• באגם יש 1000000 ליטר מים וכמות מסוימת של כימיקל לא ידוע. מים שמכילים 0.01 גרם מהכימיקל לליטר זורמים לתוך האגם בקצב 300 ליטר לדקה. התערובת נזרמת החוצה באותו קצב אז כמות המים באגם לא משתנה. נניח שהכימיקל מפוזר במים באופן אחיד.

(א) נרשום משוואה דיפרנציאלית שפתרונה הוא כמות הכימיקל לפי זמן.

נסמן ב- $y(t)$ את כמות הכימיקל בזמן t אז מהנתונים

$$\left(\frac{\text{גרם}}{\text{דקה}}\right) \quad y'(t) = \underbrace{0.01}_{\frac{\text{גרם}}{\text{ליטר}}} \cdot \underbrace{300}_{\frac{\text{ליטר}}{\text{דקה}}} - \underbrace{300}_{\frac{\text{ליטר}}{\text{דקה}}} \cdot \underbrace{\frac{y}{1000000}}_{\frac{\text{גרם}}{\text{ליטר}}}$$

(ב) שיווי משקל יש כאשר

$$3 - \frac{3y}{10000} = 0$$

$$\Rightarrow 30000 = 3y \Rightarrow y = 10000$$

• טיפת גשם כדורית מתאדה בקצב פרופורציוני לשטח הפנים שלה. נכתוב משוואה דיפרנציאלית שפתרונה הוא נפח הטיפה כתלות בזמן.

אם רדיוס הטיפה r אז נפחה $\frac{4}{3}\pi r^3$ ושטח הפנים שלה $4\pi r^2$

נסמן ב- V את הנפח אז הרדיוס הוא $\left(V\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}$ ולכן שטח הפנים הוא $4\pi\left(V\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}$ נניח שהתלות של האידוי בשטח הפנים היא α. לכן

$$V'(t) = -\alpha \cdot 4\pi\left(V\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}$$

ולמעשה אפשר לאחד את כל הקבועים וכך

$$V' = -\alpha \cdot V^{2/3}$$

• תרופה נכנסת בעירוי: (נוזל) שמכיל $5\,mg/cm^3$ מהתרופה נכנס בקצב קבוע של $100\,cm^3/hr$. התרופה יוצאת בקצב פרופורציוני לכמות שנמצאת בגוף וקבוע הפרופורציה הוא $0.4\,hr^{-1}$ נכתוב משוואה דיפרנציאלית שמתארת את כמות התרופה שנמצאת במחזור הדם כתלות בזמן.

נסמן ב- $y(t)$ את כמות התרופה. אז

$$\left(\frac{\text{מ"ג}}{\text{שעה}}\right) \quad y' = \underbrace{5}_{\frac{mg}{cm^3}} \cdot \underbrace{100}_{\frac{cm^3}{hr}} - \underbrace{0.4}_{\frac{1}{hr}} \cdot \underbrace{y}_{mg}$$

• נפתור את מע"ות תנאי ההתחלה הבאות..

(א) $\frac{dy}{dt} = -y+5 \qquad y(0)=y_0$

$$\frac{dy}{dt} = -y+5 \Rightarrow \frac{dy/dt}{-y+5} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|-y+5| = 1$$

$$\Rightarrow \ln|-y+5| = t+C \Rightarrow -y+5 = \pm e^{C}e^{t}$$

$$\Rightarrow -y+5 = ce^{t} \Rightarrow y = 5-ce^{t}$$

$$y(0) = 5-c = y_0 \Rightarrow c = 5-y_0 \Rightarrow y = 5-(5-y_0)e^{t}$$

(ב) $\frac{dy}{dt} = -2y+5 \qquad y(0)=y_0$

$$\frac{dy}{dt} = -2y+5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\left(y-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \frac{dy/dt}{y-5/2} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\ln\left|y-\frac{5}{2}\right| = -2 \Rightarrow \ln\left|y-\frac{5}{2}\right| = -2t+C$$

$$\Rightarrow y-\frac{5}{2} = \pm e^{C}e^{-2t} \Rightarrow y = ce^{-2t}+\frac{5}{2}$$

$$y(0) = c+\frac{5}{2} = y_0 \Rightarrow c = y_0-\frac{5}{2} \Rightarrow y = \left(y_0-\frac{5}{2}\right)e^{-2t}+\frac{5}{2}$$

(ג) $\frac{dy}{dt} = 2y-10 \qquad y(0)=y_0$

$$\frac{dy}{dt} = 2y-10 = 2(y-5) \Rightarrow \frac{dy/dt}{y-5} = 2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|y-5| = 2$$

$$\Rightarrow \ln|y-5| = 2t+C \Rightarrow y-5 = \pm e^{2t}e^{C} \Rightarrow y = ce^{2t}+5$$

$$y(0) = c+5 = y_0 \Rightarrow c = y_0-5 \Rightarrow y = (y_0-5)e^{2t}+5$$

• נתונה המשוואה $\frac{dy}{dt} = -ay+b$ כאשר $a,b>0$.

(א) נפתור את המשוואה.. אם $-ay+b \neq 0$

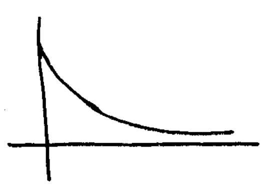
$$\frac{dy}{dt} = -ay+b = -a\left(y-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{dy/dt}{y-b/a} = -a$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\ln\left|y-\frac{b}{a}\right| = -a \Rightarrow \ln\left|y-\frac{b}{a}\right| = -at+C$$

$$\Rightarrow y-\frac{b}{a} = \pm e^{C}e^{-at} \Rightarrow y = ce^{-at}+\frac{b}{a}$$

אם $-ay+b=0$ אז הפיתרון הוא הפונקציה הקבועה $y=\frac{b}{a}$ והוא כלול בפיתרון הקודם עם $c=0$.

(ב) הפתרון נראה כך:



(ג) (i) אם a גדל שיווי המשקל גדול יותר והפונקציה יורדת מהר יותר

(ii) אם b גדל שיווי המשקל גדול יותר וקצב הירידה לא משתנה

(iii) אם a,b גדלים אבל $\frac{a}{b}$ קבוע שיווי המשקל נשאר וקצב הירידה עולה.

• נמצא דרך אלגנטית לפתור את המשוואה $(*)\ \frac{dy}{dt}=ay-b$

(א) נפתור את המשוואה $\frac{dy}{dt}=ay$ אם $ay\neq 0$, כלומר $a,y\neq 0$

$$\frac{dy}{dt}=ay \Rightarrow \frac{dy/dt}{y}=a \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|y|=a \Rightarrow \ln|y|=at+C$$

$$\Rightarrow y=\pm e^{at}e^{C} \Rightarrow y_1=ce^{at}$$

הפתרון $y=0$ כלול כאן עבור $c=0$.

(ב) נחפש קבוע k כך ש- $y=y_1+k$ פתרון של $(*)$ (נציב את $y=y_1+k$ במשוואה) - $ay-b$:

$$(y_1+k)'=(ce^{at}+k)'=cae^{at}=ay-b$$

$$\Rightarrow y=\frac{cae^{at}+b}{a}=ce^{at}+\frac{b}{a}=y_1+\frac{b}{a}$$

⇐ $k=\frac{b}{a}$.

• אוכלוסיית עכברים מקיימת את המשוואה $\frac{dp}{dt}=0.5p-450$

(א) נניח $p(0)=850$. נמצא את הזמן שבו האוכלוסייה כולה מתה. ראשית, נפתור את המשוואה

$$\frac{dp}{dt}=0.5p-450=0.5(p-900) \Rightarrow \frac{dp/dt}{p-900}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|p-900|=\frac{1}{2} \Rightarrow \ln|p-900|=\frac{1}{2}t+C$$

$$\Rightarrow p-900=ce^{\frac{1}{2}t} \Rightarrow p=ce^{\frac{1}{2}t}+900$$

$$p(0)=c+900=850 \Rightarrow c=-50 \Rightarrow p=-50e^{\frac{1}{2}t}+900$$

כעת נפתור את המשוואה $p(t)=-50e^{\frac{1}{2}t}+900=0$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}t}=18 \Rightarrow \frac{1}{2}t=\ln 18 \Rightarrow t=2\ln 18\approx 5.8$$

(ב) נניח ש- $p(0)=p_0$ כאשר $0<p_0<900$. אז

$$p(0)=c+900=p_0 \Rightarrow c=p_0-900$$

$$\Rightarrow p=(p_0-900)e^{\frac{1}{2}t}+900$$

נפתור כעת את המשוואה $p(t)=(p_0-900)e^{\frac{1}{2}t}+900=0$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}t}=\frac{900}{900-p_0} \Rightarrow \frac{1}{2}t=\ln\left(\frac{900}{900-p_0}\right) \Rightarrow t=2\ln\left(\frac{900}{900-p_0}\right)$$

(ג) נניח שהאוכלוסייה מתה תוך 12 חודשים. נמצא את p_0 ונתון ש-

$$0=p(12)=(p_0-900)e^{6}+900 \Rightarrow e^{6}p_0-900(e^{6}-1)=0$$

⇐ $p_0=\frac{900(e^{6}-1)}{e^{6}}$

- נניח שאוכלוסייה p של עכברים גדלה פרופורציונית לגודל הנוכחי, כלומר $\frac{dp}{dt}=rp$.

(א) נמצא את הקבוע r אם האוכלוסייה מכפילה את עצמה תוך 30 יום.

ראשית, נפתור את המשוואה:

$$\frac{dp}{dt}=rp \Rightarrow \frac{dp/dt}{p}=r \Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|p|=r \Rightarrow \ln|p|=rt+C$$

$$\Rightarrow p=\pm e^{C}e^{rt} \Rightarrow p=ce^{rt}$$

כעת נניח ש- $p(0)=p_0$ ו- $p(30)=2p_0$ אז

$$p(0)=C=p_0 \quad p(30)=p_0e^{r\cdot 30}=2\cdot p_0$$

$$\Rightarrow e^{30r}=2 \Rightarrow 30r=\ln 2 \Rightarrow r=\frac{\ln 2}{30}$$

(ב) נמצא את r אם האוכלוסייה מכפילה את עצמה תוך N ימים

כמו קודם. נניח $p(0)=p_0$ ו- $p(N)=2p_0$. אז

$$p(0)=C=p_0 \quad p(N)=p_0e^{r\cdot N}=2p_0 \Rightarrow e^{Nr}=2$$

$$\Rightarrow Nr=\ln 2 \Rightarrow r=\frac{\ln 2}{N}$$

- גוף נופל ומהירותו מקיימת את המשוואה $\frac{dv}{dt}=9.8-\frac{v}{5}$ $\quad v(0)=0$

(א) נמצא את הזמן שלוקח לגוף להגיע ל-98% מהמהירות המקסימלית שלו.

מהירות זו היא מקיימת $9.8-\frac{v}{5}=0$, כלומר $v=49$

שכן אם הגוף נשאר במהירות קבועה זו. 98% מהמהירות

זו הם $\frac{2401}{50}=48.02$

נפתור את המשוואה:

$$\frac{dv}{dt}=9.8-\frac{v}{5}=-\frac{1}{5}(v-49) \Rightarrow \frac{dv/dt}{v-49}=-\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\ln|v-49|=-\frac{1}{5} \Rightarrow \ln|v-49|=-\frac{1}{5}t+C$$

$$\Rightarrow v-49=\pm e^{C}e^{-\frac{1}{5}t} \Rightarrow v=ce^{-\frac{1}{5}t}+49$$

$$v(0)=c+49=0 \Rightarrow c=-49 \Rightarrow v=-49(e^{-\frac{1}{5}t}-1)$$

נפתור את המשוואה $v(t)=-49(e^{-\frac{1}{5}t}-1)=48.02$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{5}t}=-\frac{2401}{50}\cdot\frac{1}{49}+1=0.02 \Rightarrow -\frac{1}{5}t=\ln 0.02$$

$$\Rightarrow t=-5\ln 0.02 \approx 19.6$$

(ב) נמצא את המרחק שהגוף עובר בזמן זה.

$$\frac{dx}{dt}=v \Rightarrow x=\int v\,dt=\int(49-49e^{-\frac{1}{5}t})dt=49t+49\cdot 5e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$\Rightarrow x(-5\ln 0.02) = 49(-5\ln 0.02) + 49\cdot e^{\ln 0.02} \approx 963.4$$

- נפתור את בעיית תנאי ההתחלה $y'-y = 2te^{2t}$ $\quad y(0)=1$

נחפש גורם אינטגרציה $\mu(t)$ כך שנכפיל אותו של המשוואה

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} - \mu(t)y = 2te^{2t}\mu(t)$$

נגזרת של הפונקציה $\mu(t)y$. כלומר נרצה ש-

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} - \mu(t)y = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\cdot y$$

מספיק לקחת μ כך שמתקיימת המשוואה $\frac{d\mu}{dt} = -\mu$ אז ניקח

$\mu(t)=e^{-t}$. זאת פונקציה שאינה מתאפסת ולכן מספיק לפתור את

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu\frac{dy}{dt} - \mu y = 2te^{2t}\cdot\mu$$

$$\Rightarrow \mu y = \int 2te^{2t}\mu\, dt \Rightarrow y = \frac{1}{\mu}\int 2te^{2t}\mu\, dt$$

$$\Rightarrow y = 2e^{t}\int \underset{u}{t}\,\underset{v'}{e^{t}}dt = 2e^{t}\left[te^{t} - \int e^{t}dt\right] =$$

$$u=t \quad u'=1$$
$$v=e^{t} \quad v'=e^{t}$$
$$(uv)' = u'v+v'u$$
$$\Rightarrow uv = \int u'v + \int v'u$$
$$\Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

$$= 2e^{t}\left[te^{t} - e^{t} + C\right]$$

$$y(0) = 2(C-1) = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2e^{t}\left(te^{t} - e^{t} + \frac{3}{2}\right)$$

- נפתור את בעיית תנאי ההתחלה $ty' + 2y = t^2 - t + 1$ $\quad t>0 \quad y(1)=\frac{1}{2}$

ראשית, נרשום את המשוואה כך:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t^2 - t + 1$$

נכפיל אותה בגורם אינטגרציה $\mu(t)$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)\frac{2}{t}y = \mu(t)\left(t-1+\frac{1}{t}\right)$$

ונרצה שאגף שמאל יהיה הנגזרת של μy. כלומר

$$(\mu y)' = \mu\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu\frac{dy}{dt} + \mu\cdot\frac{2}{t}y$$

מספיק שיתקיים $\frac{d\mu}{dt} = \frac{2\mu}{t} \Leftarrow \frac{d\mu/dt}{\mu} = \frac{2}{t} \Leftarrow \frac{d}{dt}\ln|\mu| = \frac{2}{t}$

$\ln|\mu| = 2\ln|t| = 2\ln t \Leftarrow$ $\mu = \pm t^2$. ניקח למשל $\mu = t^2$.

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \frac{d\mu}{dt}y + \mu\frac{dy}{dt} = \mu\frac{dy}{dt} + \frac{2\mu}{t}\cdot y = \mu\left(t-1+\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \mu y = \int \mu\left(t-1+\frac{1}{t}\right)dt \Rightarrow y = \frac{1}{\mu}\int \mu\left(t-1+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{t^2}\int(t^3-t^2+t^1)dt=\frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+C\right]=$$
$$=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}+\frac{C}{t^2}$$
$$y(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{C}{1}=\frac{7}{6}+C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{1}{2}-\frac{7}{6}=\frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}+\frac{5}{3t^2}$$

- נפתור את בע"ת תנאי התחלה $y(\pi)=0$ $t>0$ $y'+\frac{2}{t}y=\frac{\cos t}{t^2}$

נחפש גורם אינטגרציה $\mu(t)$ כך ש-
$$(\mu y)'=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{2\mu}{t}y$$
מספיק למצוא μ שמקיימת $\frac{d\mu}{dt}=\frac{2\mu}{t}$, כלומר $\mu=t^2$. אז
$$\frac{d}{dt}(\mu y)=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{2\mu}{t}y=\mu\cdot\frac{\cos t}{t^2}$$
$$\Rightarrow \mu y=\int\mu\frac{\cos t}{t^2}dt\Rightarrow y=\frac{1}{\mu}\int\mu\frac{\cos t}{t^2}dt$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{t^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{t^2}(\sin t+C)$$
$$y(\pi)=\frac{1}{\pi^2}\cdot C=0\Rightarrow C=0\Rightarrow y(t)=\frac{\sin t}{t^2}$$

- נפתור את בע"ת תנאי ההתחלה $y(-1)=0$ $t^3y'+4t^2y=e^{-t}$

ראשית נכתוב את המשוואה כך:
$$\frac{dy}{dt}+\frac{4}{t}y=\frac{e^{-t}}{t^3}$$
נחפש גורם אינטגרציה μ כך שהאגף השמאלי של $\mu\frac{dy}{dt}+\frac{4\mu}{t}y=\mu\frac{e^{-t}}{t^3}$ הוא נגזרת של הפונקציה μy

כלומר נרצה ש-
$$\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{4\mu}{t}y$$
כך מספיק שיתקיים $\frac{d\mu/dt}{\mu}=\frac{4}{t}\Leftarrow\frac{d\mu}{dt}=\frac{4\mu}{t}$
$$\mu=\pm|t|^4=\pm t^4\Leftarrow\ln|\mu|=4\ln|t|\Leftarrow\frac{d}{dt}\ln|\mu|=\frac{4}{t}\Leftarrow$$
אז ניקח למשל $\mu=t^4$ אז
$$\frac{d}{dt}(\mu y)=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{4\mu}{t}y=\mu\frac{e^{-t}}{t^3}$$
$$\Rightarrow \mu y=\int\mu\frac{e^{-t}}{t^3}dt\Rightarrow y=\frac{1}{\mu}\int\mu\frac{e^{-t}}{t^3}dt$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{t^4}\int \underset{u}{t}\,\underset{v'}{e^{-t}}dt=\frac{1}{t^4}\left[-te^{-t}+\int e^{-t}dt\right]=$$

$u=t$ $u'=1$
$v=-e^{-t}$ $v'=e^{-t}$
$(uv)'=u'v+v'u$
$\Rightarrow uv=\int u'v+\int v'u$
$\Rightarrow \int uv'=uv-\int u'v$

$$= \frac{1}{t^4}\left[-te^{-t}-e^{-t}+C\right]$$
$$y(-1) = 1\left[1\cdot e - e + C\right] \;,\; C=0$$
$$\Rightarrow y(t) = -\frac{e^{-t}}{t^3}-\frac{e^{-t}}{t^4} \qquad t\neq 0$$

- נמצא את הערך y_0 שעבורו לבעיית ההתחלה $y'-y=1+3\sin t$ $\quad y(0)=y_0$
פתרון שנשאר סופי עבור $t\to\infty$.

נפתור את הבעיה. נחפש גורם אינטגרציה $\mu(t)$ רק שיתקיים

$$\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y = \mu\frac{dy}{dt}-\mu y$$

כלומר מספיק לקחת μ שמקיים $\frac{d\mu}{dt}=-\mu$ ולמשל $\mu=e^{-t}$. אז

$$\frac{d}{dt}(\mu y)=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y=\mu\frac{dy}{dt}-\mu y = \mu+3\mu\sin t$$
$$\Rightarrow \mu y = \int(\mu+3\mu\sin t)dt \Rightarrow y=\frac{1}{\mu}\int(\mu+3\mu\sin t)dt$$
$$\Rightarrow y = e^t\int(e^{-t}+3e^{-t}\sin t)dt =$$
$$= e^t\left[-\frac{(3\cos t+3\sin t+2)e^{-t}}{2}+C\right]$$
$$y(0) = -\frac{3+2}{2}+C = -\frac{5}{2}+C = y_0 \Rightarrow C=y_0+\frac{5}{2}$$

כדי ש-y תהיה סופית כאשר $t\to\infty$ מוכרח דרוש $C=0$ ואז $y=-\frac{5}{2}$.

- נתונה בעיית ההתחלה $y'-\frac{3}{2}y=3t+2e^t$ $\quad y(0)=y_0$
נמצא את הערך של y_0 שמפריד בין הפתרונות שמתבדרים ל-∞ כאשר $t\to\infty$ לבין אלה שמתבדרים ל-$-\infty$ כאשר $t\to\infty$.

ראשית, נפתור את המשוואה. נשתמש בגורם אינטגרציה μ רק ש-

$$\frac{d}{dt}(\mu y)=\mu\frac{dy}{dt}+\frac{d\mu}{dt}y=\mu\frac{dy}{dt}-\frac{3}{2}\mu y \qquad \text{כך} \quad \frac{d\mu}{dt}=-\frac{3}{2}\mu$$

ניקח למשל $\mu=e^{-\frac{3}{2}t}$. אז

$$\frac{d}{dt}(\mu y) = \mu\frac{dy}{dt}-\frac{3}{2}\mu y = 3\mu t+2\mu e^t$$
$$\Rightarrow \mu y=\int(3\mu t+2\mu e^t)dt \Rightarrow y=\frac{1}{\mu}\int(3\mu t+2\mu e^t)dt$$
$$\Rightarrow y=e^{\frac{3}{2}t}\int(3e^{-\frac{3}{2}t}\cdot t+2e^{-\frac{1}{2}t})dt =$$
$$= e^{\frac{3}{2}t}\left[-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}(2+6e^t+3t)+C\right] = -\frac{4}{3}-4e^t-2t+Ce^{\frac{3}{2}t}$$
$$y(0) = -\frac{4}{3}-4+C = y_0 \Rightarrow C=y_0+\frac{16}{3}$$

אם $C=0$ אז $y(t)\to-\infty$ ואילו אם $C>0$ אז $y(t)\to\infty$

אם $C<0$ אז $y(t)\to-\infty$ ולכן $y_0=-\frac{16}{3}$ מפריד בין הפתרונות.

- נראה שאם $a,\lambda>0$ ו- $b\in\mathbb{R}$ אז כל פתרון של המשוואה $y'+ay=be^{-\lambda t}$
מקיים $y \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$
נפתור את המשוואה. נחפש גורם אינטגרציה μ רק ש-

$$(\mu y)' = \mu y' + \mu' y = \mu y' + a\mu y$$

מספיק למצוא μ שיקיים $\mu' = a\mu$ אז ניקח למשל $\mu = e^{at}$ ואז

$$(\mu y)' = \mu y' + \mu' y = \mu y' + a\mu y = \mu b e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \mu y = \int \mu b e^{-\lambda t}\,dt \Rightarrow y = \frac{b}{\mu}\int \mu e^{-\lambda t}\,dt$$

נציב את μ ונקבל ש- $y(t) = be^{-at}\int e^{(a-\lambda)t}\,dt$

נפריד כעת לשני מקרים:

(א) $a=\lambda$ אז $y(t) = be^{-at}\int 1\,dt = be^{-at}(t+C)$

ומאחר ש- $0<a$ נקבל ש- $y(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$

(ב) $a\neq\lambda$. אז $y(t) = be^{-at}\left(\frac{1}{a-\lambda}e^{(a-\lambda)t}+C\right) =$

$$= \frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda t} + Cb\cdot e^{-at}$$

ומאחר ש- $a,\lambda>0$ נקבל ש- $y(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$

- נפתור את המשוואה הבאה $y' = \frac{x^2}{y}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y\,dy = x^2 dx \Rightarrow \int y\,dy = \int x^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow 3y^2 = 2x^3 + C \qquad y\neq 0$$

- נפתור את המשוואה הבאה $y' + y^2\sin x = 0$

$$\frac{dy}{dx} + y^2\sin x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2\sin x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y^2} = \int -\sin x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \cos x + C$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{C-\cos x}$$ אם $y\neq 0$

גם $y=0$ פתרון.

- נפתור את המשוואה $y' = (3x^2-1)/(3+2y)$ צריך להיות $y\neq -\frac{3}{2}$ אז

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-1}{3+2y} \Rightarrow (3+2y)dy = (3x^2-1)dx \Rightarrow \int(3+2y)dy = \int(3x^2-1)dx$$

$$\Rightarrow 3y + y^2 = x^3 - x + C$$

• נפתור את המשוואה $\frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$. כי משוואה שניתנת להפרדת משתנים:

$(y+e^{y})dy = (x-e^{-x})dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 + e^{y} = \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} + C \qquad y+e^{y} \neq 0$

• נפתור את המשוואה $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$ כי משוואה שניתנת להפרדת משתנים:

$(1+y^2)dy = x^2dx \Rightarrow y + \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow 3y + y^3 = x^3 + C$

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = (1-2x)y^2 \quad y(0) = -\frac{1}{6}$ אם $y \neq 0$

$\frac{dy}{dx} = (1-2x)y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = (1-2x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (1-2x)dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x - x^2 + C \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{C - x + x^2}$

$y(0) = \frac{1}{C} = -\frac{1}{6} \Rightarrow C = -6 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2-x-6}$

הפתרון מוגדר כאשר $x^2-x-6 \neq 0$ נפתור את המשוואה $x^2-x-6=0$

ומקבלים $x_{1,2} = -2, 3$ ⇐ פתרון קיים בקטע $(-2,3)$

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = (1-2x)/y \qquad y(1) = -2$

מהנתון נובע ש- $y \neq 0$. כי משוואה שניתנת להפרדת משתנים:

$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-2x)}{y} \Rightarrow y\,dy = (1-2x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = x - x^2 + C$

נמצא את C ע"י הצבה $(1,-2)$: $\frac{1}{2}\cdot 4 = 1-1+C \Rightarrow C = 2$

⇐ $y^2 = 2x-2x^2+4$ ⇐ $y = \pm\sqrt{2x-2x^2+4}$ אבל רק

הפתרון השלילי מקיים את תנאי ההתחלה ⇐ $y = -\sqrt{2x-2x^2+4}$

נמצא את תחום הקיום: צריך ש- $2x-2x^2+4 > 0$. אם נפתור

את $2x-2x^2+4 = 0$, $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{-4} < {-1 \atop 2}$

⇐ הפתרון קיים בקטע $(-1,2)$

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = 2x/(y+x^2y) \qquad y(0) = -2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+x^2y} = \frac{2x}{(1+x^2)}\cdot\frac{1}{y} \Rightarrow y\,dy = \frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \int y\,dy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \ln(1+x^2) + C \Rightarrow y^2 = 2\ln(1+x^2) + C$

נציב את תנאי ההתחלה $(0,-2)$ ונקבל $C = (-2)^2 - 2\ln 1 = 4$

⇐ $y^2 = 2\ln(1+x^2) + 4$ ומתנאי ההתחלה נובע $y = -\sqrt{2\ln(1+x^2)+4}$

הפתרון מוגדר בכל הישר הממשי $\mathbb{R}$.

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = \frac{2x}{1+2y}$ $\quad y(2)=0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y} \Rightarrow (1+2y)dy = 2x\,dx \Rightarrow \int(1+2y)dy = \int 2x\,dx$

$\Rightarrow y+y^2 = x^2+C \quad \Rightarrow C = y^2+y-x^2 = -2^2 = -4$

$\Rightarrow y+y^2 = x^2-4 \Rightarrow y^2+y-(x^2-4) = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(x^2-4)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{4x^2-15}}{2}$

מתנאי ההתחלה נובע ש- $y = \frac{-1+\sqrt{4x^2-15}}{2}$. פתרון זה קיים כאשר

$0 < 4x^2-15 \Rightarrow \frac{15}{4} < x^2 \Rightarrow$ קטע קיום שמכיל את 2 הוא

$(\frac{\sqrt{15}}{2}, \infty)$

• נפתור את בעיית תנאי ההתחלה $y' = \frac{3x^2-e^x}{2y-5}$ $\quad y(0)=1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-e^x}{2y-5} \Rightarrow (2y-5)dy = (3x^2-e^x)dx$

$\Rightarrow y^2-5y = \int(2y-5)dy = \int(3x^2-e^x)dx = x^3-e^x+C$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל $C = y^2-5y-x^3+e^x = 1-5+1 = -3$

$\Rightarrow y^2-5y = x^3-e^x-3$ ונבודד את y :

$y^2-5y-(x^3-e^x-3) = 0 \Rightarrow y = \frac{5\pm\sqrt{25+4(x^3-e^x-3)}}{2}$

מההגדרה ש- $y(0)=1$ נובע ש- $y = \frac{5-\sqrt{25+4(x^3-e^x-3)}}{2}$

תחום הקיום הוא התחום שמקיים $25+4(x^3-e^x-3) > 0$.

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = \frac{e^{-x}-e^x}{3+4y}$ $\quad y(0)=1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}-e^x}{3+4y} \Rightarrow (3+4y)dy = (e^{-x}-e^x)dx \Rightarrow \int(3+4y)dy = \int(e^{-x}-e^x)dx$

$\Rightarrow 3y+2y^2 = -e^{-x}-e^x+C$

נציב את תנאי ההתחלה $(0,1)$ ונקבל $3+2 = -1-1+C$

$\Rightarrow C=3 \Rightarrow 3y+2y^2 = 3-e^{-x}-e^x$. ונבודד את y :

$2y^2+3y-(3-e^{-x}-e^x) = 0 \Rightarrow y = \frac{-3\pm\sqrt{9+8(3-e^{-x}-e^x)}}{4}$

מתנאי ההתחלה נובע ש- $y = \frac{-3+\sqrt{9+8(3-e^{-x}-e^x)}}{4}$

• נפתור את בעיית ההתחלה $y^2\sqrt{(1-x^2)}\,dy = \arcsin x\,dx$ $\quad y(0)=0$

$y^2dy = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{\arcsin^2 x}{2}+C$

מתנאי ההתחלה נובע ש- $C=0$ לכן $y = \sqrt[3]{\frac{3\arcsin^2 x}{2}}$ ותחום

הקיום הוא תחום הקיום של arcsin שהוא $(-1,1)$

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = 2y^2 + xy^2$ $\quad y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = y^2(2+x) \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = (2+x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (2+x)\,dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = 2x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

נשים לב שאם $y=0$ הוא פתרון אבל לא אותו אנחנו מחפשים אז ניתן היה לחלק ב-y. נציב את תנאי ההתחלה $-\frac{1}{1} = C \Rightarrow C = -1$

⇐ $y = \frac{1}{1-2x-\frac{1}{2}x^2}$. נמצא את תחום הקיום

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4\cdot 2}}{2} < \begin{matrix} -2+\sqrt{6} \\ -2-\sqrt{6} \end{matrix}$$

ולכן נראה שתחום קיום הפתרון (הוא הקטע) $(-2-\sqrt{6}, -2+\sqrt{6})$

והוא גם כולל את 0.

מינימום של הפונקציה מתקבל בנקודה בתחום שבה $y'=0$ כלומר

$y^2(2+x) = 2y^2 + xy^2 = 0$, אז או ש- $y=0$ (וזה לא יכול להיות)

או ש- $x=-2$ וזה אכן קיים. ברור שזה מינימום משום שזה המקסימום

של המכנה... (פרבולה בוכה).

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = \frac{2\cos 2x}{3+2y}$ $\quad y(0) = -1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2x}{3+2y} \Rightarrow (3+2y)dy = 2\cos 2x\,dx \Rightarrow \int (3+2y)dy = \int 2\cos 2x\,dx$$

$$\Rightarrow 3y + y^2 = \sin 2x + C$$

מתנאי ההתחלה (נובע ש-) $C = 3y + y^2 - \sin 2x = -3+1-0 = -2$ לכן

$$y^2 + 3y - (\sin 2x - 2) = 0 \Rightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4(\sin 2x - 2)}}{2}$$

לפי תנאי ההתחלה (נובע ש-) $y = \frac{-3+\sqrt{9+4(\sin 2x-2)}}{2}$ ותחום הקיום

הוא כאשר $\sin 2x > -\frac{1}{4} \Leftarrow 1 + 4\sin 2x = 9 + 4\sin 2x - 8 > 0$

מקסימום של הפונקציה מתקבל כאשר $y' = 0$ ⇐ $2\cos 2x = 0$

⇐ $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (אכן $\sin \pi = 0 > -\frac{1}{4}$)

• נתונה המשוואה $\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}$. ע"י חלוקה ב-$x$ אפשר לרשום

$\frac{dy}{dx} = \frac{y/x - 4}{1 - y/x}$ (נגדיר $v = \frac{y}{x}$. אז מתקיים $\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2}y + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$

⇐ $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + \frac{y}{x} = x\frac{dv}{dx} + v$. נציב במשוואה ונקבל

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{dy}{dx} = \frac{y/x - 4}{1 - y/x} = \frac{v-4}{1-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v-4}{1-v} - v = \frac{v-4-v+v^2}{1-v} = \frac{v^2-4}{1-v}$$

נפתור משוואה זו ע"י הפרדת משתנים:

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-4}{1-v} \Rightarrow \frac{1-v}{v^2-4}dv=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{1-v}{v^2-4}dv=\int\frac{dx}{x}$$

נחשב את האינטגרל $\int\frac{1-v}{v^2-4}dv$:

$$\frac{1-v}{v^2-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{v-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{v+2} \Rightarrow \int\frac{1-v}{v^2-4}dv=-\frac{1}{4}\ln|v-2|-\frac{3}{4}\ln|v+2|$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\ln|v-2|-\frac{3}{4}\ln|v+2|=\ln|x|+C$$

נחליף חזרה את v ב- $\frac{y}{x}$ ונקבל

$$\ln\left|\frac{1}{(2-\frac{y}{x})^{1/4}(2+y/x)^{3/4}}\right|=\ln|x|+C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{(2-y/x)^{1/4}(2+y/x)^{3/4}}\right|=e^{\ln|x|+C}=C\cdot|x|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^{1/4}\cdot x^{3/4}}{(2x-y)^{1/4}(2x+y)^{3/4}}\right|=\left|\frac{x}{(2x-y)^{1/4}(2x+y)^{3/4}}\right|=C|x|$$

$$\Rightarrow C=|2x-y|^{1/4}|2x+y|^{3/4}$$

$$\Rightarrow |2x-y||2x+y|^3=C$$

- נפתור את המשוואה $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

נחלק ב- x^2 ונקבל

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y/x+(y/x)^2}{1}=1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

נסמן $v=\frac{y}{x}$ ⇐ $y=vx$ ⇐ $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v=1+v+v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=1+v^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{x} \Rightarrow \frac{dv}{1+v^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{1+v^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \arctan v=\ln x+C \Rightarrow \arctan\frac{y}{x}=\ln x+C$$

- נפתור את המשוואה $\frac{dy}{dx}=\frac{4y-3x}{2x-y}$ נחלק ב- x

ונקבל את המשוואה

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4y/x-3}{2-y/x}$$

נסמן $v=y/x$ ⇐ $y=vx$ ⇐ $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ נציב ונקבל

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v=\frac{4v-3}{2-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{4v-3}{2-v}-v=\frac{4v-3-v(2-v)}{2-v}=\frac{v^2+2v-3}{2-v}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{v^2+2v-3}{2-v} \Rightarrow \frac{2-v}{v^2+2v-3}dv=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2-v}{v^2+2v-3}dv=\int\frac{dx}{x}$$

נחשב את האינטגרל $\int\frac{2-v}{v^2+2v-3}dv$ מתקיים

$$\frac{2-v}{v^2+2v-3}=\frac{2-v}{(v-1)(v+3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{v-1}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{v+3}$$

$$\Rightarrow \int\frac{2-v}{v^2+2v-3}dv=\frac{1}{4}\int\frac{1}{v-1}dv-\frac{5}{4}\int\frac{dv}{v+3}=\frac{1}{4}\ln|v-1|-\frac{5}{4}\ln|v+3|$$

נציב $v=\frac{y}{x}$ ונקבל

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|-\frac{5}{4}\ln\left|\frac{y}{x}+3\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|^{1/4}\left|\frac{y}{x}+3\right|^{-5/4}=\ln|x|+C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y}{x}-1\right|^{1/4}\cdot\left|\frac{y}{x}+3\right|^{-5/4} = C|x|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y-x}{x}\right|^{1/4}\cdot\left|\frac{y+3x}{x}\right|^{-5/4} = C|x|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y-x}{x}\right|\left|\frac{y+3x}{x}\right|^{-5} = \left|\frac{y-x}{x}\right|\left|\frac{x}{y+3x}\right|^{5} = C|x|^4$$

$$\Rightarrow |y-x||x^5| = C|x|^5|y+3x|^5 \quad\Rightarrow\quad |y-x| = C|y+3x|^5$$

זה היה תחת ההנחה ש- $v\neq 1$ וש- $v\neq -3$. אם $v=1$ אז $y=x$ וזה גם פתרון (מתקבל עבור $c=0$). אם $v=-3$ אז $y=-3x$ וגם זה פתרון

• נפתור את המשוואה $\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{x-y}$. זוהי משוואה הומוגנית. נחלק ב- x ונקבל $\frac{dy}{dx}=\frac{1+3y/x}{1-y/x}$ נסמן $v=\frac{y}{x}$ אז $y=vx$ ו- $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$

נציב במשוואה ונקבל $x\frac{dv}{dx}+v=\frac{dy}{dx}=\frac{1+3y/x}{1-y/x}=\frac{1+3v}{1-v}$

$\Leftarrow$ $x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v}{1-v}-v=\frac{1+3v-v(1-v)}{1-v}=\frac{v^2+2v+1}{1-v}$ לכן $\frac{dv}{dx}=\frac{(v+1)^2}{1-v}\cdot\frac{1}{x}$

כלומר קיבלנו משוואה שניתנת להפרדת משתנים $\frac{1-v}{(v+1)^2}\cdot dv=\frac{dx}{x}$ כעת

$$\int\frac{1-v}{(v+1)^2}dv=\int\frac{1-v-1+1}{(v+1)^2}dv=2\int\frac{dv}{(v+1)^2}-\int\frac{v+1}{(v+1)^2}dv=-\frac{2}{v+1}-\ln|v+1|$$

$\Leftarrow$ פתרון המשוואה הוא $-\frac{2}{v+1}-\ln|v+1|=\ln|x|+C$. נציב $v=\frac{y}{x}$

ונקבל $-\frac{2x}{y+x}-\ln\left|\frac{y+x}{x}\right|=\ln|x|+C \Rightarrow -\frac{2x}{y+x}-\ln|y+x|=C$

זה היה תחת ההנחה ש- $v\neq-1$. אם $v=-1$ אז $y=-x$ ואפשר לראות שגם זה פתרון של המשוואה

• נפתור את המשוואה $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-3y^2}{2xy}$ נחלק ב- x^2 ונקבל $\frac{dy}{dx}=\frac{1-3(y/x)^2}{2y/x}$

נסמן $v=\frac{y}{x}$, כלומר $y=vx$ אז $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ נציב ונקבל

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{1-3v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-3v^2}{2v}-v=\frac{1-3v^2-2v^2}{2v}=\frac{1-5v^2}{2v}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{1-5v^2}{2v}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2v}{1-5v^2}dv=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2v}{1-5v^2}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{2v}{1-5v^2}=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dv}{1-\sqrt5 v}-\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dv}{1+\sqrt5 v}=-\frac15\ln|\sqrt5 v-1|-\frac15\ln|\sqrt5 v+1|$$

$$\Rightarrow \ln|5v^2-1|=-5\ln|x|+C \Rightarrow |5v^2-1|=C|x|^{-5}$$

$$\Rightarrow |5y^2-x^2|=C|x|^3$$

• במיכל יש 200 ליטר של תמיסת צבע בריכוז $1\,g/liter$. מים צלולים זורמים פנימה בקצב $2\,liter/min$ והתמיסה המעורבבת היטב זורמת החוצה באותו קצב. נמצא את הזמן שיעבור עד שריכוז הצבע בתמיסה יהיה 1% מהריכוז המקורי.

ראשית, נחפש משוואה שמתארת את כמות הצבע בתמיסה בזמן t.
נסמן את כמות הצבע ב- $Q(t)$ (בגרמים) אז מהנתונים

$$\frac{g}{min}\quad \frac{dQ}{dt} = \underbrace{\underbrace{2}_{\frac{liter}{min}}}_{\text{קצב כניסה}} \cdot \underbrace{\underbrace{0}_{\frac{g}{liter}}}_{\text{ריכוז שנכנס}} - \underbrace{\underbrace{2}_{\frac{liter}{min}}}_{\text{קצב יוצא}} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{Q}{200}}_{\frac{g}{liter}}}_{\text{ריכוז יוצא}} = -\frac{Q}{100} \qquad Q(0)=200\,g$$

נפתור את המשוואה: $\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{100} \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{100} \Rightarrow \ln|Q| = -\frac{1}{100}t + C$

$\Leftarrow$ $Q(t) = Ce^{-\frac{t}{100}}$ $\quad Q(0)=C$ לכן $C=200$ והפתרון המלא הוא $Q(t) = 200e^{-\frac{t}{100}}$.

בהתחלה הריכוז של התמיסה היה $1\,g/liter$. אז 1% ממנו הם $0.01\,g/liter$ וזה אומר שיש $0.01\cdot 200 = 2$ גרם צבע בתמיסה. נפתור אם כן את המשוואה $2 = Q(t) = 200e^{-\frac{t}{100}}$ $\Leftarrow$ $1 = 100e^{-\frac{t}{100}}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{100} = e^{-\frac{t}{100}}$ $\Leftarrow$ $\ln\frac{1}{100} = -\frac{t}{100}$ $\Leftarrow$ $t = -100\ln\frac{1}{100} \approx 460\,min$

• במיכל יש 100 ליטר מים צלולים. מים שמכילים $\frac{1}{2}$ גרם/ליטר מלח נכנסים למיכל בקצב 2 ליטר/דקה והתערובת יוצאת מהמיכל באותו קצב. אחרי 10 דקות התהליך מפסיק ומים צלולים נשפכים למיכל בקצב 2 ליטר/דקה ושם התערובת יוצאת מאותו קצב. נמצא את כמות המלח במיכל בתום 10 דקות נוספות. (נניח שבכל זמן התערובת אחידה).

ראשית נמצא את כמות המלח $Q(t)$ בתום 10 הדקות הראשונות. משוואת התהליך היא

$$\frac{dQ}{dt} = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{Q}{100} = 1 - \frac{Q}{50} \qquad Q(0)=0$$

נפתור את המשוואה - זוהי משוואה לינארית

$$\frac{dQ}{dt} = 1 - \frac{Q}{50} = \frac{50-Q}{50} \Rightarrow \frac{dQ}{Q-50} = -\frac{dt}{50} \Rightarrow \int\frac{dQ}{Q-50} = -\frac{1}{50}\int dt$$

$$\Rightarrow \ln|Q-50| = -\frac{t}{50} + C \Rightarrow Q-50 = Ce^{-t/50} \Rightarrow Q = Ce^{-t/50} + 50$$

$$Q(0) = C + 50 = 0 \Rightarrow C = -50 \Rightarrow Q = 50 - 50e^{-t/50}$$

$$\Rightarrow Q(10) = 50 - 50e^{-10/50} \approx 9.06\,g$$

אז בתום 10 הדקות הראשונות יש במיכל כ- 9.06 ג' מלח.

נתאר כעת את מה שקורה ב-10 הדקות הבאות. נסמן את כמות המלח ב- $Q(t)$ ו"נאפס" את הזמן. $Q(0)=9.06$ $\frac{dQ}{dt} = -2\cdot\frac{Q}{100} = -\frac{1}{50}Q$

$\Leftarrow$ כמו בשאלה הקודמת $Q(t)=9.06e^{-\frac{t}{50}}$. אז $Q(10) \approx 7.42\ g$

כלומר בסוף יש במיכל כ- 7.42 ג' מלח.

- נניח שסכום S_0 מושקע בתכנית עם ריבית שנתית r.

(א) נמצא את הזמן שלוקח לסכום להכפיל את עצמו. עפ"י הנתונים מתקיים

$\ln|S| = rt + C \Leftarrow \frac{dS}{S} = \frac{dt}{r} \Leftarrow S(0)=S_0 \quad \frac{dS}{dt} = rS$

נניח ש- $S = S_0e^{rt} \Leftarrow S(0)=C=S_0 \quad . \; S = Ce^{rt} \Leftarrow$

$\Leftarrow 2 = e^{rt} \Leftarrow 2S_0 = S_0e^{rt}$ אז $S(t)=2S_0$

. אז תוך $\frac{\ln 2}{r}$ שנים הסכום יוכפל. $t = \frac{\ln 2}{r} \Leftarrow \ln 2 = rt$

(ב) אם $r=7\%$ אז $t = \frac{\ln 2}{0.07} \approx 9.9$ שנים

(ג) נניח שהמטרה היא להכפיל את הסכום הראשוני ב-8 שנים. נמצא את הריבית השנתית הדרושה. ולמעשה המשוואה שיש לפתור היא

$8 = \frac{\ln 2}{r} \Leftarrow r = \frac{\ln 2}{8}$, כלומר הריבית היא כ- 8.66%

- משקיע צעיר משקיע k דולרים בשנה בתכנית עם ריבית שנתית r.

(א) נמצא את הסכום בתכנית בזמן t. נסמן ב- $S(t)$ את הסכום בזמן t. אז מהנתון $\frac{dS}{dt} = k + rS$, $S(0)=0$. הפתרון הוא

$$\frac{dS}{k+rS} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dS}{k/r+S} = dt \Rightarrow \frac{1}{r}\ln\left|S+\frac{k}{r}\right| = t \Rightarrow \ln\left|S+\frac{k}{r}\right| = rt$$

$$\Rightarrow S+\frac{k}{r} = Ce^{rt} \Rightarrow S = Ce^{rt}-\frac{k}{r} \quad S(0)=C-\frac{k}{r}=0 \Rightarrow C=\frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow S = \frac{k}{r}\left(e^{rt}-1\right)$$

(ב) אם $r=7.5\%$ נמצא את k שעבורו יהיו בחשבון בתום 40 שנה $10^6\$$. נפתור את המשוואה

$$k = \frac{10^6\cdot 0.075}{e^{0.075\cdot 40}-1} \approx 3929.68 \Leftarrow 10^6 = \frac{k}{0.075}\left(e^{0.075\cdot 40}-1\right)$$

(ג) אם $k=2000\$/year$ נמצא את r שעבורו בגיל 40 שנה יהיה $10^6\$$ בחשבון.

$$10^6 = \frac{2000}{r}\left(e^{r\cdot 40}-1\right) \Rightarrow r \approx 0.098 = 9.8\%$$

• סטודנט מלווה 8000$ לקניית רכב. המלווה גובה ריבית שנתית בגובה 10%. הסטודנט מחזיר k דולרים בשנה. נמצא k שעבור החוב ישולם תוך 3 שנים. נסמן ב- S את הסכום שנותר לסטודנט לשלם בזמן t. אז $S(0)=8000$ $\quad \frac{dS}{dt}=0.1S-k$

$$\Rightarrow \frac{dS}{0.1S-k}=dt \Rightarrow 10\cdot\frac{dS}{S-10k}=dt \Rightarrow 10\ln|S-10k|=t+C_1$$

$$\Rightarrow S-10k=ce^{0.1t} \Rightarrow S=ce^{0.1t}+10k$$

$$S(0)=C+10k=8000 \Rightarrow C=8000-10k \Rightarrow S=(8000-10k)e^{0.1t}+10k$$

אנחנו רוצים שבזמן $t=3$ לא יישאר לסטודנט חוב. כלומר

$$0=(8000-10k)e^{0.1\cdot 3}+10k \Rightarrow k\approx 3086.64$$

ב-3 שנים אלה הריבית ששולמה היא $3\cdot 3086.64-8000=1259.91$

• לגלאי יש סכום $S(t)$ מושקע בתכנית עם ריבית שנתית r. הגלאי מושך מהחיסכון k דולרים בשנה. בפתיחת התכנית הוא השקיע S_0.

(א) נמצא את $S(t)$. מהנתונים מתקיים $\frac{dS}{dt}=rS-k$

כמו בבעיה קודמת $S(t)=ce^{rt}+\frac{k}{r}$ $\quad S(0)=c+\frac{k}{r}=S_0$

$\Leftarrow c=S_0-\frac{k}{r} \Leftarrow S(t)=(S_0-\frac{k}{r})e^{rt}+\frac{k}{r}$.

(ב) נניח ש- S_0 ו- r קבועים ונמצא את $k=k_0$ שעבור $S(t)$ קבוע. נרצה ש- $\frac{dS}{dt}=0$. כלומר $rS-k=0 \Leftarrow S=\frac{k}{r}$.

אז נפתור את המשוואה $\frac{k}{r}=(S_0-\frac{k}{r})e^{rt}+\frac{k}{r} \Leftarrow (S_0-\frac{k}{r})e^{rt}=0$

ומכן $e^{rt}\neq 0 \Leftarrow S_0-\frac{k}{r}=0 \Leftarrow k_0=S_0r$.

(ג) נניח ש- $k>k_0$. אז $S(t)$ יורד. נמצא מתי $S(t)=0$

$(S_0-\frac{k}{r})e^{rt}+\frac{k}{r}=0 \Leftarrow e^{rt}=-\frac{k/r}{S_0-k/r}=-\frac{k}{k_0-k}$. (נבודד את t

ונקבל $rt=\ln\frac{k}{k-k_0}\ (>0)$ ומכן $t=\frac{1}{r}\ln\frac{k}{k-k_0}$

(3) אם $r=8\%$ ו- $k=2k_0$ אז $t=\frac{1}{0.08}\ln\frac{2k_0}{2k_0-k_0}=\frac{\ln 2}{0.08}\approx 8.66$

(ד) נניח שאדם בעל הון S_0 רוצה למשוך בשנה k דולרים יותר מ- t שנים. נמצא את k המקסימלי האפשרי. רוצים למצוא

ש- $S(t)>0=(S_0-\frac{k}{r})e^{rt}+\frac{k}{r}=\frac{k}{r}(1-e^{rt})+e^{rt}S_0$ מאחר ש- $r>0$

$\Leftarrow k(1-e^{rt})+re^{rt}S_0>0 \Leftarrow k(1-e^{rt})>-rS_0e^{rt} \Leftarrow k<\frac{rS_0e^{rt}}{e^{rt}-1}$

(1) נניח ש- $k=12{,}000$ מושך 20 שנה ו- $r=8\%$. נמצא את

ההשקעה המינימלית הדרושה כדי לאפשר את זה לפי הטענה הקודמת, צריך להתקיים $12{,}000 < \frac{0.08 S_0 e^{0.08\cdot 20}}{e^{0.08\cdot 20}-1}$ ⇐ $S_0 > 119715.52$.

- אוכלוסיה של יתושים באזור מסוים גדלה בקצב שתלוי ליניארית בגודל האוכלוסיה ובהיעדר גורמים אחרים האוכלוסייה מוכפלת כל שבוע. במקור היו באזור 200,000 יתושים. ציפורים אוכלות 20,000 יתושים ביום (= 140,000 יתושים בשבוע). נמצא את גודל האוכלוסיה בכל זמן נתון

נסמן את גודל האוכלוסיה בזמן t (נמדד בשבועות) ב- $P(t)$. אז מהנתונים נובע ש-

$$\underbrace{\frac{dp}{dt}}_{\text{יתושים/שבוע}} = \underbrace{r}_{1/\text{שבוע}}\underbrace{P}_{\text{יתושים}} - \underbrace{140{,}000}_{\text{יתושים/שבוע}} \qquad P(0)=200{,}000$$

כאשר r קבוע הגדילה. נמצא אותו. אם אין ציפורים, אז $\frac{dp}{dt}=rP$

ולכן $P(t)=Ce^{rt}$ ונתון $P(0)=P_0$ אז $C=P(0)=P_0$ אז $P(t)=P_0e^{rt}$

נתון ש- $P(1)=2P_0 = P_0e^r$ ⇐ $e^r=2$ ⇐ $r=\ln 2$.

⇐ אם נחזור למקרה של ציפורים נקבל $\frac{dp}{dt} = \ln 2\, P - 140{,}000$ (נפתור:

$$\frac{dp}{dt} = \ln 2\,(P - 140{,}000/\ln 2) \Rightarrow \ln|P-140000/\ln 2| = t\ln 2 + C$$

$$\Rightarrow P - 140{,}000/\ln 2 = ce^{t\ln 2} \Rightarrow P = ce^{t\ln 2} + 140{,}000/\ln 2$$

$$P(0) = C + 140{,}000/\ln 2 = 200{,}000 \Rightarrow C = 200{,}000 - 140{,}000/\ln 2$$

$$\Rightarrow P = (200{,}000 - 140{,}000\ln 2)e^{t\ln 2} + 140{,}000/\ln 2$$

$$\Rightarrow P \approx -1977.3e^{t\ln 2} + 201977.3$$

- נקבע איפה קיים פתרון יחיד לבעיות ההתחלה הבאות:

א) $(t-3)y' + \ln t \cdot y = 2t \qquad y(1)=2$

נעביר את המשוואה לצורה סטנדרטית: $y' + \frac{\ln t}{t-3}y = \frac{2t}{t-3}$

זאת משוואה ליניארית ולכן קיים פתרון יחיד היכן שהמקדמים רציפים. ⇐ $t\neq 3$ ו- $t>0$ ⇐ בקטע $(0,3)$ שמכיל את 1 יש פתרון יחיד

ב) $t(t-4)y'' + (t-2)y' + y = 0 \qquad y(2)=1$

נעביר את המשוואה לצורה סטנדרטית $y'' + \frac{t-2}{t(t-4)}y' + \frac{1}{t(t-4)}y = 0$

$t\neq 0$ ו- $t\neq 4$. $2\in(0,4)$ ולכן התחום המבוקש הוא $(0,4)$.

(ג) $y' + \tan t \, y = \sin t \qquad y(\pi) = 0$

כי משוואה לינארית ו- $\sin t$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ תחום קיום הפתרון נקבע ע"י תחום הרציפות של $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$. אנחנו רוצים ש- π יהיה בתחום ולכן התחום הרצוי הוא $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$

(זה התחום שמכיל את π ושם cos לא מתאפס)

(ד) $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2 \qquad y(-3) = 1$

נעביר את המשוואה לצורה סטנדרטית: $y' + \frac{2t}{(2-t)(2+t)}y = \frac{3t^2}{(2-t)(2+t)}$

נרצה ש- $t \neq \pm 2$ וש- -3 יהיה בתחום. לכן התחום הוא $(-\infty, -2)$

• נקבע את האזור שבו $f(t,y)$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות עבור המשוואות הבאות (ולכן יש מבטיח פתרון יחיד לכל בעיית התחלה בתחום)

(א) $y' = \frac{t-y}{2t+5y}$. ראשית, נרצה ש- $2t+5y \neq 0$ כלומר $y \neq -\frac{2}{5}t$

נגזור את f: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1(2t+5y) - 5(t-y)}{(2t+5y)^2}$

גם כן רציפה בכל הנקודות $y \neq -\frac{2}{5}t$ ולכן יש שני תחומים שבהם נוכל לדבר על פתרון: $y > \frac{2}{5}t$ ו- $y < -\frac{2}{5}t$

(ב) $y' = \sqrt{1-t^2-y^2}$. ראשית, רוצים ש- f תהיה מוגדרת צריך להתקיים $1-t^2-y^2 > 0$ כלומר $1 > t^2+y^2$

כלומר האזור מתוך מעגל היחידה. שם גם $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפה כי המכנה מוגדר $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{1-t^2-y^2}}$ ולא מתאפס ולכן הכל רציף.

(ג) $y' = \frac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$. יש שני תנאים כדי ש- f תהיה רציפה:

$ty \neq 0 \Rightarrow t \neq 0$ ו- $y \neq 0$. שנית $1-t^2+y^2 \neq 0$

שם גם הנגזרת לפי y רציפה

• נפתור את בעיית ההתחלה $y' = -\frac{4t}{y} \qquad y(0) = y_0$ כי משוואה

שפרידות והפרדת משתנים: $\frac{dy}{dt} = -\frac{4t}{y} \Rightarrow y\,dy = -4t\,dt \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -2t^2 + C$

$\Rightarrow y^2 + 4t^2 + C = 0 \qquad y(0) = y_0 \Rightarrow y_0^2 + C = 0 \Rightarrow C = -y_0^2$

$\Rightarrow y^2 + 4t^2 - y_0^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{y_0^2 - 4t^2}$

הפתרון מוגדר אם $y_0 \neq 0$ ואחרת, אם $y_0^2 - 4t^2 > 0$ כלומר $|y_0| > 2|t|$

• נפתור את בעיית ההתחלה $y'=2ty^2$ $y(0)=y_0$.

$$\frac{dy}{dt}=2ty^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=2t\,dt \Rightarrow -\frac{1}{y}=t^2+C \Rightarrow y=-\frac{1}{t^2+C}$$

פתרון זה מוגדר כאשר $y\neq 0$ ואז $C=-\frac{1}{y}-t^2=-\frac{1}{y_0}-0=-\frac{1}{y_0}$

ובהכרח $y_0\neq 0$ והפתרון קיים כאשר $t^2-\frac{1}{y_0}\neq 0$ כלומר $t\neq 1/\sqrt{y_0}$

עבור $y_0>0$ ואם $y_0<0$ אז הפתרון קיים ב- $(-\infty,\infty)$

אם $y_0=0$ אז הפתרון הוא $y\equiv 0$.

• נפתור את בעיית ההתחלה $y'+y^3=0$ $y(0)=y_0$

$$\frac{dy}{dt}=-y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3}=-dt \Rightarrow -\frac{1}{2y^2}=-t+C \Rightarrow \frac{1}{2y^2}=t+C$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{1}{2t+C} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{2t+C}}$$

נציב את תנאי ההתחלה $y(0)=y_0$ ונקבל $y_0^2=\frac{1}{C}$

אז אם $y_0\neq 0$ קיים פתרון $y=\pm\sqrt{\frac{1}{2t+1/y_0^2}}$ והוא מוגדר כאשר

$2t+\frac{1}{y_0^2}\neq 0 \Leftarrow t\neq -\frac{1}{2y_0^2}$. מאחר שמעוניינים בתחום שכולל את

0 צריך להסתפק ב- $(-\frac{1}{2y_0^2},\infty)$ אם $y_0=0$ אז $y\equiv 0$

פתרון שמוגדר בכל $\mathbb{R}$.

• נפתור את בעיית ההתחלה $y'=\frac{t^2}{y(1+t^3)}$ $y(0)=y_0$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t^2}{y(1+t^3)} \Rightarrow y\,dy=\frac{t^2}{1+t^3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{3t^2}{1+t^3}dt$$

$$\Rightarrow \int y\,dy=\frac{1}{3}\int\frac{3t^2}{1+t^3}dt+C \Rightarrow \frac{1}{2}y^2=\frac{1}{3}\ln|1+t^3|+C$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{2}{3}\ln|1+t^3|+C=\ln|1+t^3|^{2/3}+C$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{\ln|1+t^3|^{2/3}+C} \qquad y(0)=\pm\sqrt{C}=y_0\Rightarrow y_0^2=C$$

$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{\ln|1+t^3|^{2/3}+y_0^2}$$

נבחן את האפשרויות השונות. ללא תלות ב- y_0 צריך להתקיים $1+t^3\neq 0$

כלומר $t^3\neq -1$ כלומר $t\neq -1$. פרט לכך צריך להתקיים

$\ln|1+t^3|^{2/3}+y_0^2>0 \Leftarrow \ln|1+t^3|^{2/3}>-y_0^2 \Leftarrow |1+t^3|^{2/3}>e^{-y_0^2}$

$\Leftarrow |1+t^3|>e^{-3y_0^2/2}$. מאחר ש- $t\neq -1$ ואנחנו מעוניינים ב- 0

יהיה התחום נגביל ש- $-1<t$ ולכן $1+t^3>0 \Leftarrow t^3>e^{-3y_0^2/2}-1$

$\Leftarrow \infty>t>\sqrt[3]{e^{-3y_0^2/2}-1}$.

• א) נוודא שגם $y_1(t)=1-t$ וגם $y_2(t)=-t^2/4$ פתרונות
של בעיית ההתחלה $y'=\frac{-t+(t^2+4y)^{1/2}}{2}$ $y(2)=-1$

$y_1(2)=1-2=-1$ $y_2(2)=-2^2/4=-1$

$y_1'=-1$ $\frac{-t+(t^2+4-4t)^{1/2}}{2}=\frac{-t+t-2}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

$y_2'=-\frac{1}{2}t$ $\frac{-t+(t^2-\frac{4t^2}{4})^{1/2}}{2}=-\frac{1}{2}t$

⇐ שתי הפונקציות מקיימות את התנאים הדרושים.

ב) המשוואה לא מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות. כאשר,
אם $t^2+4y\le 0$, כלומר $4y<-t^2$ כלומר $y\le-\frac{t^2}{4}$
וזה בדיוק מה שקורה בנקודה $(2,-1)$.

ג) נניח ש- $t\ge -2c$. נראה ש- $y=ct+c^2$ מקיימת את המשוואה
ראשית, מהתנאי $t\ge -2c$ נקבל ש-

$$t^2+4y=t^2+4ct+4c^2\ge 4c^2-4\cdot c\cdot 2c+4c^2=0$$

לכן הביטוי מוגדר. כמו כן אם נציב את y נקבל

$$\frac{-t+(t^2+4ct+4c^2)^{1/2}}{2}=\frac{-t+t+2c}{2}=c=y'$$

אם $c=-1$ מתקיים גם תנאי ההתחלה $y(2)=-1\cdot 2+(-1)^2=-1$
ומתקבל הפתרון y_1. נראה שאין בחירה של c שנותנת את
הפתרון y_2. נניח שקיים c כך ש- $-t^2/4=ct+c^2$
זה צריך להיות נכון לכל t אבל הביטוי שלה לא יכול להיות כי
c קבוע.

• נראה שאם $y=\phi(t)$ פתרון של $y'+p(t)y=0$ אז $y=c\phi(t)$
גם פתרון לכל קבוע c. אכן

$$y'+p(t)y=c\phi'(t)+cp(t)\phi(t)=c(\phi'(t)+p(t)\phi(t))=c\cdot 0=0$$

• ג) נראה שהפתרון $y=\frac{\int\mu(s)g(s)ds+C}{\mu(t)}$ של המשוואה $y'+p(t)y=g(t)$
($\mu(t)=e^{\int p(s)ds}$) ניתן להירשם בצורה $y=cy_1(t)+y_2(t)$
כאשר c קבוע כלשהו זה ברור. ניקח $y_1=\frac{1}{\mu(t)}$;
$y_2=\frac{\int\mu(s)g(s)ds}{\mu(t)}$

ד) y_1 פתרון של $y'+p(t)y=0$ כי כאשר $g=0$ $y_2=0$ ונשארנו רק

עם y.

ג) y_2 פתרון של המשוואה המלאה משום שאפשר לקחת $c=0$ ועדיין מתקבל פתרון.

• משוואת ברנולי היא משוואה מהצורה $y' + p(t)y = q(t)y^n$

א) נפתור את משוואת ברנולי כאשר $n=0$. במקרה זה מדובר במשוואה לינארית רגילה שפתרונה $y = \frac{\int \mu(s)q(s)ds + C}{\mu(t)}$ כאשר $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$

אם $n=1$ אז נקבל המשוואה היא $y' + [p(t)-q(t)]y = 0$ וזה גם משוואה לינארית שפתרונה $\frac{C}{\mu(t)}$ כאשר $\mu(t) = e^{\int (p(t)-q(t))dt}$.

ב) נראה שאם $n \neq 0,1$ אז ההצבה $v = y^{1-n}$ מביאה את המשוואה לצורה לינארית: אם $v = y^{1-n}$ אז $\frac{dv}{dt} = (1-n)y^{-n}\cdot\frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{y^n}{1-n}\cdot\frac{dv}{dt} \Rightarrow y' + p(t)y = \frac{y^n}{1-n}\cdot\frac{dv}{dt} + p(t)\cdot y = q(t)y^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n}\cdot\frac{dv}{dt} + p(t)\cdot y^{1-n} = q(t) \Rightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dt} + p(t)v = q(t)$$

וזו משוואה לינארית מסדר ראשון שאותה יודעים לפתור...

• נפתור את המשוואה $t^2y' + 2ty - y^3 = 0$ $\quad t>0$

נחלק המשוואה היא $y' + \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}\cdot y^3$. זו משוואת ברנולי עם $n=3$

פה נבצע את ההצבה המשתנה $v = y^{1-3} = y^{-2}$ אז $\frac{dv}{dt} = -2y^{-3}\cdot\frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2y}\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{1}{-2y^3}\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}\cdot y^3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{2}{t}v = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} - \frac{4}{t}v = -\frac{2}{t^2}$$

זאת משוואה לינארית. נחפש גורם אינטגרציה μ רק ב-t.

$$(\mu v)' = \mu' v + v'\mu = \mu v' - \frac{4}{t}\mu v$$

מספיק למצוא μ רק ב-t. $\mu' = -\frac{4}{t}\mu \Leftarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{4}{t}dt \Leftarrow \ln|\mu| = -4\ln|t|$

$\Leftarrow \mu(t) = t^{-4}$. אז $(\mu v)' = -\mu\frac{2}{t^2} \Rightarrow \mu v = -2\int \mu/t^2\, dt$

$$\Rightarrow v = -\frac{2}{\mu}\int \frac{\mu}{t^2}dt = -\frac{2}{t^{-4}}\int t^{-4}\cdot t^{-2}dt = +2t^4\left[\frac{1}{5}t^{-5} + C_1\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{t} + Ct^4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5t}{2+5Ct^5}}$$

• נפתור את המשוואה $y'=ry-ky^2$ $\quad 0<r \quad 0<k$

ואז נעשה $y'-ry=-ky^2$ זו משוואת ברנולי עם $n=2$ לכן, נעשה

החלפת משתנה $v=y^{1-2}=y^{-1}$ $\Leftarrow$ $\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dt}$ $\Leftarrow$ $\frac{dy}{dt}=-y^2\cdot\frac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow y'=\frac{dy}{dt}=ry-ky^2=-y^2\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{r}{y}-k=-\frac{dv}{dt}=rv-k$$

אז צריך לפתור את המשוואה $\frac{dv}{dt}+rv=k$ כלומר

$$\frac{dv}{dt}=k-rv=-r\left(v-\frac{k}{r}\right) \Rightarrow \frac{dv}{v-k/r}=-r\,dt \Rightarrow \ln\left|v-\frac{k}{r}\right|=-rt+C$$

$$\Rightarrow v-\frac{k}{r}=ce^{-rt} \Rightarrow v=ce^{-rt}+\frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow y=1/v=\frac{r}{rce^{-rt}+k}$$

• נפתור את המשוואות המדויקות מבין המשוואות הבאות:

(א) $\underbrace{(2x+3)}_{M}+\underbrace{(2y-2)}_{N}y'=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial N}{\partial x}=0$

$\Leftarrow$ כן משוואה מדויקת. נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ כך ש-

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=N$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M=2x+3 \Rightarrow \phi(x,y)=\int(2x+3)dx+h(y)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=x^2+3x+h(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N \Rightarrow h'(y)=N=2y-2 \Rightarrow h(y)=y^2-2y$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=x^2+3x+y^2-2y$$

הפתרון של המשוואה הוא $x^2+y^2+3x-2y=C$

(ב) $\underbrace{(3x^2-2xy+2)}_{M}dx+\underbrace{(6y^2-x^2+3)}_{N}dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2x$

$\Leftarrow$ כן משוואה מדויקת. נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ כך ש-

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=N$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M=3x^2-2xy+2 \Rightarrow \phi(x,y)=\int(3x^2-2xy+2)dx+h(y)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=x^3-yx^2+2x+h(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N \Rightarrow -x^2+h'(y)=6y^2-x^2+3 \Rightarrow h'(y)=6y^2+3$$

$$\Rightarrow h(y)=2y^3+3y \Rightarrow \phi(x,y)=x^3-yx^2+2x+2y^3+3y$$

$\Leftarrow$ פתרון המשוואה הוא $x^3-yx^2+2x+2y^3+3y=C$

(ב) $\underbrace{(2xy^2+2y)}_{M}+\underbrace{(2x^2y+2x)}_{N}y'=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=4xy+2 \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4xy+2$

⇐ כי משוואה מדויקת. לכן נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ רק ש-

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=N$

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M=2xy^2+2y \Rightarrow \phi(x,y)=\int(2xy^2+2y)dx+h(y)$

$\Rightarrow \phi(x,y)=x^2y^2+2yx+h(y)$

$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N \Rightarrow 2yx^2+2x+h'(y)=2x^2y+2x \Rightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h=0$

$\Rightarrow \phi(x,y)=x^2y^2+2xy$

⇐ פתרון המשוואה היא $x^2y^2+2xy=c$

(ג) $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by}{bx+cy}$ ⇐ $\underbrace{(ax+by)}_{M}dx+\underbrace{(bx+cy)}_{N}dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=b \quad \frac{\partial N}{\partial x}=b$

⇐ כי משוואה מדויקת. נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ רק ש- $\frac{\partial\phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=N$

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M=ax+by \Rightarrow \phi(x,y)=\int(ax+by)dx+h(y)$

$\Rightarrow \phi(x,y)=\frac{a}{2}x^2+bxy+h(y)$

$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N \Rightarrow bx+h'(y)=bx+cy \Rightarrow h'(y)=cy \Rightarrow h(y)=\frac{c}{2}y^2$

$\Rightarrow \phi(x,y)=\frac{a}{2}x^2+bxy+\frac{c}{2}y^2$

⇐ פתרון המשוואה היא $ax^2+2bxy+cy^2=\alpha$

(ד) $\underbrace{(e^x\sin y-2y\sin x)}_{M}dx+\underbrace{(e^x\cos y+2\cos x)}_{N}dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=e^x\cos y-2\sin x \quad \frac{\partial N}{\partial x}=e^x\cos y-2\sin x$

⇐ כי משוואה מדויקת. לכן נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ רק ש- $\frac{\partial\phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=N$

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M=e^x\sin y-2y\sin x \Rightarrow \phi(x,y)=\int(e^x\sin y-2y\sin x)dx+h(y)$

$\Rightarrow \phi(x,y)=e^x\sin y+2y\cos x+h(y)$

$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N \Rightarrow e^x\cdot\cos y+2\cos x+h'(y)=e^x\cos y+2\cos x$

$\Rightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h=0 \Rightarrow \phi(x,y)=e^x\sin y+2y\cos x$

⇐ פתרון של המשוואה היא $e^x\sin y+2y\cos x=0$

(ה) $\underbrace{(e^x\sin y+3y)}_{M}dx-\underbrace{(3x-e^x\sin y)}_{N}dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=e^x\cos y+3 \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-3+e^x\sin y$

⇐ כי לא משוואה מדויקת!

$$\underbrace{\left(\frac{y}{x}+6x\right)}_{M}dx+\underbrace{(\ln x-2)}_{N}dy=0 \qquad x>0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x}$$

⇐ זו משוואה מדויקת. נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ כך ש- $\frac{\partial \phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=N$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=M=\frac{y}{x}+6x \Rightarrow \phi(x,y)=\int\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+h(y)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=y\ln x+3x^2+h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=N \Rightarrow \ln x+h'(y)=\ln x-2 \Rightarrow h'(y)=-2 \Rightarrow h=-2y$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=y\ln x+3x^2-2y$$

⇐ פתרון של המשוואה הוא $y\ln x+3x^2-2y=c$

• נפתור את בעיית ההתחלה הבאה ונקבע את תחום קיום הפתרון

$$\underbrace{(2x-y)}_{M}dx+\underbrace{(2y-x)}_{N}dy=0 \qquad y(1)=3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-1$$

⇐ זו משוואה מדויקת ונחפש פונקציה $\phi(x,y)$ כך ש- $\frac{\partial \phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=N$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=M=2x-y \Rightarrow \phi(x,y)=\int(2x-y)dx+h(y)=x^2-yx+h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=N \Rightarrow -x+h(y)=2y-x \Rightarrow h(y)=2y \Rightarrow h(y)=y^2$$

⇐ $\phi(x,y)=x^2-xy+y^2=C$ פתרון כללי של המשוואה

נציב את תנאי ההתחלה $(1,3)$: $1^2-1\cdot 3+3^2=1-3+9=7=C$

⇐ פתרון בעיית ההתחלה הוא $x^2-xy+y^2=7$.

נבודד את y: $y^2-xy+(x^2-7)=0 \Rightarrow y=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4x^2+28}}{2}$

מתנאי ההתחלה נובע ש- $y=\frac{x+\sqrt{28-3x^2}}{2}$

פתרון זה מוגדר כאשר $28-3x^2>0$ ⇐ $28>3x^2$

⇐ $\frac{28}{3}>x^2$. ⇐ הפתרון קיים ב- $\left(-\sqrt{\frac{28}{3}}, \sqrt{\frac{28}{3}}\right)$

• נמצא את הערך b שעבורו המשוואה $\underbrace{(xy^2+bx^2y)}_{M}dx+\underbrace{\overbrace{(x+y)x^2}^{x^3+x^2y}}_{N}dy=0$ היא מדויקת ונפתור אותה. מתקיים $\frac{\partial M}{\partial y}=2xy+bx^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+2xy$

⇐ $b=3$. נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ כך ש- $\frac{\partial \phi}{\partial x}=M \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=N$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=M=xy^2+3x^2y \Rightarrow \phi(x,y)=\int(xy^2+3x^2y)dx+h(y)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+x^3y+h(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=N \Rightarrow x^2y+x^3+h'(y)=x^3+x^2y \Rightarrow h'(y)=0 \Rightarrow h(y)=0$$

לכן פתרון המשוואה הוא $\phi(x,y) = x^2y^2+2x^3y = c$

• נראה שמשוואה $M(x)+N(y)y'=0$ שניתנת להפרדת משתנים היא גם מדויקת. מאחר ש- M פונקציה של x בלבד נקבל $\frac{\partial M}{\partial y}=0$ וכן מאחר ש- N פונקציה של y בלבד $\frac{\partial N}{\partial x}=0$ והמשוואה מדויקת.

• נראה שאם $\frac{N_x-M_y}{M}=Q$ פונקציה של y בלבד אז למשוואה הדיפרנציאלית $M+Ny'=0$ יש גורם אינטגרציה $\mu(y)=e^{\int Q(y)dy}$

נתבונן במשוואה החדשה $\underbrace{e^{\int Q(y)dy}M(x,y)}_{A}+\underbrace{e^{\int Q(y)dy}N(x,y)y'}_{B}=0$

נגזור את A ואת B:

$$\frac{\partial A}{\partial y}=e^{\int Q(y)dy}\cdot Q(y)M(x,y)+e^{\int Q(y)dy}M_y(x,y)$$

(גזירה של מכפלה)

$$\frac{\partial B}{\partial x}=e^{\int Q(y)dy}N_x(x,y)=e^{\int Q(y)dy}Q(y)M(x,y)+e^{\int Q(y)dy}M_y(x,y)$$

$$\frac{N_x-M_y}{M}=Q$$

$$\Rightarrow N_x=MQ+M_y$$

קיבלנו $\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}$ לכן המשוואה החדשה מדויקת.

באופן דומה אם $\frac{M_y-N_x}{N}=Q$ פונקציה של x בלבד אז $e^{\int Q(x)dx}$ גורם אינטגרציה.

• נפתור את המשוואה $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$

זוהי לא משוואה מדויקת כי $\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2x+3y^2$ $\frac{\partial N}{\partial x}=2x$

נשים לב ש- $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2}=3$ פונקציה של x בלבד לכן

$e^{\int 3dx}=e^{3x}$ גורם אינטגרציה אז נתבונן במשוואה החדשה:

$$\underbrace{(e^{3x}3x^2y+2e^{3x}xy+e^{3x}y^3)}_{M}dx+\underbrace{(e^{3x}x^2+e^{3x}y^2)}_{N}dy=0$$

נחפש פונקציה $\phi(x,y)$ רק ש- $\frac{\partial\phi}{\partial x}=M$ $\frac{\partial\phi}{\partial y}=N$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=M=3e^{3x}x^2y+2e^{3x}xy+e^{3x}y^3$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=\int(3e^{3x}x^2y+2e^{3x}xy+e^{3x}y^3)\,dx+h(y)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=\frac{(3x^2+y^2)e^{3x}y}{3}+h(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=N\Rightarrow (y^2+x^2)e^{3x}+h'(y)=e^{3x}(x^2+y^2)\Rightarrow h'(y)=0\Rightarrow h(y)=0$$

$\Leftarrow$ פתרון המשוואה הוא $(3x^2+y^2)e^{3x}y=c$