(t,y(t))\in D$

(ב) לכל $t\in I$, $y'(t)=f(t,y(t))$

<u>בעיית תנאי התחלה</u>: בנוסף לתנאים לעיל, רוצים שיתקיים $y(t_0)=y_0$ עבור $t_0\in I$ מסוים, כך ש- $(t_0,y_0)\in D$.

<u>הצגה שקולה</u>: בתנאים לעיל, רוצים למצוא $y\in C(\bar{I},\mathbb{R}^{n-1})$ (רציפה) כך שלכל $t\in I$ מתקיים
$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))ds \quad (*)$$
למה זה שקול? קודם כל, ברגע ש-y מקיימת (*) אז היא דבר גזירה ברציפות (כי f רציפה) וכמובן $y(t_0)=y_0$. מצד שני, y כזאת גם מקיימת את (ב)...

<u>הגדרה</u>: עבור $K\subseteq D$ קומפקטית, f תיקרא ליפשיצית ב-K אם קיים קבוע L_K כך שלכל $(t,y_1),(t,y_2)\in K$ מתקיים
$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le L_K|y_1-y_2|$$

<u>משפט הקיום והיחידות</u>: נתונה הקבוצה הקומפקטית $\Gamma=[t_0-\eta,t_0+\eta]\times\overline{B(y_0,\alpha)}$. נסמן $M=\max_{(t,y)\in\Gamma}|f(t,y)|$ (המקסימום קיים כי f רציפה ו-Γ קומפקטית). אם מתקיים $M\eta<\alpha$ והפונקציה f ליפשיצית ב-Γ אז <u>קיים</u> פתרון <u>יחיד</u> לבעיית תנאי ההתחלה בתחום $I=(t_0-\eta,t_0+\eta)$.

הוכחת הקיום:

① נסמן ב- Y את הקבוצה

$$Y=\{\phi\in C^1(\bar{I},\mathbb{R}^{n-1}) : \forall t\in I,\ \phi(t)\in\overline{B(y_0,\alpha)}\}$$

(בעצם מעניינות אותנו פונקציות שלא יוצאות מהכדור הנ"ל).

נגדיר על Y העתקה $G\phi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\phi(s))\,ds$

(אם נמצא ל- G כי נקודת שבת אז נסיים)

נשים לב שהטווח של G הוא ב- Y. אכן, אם $\phi\in Y$, אז לכל $s\in\bar{I}$ מתקיים $(s,\phi(s))\in\Gamma$ ולכן $|f(s,\phi(s))|\le M$ ולכן

$$|G\phi(t)-y_0| = \left|\int_{t_0}^{t}f(s,\phi(s))\,ds\right| \le \int_{t_0}^{t}|f(s,\phi(s))|\,ds \le$$

$$\le M\int_{t_0}^{t}1\cdot ds = M|t-t_0| \le \underline{M\eta} < \alpha$$

ולכן $G\phi(t)\in\overline{B(y_0,\alpha)}$ ולכן $G\phi\in Y$.

② ניקח $\phi\in Y$ כלשהי ונתבונן בסדרה $\{\phi, G\phi, G^2\phi, \dots\}$

נראה שסדרה זו היא מתכנסת וגבולה שלה הוא נקודת שבת של G, כלומר פתרון של בעיית תנאי ההתחלה.

(נשים לב שההוכחה הזו גם נותנת לנו דרך למצוא את הפתרון - בוחרים $\phi\in Y$ כלשהי ומתחילים להפעיל עליה את G שוב ושוב. הסדרה שמתקבלת היא סדרת קירובים לפתרון האמיתי - כך גם פותרים בחיים האמיתיים).

③ נשים לב שלכל $\phi,\psi\in Y$ מתקיים,

$$|G\phi(t)-G\psi(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}f(s,\phi(s))\,ds-\int_{t_0}^{t}f(s,\psi(s))\,ds\right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t}|f(s,\phi(s))-f(s,\psi(s))|\,ds \le$$

$$\le L_\Gamma\int_{t_0}^{t}|\phi(s)-\psi(s)|\,ds \le$$

f ליפשיצית

$$\le L_\Gamma\|\phi-\psi\|\cdot\int_{t_0}^{t}1\cdot ds =$$

נורמת סופרמום ב- I

$$= L_\Gamma\|\phi-\psi\|\cdot|t-t_0|$$

4 באופן דומה

$$|G^2\phi(t) - G^2\psi(t)| = |G(G\phi(t)) - G(G\psi(t))| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L_r |G\phi(s) - G\psi(s)| ds \le$$

כתאוות G הואם - ψ

$$\le \int_{t_0}^{t} L_r \cdot L_r \|\phi - \psi\| |s-t_0| ds =$$

שמשבשלב הקודם

$$= L_r^2 \|\phi - \psi\| \int_{t_0}^{t} |s-t_0| ds =$$

$$= L_r^2 \|\phi - \psi\| \frac{|t-t_0|}{2}$$

5 נמשיך באותה צורה באינדוקציה ונקבל

$$|G^m\phi(t) - G^m\psi(t)| \le L_r^m \|\phi - \psi\| \cdot \frac{|t-t_0|^m}{m!}$$

לכל $t \in I$ מתקיים $|t-t_0| \le \eta$ ולכן נקבל

$$\|G^m\phi - G^m\psi\| \le L_r^m \frac{\eta^m}{m!} \|\phi - \psi\|$$

[בכיתה אמרנו שעבור m מספיק גדול $L_r^m \frac{\eta^m}{m!} < 1$ ולכן G^m מכווצת $\Rightarrow$ יש לה נקודת שבת $\Rightarrow$ ל- G יש נקודת שבת. אנחנו נפעל באופן שונה.]

6 נוכיח שלכל $\phi \in \Psi$, הסדרה $\{\phi, G\phi, G^2\phi, ...\}$ היא סדרת קושי. כדי להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיים m_0 כך שלכל $m_1, m_2 > m_0$ מתקיים $\|G^{m_1}\phi - G^{m_2}\phi\| < \varepsilon$

נבחר m_0 מספיק גדול כך שיתקיים $L_r^{m_0} \cdot \frac{\eta^{m_0}}{m_0!} (2\alpha) < \varepsilon$ (זה אפשרי כי סדרה כזו שואפת לאפס - כי עצרת מנצחת חזקה). לכל $m_1, m_2 > m_0$ מתקיים

$$\|G^{m_1}\phi - G^{m_2}\phi\| = \|G^{m_0}(G^{m_1-m_0}\phi) - G^{m_0}(G^{m_2-m_0}\phi)\| \le$$

$$\le L_r^{m_0} \|G^{m_1-m_0}\phi - G^{m_2-m_0}\phi\| \cdot \frac{\eta^{m_0}}{m_0!} =$$

שלב (5) עם $\phi = G^{m_1-m_0}\phi$, $\psi = G^{m_2-m_0}\phi$

$$= L_r^{m_0} \cdot \frac{\eta^{m_0}}{m_0!} \sup_{t\in I} |G^{m_1-m_0}\phi(t) - G^{m_2-m_0}\phi(t)| \le$$

הגדרה

$$\le L_r^{m_0} \frac{\eta^{m_0}}{m_0!} (2\alpha) < \varepsilon$$

מכיוון ש- $G^{m_1-m_0}\phi(t) \in \overline{B(y_0,\alpha)}$, $G^{m_2-m_0}\phi(t) \in \overline{B(y_0,\alpha)}$ המרחק ביניהן $\le 2\alpha$

לכן הסדרה היא סדרת קושי.

מכיוון ש-Y הוא מרחב שלם (תת מרחב סגור של מרחב שלם)
הסדרה $\{\phi, G\phi, G^2\phi, \dots\}$ מתכנסת לגבול $\phi_0 \in Y$.
לסיום, מכיוון ש-G רציפה (כי היא מכווצת) מתקיים

$$G\phi_0 = G(\lim_{m\to\infty} G^m \phi) = \lim_{m\to\infty} G(G^m\phi) = \lim_{m\to\infty} G^{m+1}\phi = \phi_0$$

ולכן ϕ_0 נקודת שבת של G ונובע שהיא הפיתרון של בעיית תנאי ההתחלה וסיימנו. ☺

<u>דוגמה קטנה ולא פורמלית</u>: נמצא תחום קיום של הפתרונות של
$\frac{dy}{dx} = y^2 + y^4$, $y(0) = 1$.

אבחנה 1: כל פיתרון הוא פונקציה מונוטונית.

אבחנה 2: אם נחליף את המשוואה במשוואה אחרת בה הנגזרת קטנה יותר, עם אותם תנאי התחלה אז תחום הקיום של המשוואה המקורית מוכל בתחום הקיום של החדשה.

נחליף במשוואה $\quad y = (c-3x)^{-\frac{1}{3}} \Leftarrow \frac{dy}{dx} = y^4$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל $\quad y = (1-3x)^{-\frac{1}{3}} \Leftarrow C = 1$
ותחום הקיום שלה $(-\infty, \frac{1}{3})$.

אבחנה 3: אם נחליף את המשוואה במשוואה אחרת בה הנגזרת גדולה יותר, עם אותם תנאי התחלה אז תחום הקיום של המשוואה המקורית מכיל את תחום הקיום של החדשה.

רק צריך לחקור למה של חיוביים ושליליים זה מסתדר.

17.06.08
ת' מד"ר

בוחן שבוע הבא ביום שני - של תרגילים 1-4
מהיכרות של נתן עם המרצה - הוא אוהב שאלות תיאוריה.

אדישות קטע קיום מקסימלי

תרגיל: תהי $f(t,y):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ פונקציה והטוריות גזירה ברציפות (לפי שני המשתנים). תהי $U\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחה וחסומה. נניח שלכל $y\in\partial U$ ולכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(t,y)=0$. נתבונן בפתרון המשוואה $y'=f(t,y)$. אם קיים $t_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $y(t_0)\in U$ אז תחום הקיום של הפתרון הוא כל הישר. (זאת דוגמה לשאלה תיאורטית)

פתרון: ראשית, נשים לב ש- $f(t,y)$ ליפשיצית. אכן, תהי K קומפקטית. הפונקציה $\left|\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)\right|$ רציפה ב-K ולכן מקבלת מקסימום שאותו נסמן ב-M_K. כעת, לכל $(t,y_1),(t,y_2)\in K$ מתקיים (לפי משפט הערך הממוצע)

$$\frac{|f(t,y_1)-f(t,y_2)|}{|y_1-y_2|}=\left[\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)\right](y_3)\le M_K$$

ולכן $f(t,y)$ ליפשיצית ב-K עם קבוע ליפשיץ M_K.
[הערה: פורמלית, כדי להבטיח $y_3\in K$ צריך להחליף את K בכדור סגור].

נניח בשלילה שתחום הקיום של הפתרון הוא לא כל הישר. אזי בה"כ קיים t_1 כך שהפתרון "נקטע" ב-t_1. ולכן לפי משפט האינטרוול המקסימלי $\lim_{t\nearrow t_1}|y(t)|=\infty$. מכיוון ש- $y(t_0)\in U$, ממשפט ערך הביניים נובע שקיים t_2 כך ש- $y(t_2)\in\partial U$.
כעת, נשים לב שהפונקציה הקבועה $y(t)\equiv y(t_2)$ הינה פתרון של המשוואה $y'=f(t,y)$ עם תנאי התחלה $y(t_2)$ [נגזרתו היא 0 וזה מתאים כך ש- $f(t,y(t_2))=0$ לכל $t\in\partial U$]. לכן, לפי משפט היחידות פתרון זה מתלכד עם הפתרון המקורי. בסתירה לכך שעבור הפתרון המקורי $y(t_0)\in U$.

תרגיל: הערך תחום קיום מקסימלי של פתרון המשוואה $y' = y^4 + y^2 + 1$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1$.

פתרון: נזכור שקצה תחום הקיום המקסימלי הוא המקום "הקרוב ביותר" בו הפתרון שואף לאינסוף. מכיוון שאנחנו הפתרון מונוטוני, אז אם נחליף אותו בפתרון המשוואה

$$\begin{cases} y' = g(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

כאשר $0 \le g(x,y) \le y^4 + y^2 + 1$ אז תחום הקיום של פתרון המשוואה המקורית מוכל בתחום הקיום של פתרון המשוואה החדשה. נחליף במשוואה $y' = y^2 + 1$. ונפתור אותה

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2+1} \Rightarrow x = \arctan y + c$$

נציב תנאי ההתחלה $y(0) = 1$ ונקבל $x + \frac{\pi}{4} = \arctan y$

אבל $y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$. תחום הקיום הוא $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

אבל אז תחום הקיום של פתרון המשוואה המקורית מוכל בתחום זה.

תרגיל: תהי $f(t,y): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות לפי שני המשתנים. נסמן ב- $y(t; \tau, x)$ את פתרון בעיית תנאי ההתחלה $y' = f(t,y)$ עם תנאי התחלה $y(\tau) = x$.

הראו שקיים $\bar{t} > 0$ וקיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^m$ של 0 כך שמתקיים:

(1) לכל $x \in U$ הקטע $[0, \bar{t}]$ מוכל באינטרוול הקיום המקסימלי של $y(t; 0, x)$

(2) לכל $s \in [0, \bar{t}]$ ההעתקה $x \mapsto \Phi_s(x) = y(s; 0, x)$ מעתיקה את U מאופן חח"ע לקבוצה פתוחה U_s [כאשר $y(s; 0, x)$ הוא הערך של הפתרון $y(t; 0, x)$ בנקודה s]

(3) ההעתקה ההפוכה $\Phi_s^{-1}: U_s \to U$ היא רציפה.

פתרון: תחילה נזכיר את המשפט של יחידות מיתם ושינוי תנאי ההתחלה: תהיינה $f(t,y)$ ומשוואה כמתואר בתרגיל.

(12) נסמן ב- $I^{max}_{\tau,x} = (t_{min}(\tau,x),\ t_{max}(t,x))$ את אינטרוול הקיום המקסימלי של הפתרון $y(t;\tau,x)$. אזי:

א) $\liminf\limits_{(\tau,x)\to(t_0,y_0)} t_{max}(\tau,x) \ge t_{max}(t_0,y_0)$

ב) $\limsup\limits_{(\tau,x)\to(t_0,y_0)} t_{min}(\tau,x) \le t_{min}(t_0,y_0)$

} ארגומנט שאם $[a,b] \subseteq I^{max}_{t_0,y_0}$ אז $[a,b] \subseteq I^{max}_{\tau,x}$ אם $|(\tau,x)-(t_0,y_0)|$ קטן מספיק.

ג) אם $[a,b] \subseteq I^{max}_{t_0,y_0}$ אז הפתרונות $y(t;\tau,x)$ מתכנסים במ"ש ל- $y(t;t_0,y_0)$ בקטע $[a,b]$ כאשר $(\tau,x) \to (t_0,y_0)$

עכשיו נוכל לפתור את התרגיל.

א) נפעיל את המשפט עבור פתרון המשוואה עם תנאי התחלה $y(0,0)$. והי $\bar{t} \in I^{max}_{0,0}$. אזי $[0,\bar{t}] \subseteq I^{max}_{0,0}$ ולכן לפי המשפט אם $|(\tau,x)-(0,0)|$ קטן מספיק אז $[0,\bar{t}] \subseteq I^{max}_{\tau,x}$. בפרט, קיימת סביבה U של 0 רק שאם $x \in U$ אז $[0,\bar{t}] \subseteq I^{max}_{0,x}$ כנדרש.

ב) נראה שזה העתקה חח"ע. נניח שמתקיים $\Phi_s(x_1) = \Phi_s(x_2)$. נתבונן בפתרון בעיית תנאי ההתחלה $y(s) = \Phi_s(x_1)$. הוא שווה בנקודה s לפתרון בעיית תנאי ההתחלה $y(0) = x_1$ שתחום הקיום שלו מכיל את $[0,s]$ ולכן לפי משפט היחידות הפתרונות מתלכדים. בפרט, תחום הקיום של בעיית תנאי ההתחלה $y(s) = \Phi_s(x_1)$ מכיל את הקטע $[0,s]$ והפתרון מקיים $y(0) = x_1$. נחזור על אותו תהליך עבור $y(s) = \Phi_s(x_2)$ ונקבל שפתרון זה מוגדר גם הוא בקטע $[0,s]$ (לפחות) ומקיים $y(0) = x_2$. אבל $\Phi_s(x_1) = \Phi_s(x_2)$ ולכן מדובר באותו פתרון. לכן $x_1 = x_2$.

נראה ש- U_s פתוחה. תהי $\Phi_s(x_0) = y(s;0,x_0) \in U_s$. כמו קודם, נתבונן בבעיית תנאי ההתחלה עם התנאי $y(s) = \Phi_s(x_0)$ ונפעיל על הפתרון הזה את המשפט. מכיוון ש- $[0,s] \subseteq I^{max}_{s,\Phi_s(x_0)}$, נקבל שאם $|(\tau,x)-(s,\Phi_s(x_0))|$ קטן מספיק אז $[0,s] \subseteq I^{max}_{\tau,x}$ וכן הפתרונות $y(t;\tau,x)$ מתכנסים במ"ש בקטע $[0,s]$ לפתרון $y(t;s,\Phi_s(x_0))$. בפרט, קיימת

סביבה V של $\Phi_s(x_0)$ כך שאם $y_1 \in V$ אז
$[0,s] \subseteq I^{max}_{s,y_1}$ וכן הערך של הפתרון $y(t;s,y_1)$
בנקודה 0 מוכל ב-U [$x_0 \in U$ ו-U פתוחה לכן אם
x_0' מספיק קרוב ל-x_0 אז $x_0' \in U$ ומכיוון שהפתרונים
של $y(t;s,y')$ מתכנסים במ"ש לפתרון $y(t;s,\Phi_s(x_0))$
בכל הקטע $[0,s]$ והערך של הפתרון בנקודה 0 הוא x_0
אז עבור y_1 מספיק קרוב ל-$\Phi_s(x_0)$, הערך של הפתרון
$y(t;s,y_1)$ בנקודה 0 יהיה מספיק קרוב ל-x_0]. לסיכום,
קיימת סביבה V של $\Phi_s(x_0)$ כך שלכל $y_1 \in V$ נוכל
לרשום בצורה $\Phi_s(x_1)$ עבור $x_1 \in U$ מסוים (שהוא הערך
של $y(t;s,y_1)$ בנקודה 0) לכן $y_1 \in U_s$ ולכן
U_s פתוחה.

24.06.08

ת' מאצ'

פתרון משוואה לינארית הומוגנית*

* כאן המילה "הומוגנית" מתייחסת לכך שאין מקדם חופשי.

<u>הגדרה</u>: פונקציה מטריצונית $t \mapsto A(t) \in Hom(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ תיקרא רציפה אם כל איברי המטריצה $\{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{m}$ רציפים.

מערכת משוואות לינאריות היא משוואה מהצורה $y'(t)=A(t)y(t)+b(t)$ כאשר $A(t)$ רציפה בקטע פתוח I, $b \in C(I, \mathbb{R}^m)$ ומחפשים פתרון $y \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$.

בעיית תנאי התחלה מתקבלת ע"י הוספת התנאי $y(t_0)=y_0$ עבור $t_0 \in I$.

משוואה לינארית מסדר m היא משוואה מהצורה

$$z^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)z^{(m-1)}(t)+\dots+a_1(t)z'(t)+a_0(t)z(t)=r(t)$$

כאשר $a_i(t) \in C(I)$.

בעיית תנאי התחלה מתקבלת ע"י הוספת התנאי $z^{(i)}(t_0)=z_i$ ל-$0 \le i \le m-1$

<u>טענה</u>: כל משוואה לינארית מסדר m אפשר להפוך למערכת של m משוואות ע"י בחירת

$$y(t) = (z(t), z'(t), z^{(2)}(t), \dots, z^{(m-1)}(t))$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{m-1}(t) \end{pmatrix}$$

$$b(t) = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ r(t))$$

ומהמשוואה נובע שמתקיים $y'(t)=A(t)y(t)+b(t)$

<u>משפט הקיום והיחידות</u>: לבעיית תנאי ההתחלה לעיל קיים פתרון יחיד המוגדר בכל הקטע I.

<u>הגדרה</u>: המשוואה תיקרא הומוגנית אם $\gamma(t)=0$ (או $b(t)=0$).

<u>משפט</u>: מרחב הפתרונות של משוואה הומוגנית מסדר m הוא מרחב וקטורי ממימד m מעל $\mathbb{C}$.

<u>מסקנה</u>: כדי למצוא את כל הפתרונות צריך למצוא m פתרונות בת"ל.

<u>שאלה</u>: בהינתן m פתרונות $y_1,\dots,y_m$ כיצד נבדוק האם הם תלויים?
<u>תשובה</u>: נתבונן במטריצה הבאה שנקראת הוורנסקיאן (Wronshian) של המערכת:

$$W(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & & y_m'(t) \\ y_1^{(2)}(t) & y_2^{(2)}(t) & & y_m^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(t) & y_2^{(m-1)}(t) & & y_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

<u>טענה</u>: אם קיים t_0 כך ש- $\det W(t_0)=0$ אז לכל t מתקיים $\det W(t)=0$

<u>הוכחה</u>: אם $W(t_0)=0$ אז עמודות המטריצה $W(t_0)$ הן תלויות ליניארית. כלומר קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ כך ש-

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(t_0)+\dots+\lambda_m y_m(t_0)=0 \\ \lambda_1 y_1'(t_0)+\dots+\lambda_m y_m'(t_0)=0 \\ \vdots \\ \lambda_1 y_1^{(m-1)}(t_0)+\dots+\lambda_m y_m^{(m-1)}(t_0)=0 \end{cases}$$

נתבונן בפונקציה $y_0(t)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i(t)$. $y_0(t)$ היא פתרון של המשוואה (כי היא צירוף ליניארי של פתרונות) והיא מקיימת תנאי התחלה $y_0(t_0)=0, y_0'(t_0)=0, \dots, y_0^{(m-1)}(t_0)=0$. אולם מכיוון שהמשוואה היא הומוגנית, גם $y\equiv0$ פתרון עם אותו תנאי התחלה. לכן ממשפט היחידות $y_0\equiv0$, כלומר $\sum\lambda_i y_i(t)=0$ לכל t לכן העמודות של $W(t)$ תלויות ליניארית לכל t ולכן

העמודות של $W(t)$ תלויות לינארית לכל t ולכן

$\det W(t)=0$ לכל t.

מסקנה: או ש- $\det W(t)=0$ לכל t וכל הפתרונות בת"ל או ש $\det W(t)=0$ לכל t אז הפתרונות תלויים לינארית.

תרגיל: נתונה במשוואה $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=0$ כאשר $p(t), q(t)$ רציפות ב- (a,b). יהיו $y_1(t), y_2(t)$ פתרונות בת"ל בקטע. אזי:

(א) ל- $y_1(t), y_2(t)$ אין נקודת קיצון משותפת

(ב) בין כל שני אפסים עוקבים של $y_1(t)$ (משוואה ראשונה) ויש בדיוק אפס אחד של $y_2(t)$.

פתרון:

(א) נניח שיש נקודת קיצון משותפת t_0 אזי $y_1'(t_0)=y_2'(t_0)=0$ אבל $\underbrace{\text{הוורונסקיאן מתאפס}}_{\text{הכוונה לדטרמיננטה כמובן}}$ ב- t_0 בסתירה לכך שהפתרונות בת"ל.

(ב) נסמן שני אפסים עוקבים של $y_1(t)$ ב- t_1, t_2. נתבונן בקטע (t_1,t_2). נתבונן בפונקציה $z(t)=\frac{y_2(t)}{y_1(t)}$ מוגדרת ואפילו $z(t)=C^1((t_1,t_2))$. מתקיים

$$z'(t)=\frac{y_2'(t)y_1(t)-y_2(t)y_1'(t)}{(y_1(t))^2}$$

ולכן לא מתאפס באף t כי המונה הוא הדטרמיננטה של הוורונסקיאן ולכן לפי משפט ערך הביניים עבור z', הפונקציה $z(t)$ היא מונוטונית. נניח בשלילה ש- $y_2(t)$ לא מתאפסת ב- (t_1,t_2). אזי לפי משפט ערך הביניים היא לא משנה סימן בקטע (וגם לא מתאפסת בקצוות כי אחרת הוורונסקיאן מתאפס). אזי נניח בה"כ ש- $y_2(t)>0$ ב- (t_1,t_2) ובפרט קיים m כך ש- $y_2(t)>m$. כעת, $\lim_{t\searrow t_1} z(t)=\lim_{t\nearrow t_2} z(t)=\infty$ (כי המונה $\geq m$ והמכנה $\to 0$)

אבל $z(t)$ לא מונוטונית ב- (t_1,t_2) וזו סתירה.
נניח ש- $y_2(t)$ יותר מאפס אחד בקטע. אז מאותו
שיקול כמו קודם יש אפס של $y_1(t)$ בקטע,
בסתירה לכך ש- t_1, t_2 היו אפסים עוקבים. לכן
ל- $y_2(t)$ יש אפס יחיד בקטע (t_1, t_2).

15 1/7/08
ת' מד"ר

* פונקציה גזירה על קטע פתוח שהנגזרת שלה חסומה שם ניתנת להרחבה לפונקציה רציפה בקטע הסגור.

* שאלה 1 מהתרגיל:

$$(z^{(m)} + a_{m-1} z^{(m-1)} + \dots + a_0(t) z = 0$$

ניקח את המקדמים $a_0, \dots, a_{m-1}$ ונרחיב אותם ל- $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ באופן רציף (משל ע"י המשכה קבועה) ונגדיר תנאי התחלה ברמוז $y(\frac{1}{2}) =$. אז לפי משפט הקיום והיחידות יש פתרון יחיד ב- $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. אבל $\sin\frac{1}{x}$ לא רציף ב-0 אז זה בוודאי לא יכול להיות הפתרון....

* שאלה 11 מהתרגיל:

$$y'(t) = \sqrt{1+t^2y(t)^2} + t^2 \sin t$$

אם למשל $|y(t)| \xrightarrow[t\to t_0]{} \infty$ נטען שהפונקציה שומרת סימן החל ממקום מסוים. נניח בה"כ ש- $y(t)$ חיובית בנקודה כלשהי ושם $y(t) >> t$ (זה אפשרי כי $|y(t)| \to \infty$).

$$y'(t) \geq \sqrt{t^2y(t)^2} + t^2 \sin t = ty(t) + t^2 \sin t$$

אבל $ty(t) >> t^2$ ו- $|t^2 \sin t| \leq t^2$ לכן $y'(t) \geq ty(t) + t^2\sin t > 0$. אז הנגזרת חיובית והפונקציה ממשיכה לעלות.

קצת יותר פורמלי: נניח ש- $\lim_{t\to a} |y(t)| = \infty$. נראה שאם יש $0 < t_0 < a$ שבה $y(t_0) > 100t_0$. נראה שיש סביבה של t_0 שבה הנגזרת חיובית: הפונקציה חיובית ב- t_0 ולכן יש סביבה שבה היא חיובית ושם $\sqrt{t^2y(t)^2} = ty(t)$. לכן

$$y'(t_0) \geq \sqrt{t_0^2 y(t_0)^2} + t_0^2 \sin t_0 = t_0 y(t_0) + t_0^2 \sin t_0$$
$$\geq 100t_0^2 + t_0^2 \sin t_0 \geq 99t_0^2 > 0$$

אותו טיעון עובד גם אם $y(t_0) > 99t_0$. ולכן אם $y(t_0) > 99t_0$ אז $y(t_0) > 100t_0$ יש סביבה סביב t_0 שבה הנגזרת חיובית ממש ושם הפונקציה עולה. אז הנכון משהו (נקודתי). אנחנו רוצים להראות שלכל $t > t_0$ $y(t) > 100t_0$. אם יש נקודה x_0 שבה $y(x_0) < 100t_0$

אז יש נקודה t_1 שבה $100t_0 > y(t_1) > 99t_0$ והנגזרת בה שלילית.
אבל ראינו שבסביבה של t_1 שבה הנגזרת חיובית וזו סתירה.
לכן במקרה זה אם $|y(t)| \to \infty$ אז בהכרח קיים הגבול של $y(t)$ במובן הרחב - כלומר החל מנקודה מסויימת y הוא שומר סימן.

ועכשיו לשיעור המתוכנן:

פתרון משוואות ליניאריות הומוגניות במקדמים קבועים

תזכורת: בהינתן משוואה ליניארית הומוגנית מסדר m, מרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי ממימד m. לכן כדי למצוא את הפתרונות נחפש m פתרונות בת"ל.

סימון: עבור משוואה במקדמים קבועים $z^{(m)}+a_{m-1}z^{(m-1)}+\dots+a_1z'+a_0z=0$ נרשום את המשוואה בצורה אופרטורית $(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)y=0$ כאשר D הוא אופרטור הגזירה.

נתייחס לביטוי כאל פולינום ב-D ונפרק אותו לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{C}$:
$$D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_m)$$
ואז נרשום את המשוואה בצורה
$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_m)y=0 \quad (**)$$
כאשר הכפל מסמן הרכבת אופרטורים.

לצורה (**) של המשוואה קוראים **משוואה אופיינית** ולשורשים $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ קוראים **שורשים אופייניים**.

דוגמה: בהינתן המשוואה $y^{(3)}-y^{(2)}-4y'+4y=0$ נרשום בצורה אופרטורית: $(D^3-D^2-4D+4)y=0$. נפרק לגורמים ונקבל $(D-1)(D-2)(D+2)y=0$. נבדוק שזה אכן שקול למשוואה המקורית:
$$(D-1)(D-2)[(D+2)y]=(D-1)(D-2)[y'+2y]=$$
$$=(D-1)[y''+2y'-2y'-4y]=(D-1)(y''-4y)=y'''-y''-4y'+4y$$

זה אק שקול למשוואה המקורית.

אז איך פותרים את המשוואה?

(א) אם $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_m$ וכולם ממשיים אז הפתרונות

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \; y_2 = e^{\lambda_2 t}, \; \dots, \; y_m = e^{\lambda_m t}$$

הם פתרונות בת"ל למשוואה.

<u>הוכחה</u>: ראשית נראה ש- $e^{\lambda_i t}$ פתרון:

$$(D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \dots + a_1 D + a_0)(e^{\lambda_i t}) =$$

$$= \lambda_i^m e^{\lambda_i t} + a_{m-1}\lambda_i^{m-1} e^{\lambda_i t} + \dots + a_1 \lambda_i e^{\lambda_i t} + a_0 e^{\lambda_i t} =$$

$$= e^{\lambda_i t}(\lambda_i^m + a_{m-1}\lambda_i^{m-1} + \dots + a_1\lambda_i + a_0) = 0$$

כי λ_i שורש אפייני.

אז אלו אכן פתרונות. צריך להראות שהם בת"ל. נתבונן בוורונסקיאן

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_m t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & & \lambda_m e^{\lambda_m t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{m-1} e^{\lambda_2 t} & & \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}$$

כפי שראינו, מספיק לבדוק האם הוורונסקיאן מתאפס בנקודה t_0 מסויימת (נבחר $t_0 = 0$ ונקבל מטריצת ון-דר-מונדה:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_m \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}\right| \neq 0$$

מאפי' אלגברה לינארית הדטרמיננטה שלה אינה מתאפסת אם $\lambda_i \neq \lambda_j$ - $i \neq j$. לכן הפתרונות אכן בת"ל.

(ב) אם השורשים ממשיים ויש שורש λ_i מריבוי k. במקרה זה יש k פתרונות בת"ל $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_i t}$ ושאר הפתרונות כמו קודם.

<u>הוכחה עבור $m=2$</u>: במקרה זה המשוואה היא מהצורה $(D-\lambda)^2 y = 0$

נהפוך אותה למערכת:

$$\begin{cases}(D-\lambda)y=v\\(D-\lambda)v=0\end{cases}$$

נפתור לפי סעיף ג' ונקבל פתרון כללי $v=c_1e^{\lambda t}$. נציב במשוואה הראשונה ונקבל $y'-\lambda y=c_1e^{\lambda t}$. זו משוואה לינארית מסדר ראשון ולכן הפתרון הוא

$$y=e^{\int\lambda dt}\left(\int e^{-\int\lambda dt}c_1e^{\lambda t}dt\right)=e^{\lambda t}\left(\int e^{-\lambda t}c_1e^{\lambda t}dt\right)=$$
$$=e^{\lambda t}(c_1t+c_2)=c_1te^{\lambda t}+c_2e^{\lambda t}$$

נבדוק שהפתרונות $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$ הם בת"ל: נתבונן בוורונסקיאן:

$$\left|\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ te^{\lambda t} & (1+\lambda t)e^{\lambda t}\end{pmatrix}\right|=$$
$$=e^{\lambda t}(1+\lambda t)e^{\lambda t}-te^{\lambda t}\cdot te^{\lambda t}=$$
$$=e^{2\lambda t}(1+\lambda t-\lambda t)=e^{2\lambda t}\neq0$$

⑥ אם יש שורש מרוכב $\lambda=a+bi$ החישוב שעשינו בסעיף א' עדיין תקף ולכן $e^{\lambda t}=e^{(a+ib)t}=e^{at}\text{cis}\,bt$ פתרון. אנחנו נטען שגם החלק הממשי שלו וגם החלק המדומה שלו הם פתרונות (נטען ש- $e^{at}\sin bt$ ו $e^{at}\sin bt$ הם שני פתרונות.

[לכאורה סתירה כי יודעים כי שניים פתרונות מהדרוש. אבל אם λ שורש של פולינום במקדמים ממשיים אז גם $\bar{\lambda}$ שורש שלו והרי $\bar{\lambda}$ יתן לנו את הפתרונות שתלויים בקודמים, לכן מספר הפתרונות יוצא נכון]

נזכור שעבור פונקציה מרוכבת $y(t)=\text{Re}\,y(t)+i\,\text{Im}\,y(t)$ מתקיים $y'(t)=(\text{Re}\,y(t))'+i(\text{Im}\,y(t))'$ ולכן אחרי שהמקדמים הם ממשיים המשוואה מתפרקת לשתי משוואות:

$$\begin{cases}(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)\,\text{Re}\,y=0\\ i(D^m+a_{m-1}D^{m-1}+\dots+a_1D+a_0)\,\text{Im}\,y=i\cdot0\end{cases}$$

ולכן גם $\text{Re}\,y$ וגם $\text{Im}\,y$ הם פתרונות של המשוואה המקורית ונותר להראות ש- $e^{at}\sin bt, e^{at}\cos bt$ הם בת"ל

(17)

נבדוק את הוורונסקיאן

$$\left|\begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\sin bt \\ e^{at}(-b\sin bt + a\cos bt) & e^{at}(b\cos bt + a\sin bt) \end{pmatrix}\right| =$$

$$= e^{2at}(b\cos^2 bt + a\cos bt\sin bt + b\sin^2 bt - a\sin bt\cos bt) =$$

$$= e^{2at}\cdot b(\cos^2 bt + \sin^2 bt) = be^{2at} \neq 0$$

<u>הערה</u>: אם $\lambda = a+ib$ הוא שורש אופייני אז גם $\bar{\lambda} = a-ib$ הוא שורש אופייני והוא תורם את הפתרונות $e^{at}\cos(-bt), e^{at}\sin(-bt)$ שהם כמובן תלויים לינארית בפתרונות של λ. לכן במסד"ב $\lambda, \bar{\lambda}$ - ב- מתקבלים שני פתרונות בת"ל.

(3) שורש מרוכב מריבוי k - בשיקולים של סעיף ב' ונימוקים גם כאן אנו נקבל פתרונות

$$e^{at}\cos bt,\ e^{at}\sin bt,\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\sin bt,$$
$$\ldots,\ t^{k-1}e^{at}\cos bt,\ t^{k-1}e^{at}\sin bt$$

<u>דוגמה</u>: פתור את המשוואה $y^{(6)}+9y^{(4)}+24y^{(2)}+16y=0$

<u>פתרון</u>: נרשום בצורה אופרטורית: $(D^6+9D^4+24D^2+16D)\,y=0$

נפרק לגורמים: $(D^2+1)(D^2+4)^2\,y=0$ השורשים האופייניים הם $\pm i, \pm 2i, \pm 2i$ לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3\cos 2t + c_4\sin 2t + c_5 t\cos 2t + c_6 t\sin 2t$$

(18) 8/7/08
ת' מד"ר

פתרון מערכות משוואות ליניאריות הומוגניות

<u>בעיה</u>: רוצים למצוא פתרון כללי למשוואה $y'(t) = Ay(t)$ כאשר A מטריצה עם מקדמים קבועים.

<u>מטרה</u>: נרצה להראות ש- $\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ הם "פתרון כללי". לשם כך נראה שהטור מתכנס ושמתקיים $(\exp(At))' = A\exp(At)$.

<u>הערה</u>: נשים לב שאם מטריצה $B = (v_1 \cdots v_m)$ מקיימת את המשוואה $B' = AB$ אז כל v_i מקיים $(v_i)' = Av_i$ [מפני ש- $AB = (Av_1 \ldots Av_m)$] ולכן $v_1, \ldots, v_m$ (העמודות של $\exp(At)$) הם פתרונות של המשוואה.

הפתרונות הם בת"ל כי עבור $t=0$ נקבל $\exp(At) = I$ ולכן הוורונסקיאן (שהוא $\det(\exp(At))$) אינו מתאפס עבור $t=0$ ולכן אינו מתאפס בכלל $\Rightarrow$ הפתרונות הם בת"ל. לכן עמודות המטריצה הן בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה.

נרצה להראות שהטור $\sum \frac{A^k}{k!}$ מתכנס.
רוצים להראות התכנסות איבר-איבר אבל יהיה קל יותר להשתמש בנורמה אחת.

<u>הגדרה</u>: הנורמה האופרטורית של $\mathbb{R}^{m\times m}$ היא

$$\|A\| = \sup_{0 \neq v \in \mathbb{R}^m} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

כאשר $\|v\|, \|Av\|$ מחושבים בנורמה אוקלידית.

<u>טענה</u>: לכל $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ מתקיים $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$

<u>הוכחה</u>: לכל $v_0 \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\|ABv_0\|}{\|v_0\|} = \frac{\|A(Bv_0)\|}{\|Bv_0\|} \cdot \frac{\|Bv_0\|}{\|v_0\|} \le \sup_v \frac{\|Av\|}{\|v\|} \sup_v \frac{\|Bv\|}{\|v\|} = \|A\|\|B\|$$

לכן $\|AB\| = \sup_{V_0} \frac{\|ABV_0\|}{\|V_0\|} \le \|A\|\|B\|$

<u>עובדה</u>: המרחב $\mathbb{R}^{m\times m}$ עם הנורמה האופרטורית הוא מרחב שלם.

<u>טענה</u>: $\sum \frac{A^k}{k!}$ מתכנס

<u>הוכחה</u>: נראה שסדרת הסכומים החלקיים שלו היא סדרת קושי בנורמה האופרטורית. כלומר, צריך להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n_1,n_2>N$ $\left\|\sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{A^k}{k!}\right\|<\varepsilon$. מתקיים

$$\left\|\sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{A^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=n_1}^{n_2}\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| = \sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{1}{k!}\|A^k\| \le \sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{1}{k!}\|A\|^k$$

הטור המספרי $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$ מתכנס (ל-$e^{\|A\|}$) ובפרט סדרת הסכומים החלקיים שלו היא סדרת קושי. כך לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n_1,n_2>N$ $\sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{\|A\|^k}{k!}<\varepsilon$. עבור אותם n_1,n_2 נקבל $\left\|\sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{A^k}{k!}\right\| \le \sum_{k=n_1}^{n_2}\frac{\|A\|^k}{k!}<\varepsilon$ כנדרש.

קיבלנו שהטור מתכנס בנורמה האופרטורית. אבל במרחב ממדי סופי כל הנורמות הן שקולות ולכן הטור מתכנס גם איבר-איבר.

<u>טענה</u>: $\exp(At)$ מקיים את המשוואה $[\exp(At)]' = A\exp(At)$

<u>הוכחה</u>: מכיוון שהטור $\sum\frac{(At)^k}{k!}$ מתכנס בהחלט אפשר לגזור אותו איבר-איבר. ונקבל

$$\frac{d}{dt}(\exp(At)) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(At)^{k-1}kA}{k!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot A = A\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = A\cdot\exp(At)$$

הקדמה לפתרון משוואות לינאריות לא הומוגניות

בעיה: נתונה משוואה

$$(*)\ y^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t)+\dots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=b(t)$$

כיצד נראה פתרון כללי שלה?

פתרון: נתבונן במשוואה ההומוגנית המתאימה

$$(**)\ y^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t)+\dots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=0\ (**)$$

הפתרונות של (**) הם מרחב וקטורי ממימד m אותו נסמן ב- V.

טענה: אם y_1,y_2 שני פתרונות של (*) אז y_1-y_2 פתרון של (**)

הוכחה: נובע מלינאריות אופרטור הגזירה.

טענה: בדומה, אם y_1 פתרון של (*) ו- y_2 פתרון של (**) אז y_1+y_2 פתרון של (*)

מסקנה: מרחב הפתרונות של (*) הוא $y_0+V=\{y_0+y:y\in V\}$ כאשר y_0 פתרון פרטי של (*). לכן כדי לפתור משוואה לינארית אי-הומוגנית מספיק למצוא פתרון אחד שלה.

20

15.7.08

ת' מד"ר

תרגיל 8 נתונה המשוואה

$$z^{(m)} + a_{m-1}(t)\, z^{(m-1)} + \dots + a_0(t)\, z = r(t)$$

כאשר $a_{m-1}(t), \dots, a_0(t), r(t)$ רציפות בקטע $I=(\alpha,\beta)$

יהי $\{z_1(t), \dots, z_m(t)\}$ בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה. יהי

$$W(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_m(t) \\ z_1'(t) & \dots & z_m'(t) \\ \vdots & & \\ z_1^{(m-1)}(t) & \dots & z_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

הורונסקיאן שלהם.

הראו שניתן למצוא פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית שהינו מהצורה $u_1(t) z_1(t) + \dots + u_m(t) z_m(t)$ כאשר $\{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ גזירות ברציפות ב- I ומקיימות את מערכת המשוואות

$$W(t)\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t) \end{pmatrix}$$

__פתרון:__ תחילה נראה שקיימים $\{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ שמקיימים את הדרישות. נשים לב ש- $W(t)$ לא מתאפס באף נקודה (כי היא ורונסקיאן של פתרונות בת"ל). לכן ניתן להגדיר מטריצה $[W(t)]^{-1}$. יתרה מזאת, אפשר להראות ש- $[W(t)]^{-1}$ רציפה. לפיכך, אם ניקח $\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t) \end{pmatrix} = [W(t)]^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ r(t) \end{pmatrix}$ נקבל $W(t)\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ r(t) \end{pmatrix}$

כדי לקבל $(u_1(t), \dots, u_m(t))$ נקבע $c \in I$ כלשהו וניקח

אינטגרציה קואורדינטה-קואורדינטה

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} = \int_c^t [W(s)]^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ r(s) \end{pmatrix} ds$$

הרציפות של $[W(t)]^{-1}$ חשובה משני טעמים.

- כדי ש- $u_1, \dots, u_m$ יהיו גזירות ברציפות
- כדי שהאינטגרל הנ"ל יהיה מוגדר

קיבלנו $\{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ המקיימים את הדרישות.
כעת נראה שאם $\{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$ מקיימות את הדרישות אז $z^{part} = u_1(t) z_1(t) + \dots + u_m(t) z_m(t)$
פתרון של המשוואה.

<u>טענת עזר</u>: לכל $0 \le k \le m-1$ מתקיים
$$(z^{part})^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{m} z_i^{(k)} u_i(t)$$
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על k. עבור $k=0$ כן ההגדרה של z^{part}. נניח שהוכחנו עבור k ונוכיח עבור $k+1$
$$(z^{part})^{(k+1)} = [(z^{part})^{(k)}]' = \left(\sum_{i=1}^{m} z_i^{(k)} u_i(t)\right)' =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (z_i^{(k+1)} u_i + z_i^{(k)} u_i') = \sum_{i=1}^{m} z_i^{(k+1)} u_i + \sum_{i=1}^{m} z_i^{(k)} u_i' =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} z_i^{(k+1)} u_i$$
$\sum_{i=1}^{m} z_i^{(k)} u_i'$ מתאפס כי השורה ה- $k<m-1$ במשוואה $W(t)\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ r(t) \end{pmatrix}$ היא בדיוק $\sum_{i=1}^{m} z_i^{(k)} u_i' = 0$

☺

בדומה לטענת העזר נקבל
$$(z^{part})^{(m)} = [(z^{part})^{(m-1)}]' = \left(\sum_{i=1}^{m} z_i^{(m-1)} u_i\right)' =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (z_i^{(m)} u_i + z_i^{(m-1)} u_i') = \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m)} u_i + \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m-1)} u_i' =$$
$$= r(t) + \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m)} u_i$$

כעת נציב את z^{part} במשוואה המקורית ונקבל
$$(z^{part})^{(m)} + a_{m-1}(t)(z^{part})^{(m-1)} + \dots + a_0(t) z^{part} =$$
$$= \left(r(t) + \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m)} u_i\right) + a_{m-1}(t) \sum_{i=1}^{m} z_i^{(m-1)} u_i + \dots + a_0(t) \sum_{i=1}^{m} z_i u_i =$$
$$= r(t) + \sum_{i=1}^{m} (z_i^{(m)} u_i + a_{m-1}(t) z_i^{(m-1)} u_i + \dots + a_0(t) z_i u_i) =$$
$$= r(t) + \sum_{i=0}^{m} u_i \underbrace{(z_i^{(m)} + a_{m-1}(t) z_i^{(m-1)} + \dots + a_0(t) z_i)} = r(t)$$
מתאפס כי z_i פתרון של ההומוגנית

<u>תרגיל</u>: מצא פתרון כללי של $z''' + z' = \tan t$

<u>פתרון</u>: נפתור את ההומוגנית המתאימה. הפולינום האופייני הוא $\lambda^3 + \lambda$ ושורשיו הם $0, \pm i$. לכן בסיס למרחב

הפתרונות הם $\{1, \sin t, \cos t\}$

נחפש פתרון פרטי למשוואה הלא-הומוגנית בשיטת וריאציית פרמטרים. לפי השיטה שראינו לעיל, צריכים למצוא $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ כך ש- $W(t)\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\tan t\end{pmatrix}$, כלומר

$$\begin{pmatrix}1 & \sin t & \cos t\\0 & \cos t & -\sin t\\0 & -\sin t & -\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\tan t\end{pmatrix}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $\cos t \cdot u_2'(t) - \sin t\, u_3'(t) = 0$

$\Leftarrow \quad u_2'(t) = \tan t \cdot u_3'(t)$

נציב במשוואה השלישית ונקבל $\tan t = -\sin t \tan t\, u_3'(t) - \cos t\, u_3'(t)$

$u_3'(t) = -\sin t \quad \Leftarrow \quad \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}(-\sin^2 t - \cos^2 t)u_3'(t) \quad \Leftarrow$

$u_2'(t) = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} \quad \Leftarrow \quad u_2'(t) = \tan t \cdot u_3'(t)$ נציב ונקבל

נציב במשוואה הראשונה: $u_1' - \sin t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos t} - \cos t \sin t = 0$

$\Rightarrow u_1' = \frac{1}{\cos t}(\sin^3 t + \sin t \cos^2 t) = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$

$\Rightarrow u_1'(t) = \tan t$

כדי למצוא את $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ מבצעים אינטגרציה:

$$\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ln\cos t\\ \sin t + \ln(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}))\\ \cos t\end{pmatrix}$$

לכן פתרון פרטי נתון ע"י

$-\ln\cos t + \sin t\,(\sin t + \ln(\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}))) + t\cos t \cdot \cos t =$

$= 1 - \ln\cos t + \sin \cdot \ln\tan(\frac{\pi}{4} - t/2)$

לכן הפתרון הכללי הוא

$z(t) = c_1 + c_2\sin t + c_3\cos t - \ln\cos t + \sin t \ln\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}))$

השוואת מקדמים

משפט: נתונה המשוואה $z^{(m)} + a_{m-1}z^{(m-1)} + \dots + a_0(t)z = r(t)$

אם $r(t)$ הוא מהצורה $e^{\alpha t}\underbrace{P_n(t)}_{\text{פולינום מעלה } n}\cdot\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$ אזי

(א) אם β, α, 0 אינם שורשים אופייניים אזי יש פתרון מהצורה:

$$z=e^{\alpha t}(C_n t^n+C_{n-1}t^{n-1}+\dots+C_0)\sin\beta t+e^{\alpha t}(C_n' t^n+\dots+C_0')\cos\beta t$$

כאשר $C_0,\dots,C_n,C_0',\dots,C_n'$ מקדמים אותם ניתן למצוא בעזרת הצבת הפתרון לתוך המשוואה והשוואת המקדמים של חזקות t בשני האגפים.

(ב) אם $\alpha=\beta=0$; 0 שורש מריבוי s של הפולינום האופייני, הפתרון הוא מהצורה $C_{n+s}t^{n+s}+\dots+C_0$

(ג) אם $\beta=0$; α שורש מריבוי s של הפולינום האופייני אז הפתרון הוא מהצורה $e^{\alpha t}(C_{n+s}t^{n+s}+\dots+C_0)$

(ד) אם $\alpha=0$; $i\beta$ שורש מריבוי s של הפולינום האופייני אז הפתרון הוא מהצורה

$$(C_{n+s}t^{n+s}+\dots+C_0)\cos\beta t+(C_{n+s}'t^{n+s}+\dots+C_0')\sin\beta t$$

באופן כללי, אם אחד מהמחוברים האפשריים של הפתרון האי-הומוגני שווה לאחד המחוברים של הפתרון ההומוגני, מכפילים את הפתרון האי-הומוגני בחזקה המינימלית t^s שתמנע שוויון כזה.

<u>תרגיל</u>: למצוא פתרון כללי של $z''+z=\cos t$

<u>פתרון</u>: ההומוגנית המתאימה היא $z''+z=0$ ופתרון כללי שלה הוא $z(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$. היינו רוצים פתרון של האי-הומוגנית מהצורה $\alpha_1\cos t+\alpha_2\sin t$ אבל מכיוון ש-$\cos t$ פתרון של ההומוגנית, נכפיל ב-t ונחפש פתרון מהצורה $\alpha_1 t\cos t+\alpha_2 t\sin t$. (נציב ונקבל)

$$z''+z=[\alpha_1 t\cos t+\alpha_2 t\sin t]''+[\alpha_1 t\cos t+\alpha_2 t\sin t]=\cos t$$

משווים מקדמים של $\sin t, \cos t$ ומקבלים פתרון $z(t)=\frac{1}{2}t\sin t$

לכן פתרון כללי: $z(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2}t\sin t$

(22) 22.07.08
ת' עדר

<u>הגדרה</u>: תהי $f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$ רציפה. המשוואה
$y'(t)=f(y(t))$ נקראת אוטונומית.

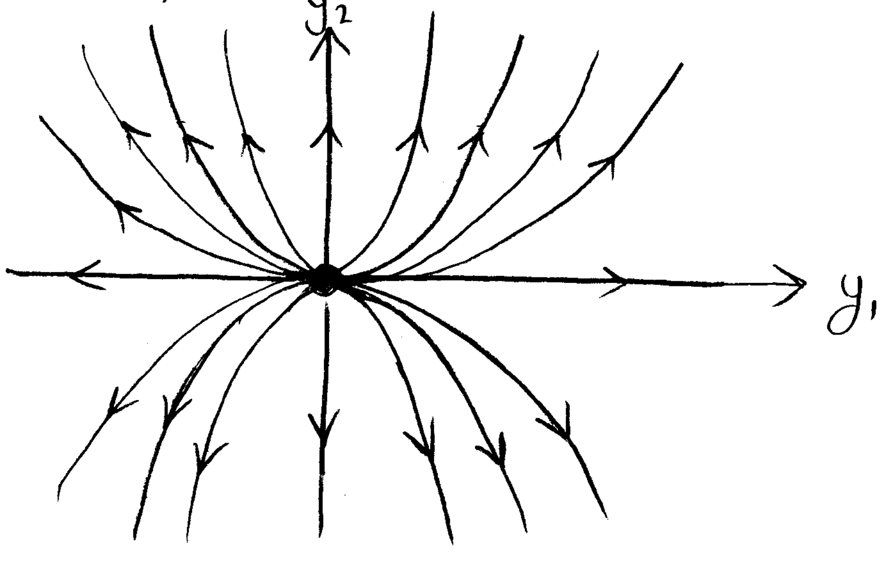
<u>תכונה</u>: אם $y(t)$ פתרון של משוואה אוטונומית אז גם
$\tilde{y}(t)=y(t-t_0)$ פתרון שלה. משמעות הדבר היא שהזמן
t "אינו משנה" ומעניין אותנו רק היחס בין הרכיבים של y.

נתעסק בעיקר במערכות של שתי משוואות. המטרה שלנו היא
להציג "ציור" של המסלולים במישור $y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$
כאשר t מתקדם מ- $-\infty$ ל- $+\infty$.

<u>הערה</u>: אם מתקיימת ליפשיציות אז לפי משפט היחידות,
מסלולים שונים לא יפגשו, ולפי משפט הקיום, איחוד המסלולים
הוא כל המישור (אם f מוגדרת בכל המישור).

<u>דוגמה</u>: $y'(t)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}y(t)$, רק נראה המסלולים:

הפתרון הוא:
$c_1e^t+c_2e^{2t}$



<u>תרגיל</u>: נתבונן במערכת $y'(t)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}y(t)$ כאשר $ad-bc\neq0$
נסמן $p=a+d$, $q=ad-bc$, $\Delta=p^2-4q$
אזי

(א) אם $\Delta\geq0$; $q>0$ אז $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ צומת.
(ב) אם $q<0$ אז $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ הוא אוכף.

ג) אם $\Delta<0$ ו- $p\neq 0$ אז $\binom{0}{0}$ היא מרכז

3) אם $q>0$ ו $p=0$ אז $\binom{0}{0}$ היא מרכז

ה) $\binom{0}{0}$ יציבה אסימפטוטית אם $0<q$ ו $p<0$

ו) $\binom{0}{0}$ יציבה אם $q>0$ ו $p=0$

ז) $\binom{0}{0}$ לא יציבה אם $q<0$ או $p<0$.

<u>פתרון</u>: הפולינום האופייני של $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ הוא

$$\lambda^2-(\mathrm{tr}A)\lambda+\det A=$$
$$=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=$$
$$=\lambda^2-p\lambda+q$$

אם λ_1,λ_2 שורשים של הפולינום האופייני אז

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=p\\ \lambda_1\lambda_2=q\end{cases}$$

ועכשיו ע"י ניתוח כל האפשרויות של הסימנים של הערכים העצמיים נוכיח הכל...

<u>אפיון נקודה קריטית לפי ע"ע</u>

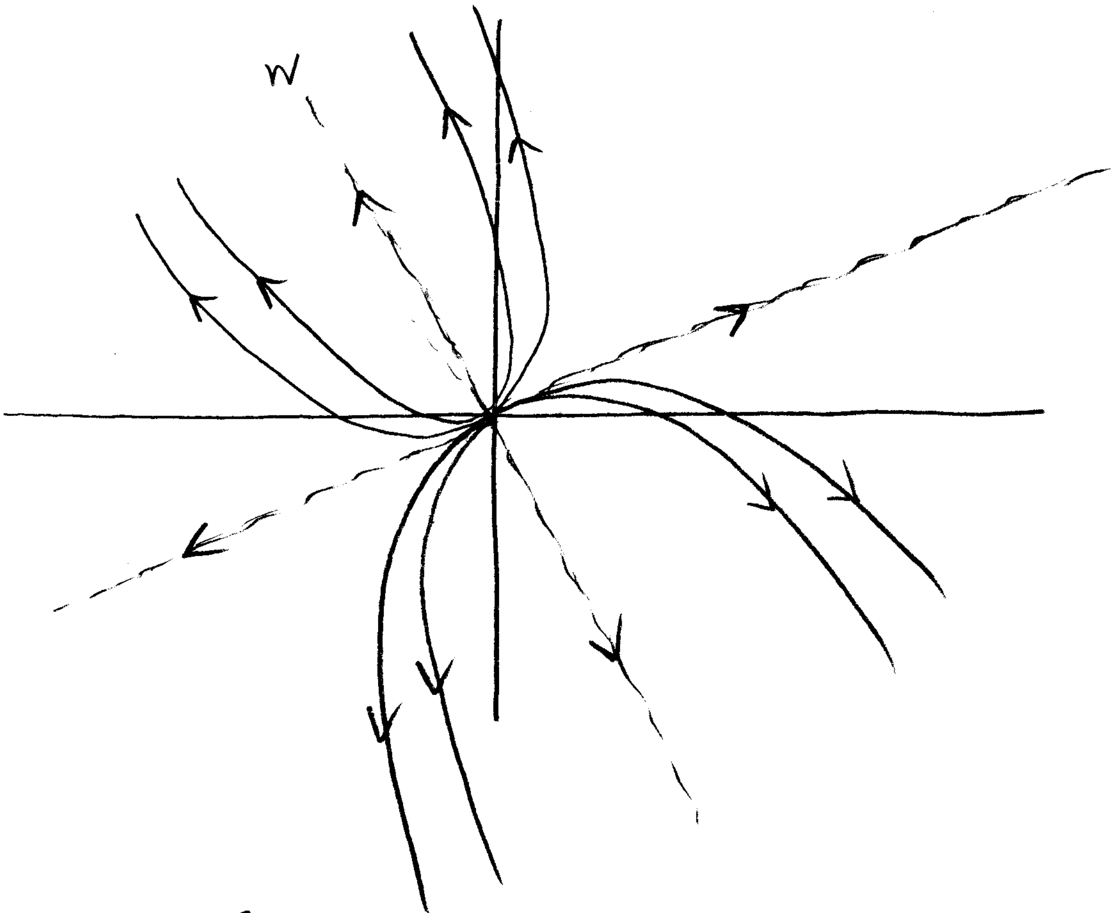
<u>תזכורת</u>: אם $w=\binom{w_1}{w_2}$, $v=\binom{v_1}{v_2}$ ו"ע של $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ עם ע"ע λ,μ בהתאמה אז הפתרון של המשוואה $y'(t)=Ay(t)$ הוא $c_1\binom{v_1}{v_2}e^{\lambda t}+c_2\binom{w_1}{w_2}e^{\mu t}$

נחלק למקרים ונרצה לראות איך המסלולים מתנהגים.

<u>מקרה א'</u>: $0<\lambda<\mu$; רוצים לצייר מסלולים, תחילה נבדוק לאן הם שואפים כאשר $t\to\pm\infty$.

כאשר $t\to\infty$, $\frac{\|c_1\binom{v_1}{v_2}e^{\lambda t}\|}{\|c_2\binom{w_1}{w_2}e^{\mu t}\|}\to 0$ אז הכיוון של הפתרון שואף ל- $\binom{w_1}{w_2}$. פרט למקרה ש- $c_2=0$ ואז הפתרון הוא $c_1\binom{v_1}{v_2}e^{\lambda t}$ אז הכיוון הוא $\binom{v_1}{v_2}$

אם $t\to-\infty$ אז הפתרון שואף ל- $\binom{v_1}{v_2}$ בכיוון ושואף ל- 0 בנורמה, אלא אם $c_1=0$ ואז שואף ל- $\binom{w_1}{w_2}$



זה די דומה למה שהיה לנו קודם. למה? כי היא דומה למטריצה אלכסונית...

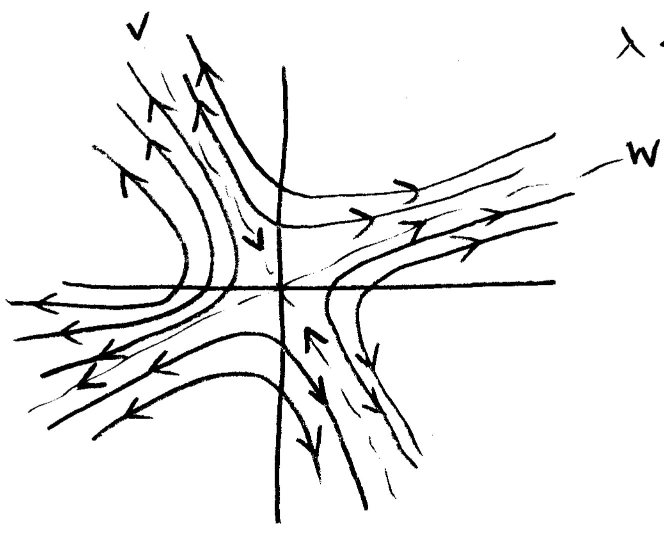
<u>הערה</u>: היינו יכולים לעבור ע"י דמיון למטריצה אלכסונית לקבל ציור כמו קודם אבל אז היינו צריכים להפעיל טרנספורמציה לינארית על הפתרון המתקבל והיינו מקבלים את הפתרון שלנו.

מקרה ב': $0<\lambda<\mu$ -

אותו ציור רק הכיוונים של החיצים מתהפכים.

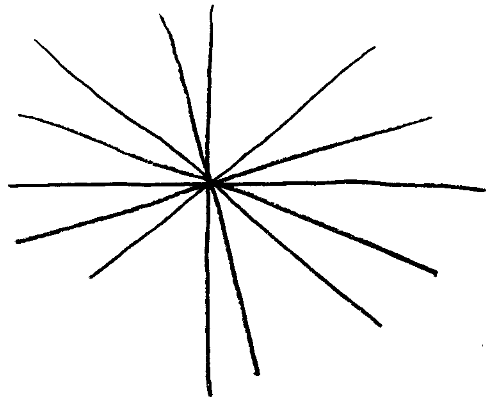
מקרה ג': $\lambda<0<\mu$

אוכף

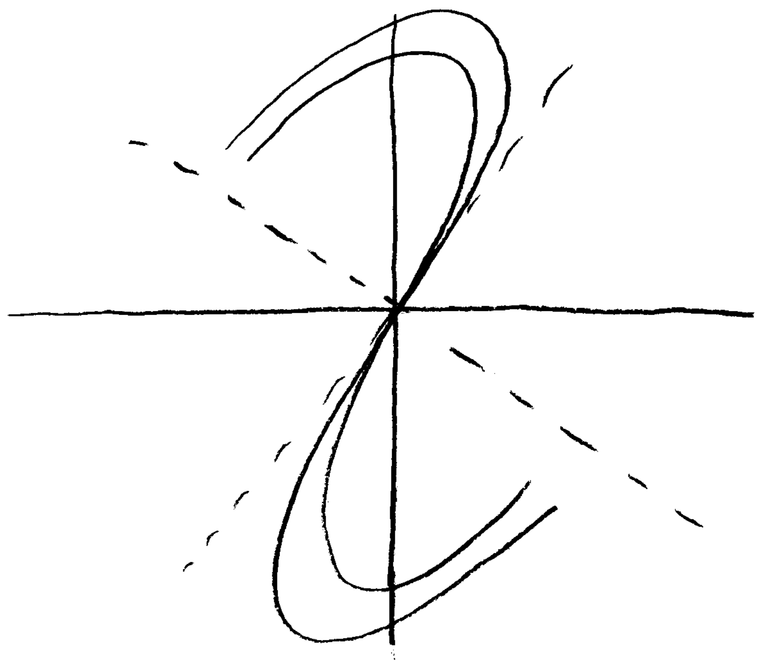


<u>מקרה ג׳</u> : $\lambda = \mu$ ושני ו"ע בת"ל

כיוון הקרניים בהתאם לסימן של λ, μ



<u>מקרה ה׳</u> : $\lambda = \mu$ ויש ו"ע אחד



29.07.08

ת' מד"ר

<u>תרגיל</u>: למצוא את כל הפונקציות הגזירות פעמיים ברציפות ומקיימות $f'(t)=f(-t)$ לכל t. (*)

<u>פתרון</u>: נגזור את שני אגפי המשוואה ונקבל $f''(t) = -f'(-t)$

נציב שוב ונקבל $f''(t) = -f(-(-t)) = -f(t)$

$\Rightarrow$ $f''(t)+f(t)=0$. את המשוואה הזאת

אנחנו יודעים לפתור: $f(t) = \alpha\sin t + \beta\cos t$ (**)

האם סיימנו? עוד לא! אמרנו שאם (*) מתקיים אז בטוח (**) מתקיים. אבל זה לא אומר שהכיוון השני נכון.

נציב במשוואה המקורית:

$$\alpha\cos t - \beta\sin t = f'(t) = f(-t) = -\alpha\sin t + \beta\cos t$$

$$\Rightarrow \alpha(\sin t + \cos t) = \beta(\sin t + \cos t)$$

זה נכון לכל t אם בהכרח $\alpha=\beta$. אז קיבלנו פתרון מהצורה $f(t)=\alpha(\sin t+\cos t)$. נבדוק שהוא מקיים את המשוואה:

$$f'(t) = \alpha(\cos t - \sin t) = \alpha(-\sin t + \cos t) = f(-t)$$

לכן הפתרון הוא $f(t)=\alpha(\sin t+\cos t)$ לכל $\alpha\in\mathbb{R}$.

<u>תרגיל</u>: יהי $z(t)$ פתרון של המשוואה $z''+az'+bz=0$ עבור $a,b\in\mathbb{R}$. נניח שמתקיים

$$\begin{cases} z(0)=z(1) \\ z'(0)=z'(1) \end{cases}$$

להוכיח ש-$z(t)$ מחזורית עם מחזור 1, כלומר לכל t מתקיים $z(t+1)=z(t)$.

<u>פתרון</u>: נגדיר $\tilde{z}(t)=z(t+1)$. מכיוון שהמשוואה הינה אוטונומית גם $\tilde{z}$ הוא פתרון שלה. מתקיים

$$\begin{cases} \tilde{z}(0)=z(1)=z(0) \\ \tilde{z}'(0)=z'(1)=z'(0) \end{cases}$$

לכן $\tilde{z}$ מקיים אותו תנאי התחלה ב-$t=0$ כמו $z(t)$

לכן ממשפט היחידות $\tilde{z}(t)=z(t)$ $\Rightarrow$ $z(t+1)=z(t)$.

תרגיל: נתונה המשוואה $z''(t)+a_1(t)z'(t)+a_0(t)z(t)=0$

כאשר $a_1(t), a_0(t)$ ממשיות ורציפות בקטע $I=(\alpha,\beta)$.

ויהי $z_1(t)$ פתרון שאינו מתאפס באף נקודה ב- I.

א) הוכח שפתרון נוסף (בת"ל ב- z_1) בקטע נתון ע"י

$$z_2(t)=z_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s}a_1(\theta)\,d\theta\right)}{z_1(s)^2}\,ds$$

עבור $t_0\in I$ כלשהו.

ב) נתון ש- $z_1(t)=t\sin t$ הוא פתרון של המשוואה

$$tz''(t)-2z'(t)+\frac{t^2+2}{t}z(t)=0 \qquad 0<t<\pi$$

מצא פתרון נוסף.

פתרון: נזכר שהוורונסקיאן של פתרונות $z_1(t), z_2(t)$ נתון ע"י

$$\det W(t)=\begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t)\\ z_1'(t) & z_2'(t)\end{vmatrix}=z_1(t)z_2'(t)-z_2(t)z_1'(t)$$

נניח ש- $z_2(t)$ פתרון של המשוואה ונתבונן ב- $\frac{z_2(t)}{z_1(t)}$.
מתקיים

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right)=\frac{z_2'(t)z_1(t)-z_2(t)z_1'(t)}{z_1(t)^2}=\frac{\det W(t)}{z_1(t)^2}$$

לפי נוסחה שראינו בהרצאה, $\det W(t)=\det W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)$
ולכן אצלנו

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right)=\det W(t_0)\,\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(\theta)d\theta\right)}{z_1(t)^2}$$

נבצע אינטגרציה לשני האגפים:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}\left(\frac{z_2(s)}{z_1(s)}\right)ds=\int_{t_0}^{t}\det W(t_0)\,\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s}a_1(\theta)d\theta\right)}{z_1(s)^2}\,ds.$$

$$\Rightarrow\ \frac{z_2(t)}{z_1(t)}-\frac{z_2(t_0)}{z_1(t_0)}=\det W(t_0)\int_{t_0}^{t}\frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s}a_1(\theta)d\theta\right)}{z_1(s)^2}\,ds$$

נשים לב שאם $z_2(t)$ פתרון אז גם $\tilde{z}_2(t)=z_2(t)-\frac{z_2(t_0)}{z_1(t_0)}z_1(t)$
פתרון וכן אם $z_2(t)$ אינו תלוי ב- $z_1(t)$ אז גם
$\tilde{z}_2(t)$ אינו תלוי ב- $z_1(t)$. לכן ע"י החלפה ב- $\tilde{z}_2(t)$ (נוכל)
להניח בה"כ ש- $z_2(t_0)=0$ ונקבל

$$z_2(t) = z_1(t)\det W(t_0)\int_{t_0}^{t} \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{s} a_1(\theta)\,d\theta\right)}{z_1(s)^2}\,ds$$

אבל מכיוון שהמשוואה הומוגנית, גם $\frac{z_2(t)}{\det W(t_0)}$ פתרון והוא
מקיים את הנוסחה...

יש כאן בעיה כלשהי של מעגליות...

(26) 5/8/08

ת' מדר

<u>תרגיל</u>: נתונה המערכת האוטונומית

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2(t)\\ -y_1(t)^2\end{pmatrix}$$

(א) להראות כי $\frac{2}{3}y_1^3(t)+y_2^2(t)=const$ פתרון לכל

לצייר את המסלולים במישור הפאזה

(ב) האם הפתרון העובר דרך $(-1,\sqrt{\frac{2}{3}})$ מוגדר לכל $t\in\mathbb{R}$?

<u>פתרון</u>:

(א) נגזור את שני האגפים ונקבל שצריך להיות 0.

$$2y_1^2(t)y_1'(t)+2y_2(t)y_2'(t)=0$$

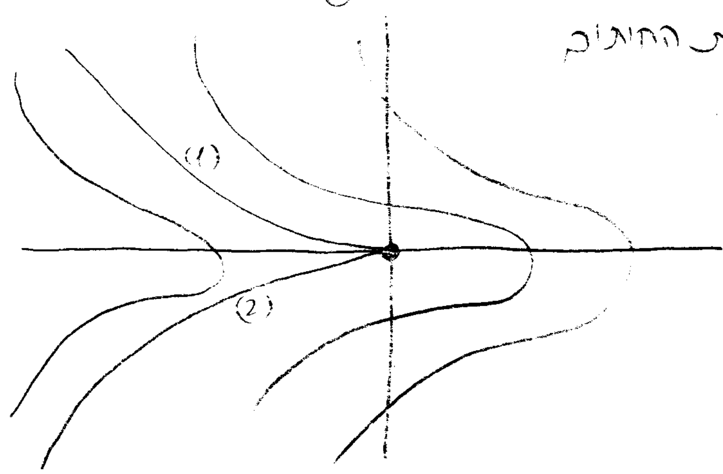
לפי המשוואה המקורית $y_1^2(t)=-y_2'(t)$; $y_1'(t)=y_2(t)$ ולכן

$$2y_1^2(t)y_1'(t)+2y_2(t)y_2'(t)=-2y_2'(t)y_2(t)+2y_2(t)y_2'(t)=0$$

נצייר את המסלולים. המסלולים הם כמעט עקומים אליפטיים (משוואת עקומה אליפטית היא $y^2=x^3+ax+b$)

לכל const יש נקודת חיתוך יחידה עם ציר x.

שני מסלולים הם שונים: (1) ו-(2) הם שני מסלולים נפרדים



(ב) נשים לב שמתקיים $\frac{2}{3}(-1)^3+(\sqrt{\frac{2}{3}})^2=0$ ולכן

הפתרון שלנו מקיים את המשוואה $\frac{2}{3}y_1^3(t)+y_2^2(t)=0$.

נפרט ונקבל $y_2(t)=\pm\sqrt{-\frac{2}{3}y_1^3(t)}$. בגלל הנקודה $(-1,\sqrt{\frac{2}{3}})$

על המסלול אנו צריכים $y_2(t_0)=+\sqrt{-\frac{2}{3}y_1^3(t_0)}$. (נוכיח שלכל t הסימן

הוא + כי אם y_2 משנה סימן אז יש נקודה שבה הוא מתאפס ואז

לפי (*) גם y_1 מתאפס וזה לא יתכן לפי משפט היחידות, כי

$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ הוא פתרון.

נציב במשוואה ונקבל $y_1'(t)=\sqrt{-\frac{2}{3}y_1^3(t)}$. זו משוואה שאנחנו

יודעים לפתור והפתרון הוא $y_1(t)=-(\frac{1}{\sqrt{6}}t-c)^{-2}$ והוא מוגדר רק

עבור t המקיים $\frac{1}{\sqrt6}t > c$, אצלינו $\binom{y_1(t_0)}{y_2(t_0)} = \binom{-1}{\sqrt{2/3}}$ ולכן

$-(\frac{1}{\sqrt6}t_0-c)^{-2}=-1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt6}t_0 - c = 1 \Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt6}t_0-1 \Rightarrow$

הפתרון הוא $-(\frac{1}{\sqrt6}t-(\frac{1}{\sqrt6}t_0-1))^{-2}$ והוא מוגדר עבור

$\frac{1}{\sqrt6}t > \frac{1}{\sqrt6}t_0-1 \Rightarrow t > t_0-\sqrt6$. כלומר, הפתרון "מתפוצץ"

במרחק $\sqrt6$ יחידות מהערך, שעבורו מתקבלת הנקודה $(-1,\sqrt{2/3})$

<u>תרגיל</u>: נתונה המערכת האוטונומית

$$\frac{d}{dt}\binom{y_1(t)}{y_2(t)} = \begin{pmatrix} \sin(e^{y_2(t)})y_1(t) - \cos(e^{y_1(t)})y_2(t) \\ \cos(e^{y_2(t)})y_1(t) + \sin(e^{y_1(t)})y_2(t) \end{pmatrix}$$

להראות שהפתרון הפרטי המקיים $y^1(0)=\binom{\xi}{\eta}$ קיים

לכל $t\in\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>: נראה שהפתרון לא "מתפוצץ" ע"י כך שנחסום אותו ע"י

פתרון של מערכת פשוטה יותר. נטפל במקרה ש- $0<t$ וב- $t<0$.

עבור $0<t$ נתבונן במערכת $\frac{d}{dt}\binom{y_1(t)}{y_2(t)} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ (**)

הערכים העצמיים של $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ הם 0, 2 ונ"ע $\binom{1}{-1},\binom{1}{1}$ בהתאמה

לכן הפתרון הכללי הוא $c_1\binom{1}{-1}+c_2\binom{1}{1}e^{2t}$. הפתרון לא "מתפוצץ"

לכן אם נחסום את הפתרון שלנו בין פתרון זה ונגדי שלו אז גם

הפתרון שלנו לא "מתפוצץ".

נבחר פתרון y^2 של (**) המקיים $y^2(0)=\binom{2|\xi|+1}{2|\eta|+1}$. נטען שלכל t

מתקיים $|y^1(t)|<y^2(t)$ (הכוונה היא שהא"ש לכל קואורדינטה).

זה מתקיים עבור $t=0$. אם זה לא נכון לכל $t>0$ אז קיים t_0

מינימלי שעבורו זה לא מתקיים כלומר $|y^1(t_0)| \not< y^2(t_0)$. בה"כ,

$y_1^2(t_0)\le|y_1^1(t_0)|$. קיבלנו

$$\begin{cases} y_1^2(0) > |y_1^1(0)| \\ y_1^2(t_0) \le |y_1^1(t_0)| \end{cases}$$

לכן קיים $0<t_1<t_0$ עבורו $(y_1^2)'(t_1)<|(y_1^1)'(t_1)|$, אבל לפי ההנחה

$$\begin{cases} y_1^2(t_1) > |y_1^1(t_1)| \\ y_2^2(t_1) > |y_2^1(t_1)| \end{cases}$$

אבל

$$(y_1^2)'(t_1) = y_1^2(t_1)+y_2^2(t_1) > |y_1^1(t_1)|+|y_2^1(t_1)| \ge$$
$$\ge |\sin(e^{y_2^1(t_1)})y_1^1(t_1) - \cos(e^{y_1^1(t_1)})y_2^1(t_1)| = |(y_1^1)'(t_1)|$$

נ״ס סתירה. מהווה ערכים C. $y'(t)=-y^2(t)$ לכן $0<t$ אם $t>0$ אם
$y^1(t)$ אז מונוטונית מתקיים $t>0$ עבור $0<t$.
סופי $0<t$ שלכל פתרון אותו הדבר כי המשוואה $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$
פתרונה הוא $c_1\binom{-1}{1}+c_2\binom{1}{1}e^{-2t}$.

<u>תרגיל</u>: נתונה משוואת לז׳נדר:

$$(1-t^2)z''(t)-2tz'(t)+\alpha(\alpha+1)z(t)=0 \qquad -1<t<1 \qquad \mathbb{R}\ni\alpha>-1$$

(א) הראו שיש פתרונות $z_1(t), z_2(t)$ בקטע $(-1,1)$ שהוורונסקיאן שלהם ב-$t=0$ הוא מטריצת היחידה.

(ב) הראו כי אם α שלם חיובי זוגי אז $z_1(t)$ הוא פולינום מסדר α.

(ג) הראו כי אם α שלם חיובי אי-זוגי אז $z_2(t)$ הוא פולינום מסדר α.

<u>פתרון</u>: נשתמש במשפט הבא: אם נתונה המשוואה

$$P(t)z''(t)+Q(t)z'(t)+R(t)z(t)=0$$

והפונקציות $\frac{Q(t)}{P(t)}, \frac{R(t)}{P(t)}$ אנליטיות ב-t_0 אז הפתרון הכללי של המשוואה
מהצורה t_0 ותלוי ב-2 פרמטרים $a_0z_1(t)+a_1z_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^n$
כאשר a_0,a_1 קבועים ו-$z_1(t), z_2(t)$ פתרונות בסיס של המשוואה.
יתרה מזאת, רדיוס ההתכנסות של $z_1(t), z_2(t)$ הוא לפחות המינימום
בין רדיוסי ההתכנסות של $\frac{R(t)}{P(t)}, \frac{Q(t)}{P(t)}$ סביב t_0.

(א) אצלנו $\frac{Q(t)}{P(t)}=\frac{-2t}{1-t^2}$, $\frac{R(t)}{P(t)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}$. הפונקציות האלה אנליטיות ב-$t=0$
ורדיוס ההתכנסות שלהן סביב $t=0$ הוא 1. לכן נחפש פתרון
למשוואה סביב $t=0$ בצורת טור חזקות ונקבל שהוא מוגדר בקטע
$(-1,1)$ (כפי שרצינו).

נניח כי $z(t)=\sum a_nt^n$ אז $z'(t)=\sum a_n n t^{n-1}$ ו-
$z''(t)=\sum a_n n(n-1)t^{n-2}$. לכן

$$
\begin{aligned}
&(1-t^2)z''(t)-2tz'(t)+\alpha(\alpha+1)z(t)=\\
&=\sum_0^{\infty}a_n n(n-1)t^{n-2}-\sum_0^{\infty}a_n n(n-1)t^n-2\sum_0^{\infty}a_n n t^n+\sum_0^{\infty}\alpha(\alpha+1)a_nt^n=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}(n+1)(n+2)-n(n-1)a_n-2a_nn+\alpha(\alpha+1)a_n\right)t^n=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n(n+1)-\alpha(\alpha+1))a_n\right]t^n
\end{aligned}
$$

כלומר המקדמים של פיתוח לטור חזקות חייבים להיות 0

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\alpha(\alpha+1)}{(n+1)(n+2)}a_n}$$

המקדמים מתאפסים אם וקבוע

אם (נתון) קבוע a_0, a_1 שרירותיים ואז שאר המקדמים הם

$$a_{2n} = a_0 \frac{1}{(2n)!}\prod_{j=0}^{n-1}(2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1))$$

$$a_{2n+1} = a_1 \frac{1}{(2n+1)!}\prod_{j=0}^{n-1}((2j+1)(2j+2)-\alpha(\alpha+1))$$

שני הפתרונות הפשוטים ביותר המתאימים ל- $a_0=0$, $a_1=1$ וגם

$a_0=1$, $a_1=0$ והם:

$$z_1(t) = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n)!}\prod_{j=0}^{n-1}(2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1))\,t^{2n}$$

$$z_2(t) \quad \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)!}\prod_{j=0}^{n-1}((2j+1)(2j+2)-\alpha(\alpha+1))\,t^{2n}$$

מתקיים $z_1'(0)=z_2(0)=0$ (כי כל החזקות של t ב- z_1 הן זוגיות

וב- z_2 הן אי-זוגיות) כמו כן $z_1(0)=1$; $z_2(0)=1$ אזי

הוורונסקיאן ב- $t=0$ הוא אכן מטריצת היחידה.

(ב) אם α חיובי זוגי אז לכל n שעבורו $\alpha<2n$ המכפלה

$\prod_{j=0}^{n-1}(2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1))$ מכילה את הגורם $\alpha(\alpha+1)-\alpha(\alpha+1)=0$ שמאפס

אותה. לכן הפתרון $z_1(t)$ הוא $\sum_{n=0}^{\alpha/2}\frac{1}{(2n)!}\prod_{j=0}^{n-1}(2j(2j+1)-\alpha(\alpha+1))t^{2n}$

וזה פולינום ממעלה α.

(ג) באותו אופן.