II

מערכות ליניאריות במקדמים קבועים.

6. מבוא

בסעיפים הקודמים מצאנו, שאת קבוצת הפתרונות של מערכת דיפרנציאלית ליניארית $\underline{x}'=A(t)\underline{x}$ (A מטריצה ריבועית מסדר n) אפשר להביע בעזרת n פתרונות בלתי-תלויים ליניארית. מתוכם הפקנו גם את פתרון המערכת האי-הומוגנית $\underline{x}'=A(t)\underline{x}+\underline{b}(t)$.
כיצד מוצאים n פתרונות כאלו? לא קיימת שיטה שכוחה יפה למקרה הכללי, אך גם כאן, במערכות, כמו בתיאוריה של משוואה ליניארית בודדת, אפשר לפתור כל מערכת הומוגנית, שמקדמיה קבועים, באמצעים אלגבריים בלבד.

תהי נתונה המערכת:

$$\underline{x}' = A\underline{x} \qquad (6.1)$$

(A מטריצה ריבועית, שרכיביה <u>*קבועים*</u>).
ננקוט כאן בשיטה, שהצליחה קודם לכן (סעיף *II.7*). מערכת (6.1) מעמידה קשר ליניארי בין נגזרות הפונקציות הנעלמות לבין הפונקציות עצמן, ובכך מרמזת לעבר הפונקציה האקספוננציאלית. ננסה, אם-כן, למלא את (6.1) בפונקציה שצורתה:

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{v} \qquad (6.2)$$

כאשר $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ הוא וקטור של <u>*קבועים*</u> (אשר לא כולם אפסים - אין לנו חפץ בפתרון הטריוויאלי).

מאחר ש-$\underline{v}$ הוא וקטור של קבועים הרי:

$$\underline{x}' = (e^{\lambda t}\underline{v})' = \lambda e^{\lambda t}\underline{v}$$

על-פי כללי הגזירה (ראה תשובה 9, חלק ה).

כמו כן:

$$A\underline{x} = A(e^{\lambda t}\underline{v}) = e^{\lambda t}(A\underline{v})$$

ראה שאלה 5 בנספח

ולכן מהצבת (6.2) במערכת (6.1) מתקבל (אחרי צמצום ב-$e^{\lambda t}$):

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \qquad (6.3)$$

הקשר (6.3) בין הוקטור $\underline{v}\neq\underline{0}$ לקבוע λ הוא אפוא תנאי הכרחי ומספיק לכך שפונקציה (6.2) תהיה פתרון לא טריוויאלי של מערכת (6.1). קשר זה מוביל למושגים היסודיים של ערך עצמי ווקטור עצמי.

7. וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

הגדרה III.16

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. אם מתקיים השוויון:

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \qquad (7.1)$$

כאשר $\underline{v}$ הוא וקטור n-ממדי <u>השונה מ-$\underline{0}$</u> ו-λ סקלר, אז λ נקרא <u>ערך עצמי</u> (eigenvalue) <u>של המטריצה A</u> ו-$\underline{v}$ נקרא <u>וקטור עצמי</u> (eigenvector) <u>של A השייך לערך העצמי λ</u>.

ערך עצמי מכונה לעתים "שורש אופייני" (characteristic root) או "ערך אופייני". וקטור עצמי מכונה בהתאם גם "וקטור אופייני" (characteristic vector). הסיבה לכינויים אלה תובהר בהמשך.

שאלה 26 — *התשובה בעמוד 110*

וקטור האפס, $\underline{0}$, מקיים $A\underline{0}=\lambda\underline{0}$ <u>לכל λ</u>. האם מכך נובע, כי כל סקלר λ הוא ערך עצמי של A?

דוגמאות והערות

א. וקטור $\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}$, שכן:

$$A\underline{v} = \begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 5\underline{v}$$

וקטור עצמי זה שייך לערך העצמי $\lambda=5$ של המטריצה A.

ב. הוקטור $\underline{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ איננו וקטור עצמי של המטריצה A שלעיל, שכן הוקטור:

$$A\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

איננו כפולה של הוקטור $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ג. אם λ הוא ערך עצמי של המטריצה A, אז וקטור עצמי $\underline{v}$, השייך ל-λ אינו נקבע ביחידות, וזאת מן הטעם הפשוט <u>שכל כפולה של</u> $\underline{v}$, $\alpha\underline{v}$ $(\alpha\neq 0)$, אף היא וקטור עצמי, השייך לאותו ערך עצמי λ.

שאלה 27 *התשובה בעמוד 110*

הוכח את הטענה האחרונה.

ד. בהגדרה *III.16* אין אנו מגבילים את עצמנו לתחום המספרים הממשיים. לדוגמא, הוקטור המרוכב $\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$ והסקלר המרוכב $\lambda=i$ מקיימים:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$$

בדוק!

לפיכך, הוקטור המרוכב:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי של המטריצה <u>*הממשית*</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, השייך לערך עצמי מרוכב $\lambda=i$.

שאלה 28 *התשובה בעמוד 110*

א. לגבי המטריצה A שלעיל בדוק, כי הוקטור $\underline{v}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A, השייך לערך עצמי $-i$.

ב. הכלל את התוצאה שקיבלת, והוכח, שאם וקטור מרוכב $\underline{v}$ הוא וקטור עצמי של מטריצה <u>*ממשית*</u> A, השייך לערך עצמי מרוכב $\lambda=\alpha+i\beta$, אז גם "הוקטור הצמוד", $\underline{v}^*$ (דהיינו הוקטור, שרכיביו הם הצמודים של רכיבי הוקטור $\underline{v}$) הוא וקטור עצמי של A, השייך לערך העצמי הצמוד $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$. הווה אומר הוכח, כי אם:

$$A\underline{v} = A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda\underline{v}$$

אז:

$$A\underline{v}^* = A\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \bar{\lambda}\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} = \bar{\lambda}\underline{v}^*$$

בהינתן מטריצה ריבועית A, כיצד נמצא את הערכים העצמיים שלה ואת הוקטורים העצמיים השייכים להם?

מהגדרה *III.16* נובע, כי λ הוא ערך עצמי של המטריצה A מסדר $n\times n$ אם ורק אם קיים וקטור $\underline{v}\neq\underline{0}$ המקיים:

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \tag{7.1}$$

אולם:

$$\lambda\underline{v} = \lambda(I\underline{v}) = (\lambda I)\underline{v}$$

I היא מטריצת היחידה מסדר *n*.

ולכן שוויון (7.1) שקול לשוויון:

$$(\lambda I)\underline{v}-A\underline{v} = \underline{0}$$

לאמור:

$$(\lambda I-A)\underline{v} = \underline{0} \tag{7.2}$$

על-פי החוק הדיסטריבוטיבי. ראה נספח לכרך זה, פסקה 10.

אם נסתכל בוקטור:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

כעל נעלם, הרי ששוויון (7.2) אינו אלא מערכת לינארית הומוגנית של n משוואות ב-n נעלמים $v_1,\dots,v_n$. התנאי $\underline{v}\neq\underline{0}$ שקול לכך, שלמערכת (7.2) יהיה פתרון לא טריוויאלי, וזה יתקיים אם ורק אם הדטרמיננטה של המערכת מתאפסת, דהיינו:

$$|\lambda I-A| = 0 \tag{7.3}$$

ראה משפט 2 בנספח 1 לכרך השני (עמוד 252).

נוכל לסכם דיון זה במשפט:

משפט III.17

הסקלר λ הוא ערך עצמי של המטריצה A אם ורק אם $|\lambda I-A|=0$.

דוגמאות

א. נתבונן במטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I-A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A| = (\lambda-1)(\lambda-3)-(-2)(-4) = \\ = \lambda^2-4\lambda-5$$

לכן התנאי $|\lambda I-A|=0$ פירושו:

$$\lambda^2-4\lambda-5 = 0$$

למשוואה זו שני שורשים $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-1$, וממשפט *III.17* נסיק, כי ערכים אלה (ורק הם) הם הערכים העצמיים של A.

נמשיך בחישוב הוקטורים העצמיים, השייכים לערכים הללו.

וקטור עצמי $\underline{v}$, השייך לערך העצמי λ, מקיים את משוואה

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2x-2y=0$

$-4x-4y=0$

$$(\lambda I-A)\underline{v} = \underline{0}$$

עבור $\lambda=5$ המטריצה $5I-A$ היא:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן משוואה (7.2) הופכת למשוואה:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

דהיינו:

$$\begin{cases} 4v_1-2v_2 = 0 \\ -4v_1+2v_2 = 0 \end{cases}$$

בשל בחירתו של λ (כשורש של המשוואה $|\lambda I-A|=0$) חייב להיות למערכת זו פתרון לא טריוויאלי. ואכן קיים פתרון כזה, למשל:

השווה לדוגמא א שבעמוד 35.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

זהו, אם-כן, וקטור עצמי השייך לערך העצמי $\lambda=5$.

שאלה 29 *התשובה בעמוד 111*

רשום את כל הוקטורים העצמיים השייכים לערך העצמי $\lambda=5$.

לגבי הערך העצמי השני, $\lambda_2=-1$, נקבל, כי כל הוקטורים העצמיים השייכים לו, מקיימים את המערכת:

$$((-1)I-A)\underline{v} = 0$$

דהיינו:

בדוק!

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

למערכת זו קיים פתרון לא טריוויאלי:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

זהו וקטור עצמי של A השייך לערך העצמי $\lambda=-1$. אוסף כל הוקטורים העצמיים השייכים לערך העצמי הזה נתון על-ידי:

בדוק!

$$\left\{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle|\ \alpha\neq 0 \text{ ,כלשהו } \alpha\right\}$$

ב. נתבונן במטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I-A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A| = (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+3)-(-\lambda+3)+(-1+\lambda-2)=$$

$$= \lambda^3-8\lambda^2+21\lambda-18$$

לכן התנאי $|\lambda I-A|=0$ פירושו:

$$\lambda^3-8\lambda^2+21\lambda-18 = 0$$

על-ידי בדיקת המחלקים של האיבר החופשי נמצא, כי למשואה זו שני שורשים: $\lambda_1=2$ ו-$\lambda_2=3$ (שורש כפול).

בדוק!

על-פי משפט *III.17* אלה הם הערכים העצמיים של המטריצה הנתונה. וקטורים עצמיים השייכים לערך העצמי $\lambda=2$, אפשר למצוא מתוך התנאי $(2I-A)\underline{v}=\underline{0}$, דהיינו:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

או:

$$\begin{cases} -2v_1+v_2+v_3 = 0 \\ -v_1 \quad +v_3 = 0 \\ -v_1+v_2 \quad = 0 \end{cases}$$

משתי המשוואות האחרונות נובע, כי $v_1=v_2=v_3$, ובהתמלא תנאי זה תתקיים גם המשוואה הראשונה (בדוק). מכאן נובע ש-$\underline{v}$ הוא וקטור עצמי השייך ל-$\lambda=2$, אם ורק אם שלושת רכיביו שווים. לפיכך, הוקטור $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ יחד עם כל כפולותיו $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\alpha\neq 0)$, הם כל הוקטורים העצמיים השייכים ל-$\lambda=2$.

שים לב, שהמשוואה הראשונה היא סכום של שתי המשוואות האחרונות, וניתן לסלקה מן המערכת.

עבור הערך העצמי האחר, $\lambda=3$, נקבל:

$$(3I-A)\underline{v} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1+v_2+v_3 = 0 \\ -v_1+v_2+v_3 = 0 \\ -v_1+v_2+v_3 = 0 \end{cases}$$

מערכת זו מצטמצמת _למשוואה אחת:_

$$v_1 = v_2+v_3 \qquad (*)$$

ואת אוסף כל פתרונותיה אפשר לתאר כך: בוחרים את v_2 ואת v_3 באופן שרירותי, ואילו את v_1 מחשבים לפי הנוסחה (*). כלומר אוסף כל הוקטורים העצמיים השייכים ל-$\lambda=3$ יירשם בצורה:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אנו למדים מכאן, שלערך העצמי הכפול $\lambda=3$ שייכים שני וקטורים עצמיים _בלתי תלויים לינארית_

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וכל וקטור עצמי אחר (השייך ל-$\lambda=3$) הוא צירופם הלינארי של שני הוקטורים הללו.

ג. בדוגמא האחרונה גילינו, כי לערך העצמי ה"כפול" שייכים שני וקטורים עצמיים, שהם בלתי-תלויים לינארית. לא תמיד כאלו הם פני הדברים.
נתבונן לדוגמא במטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I-A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A| = (\lambda-1)^2$$

ולכן למשוואה $det(\lambda I-A)=0$ שורש אחד $\lambda=1$ (שורש כפול).

שאלה 30 התשובה בעמוד 111

רשום את אוסף כל הוקטורים העצמיים של A, השייכים לערך העצמי $\lambda=1$. האם תוכל למצוא בתוך האוסף הזה שני וקטורים בלתי-תלויים לינארית?

ד. נשלים את מגוון הדוגמאות על-ידי בחינת המטריצה:

ראה הערה ד בעמוד

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I-A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A| = \lambda^2+1$$

למשוואה זו שני שורשים מרוכבים צמודים: $\lambda=\pm i$. את הוקטור העצמי, השייך לערך העצמי $\lambda=i$ נמצא מתוך התנאי:

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} iv_1+v_2 = 0 \\ -v_1+iv_2 = 0 \end{cases}$$

המשוואה השנייה היא כפולה (ב-i) של המשוואה הראשונה, ולכן המערכת מצטמצמת למשוואה אחת:

$$iv_1+v_2 = 0$$

ומכאן, שוקטור עצמי השייך ל-$\lambda=i$ הוא למשל הוקטור:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$$

כל כפולה של $\underline{v}$ (בסקלר ממשי או מרוכב) אף היא וקטור עצמי השייך ל-$\lambda=i$.

עבור הערך העצמי הצמוד $\lambda=-i$ נקבל:

$$\begin{cases} -iv_1+v_2 = 0 \\ -v_1-iv_2 = 0 \end{cases}$$

המשוואה השנייה היא כפולה (ב-$-i$) של הראשונה, ולכן המערכת מצטמצמת למשוואה אחת:

$$-iv_1+v_2 = 0$$

מכאן נמצא, כי הוקטור $\underline{v}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}$, הצמוד לוקטור $\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$, הוא וקטור עצמי השייך לערך העצמי $\lambda=-i$.

למסקנה זו יכולנו להגיע ללא חישובים. ראה שאלה 28 ב.

בדוגמאות, אשר הובאו לעיל, חישבנו את הדטרמיננטה $|\lambda I-A|$, ומצאנו כי היא *פולינום ב-λ*. בדוגמאות א, ג ו-ד היה זה פולינום ריבועי ובדוגמא ב - פולינום ממעלה שלישית. כללית, *הדטרמיננטה $|\lambda I-A|$ היא פולינום ב-λ, שמעלתו כסדר המטריצה A.*

מפאת קוצר היריעה לא נוכיח טענה זו. את הוכחתה תוכל למצוא בקורס "אלגברה לינארית" (כרך שביעי, עמוד 77).

הפולינום $|\lambda I-A|$ מכונה *הפולינום האופייני של המטריצה A*, והמשוואה $|\lambda I-A|=0$, ששורשיה הם הערכים העצמיים של A, מכונה *המשוואה האופיינית של המטריצה A*. במינוח זה נקרא משפט III.17 כך:

משפט III.17'

λ הוא ערך עצמי של המטריצה A, אם ורק אם λ הוא שורש של הפולינום האופייני $|\lambda I-A|$.

בשל כך קוראים לערך עצמי גם בשם "שורש אופייני" (ראה הערת שוליים, שמול הגדרה III.16).

הערות

1. כפי שצוין לעיל, $|\lambda I-A|$ הוא פולינום ממעלה n (כאשר n הוא הסדר של המטריצה A), ולכן המשוואה האופיינית של A היא משוואה אלגברית ממעלה n. למשוואה זו יש לכל היותר n שורשים שונים, ולכן למטריצה A מסדר n יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים.

הריבוב של ערך עצמי הוא הריבוב של λ כשורש של הפולינום האופייני.

2. אם $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הם ערכים עצמיים שונים בעלי הריבובים $n_1,\dots,n_k$ בהתאמה, אז $n_1+\dots+n_k=n$ כאשר n הוא הסדר של המטריצה A. (ראה משפט 7 בנספח 3 בכרך השני.)
בפרט אם למשוואה האופיינית n שורשים *שונים*, אז כל שורש הוא בעל מידת ריבוב *1*, דהיינו שורש *פשוט*.

ראה שאלה 27.

ראה דוגמא א.

3. כבר נוכחנו לדעת, שאם $\underline{v}$ הוא וקטור עצמי של A, השייך לערך עצמי λ, אז כל כפולותיו $\alpha\underline{v}$ $(\alpha\neq 0)$ אף הן וקטורים עצמיים השייכים ל-λ. מן הדוגמאות שהבאנו לעיל עולה, כי כפולות אלו אף ממצות את אוסף הוקטורים העצמיים השייכים ל-λ, אם λ הוא שורש אופייני *פשוט*. אם λ הוא שורש אופייני *כפול*, אז עדיין ייתכן, כי כל הוקטורים העצמיים השייכים לו הם כפולותיו של אחד מהם (ראה דוגמא ג), אך ייתכן גם, כי קיימים *שני וקטורים עצמיים בלתי-תלויים לינארית* השייכים לערך עצמי כפול (ראה דוגמא ב).
על כל פנים, מספר הוקטורים העצמיים הבלתי-תלויים לינארית, אשר שייכים לאותו ערך עצמי λ, לעולם *איננו עולה על* ריבובו של λ כשורש של הפולינום האופייני $|\lambda I-A|$.

להוכחת טענה זו - ראה קורס "אלגברה לינארית", כרך שביעי, משפט VII.20.

בפרט, אם לפולינום האופייני *n שורשים שונים*, אז כל שורש הוא פשוט, וממילא כל הוקטורים השייכים לו הם כפולותיו של אחד מהם.

8. פתרון מערכת דיפרנציאלית לינארית הומוגנית במקדמים קבועים

נשוב אל המערכת הדיפרנציאלית הלינארית ההומוגנית:

$$\underline{x}' = A\underline{x} \qquad (8.1)$$

אשר מקדמיה קבועים, כשבאמתחתנו הכלים הדרושים מתורת המטריצות.

20218

III

שיטות פתרון למשוואות לינאריות מסדר שני

הדיונים שבפרק הקודם ספקו לנו מידע על היקפה של קבוצת הפתרונות של משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, אך עד עתה אין באמתחתנו שיטה למציאת פתרונות. כאן, שלא כבתחום המשוואות הלינאריות מסדר ראשון, אין שיטה שכוחה יפה למקרה הכללי. פרק זה יפרט דרכי פתירה המתאימות למשוואות לינאריות מסוימות. בסעיף 3 מצאנו שפתרונה הכללי של משוואה לינארית מסדר שני נרשם כסכום של:

(1) פתרונה הכללי של משוואה הומוגנית (המשוואה "הקצוצה"),

ו-(2) פתרון פרטי של המשוואה הנתונה.

בהמשך הפרק ניווכח, שבתהליך פשוט אפשר להפיק את (2) מתוך (1), וממילא הבעיה הבסיסית היא פתירת משוואות הומוגניות.

7. משוואה הומוגנית שמקדמיה קבועים

בסעיף זה נשתמש בתכונות הבסיסיות של מספרים מרוכבים. תכונות אלה מסוכמות בנספח 2.

משוואה הומוגנית שמקדמיה קבועים תירשם בכתיב הסטנדרטי כך:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (7.1)$$

כאשר a, b, ו-c קבועים ו-$a\neq 0$.

מהתיאוריה שבפרק הקודם ידוע לנו, שלמשוואה (7.1) יש מערכת בסיסית של שני פתרונות בלתי-תלויים לינארית (יש אינסוף מערכות כאלו), והפתרון הכללי הוא צירוף לינארי של השניים. עובדה זאת אינה תלויה בשיטה הננקטת למציאת מערכת בסיסית. נפנה אפוא אל דרך הניסוי וההשערה.

אנו רגילים לראות את המשוואה כאשר y'' מופיע עם המקדם 1 (הצורה (6.1)). דבר זה יושג בנקל אם נחלק את (7.1) בקבוע $a\neq 0$:

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0$$

משוואה (7.1) מצביעה על כך שקיים קשר לינארי בין פונקציית הפתרון ושתי נגזרותיה. מוכרת לנו פונקציה פשוטה שזהו חותמה - הפונקציה המעריכית. לפיכך, ננסה ונבדוק שמא יש פתרון שצורתו:

$$y(x) = e^{\lambda x} \qquad (\lambda \text{ - קבוע}) \tag{7.2}$$

פונקציה זו מקיימת:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned} \tag{7.3}$$

נציב את (7.2) ואת (7.3) במשוואה (7.1), ונקבל:

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

או:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$$

מכאן מתחייב (שהרי $e^{\lambda x}\neq 0$ לכל x):

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{7.4}$$

הווה אומר, λ הוא שורש של המשוואה הריבועית (7.4). משוואה זו נקראת <u>המשוואה האופיינית</u> (הצמודה למשוואה (7.1)). נסכם: תנאי (הכרחי ומספיק) לכך ש-$e^{\lambda x}$ פתרון של המשוואה (7.1) הוא היות הקבוע λ שורש של המשוואה האופיינית (7.4). האם יש קבועים λ המקיימים את משוואה (7.4)? בתוך שדה המספרים המרוכבים יש שורש לכל פולינום ריבועי, ואופיים של שורשי (7.4) תלוי בסימנה של הדיסקרימיננטה b^2-4ac. נפרט את האפשרויות זו אחר זו.

שים-לב כי מקדמי המשוואה האופיינית הם כמקדמי המשוואה הדיפרנציאלית עצמה. בהמשך, נרשום את המשוואה האופיינית מבלי להציב את $e^{\lambda x}$ במשוואה הדיפרנציאלית הנתונה.

<u>I. $b^2-4ac > 0$</u>

במקרה זה קיימים למשוואה האופיינית (7.4) שני שורשים ממשיים ושונים זה מזה λ_1 ו-λ_2 וממילא קיימים למשוואה הנתונה (7.1) שני פתרונות:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

כדי להיווכח באי-תלותם הלינארית של הפתרונות נבדוק את הוורונסקיאן:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

על-פי הנתון $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ולכן $W(x) \neq 0$. הווה אומר, y_1 ו-y_2 בלתי-תלויים לינארית וממילא הפתרון הכללי של (7.1) הוא:

על-פי משפט II.18.

$$.y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

על-פי משפט II.19.

דוגמא

נפתור את המשוואה:

$$2y'' - y' - y = 0$$

זוהי משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים. המשוואה האופיינית שלה היא:

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

למשוואה זו שני שורשים ממשיים שונים: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. שורשים אלו מספקים לנו שני פתרונות בלתי-תלויים לינארית של המשוואה הנתונה e^x ו-$e^{-\frac{1}{2}x}$, ופתרונה הכללי של המשוואה הוא:

$$,y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

אין צורך לבדוק שוב ולודא כי שתי הפונקציות e^x ו-$e^{-\frac{1}{2}x}$ הן בלתי-תלויות לינארית, שכן עשינו זאת כבר באופן כללי.

שאלה 48 התשובה בעמוד 163

מצא את הפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y'' - 100y = 0$

ב. $y'' - 3y' - 4y = 0$

ג. $5y'' + 5y' - y = 0$

ד. $y'' = y'$

II. $b^2 - 4ac < 0$

במקרה זה יש למשוואה האופיינית (7.4) שני שורשים מרוכבים צמודים זה לזה:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad , \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

$(\beta \neq 0)$

ומיד מתעוררת השאלה מה פירוש הביטוי $e^{\lambda x}$ כאשר λ מספר מרוכב.

בטרם נשיב על שאלה זו נסטה קמעה מנושא הדיון ונדון בפונקציות מרוכבות, $f(x)$, של משתנה ממשי x, היינו בפונקציות בעלות הצורה:

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

כאשר $u(x)$ ו-$v(x)$ הן פונקציות ממשיות המוגדרות בקטע מסוים, I. הפונקציה $u(x)$ נקראת <u>החלק הממשי</u> של $f(x)$ $(u(x)=Ref(x))$ והפונקציה $v(x)$ נקראת <u>החלק המדומה</u> של $f(x)$ $(v(x)=Imf(x))$.
תהיינה:

$$f_1(x) = u_1(x) + iv_1(x)$$

$$f_2(x) = u_2(x) + iv_2(x)$$

שתי פונקציות מרוכבות המוגדרות בקטע מסוים I. הסכום f_1+f_2, המכפלה $f_1 \cdot f_2$ והמנה $\frac{f_1}{f_2}$ $(f_2 \neq 0)$ מוגדרים, כמו במקרה הממשי, על-ידי:

$$(f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

שאלה 49 התשובה בעמוד 164

תהיינה:

$$f_1(x) = sinx + icosx$$

$$f_2(x) = sin2x + icos2x$$

חשב את f_1+f_2, $f_1 \cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, $(1+i) \cdot f_1(x)$.

אם הפונקציות $u(x)$ ו-$v(x)$ גזירות נאמר שהפונקציה $f=u+iv$ <u>גזירה</u>, ונגדיר את נגזרתה על-ידי:

$$f'(x) \overset{def}{=} u'(x) + iv'(x)$$

שאלה 50 התשובה בעמוד 164

הוכח כי:

1. $(f_1+f_2)' = f_1'+f_2'$
2. $(Cf)' = Cf'$

(C קבוע מרוכב כלשהו).

דוגמאות

א. נתבונן בפונקציה:

$$f(x) = \cos\beta x + i\sin\beta x \tag{7.5}$$

(β מספר ממשי נתון).

הפונקציות $\cos\beta x$ ו-$\sin\beta x$ גזירות ולכן f גזירה, ונגזרתה היא:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos\beta x)' + i(\sin\beta x)' = \\ &= -\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x = \\ &= i\beta(\cos\beta x + i\sin\beta x) \end{aligned}$$

הווה אומר:

$$f'(x) = i\beta f(x)$$

קיבלנו אפוא שהנגזרת של הפונקציה הרשומה ב-(7.5) היא כפולה של הפונקציה עצמה. נביא דוגמא כללית יותר לפונקציות כאלה.

ב. נתבונן בפונקציה:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x = \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \end{aligned} \tag{7.6}$$

(α ו-β מספרים ממשיים נתונים), ונחשב את נגזרתה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x) + \\ &+ i(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) = \\ &= (\alpha+i\beta)e^{\alpha x}\cos\beta x + i(\alpha+i\beta)e^{\alpha x}\sin\beta x = \\ &= (\alpha+i\beta)(e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x) = \\ &= (\alpha+i\beta)f(x) \end{aligned}$$

בדוק!

ובכן, הפונקציה הרשומה ב-(7.6) היא בעלת התכונה:

$$f'(x) = (\alpha+i\beta)f(x) \tag{7.7}$$

אם $\beta=0$ הרי ש-$f(x)=e^{\alpha x}$, והנוסחה (7.7) אינה אלא התכונה הידועה של הפונקציה המעריכית: $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$.

מתורת המשוואות הליניאריות מסדר ראשון למדנו, שהפונקציה (הממשית) היחידה הפותרת את בעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (\lambda \text{ ממשי})$$

היא הפונקציה $y=e^{\lambda x}$. כלומר שתי המשוואות שלעיל מאפיינות את $e^{\lambda x}$. הפונקציה המרוכבת הרשומה ב-(7.6) מקיימת אף היא:

$$f' = \lambda f \qquad (\lambda=\alpha+i\beta)$$

ובנוסף לכך,

$$f(0) = 1 + 0i = 1$$

אם-כן, טבעי להגדיר את הפונקציה המעריכית $e^{(\alpha+i\beta)x}$ על-ידי הנוסחה (7.6) וכך אכן נעשה.

הגדרה II.21

יהי $\lambda=\alpha+i\beta$ מספר מרוכב כלשהו. <u>הפונקציה המעריכית המרוכבת</u> $e^{\lambda x}$ מוגדרת על-ידי:

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} \overset{def}{=} e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x) \qquad (7.8)$$

שים לב, אם $\beta=0$ (דהיינו, λ הוא מספר ממשי) אז $e^{\lambda x}$ אינה אלא הפונקציה המעריכית המוכרת.

לגבי הפונקציה המעריכית המרוכבת, כפי שהוגדר לעיל, מתקיימות כל התכונות הידועות של הפונקציה המעריכית הממשית.

שאלה 51 *התשובה בעמוד 165*

א. יהיו λ_1 ו-λ_2 שני מספרים מרוכבים. הוכח כי:

$$e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

ובפרט,

$$e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{(\alpha+i\beta)x}$$

ב. יהי λ מספר מרוכב כלשהו. הוכח כי $e^{\lambda x}\neq 0$ לכל x.

אם נבחר כ-λ מספר מדומה טהור, $\lambda=0+i\beta$, נקבל על-פי הגדרה II.21:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \qquad (7.9)$$

נציב במקום x את $(-x)$, ונקבל:

$$e^{-i\beta x} = \cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x) = \cos\beta x - i\sin\beta x \qquad (7.10)$$

מנוסחאות (7.9) ו-(7.10) נובע מיד כי:

$$\begin{cases} \cos\beta x = \dfrac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2} \\ \sin\beta x = \dfrac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i} \end{cases} \qquad (7.11)$$

בדוק!

הנוסחאות הרשומות ב-(7.11) נקראות נוסחאות אוילר (Euler).

נחזור, עתה, לפתרון משוואה (7.1). בראשית הסעיף ניסינו פונקציה מן הצורה $e^{\lambda x}$, וגילינו כי אם λ הוא שורש של המשוואה האופיינית אז $e^{\lambda x}$ הוא פתרון של משוואה (7.1). קביעה זו היתה פועל יוצא של שתי התכונות של הפונקציה המעריכית הממשית $e^{\lambda x}$:

1. $$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

2. לכל x, $$e^{\lambda x} \neq 0$$

אולם תכונות אלה מתקיימות גם כאשר λ הוא מספר מרוכב! הווה אומר, אם λ הוא שורש מרוכב של המשוואה האופיינית הרי ש-$e^{\lambda x}$ הוא פתרון (מרוכב) של המשוואה הנתונה (7.1). במקרה שאנו דנים בו, יש למשוואה האופיינית שני שורשים מרוכבים $\alpha \pm i\beta$ וממילא יש למשוואה (7.1) שני פתרונות מרוכבים:

ראה נוסחה (7.7) ושאלה 51 ב.

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} \tag{7.12}$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} \tag{7.13}$$

אנו מעוניינים, כמובן, בפתרונות ממשיים. כיצד נפיק אותם מ-y_1 ו-y_2 שלעיל? נשתמש בלינאריות של המשוואה הדיפרנציאלית (7.1). הוכחנו כבר (משפט 'II.3) שכל צירוף לינארי של שני פתרונות המשוואה אף הוא פתרון. דבר זה נכון גם לגבי צירוף של פתרונות מרוכבים עם מקדמים מרוכבים.

אין צורך להוכיח טענה זו, שהרי תכונת החיבור ותכונת הכפל של מספרים מרוכבים זהות לאלה של מספרים ממשיים. גם כללי הגזירה של פונקציות מרוכבות זהים לאלה של פונקציות ממשיות (ראה שאלה 50 לעיל). לכן ההוכחה, שניתנה בסעיף 3, כוחה יפה גם במקרה המרוכב.

אם כן, כל צירוף לינארי של הפתרונות y_1 ו-y_2 הרשומים ב-(7.12) ו-(7.13) הוא פתרון. בפרט, שתי הפונקציות:

ראה נוסחאות אוילר (7.11).

$$\hat{y}_1 = \frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\ \frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\hat{y}_2 = \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\ \frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

הן פתרונות.

פתרונות אלה הם בלתי-תלויים לינארית. ואכן:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x) \end{vmatrix}$$

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0$$

ולכן (על-פי משפט II.18) $\hat{y}_1$ ו-$\hat{y}_2$ הם פתרונות בלתי-תלויים ליניארית. הפתרון הכללי של משוואה (7.1) נרשם אפוא כך:

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x =$$
$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

על-פי משפט II.19.

כאשר C_1 ו-C_2 קבועים (ממשיים) שרירותיים.

דוגמאות

א.
$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$

ושורשיה הם:

$$\lambda_{1,2} = -3\pm\sqrt{9-25} = -3 \pm 4i$$

שני הפתרונות הבלתי-תלויים הם:

$$y_1(x) = e^{-3x}\cos 4x \quad , \quad y_2(x) = e^{-3x}\sin 4x$$

ופתרונה הכללי הוא:

$$y(x) = e^{-3x}(C_1\sin 4x + C_2\cos 4x)$$

ב.
$$y'' + \omega^2y = 0 \qquad (\omega>0)$$

המשוואה האופיינית היא: $\lambda^2+\omega^2=0$ ושורשיה הם: $\pm\omega i$.
כאן $\alpha=0$, $\beta=\omega$, ולכן הפתרון הכללי יירשם בצורה:

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$$

השווה לדוגמא בעמוד 55.

שאלה 52

התשובה בעמוד 165

פתור את המשוואות הבאות:

א. $y'' + 2y' + 4y = 0$

ב. $4y'' + 4y' + 5y = 0$

III. $b^2-4ac=0$

במקרה זה יש למשוואה האופיינית (7.4) שורש אחד (שורש "כפולי"):

$$\lambda = -\frac{b}{2a}$$

והוא מספק פתרון אחד של משוואה (7.1):

$$y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x} \qquad (7.14)$$

עלינו למצוא פתרון נוסף אשר יחד עם הראשון יהוו מערכת בסיסית של פתרונות. ננקוט כאן בתחבולה - נציג פונקציה נעלמת חדשה, $z(x)$, המוגדרת על-ידי השוויון:

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot z(x) \qquad (7.15)$$

בהמשך יתברר שתחבולה זו היא דרך שיטתית ומוכרת למציאת "הפתרון השני" (ראה סעיף 8).

ואת המשוואה הנתונה (7.1) נתרגם למשוואה בפונקציה הנעלמת $z(x)$. על-ידי גזירת שוויון (7.15) נקבל:

$$y'(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(-\frac{b}{2a}z(x) + z'(x)\right)$$

$$y''(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(\frac{b^2}{4a^2}z(x) - \frac{b}{a}z'(x) + z''(x)\right)$$

בדוק!

נציב ביטויים אלה ב-(7.1), ונקבל (תוך התחשבות בתנאי $b^2-4ac=0$):

$$z'' = 0.$$

שאלה 53 התשובה בעמוד 166

אשר זאת.

ומכאן, באינטגרציה פעמיים, מתקבל כי $z(x)$ <u>פונקציה לינארית</u> ב-x ($z=C_1x+C_2$). מעניינו כאן לא הפתרון הכללי, $z(x)$ אלא פתרון מסוים, שיתרום לבניית פתרון שני למשוואה הנתונה. נבחר בפתרון המסוים $z(x)=x$. הפתרון השני המתקבל למשוואה הנתונה הוא (על-פי (7.15)):

$$y_2 = e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot x \qquad (7.16)$$

שאלה 54 התשובה בעמוד 166

א. בדוק ואשר כי (7.16) הוא אכן פתרון.

ב. הוכח שהפתרונות y_1 ו-y_2 שהוצגו לעיל הם בלתי-תלויים לינארית.

ובכן, הפתרונות הרשומים ב-(7.14) וב-(7.16) מהווים מערכת בסיסית של פתרונות למשוואה (7.1), ופתרונה הכללי נרשם כך:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + C_2 x e^{-\frac{b}{2a}x} =$$

$$= (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{b}{2a}x}$$

דוגמא

נפתור את המשוואה:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

למשוואה זו שורש כפול $\lambda_1=\lambda_2=2$. לכן הפונקציות e^{2x} ו-xe^{2x} מהוות מערכת בסיסית של פתרונות, ופתרונה הכללי של המשוואה הוא:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$$

אין צורך לבדוק שוב ולודא שהפונקציות e^{2x} ו-xe^{2x} הן בלתי-תלויות לינארית. עשית זאת באופן כללי בשאלה 54 ב.

שאלה 55 התשובה בעמוד 167

מצא את הפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

ב. $4y'' - 12y' + 9y = 0$

ג. $y'' - 6y' + 9y = 0$

שאלה 56 התשובה בעמוד 168

פתור את בעיות הערכים ההתחלתיים הבאות:

א. $y'' - 6y' + y = 0$ $\quad y(2) = 0$ $\quad y'(2) = 0$

ב. $y'' + 4y' + 4y = 0$ $\quad y(0) = 1$ $\quad y'(0) = 3$

ג. $2y'' + y' - 10y = 0$ $\quad y(1) = 5$ $\quad y'(1) = 2$

ד. $y'' - 2y' + 2y = 0$ $\quad y(\pi) = 0$ $\quad y'(\pi) = -1$

את מסקנות הסעיף הזה נוכל לסכם בטבלה:

המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה -	$ay'' + by' + cy = 0$
המשוואה האופיינית הצמודה לה -	$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

שורשי המשוואה האופיינית	מערכת פתרונות בסיסית
λ_1,λ_2 ממשיים ו-$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$
λ_1,λ_2 ממשיים ו-$\lambda_1 = \lambda_2$	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$
λ_1,λ_2 מרוכבים $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

שאלה 57 התשובה בעמוד 169

דרך אלטרנטיבית לפתירת משוואה הומוגנית שמקדמיה קבועים מוצעת בתרגיל זה, לפי השלבים הבאים:

א. פתור תחילה משוואה "קנונית" לינארית הומוגנית מסדר שני:

$$y'' + Ay = 0$$

(A קבוע). בהתאם לסימנו של A:

1. אם $A=w^2$ חיובי, הפתרונות הבלתי-תלויים לינארית הם: $\sin wx$, $\cos wx$.
2. $A=-w^2$ שלילי, הפתרונות הבלתי-תלויים לינארית הם: e^{wx}, e^{-wx}.
3. $A=0$, הפתרונות הבלתי-תלויים לינארית הם: 1, x.

ב. הראה שכל משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני שמקדמיה קבועים אפשר לעטוף באיצטלה "קנונית" על-ידי החלפת המשתנה התלוי:

$$y(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \cdot z(x)$$

במה תלוי סימן A במשוואה ה"קנונית" המתקיימת על-ידי $z(x)$?

ג. על סמך (א) ו-(ב) פתור את משוואה (7.1). השווה לתהליך שהוצג בסעיף זה.

8. משוואה הומוגנית כללית – "הפתרון השני"

(הורדת סדר המשוואה)

בפרק הקודם למדנו כי על מנת לפתור משוואה לינארית הומוגנית כללית מסדר שני, די למצוא שני פתרונות בסיסיים.
בסעיף זה נראה, שלמעשה מספיק למצוא פתרון אחד (לא טריוויאלי) והפתרון הנוסף, "הפתרון השני" (בלתי-תלוי לינארית בראשון), ייבנה בעזרת הפתרון הראשון בשיטה שהשתמשנו בה כבר בדיון בסעיף הקודם.
נדגים את השיטה תחילה במשוואה הבאה:

$$y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0 \qquad (8.1)$$

זוהי משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בכל קטע, שאינו מכיל את הנקודה $x=0$. השיטה שנלמדה בסעיף 7 לא תעזור כאן, שכן משוואה (8.1) איננה משוואה עם מקדמים קבועים. (אם תתעקש ותנסה תיווכח שאין למשוואה פתרונות מן הצורה $e^{\lambda x}$, λ קבוע). אך נניח ששרתה עליך הרוח וגילית פתרון פשוט:

$$y_1(x) = x^3$$

יש מי שהגיע אל הפתרון הזה מתוך עיון במשוואה שהוביל לניחוש קולע ואפשר גם להגיע לפתרון על-ידי ההצבה: $y(x) = x^{\lambda}$.

נמצא פתרון שני, $y_2(x)$, בעזרת ההצבה:

$$y(x) = y_1(x)\cdot z(x) = x^3 z(x) \qquad (8.2)$$

על-ידי גזירת שוויון זה נקבל:

$$y'(x) = x^3z' + 3x^2z$$

$$y''(x) = x^3z'' + 6x^2z' + 6xz$$

נציב ביטויים אלה ב-(8.1), ונקבל משוואה דיפרנציאלית עבור $z(x)$:

$$x^3z'' + (6x^2-5x^2)z' + (6x-15x+9x)z = 0$$

אשר זאת.

דהיינו:

$$x^3z'' + x^2z' = 0$$

ואם נצמצם ב-x^3 נקבל:

$$z'' + \frac{1}{x}z' = 0$$

זוהי "משוואה חסרה מטיפוס ראשון". נפתור אותה על-ידי ההצבה:

ראה סעיף 2.

$$u(x) = z'(x) \qquad (8.3)$$

ונקבל:

$$u'(x) + \frac{1}{x}u(x) = 0$$

זוהי משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון, ופתרונה הכללי הוא:

$$u(x) = \frac{a}{x}$$

אין לנו עניין בפתרון הכללי של המשוואה, כיון שאנו מחפשים פתרון מסוים, $z(x)$, כך ש-y, כפי שהוצג ב-(8.2), ישמש פתרון שני (בלתי-תלוי לינארית בראשון) של המשוואה. לכן נבחר, למשל:

$$u(x) = \frac{1}{x}$$

נציב את $u(x)$ במשוואה (8.3), ונקבל משוואה מסדר ראשון עבור $z(x)$:

$$z'(x) = \frac{1}{x}$$

ועל-ידי אינטגרציה מתקבל:

$$z(x) = \ln|x|$$

(שוב בחרנו בפתרון מסוים של המשוואה).
נציב זאת ב-(8.2), ונקבל את הפתרון השני המבוקש:

$$y_2(x) = x^3\ln|x| \qquad (8.4)$$

שאלה 58 *התשובה בעמוד 172*

א. הראה כי $y_2(x)$ מ-(8.4) מקיים את משוואה (8.1).

ב. הוכח כי y_1 ו-y_2 מהווים מערכת יסודית (באיזה קטע?).

ג. רשום את הפתרון הכללי של (8.1).

בעקבות הדוגמא האחרונה נוכל לנסח את התהליך הכללי למציאת "הפתרון השני".

משפט II.22

אם $y_1(x)$ הוא פתרון של משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני בקטע I והוא שונה מאפס בקטע, אז פתרון נוסף של המשוואה (בקטע I), בלתי-תלוי לינארית ב-$y_1(x)$ ניתן למצוא בהצבה:

$$y(x) = y_1(x)\cdot z(x)$$

הצבה זו מובילה למשוואה דיפרנציאלית לינארית "חסרה" מסדר שני.

הוכחה

יהי $y_1(x)$ פתרון של המשוואה:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

בעלת מקדמים רציפים בקטע I ו-$y_1(x)\neq 0$ בקטע.
נבחר פונקציה נעלמת חדשה:

$$z(x) = \frac{y(x)}{y_1(x)}$$

זכור כי $y_1(x)\neq 0$ ב-I.

ונציב:

$$y(x) = y_1(x)\cdot z(x) \tag{8.5}$$

נגזור את (8.5), ונקבל:

$$y' = y_1 z' + y_1' z$$

$$y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z$$

נציב ביטויים אלה במשוואה עבור $y(x)$, ונקבל:

$$y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' + (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)z = 0 \tag{8.6}$$

בדוק!

כיון ש-y_1 פתרון של המשוואה ההומוגנית הנתונה הרי שהמקדם של z במשוואה (8.6) מתאפס.
משוואה (8.6) היא אפוא משוואה "חסרה":

$$y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' = 0$$

כזכור, פותרים משוואה כזו על-ידי ההצבה:

$$u(x) = z'(x) \tag{8.7}$$

ומתקבלת משוואה לינארית מסדר ראשון ב-$u(x)$:

$$y_1 u' + (2y_1' + p(x)y_1)u = 0 \tag{8.8}$$

דהיינו,

זכור כי $y_1(x)\neq 0$.

$$u' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)u = 0$$

המקדם של u הוא פונקציה רציפה, ולכן קיים למשוואה זו פתרון בכל הקטע I. כל פתרון, שאיננו הפתרון הטריוויאלי, שונה מאפס בכל הקטע I. יהי $u(x)$ פתרון אחד כזה. נציב אותו ב-(8.7). אינטגרציה של (8.7) תיתן מיד את $z(x)$, ובעקבותיו את הפתרון השני, $y_2(x)$, מתוך (8.5).

על-פי שאלה 12 ג בשיעור הראשון.

הוורונסקיאן של שתי הפונקציות, y_1 ו-y_2 הוא:

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 = \\ &= y_1(y_1 z' + y_1' z) - y_1' y_1 z = \\ &= y_1^2 z' = y_1^2 u \end{aligned}$$

על-פי (8.5), $y_2 = y_1 z$

כיון שלפי הנתון, y_1 שונה מאפס בקטע, והסקנו קודם ש-$u\neq 0$ בקטע, הרי שהוורונסקיאן לא מתאפס בקטע I, ולכן y_1 ו-y_2 מהווים מערכת בסיסית של פתרונות. ■

דוגמאות

א. $$y'' + (tgx)y' - (2tgx+4)y=0 \qquad (8.6)$$

מקדמי המשוואה אינם קבועים, אף-על-פי-כן, בדיקה ישירה מאשרת כי $y=e^{\lambda x}$, $\lambda=2$ הוא פתרון. נרשום:

$$y_1(x) = e^{2x}$$

שים-לב כי $y_1\neq 0$ כפי שנדרש במשפט II.22.

ונציב:

$$y(x) = e^{2x}\cdot z(x)$$

נעקוב אחר הטכניקה שניתנה בהוכחה שלעיל:

$$y'(x) = e^{2x}(z'+2z)$$

$$y''(x) = e^{2x}(z''+4z'+4z)$$

נציב את הביטויים: y, y' ו-y'' במשוואה (8.6), ונקבל:

$$e^{2x}(z''+4z'+4z) + (tgx)\cdot e^{2x}(z'+2z) - (2tgx+4)e^{2x}z = 0$$

ולאחר כינוס איברים וצמצום ב-$e^{2x}\neq 0$, מקבלים:

$$z'' + (4+tgx)z' = 0$$

שים-לב, שמקדמי z הצטמצמו לאפס כפי שנטען במשפט II.22

כלומר:

$$u' + (4+tgx)u = 0 \qquad (8.7)$$

כאשר:

$$u = z'$$

נפתור את משוואה (8.7) בהפרדת משתנים:

$$\frac{du}{u} + (4+tgx)dx = 0$$

$$\ell n|u| + 4x - \ell n|cosx| = 0$$

בחרנו בפתרון מסוים של המשוואה.

או:

$$u = e^{-4x}cosx \qquad (8.8)$$

$z(x)$ מתקבל על-ידי אינטגרציה:

$$z(x) = \int^x e^{-4t}costdt = \frac{1}{17}e^{-4x}(sinx-4cosx) \qquad (8.9)$$

בדוק! שים-לב ששוב בחרנו בפתרון מסוים.

ולכן הפתרון השני הוא:

$$y_2 = e^{2x}z(x) = \frac{1}{17}e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$$

כל כפולה של y_2 אף היא פתרון של המשוואה ההומוגנית (8.6) ולכן נוכל לבחור בתור y_2 את הפתרון:

$$y_2 = e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$$

y_1 ו-y_2 הם בלתי-תלויים לינארית, הוכחנו זאת בצורה כללית, אך כל אחד מוזמן לבדוק זאת שוב בדוגמא הפרטית שלנו.

הפתרון הכללי של המשוואה הנתונה הוא:

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$$

שאלה 59 *התשובה בעמוד 172*

איזה פתרון היה מתקבל אילו לקחנו את הפתרון הכללי ב-(8.8) וב-(8.9)?

ב. $$y'' - xy' + y = 0 \qquad (8.10)$$

קל לראות כי פתרון אחד של המשוואה הוא $y_1(x)=x$.

נציב:

$$y = xz$$

$$y' = xz' + z$$

$$y'' = xz'' + 2z'$$

הצבת y ונגזרותיה במשוואה תיתן:

$$xz'' + (2-x^2)z' = 0$$

שוב נציב $u=z'$, u מקיימת את המשוואה:

$$xu' + (2-x^2)u = 0$$

שפתרונה הפרטי הוא:

$$u(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

בדוק!

דהיינו;

$$z' = \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

ואינטגרציה תיתן:

$$z(x) = \int^x \frac{1}{t^2}\, e^{\frac{1}{2}t^2}dt$$

אי-אפשר לבטא את האינטגרל האחרון בעזרת פונקציות אלמנטריות. שני הפתרונות הבלתי-תלויים של המשוואה הנתונה הם אפוא:

$$y_1(x) = x$$

$$y_2(x) = x\int^x \frac{1}{t^2}\, e^{\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

הדוגמא הזאת אופיינית לאשר יקרה, בדרך-כלל, במהלך חישוב הפתרון השני: גם אם הפתרון הראשון הוא פונקציה אלמנטרית, הרי הפתרון השני מבוטא בעזרת אינטגרל.

שאלה 60 — התשובה בעמוד 173

אשר כי $y_2(x)$ הוא אכן פתרון של (8.10).

ג. $$2(1+x^2)y'' - 3xy' + 2y = 0 \qquad (8.11)$$

מקדמי המשוואה הם פולינומים, שמעלתם איננה גדולה מ-2. ננסה למצוא פתרון שגם הוא פולינום כזה.

$$y_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \qquad (8.12)$$

נגזור את $y_1(x)$, ונקבל:

$$y_1' = a_1 + 2a_2x$$

$$y_1'' = 2a_2$$

הפולינום $y_1(x)$ יהיה פתרון של (8.11) כאשר:

$$2(1+x^2)(2a_2) - 3x(a_1+2a_2x) +$$

$$+ 2(a_0+a_1x+a_2x^2) = 0$$

(הצבנו את y_1 ונגזרותיה ב-(8.11)).
אם נכנס את האיברים המתאימים נקבל:

$$(4a_2-6a_2+2a_2)x^2 + (-3a_1+2a_1)x + 4a_2 + 2a_0 =$$

$$= 0$$

משוואה זו צריכה להיות זהות לכל x, ולכן חייבים מקדמי החזקות של x להתאפס. המקדם של x^2 מתאפס ממילא ולגבי שאר המקדמים צריך להתקיים:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 4a_2 + 2a_0 = 0 \end{cases}$$

אם נבחר, למשל, $a_0=-2$, $a_2=1$ תתקיים המשוואה השנייה.

נציב מקדמים אלה ב-(8.12), ובידינו פתרון אחד של משוואה (8.11):

$$y_1(x) = x^2 - 2$$

ודא כי y_1 אכן פתרון.

נמצא פתרון נוסף:

$$y(x) = (x^2-2)z(x)$$

$$y'(x) = (x^2-2)z' + 2xz$$

$$y'' = (x^2-2)z'' + 4xz' + 2z$$

הצבה במשוואה (8.11) תיתן:

$$2(x^4-x^2-2)z'' + (5x^3+14x)z' = 0$$

נציב $u=z'$ ונקבל:

$$2(x^4-x^2-2)u' + (5x^3+14x)u = 0$$

ובהפרדה מתקבל:

$$\int^u \frac{ds}{s} + \frac{1}{2}\int^x \frac{5t^3+14t}{t^4-t^2-2}\,dx = C$$

גם אם נחלץ את $u(x)$ מתוך נוסחה זו בצורה מפורשת, עדיין נקבל את $z(x)$ (וממילא גם את $y_2(x)$) בצורת אינטגרל. שוב אנו רואים כי גם אם הצגתו של פתרון אחד היא פשוטה, הפתרון השני יכול להיות ביטוי מסובך למדי.

שאלה 61 *התשובה בעמוד 173*

מצא את הפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ (פתרון אחד: $y_1=x$)

ב. $y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$ (פתרון אחד: $y_1=e^{x^2}$)

שאלה 62 *התשובה בעמוד 175*

הראה שיש למשוואות הבאות פתרון פולינומיאלי, ומצא פתרון נוסף בלתי-תלוי לינארית בו (ייתכן שהפתרון יירשם בצורת אינטגרל).

א. $xy'' - (x+3)y' + y = 0$

ב. $(1+x^2)y'' - 2y = 0$

שאלה 63 התשובה בעמוד 177

פתור את בעיית הערכים ההתחלתיים:

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0$$

$$\begin{cases} y(4) = 20 \\ y'(4) = 7 \end{cases}$$

(פתרון אחד של המשוואה $y=1/x$).

9. משוואה אי-הומוגנית – "וריאציית הפרמטרים"

בסעיף 3 למדנו כי הפתרון הכללי של משוואה אי-הומוגנית מתקבל על-ידי הוספת פתרון אחד של המשוואה לפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה. נראה עתה,שקיימת דרך שיטתית לקבלת פתרון פרטי של משוואה לינארית אי-הומוגנית כאשר ידועים הפתרונות הבסיסיים, y_1 ו-y_2, של המשוואה ההומוגנית המתאימה. שמא קומבינציה לינארית $C_1y_1+C_2y_2$ (C_1 ו-C_2 קבועים) היא פתרון? כיון ש-y_1 ו-y_2 הם פתרונות של המשוואה ההומוגנית, הרי כל קומבינציה לינארית שלהם היא פתרון של המשוואה ההומוגנית ולא של המשוואה האי-הומוגנית. במה דברים אמורים? - בקומבינציה לינארית עם מקדמים קבועים C_1 ו-C_2. אך ייתכן שבהחלפת הפרמטרים הקבועים C_1 ו-C_2 בפונקציות $C_1(x)$ ו-$C_2(x)$ ("וריאציה של הפרמטרים") יתקבל פתרון של המשוואה האי-הומוגנית, כאשר הפונקציות $C_1(x)$ ו-$C_2(x)$ מחושבות בשיטה שאיננה מצריכה פתירת משוואות דיפרנציאליות.

ראה משפט II.5.

משפט II.23 *(וריאציית הפרמטרים):*

למשוואה לינארית אי-הומוגנית:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

בעלת מקדמים רציפים בקטע I, יש פתרון שהצגתו היא:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

כאשר $(y_1(x), y_2(x))$ היא מערכת בסיסית כלשהי של פתרונות של המשוואה ההומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$C_1(x)$ ו-$C_2(x)$ הן פונקציות המתקבלות מ-y_1 ו-y_2 ומקדמי המשוואה באמצעות פתירת משוואות אלגבריות ואינטגרציה בלבד.

הוכחה

תהי (y_1,y_2) מערכת בסיסית כלשהי של פתרונות של המשוואה ההומוגנית. נחפש את הפתרון הפרטי של המשוואה האי-הומוגנית בצורה:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{9.1}$$

כאשר C_1 ו-C_2 הן פונקציות של x אותן עלינו למצוא.
נגזור את (9.1), ונקבל:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2 \tag{9.2}$$

בטרם נמשיך ונגזור שנית נשים לב, שבגזירה השנייה תופענה הנגזרות מסדר שני C_1'' ו-C_2'' של פונקציות בלתי ידועות. אין אנו מעוניינים בכך ולכן ננסה להטיל הגבלה על C_1 ו-C_2 ונדרוש כי:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \tag{9.3}$$

אמנם לא ברור (בשלב זה) אם תחת אילוץ (9.3) נוכל למצוא את הפתרון המבוקש. אם נצליח - מה טוב. ובכן, התנאי הראשון שנדרש הוא התנאי (9.3) ואז ייהפך (9.2) ל-

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

עתה, נגזור שנית, ונקבל:

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' \tag{9.4}$$

נציב את y, y' ו-y'' במשוואה, ונקבל:

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + p(x)(C_1y_1'+C_2y_2') +$$
$$+ q(x)(C_1y_1+C_2y_2) = g$$

או אחרי סידור איברים:

$$C_1(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1) + C_2(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2) +$$
$$+ C_1'y_1' + C_2'y_2' = g$$

הביטויים הרשומים בסוגריים שווים לאפס (שכן y_1 ו-y_2 הם פתרונותיה של המשוואה ההומוגנית), ולכן השוויון האחרון מקבל את הצורה:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = g \tag{9.5}$$

זכור כי שוויון (9.5) מתקבל תחת אילוץ (9.3).

מתהליך החישוב ברור, שאם הפונקציות C_1 ו-C_2 מקיימות את המשוואות (9.3) ו-(9.5) אז בהצבתן ב-(9.1) נקבל את הפתרון

המבוקש של המשוואה האי-הומוגנית.

נרשום את התנאים (9.3) ו-(9.5) כמערכת משוואות:

$$(9.6)\qquad \begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = g \end{cases}$$

ונראה שאכן קיימות הפונקציות $C_1(x)$ ו-$C_2(x)$ אשר מקיימות את המערכת. לכל $x \in I$, (9.6) הינה מערכת של שתי משוואות לינאריות אלגבריות בשני נעלמים $C_1'(x)$ ו-$C_2'(x)$. דטרמיננטת המקדמים של (9.6) היא הוורונסקיאן:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1,y_2;x)$$

מאחר שמקדמי המשוואה ההומוגנית רציפים בקטע I הרי ש-$W \neq 0$ לכל $x \in I$. לכן (ראה טענה א שבנספח 1) למערכת (9.6) יש פתרון (יחיד) לכל $x \in I$, והוא:

על-פי משפט II.18. זכור כי (y_1,y_2) היא מערכת בסיסית של פתרונות.

$$C_1'(x) = \frac{-g(x)y_2(x)}{W(x)} \qquad C_2'(x) = \frac{g(x)y_1(x)}{W(x)}$$

ומכאן:

$$(9.7)\qquad \begin{cases} C_1(x) = -\displaystyle\int^x \frac{g(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt \\[2ex] C_2(x) = \displaystyle\int^x \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt \end{cases}$$

אין צורך בקבוע האינטגרציה כיוון שרצוננו למצוא פתרון אחד של המשוואה האי-הומוגנית. שים לב שמפאת רציפותן של הפונקציות $g(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ ו-$W(t)$ נובע כי C_1 ו-C_2 המוגדרות על-ידי (9.7) הן אכן פונקציות גזירות.

משנציב את (9.7) ב-(9.1) נקבל את הפתרון הפרטי המבוקש.

■

שאלה 64 התשובה בעמוד 177

הוכח כי לו ביצענו את האינטגרציה (9.7) עם קבועים כלליים. אז (בהצבה ב-(9.1)) היינו מקבלים את הפתרון הכללי של המשוואה האי-הומוגנית.

בבואך למצוא פתרון פרטי לפי השיטה שלעיל אין כל צורך לזכור את נוסחאות (9.7) עבור $C_1(x)$ ו-$C_2(x)$. די לזכור את התהליך עצמו ולהלן סיכומו.

איך עליך לעבוד בשיטת וריאציית הפרמטרים?

א. פתור את המשוואה ההומוגנית ומצא מערכת של שני פתרונות בסיסיים - $y_1(x)$ ו-$y_2(x)$.

ב. רשום "צירוף לינארי עם מקדמים משתנים":

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

ג. גזור את y, והטל את הדרישה ש-y' אינו כולל נגזרות של C_1 ו-C_2. (תקבל משוואה אלגברית לינארית ב-C_1' וב-C_2').

ד. גזור שנית, והצב את y, y' ו-y'' במשוואה האי-הומוגנית הנתונה (תקבל משוואה אלגברית לינארית נוספת ב-C_1' וב-C_2').

ה. פתור את המערכת של שתי המשוואות האלגבריות, חשב את האינטגרלים של פתרונותיה (די לבחור פונקציות קדומות מסוימות), והצב בביטוי $y=C_1y_1+C_2y_2$.
התהליך עשוי להיות ממושך אך אין בו סיבוך מעבר לחישוב פונקציות קדומות.

הערה

כדי לקצר את התהליך אפשר לדלג על השלבים ג-ד שצוינו לעיל, ולרשום את מערכת המשוואות (9.6) עבור C_1' ו-C_2'. ראה דוגמאות ב ו-ג להלן.

דוגמאות

א. נפתור את המשוואה:

$$y'' - 9y = 5e^{3x}$$

מערכת בסיסית של פתרונות למשוואה ההומוגנית $y''-9y=0$ היא:

$$y_1 = e^{3x}$$

$$y_2 = e^{-3x}$$

נחפש פתרון של המשוואה הנתונה בצורה:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$$

$$y' = 3C_1e^{3x} - 3C_2e^{-3x} + C_1'e^{3x} + C_2'e^{-3x}$$

זכור כי C_1 ו-C_2 הן פונקציות של x אך לשם פשטות הכתיבה השמטנו את הארגומנט, x.

כאן תוטל הדרישה כי y' אינו כולל את הנגזרות של C_1 ו-C_2:

$$C_1'e^{3x} + C_2'e^{-3x} = 0 \qquad (1)$$

על סמך התנאי הזה:

$$y' = 3C_1e^{3x} - 3C_2e^{-3x}$$

$$y'' = 9C_1e^{3x} + 9C_2e^{-3x} + 3C_1'e^{3x} - 3C_2'e^{-3x}$$

בהצבה במשוואה האי-הומוגנית הנתונה מצטמצמים, כדרוש, מקדמי C_1 ו-C_2, ונותרת המשוואה:

$$3e^{3x}C_1' - 3e^{-3x}C_2' = 5e^{3x} \qquad (2)$$

המשוואות (1) ו-(2) יוצרות מערכת משוואות אלגברית במשתנים C_1' ו-C_2':

$$\begin{cases} e^{3x}C_1' + e^{-3x}C_2' = 0 \\ 3e^{3x}C_1' - 3e^{-3x}C_2' = 5e^{3x} \end{cases}$$

שפתרונה הוא:

$$C_1' = \tfrac{5}{6} \quad , \quad C_2' = -\tfrac{5}{6}e^{6x}$$

בדוק!

אינטגרציה מובילה לביטוי:

$$C_1 = \tfrac{5}{6}x \quad , \quad C_2 = -\tfrac{5}{36}e^{6x}$$

וממנו מתקבל:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} = \tfrac{5}{6}xe^{3x} - \tfrac{5}{36}e^{3x}$$

בכך הגענו אל פתרון פרטי של המשוואה הנתונה. האם מבין כל פתרונותיה זהו פתרון שהצגתו היא הפשוטה ביותר? האיבר השני $-\tfrac{5}{36}e^{3x}$, הוא כפולה של פתרון y_1 של המשוואה ההומוגנית, וממילא הוא עצמו פתרון של המשוואה ההומוגנית. נוכל לטעום מפירות הלינאריות (משפט $II.5$), ולחסר אותו מהפתרון הפרטי y, ועדיין יהיה בידינו פתרון פרטי של המשוואה האי-הומוגנית, כלומר:

$$y_p = \tfrac{5}{6}xe^{3x}$$

פתרונה הכללי של המשוואה הנתונה הוא אפוא:

$$y = ay_1 + by_2 + \tfrac{5}{6}xe^{3x} = $$
$$= ae^{3x} + be^{-3x} + \tfrac{5}{6}xe^{3x}$$

(a ו-b קבועים שרירותיים).

ב.

$$y'' - 3y' - 4y = 50\cos 2x$$

זוהי משוואה הומוגנית אשר מקדמיה קבועים, ופתרונה הכללי:

$$y = ae^{4x} + be^{-x}$$

(a ו-b קבועים שרירותיים).

נמצא פתרון פרטי של המשוואה האי-הומוגנית בצורה:

$$y = C_1(x)e^{4x} + C_2(x)e^{-x}$$

כדי לקצר את התהליך נרשום מיד את מערכת המשוואות (9.6). כיצד נזכור אותה? ובכן, מקדמיהם של C_1' ו-C_2' הם איברי הוורונסקיאן $W(y_1,y_2;x)$. אגף ימין של המשוואה הראשונה הוא אפס ואגף ימין של המשוואה השנייה הוא האיבר האי-הומוגני $g(x)$. במקרה שלנו המערכת "תלבש" את הצורה:

$$\begin{cases} e^{4x}C_1' + e^{-x}C_2' = 0 \\ 4e^{4x}C_1' - e^{-x}C_2' = 50\cos 2x \end{cases}$$

ופתרונה הוא:

$$C_1' = 10e^{-4x}\cos 2x \quad , \quad C_2' = -10e^{x}\cos 2x$$

בדוק!

ואחרי אינטגרציה בחלקים מיגעת נקבל:

$$C_1(x) = e^{-4x}(\sin 2x - 2\cos 2x)$$

$$C_2(x) = -2e^{x}(2\sin 2x + \cos 2x)$$

בדוק!

פתרון פרטי של המשוואה הנתונה הוא:

$$\begin{aligned} y_p &= C_1e^{4x} + C_2e^{-x} = \\ &= (\sin 2x - 2\cos 2x) - 2(2\sin 2x + \cos 2x) = \\ &= -3\sin 2x - 4\cos 2x \end{aligned}$$

ג. נתבונן במשוואה:

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = \frac{x^3}{\ln x}$$

בקטע $x>1$.

המשוואה ההומוגנית היא:

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$$

ופתרונותיה הבסיסיים הם:

$$y_1 = x^3 \quad , \quad y_2 = x^3\ln x$$

ראה דוגמא בראש הסעיף הקודם.

נחפש את הפתרון הפרטי בצורה:

$$y = C_1(x)x^3 + C_2(x)x^3\ln x$$

גם הפעם נקצר ונרשום מיד את מערכת (9.6). אך עלינו להיזהרו מערכת (9.6) נרשמה בהנחה שהמקדם של y'' שווה ל-1 ואילו במשוואה שלעיל המקדם של y'' הוא x^2. לכן בטרם נרשום את המערכת בנעלמים C_1' ו-C_2' עלינו לחלק את המשוואה הנתונה ב-x^2:

$$y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = \frac{x}{\ln x}$$

ואז תיראה המערכת כך:

$$\begin{cases} x^3C_1' + (x^3\ell nx)C_2' = 0 \\ 3x^2C_1' + (3x^2\ell nx+x^2)C_1' = \dfrac{x}{\ell nx} \end{cases}$$

פתרונות המערכת הם:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{x} \quad , \quad C_2'(x) = \frac{1}{x\ell nx}$$

בדוק!

ובאינטגרציה נקבל:

$$C_1(x) = -\ell nx \quad , \quad C_2(x) = \ell n(\ell nx)$$

זכור כי $x>1$.

ולכן הפתרון הפרטי יהיה:

$$y_p(x) = -x^3\ell nx + x^3\ell nx\cdot\ell n(\ell nx)$$

המחובר הראשון הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית ולכן אפשר להשמיטו (הסברו) ולהסתפק בפתרון הפרטי:

$$y_p(x) = x^3\ell nx\cdot\ell n(\ell nx)$$

ד. אם נשנה בדוגמא הקודמת רק את אגף ימין וננסה לפתור את המשוואה:

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = \frac{x^3}{sinx}$$

נגיע לביטויים הבאים עבור C_1' ו-C_2':

$$C_1'(x) = -\frac{\ell nx}{xsinx} \quad , \quad C_2'(x) = \frac{1}{xsinx}$$

בדוק!

את האינטגרלים של הפונקציות הללו לא נוכל לבטא בעזרת פונקציות אלמנטריות. הפתרון הפרטי של המשוואה הנתונה יירשם כך:

$$y(x) = -x^3\int^x \frac{\ell nt}{tsint}\,dt + x^3\ell nx\int^x \frac{dt}{tsint}$$

שאלה 65 *התשובה בעמוד 178*

פתור את המשוואות הבאות בשיטת וריאציית הפרמטרים:

א. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$

ב. $y'' + y = tgx \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

שאלה 66 התשובה בעמוד 180

מצא פתרון כללי למשוואה:

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(1-x)^2e^{-x}$$

בקטע $0<x<1$, כאשר ידוע שפתרונות המשוואה ההומוגניות הם: $y_1=e^x$, $y_2=x$.

בסעיף 8 למדנו כיצד למצוא את "הפתרון השני" למשוואה ההומוגנית בהינתן פתרון אחד שלה, $y_1(x)$. לכן בעיית מציאת הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני מתמצית במציאת פתרון אחד למשוואה ההומוגנית המתאימה. אם יש בידינו פתרון אחד בלבד, נוכל למצוא את "הפתרון השני" ולאחר מכן נמצא (בשיטה שתוארה לעיל) פתרון פרטי של המשוואה האי-הומוגנית. אולם, במקרה זה, קיימת דרך קצרה יותר.

דוגמא

נפתור את המשוואה:

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = x \qquad (x>0) \tag{9.8}$$

כאשר נתון פתרון $y_1 = \frac{1}{x}$ של המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = 0 \tag{9.9}$$

בדוק כי $y_1 = \frac{1}{x}$ הוא אכן פתרון של משוואה זו.

נחזור על תהליך הורדת סדר המשוואה לגבי המשוואה <u>האי-הומוגנית</u> (9.8). נציב:

$$y = y_1z = \frac{z}{x}$$

בגזירה מתקבל:

$$y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$$

$$y'' = \frac{z''}{x} - \frac{2z'}{x^2} + \frac{2z}{x^3}$$

ובהצבה במשוואה מתקבלת משוואה לינארית <u>חסרה</u>:

$$xz'' + 5z' = x$$

בדוק!

נציב:

$$z' = u$$

ונקבל:

$$xu' + 5u = x$$

$$u' + \frac{5}{x}u = 1$$

הפתרון הכללי של המשוואה האחרונה הוא:

$$u = \frac{x}{6} + Cx^{-5}$$

בדוק!

מכאן:

$$z = \frac{x^2}{12} - \frac{C}{4}x^{-4} + C_1$$

ולכן:

$$y = \frac{z}{x} = \frac{x}{12} - \frac{C}{4}x^{-5} + C_1x^{-1}$$

וקיבלנו את הפתרון הכללי של המשוואה האי-הומוגנית הנתונה.
בד בבד התקבל "הפתרון השני" של המשוואה ההומוגנית (9.9)
והוא $y_2=x^{-5}$.

בשאלות הבאות יינתן לך פתרון אחד של המשוואה ההומוגנית
והינך מתבקש למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה הנתונה.

שאלה 67 — *התשובה בעמוד 181*

מצא את הפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $(x>0)$ $\quad x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$

$y_1(x)=x$.

ב. $x^2y'' + xy' + (x^2-\frac{1}{4})y = 3x^{3/2}\sin x \quad (x>0)$

$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

טכניקת "וריאציית הפרמטרים" היא שיטה כללית ולפיה נוכל
לפתור כל משוואה לינארית, אשר ידועים פתרונות המשוואה
ההומוגנית המתאימה. בפרט, תצלח טכניקה זו לכל משוואה מן
הצורה:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (9.10)$$

כאשר a, b ו-c הם מקדמים קבועים.
אך גם במקרה פשוט זה דרך וריאציית הפרמטרים עקלקלה ומייגעת
וזהו הקוץ שבאליה.

ראה, למשל, דוגמא ב בעמוד 81.

אם $g(x)$ היא פונקציה סתמית הרי שהשיטה היחידה למציאת
הפתרון של (9.10) היא וריאציית הפרמטרים. אך כאשר $g(x)$
היא בעלת צורה מיוחדת, קיימת שיטה יעילה יותר אשר אינה
כרוכה באינטגרציה. שיטה זו מכונה "שיטת המקדמים" והיא תתואר
בסעיף הבא.

10. שיטת המקדמים

נתחיל בדוגמאות:

א. נמצא פתרון פרטי של המשוואה:

$$y'' - 3y' - 4y = 50\cos 2x$$

אנו רוצים למצוא פונקציה $y_p(x)$ כך שהקומבינציה, הרשומה באגף שמאל של המשוואה, של הפונקציה ושל נגזרותיה הראשונה והשנייה תיתן $50\cos 2x$. אין טעם לנסות פונקציות כמו e^x, ℓnx או פולינום ב-x, כי אף קומבינציה של פונקציה כזו ושל נגזרותיה לא תיתן לבסוף $50\cos 2x$. טבעי לחפש פתרון, y_p, כצירוף של $\cos 2x$ ו-$\sin 2x$. לפי זה פונקציית הבוחן לפתרון היא:

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x \qquad (A \text{ ו-} B \text{ קבועים})$$

מכאן:

$$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

ובהצבה במשוואה נקבל (אחרי כינוס איברים דומים):

$$(-8A-6B)\cos 2x + (6A-8B)\sin 2x = 50\cos 2x$$

בדוק!

כדי שיתקיים שוויון זה (לכל x) נדרוש כי:

$$-8A - 6B = 50 \quad , \quad 6A - 8B = 0$$

מכאן $A=-4$, $B=-3$ והפתרון הפרטי הוא:

$$y_p = -3\sin 2x - 4\cos 2x$$

השווה לפתרון שבדוגמא ב בסעיף הקודם.

ב. $$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

באגף ימין של משוואה זו רשום פולינום ממעלה שנייה. נחפש פתרון פרטי, y_p, שאף הוא פולינום מאותה מעלה:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

בהצבה במשוואה מתקבל:

$$2A - 3(2Ax+B) - 4(Ax^2+Bx+C) = 4x^2$$

דהיינו:

$$-4Ax^2 + (-6A-4B)x + (2A-3B-4C) = 4x^2$$

כדי ששוויון זה יתקיים, לכל x, נדרוש:

$$\begin{cases} -4A = 4 \\ -6A - 4B = 0 \\ 2A - 3B - 4C = 0 \end{cases}$$

מכאן:

$$A = -1 \quad , \quad B = \frac{3}{2} \quad , \quad C = -\frac{13}{8}$$ בדוק!

והפתרון הפרטי הוא:

$$y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

ג. $y'' - 3y' = 4x^2$

גם כאן ננסה פתרון מהצורה $y_p = Ax^2+Bx+C$.
נציב, ונקבל:

$$2A - 3(2Ax+B) = 4x^2$$

באגף שמאל רשום פולינום ממעלה ראשונה ואילו באגף ימין מופיע פולינום ממעלה שנייה, וזו סתירה. לכן אין למשוואה פתרון, שהוא פולינום ממעלה שנייה. אין זה תמוה, שכן במשוואה הנתונה חסר $\underline{y}$ ולכן בהצבת פולינום כלשהו באגף שמאל נקבל פולינום, שמעלתו קטנה באחד ממעלת הפולינום שהצבנו. אי לכך, עולה בדעתנו לחפש פתרון פרטי בצורת פולינום ממעלה שלישית - Ax^3+Bx^2+Cx+D. אך מאחר שכל קבוע D הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית $(y''-3y'=0)$ הרי נוכל "להסתדר בלעדיו" ופונקציית הבוחן תהיה אפוא:

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx = x(Ax^2+Bx+C)$$

נציב במשוואה:

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2+2Bx+C) = 4x^2$$

$$-9Ax^2 + (6A-6B)x + 2B - 3C = 4x^2$$

מכאן:

$$A = -\frac{4}{9} \quad , \quad B = -\frac{4}{9} \quad , \quad C = -\frac{8}{27}$$

והפתרון הפרטי הוא:

$$y_p = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x$$

ד. $$y'' - 9y = e^{2x}$$

הנגזרות של e^{2x} הן כפולות של הפונקציה עצמה. לכן ננסה את הפתרון שצורתו:

$$y_p = Ae^{2x}$$

בהצבה מתקבל:

$$4Ae^{2x} - 9Ae^{2x} = e^{2x}$$

ומכאן: $A=-\frac{1}{5}$. הפתרון הפרטי הוא אפוא:

$$y_p = -\frac{1}{5}e^{2x}$$

ה. $$y'' - 9y = 5e^{3x}$$

בהשראת הדוגמא הקודמת נציב גם כאן $y_p=Ae^{3x}$, ונקבל:

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq 5e^{3x}$$

ובכן, במקרה זה לא קיים פתרון פרטי שהוא כפולה של e^{3x} בקבוע. אין זה תמוה, שכן הפונקציה e^{3x} (וכפולותיה) היא פתרון של המשוואה ההומוגנית $y''-9y=0$. למצב דומה נקלענו בדוגמא ג שלעיל. שם התגברנו על הבעיה על-ידי כך שכפלנו את פונקציית הבוחן Ax^2+Bx+C (שלא הצליחה) ב-x. ננסה להפעיל שיטה דומה גם כאן. נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y = e^{3x}f(x)$$

כאשר $f(x)$ פונקציה מסוימת. מהו התנאי על f? ובכן,

$$y' = e^{3x}(f'+3f)$$

$$y'' = e^{3x}(f''+6f'+9f)$$

ולכן:

$$y'' - 9y = e^{3x}(f''+6f') = 5e^{3x}$$

מכאן אנו מסיקים שעל f לקיים משוואה דיפרנציאלית:

$$f'' + 6f' = 5$$

באגף ימין רשום פולינום ממעלה 0, ולכן נחפש פתרון פרטי של משוואה זו שאף הוא פולינום. מאיזו מעלה? באגף שמאל של המשוואה חסר f ולכן (ראה דוגמא ג לעיל) נחפש פתרון פרטי בצורת פולינום ממעלה ראשונה - $f=Ax$.

אין צורך באיבר חופשי שכן כל קבוע הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית $f''+6f'=0$.

בהצבה במשוואה מתקבל:

$$0 + 6A = 5 \rightarrow A = \frac{5}{6}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא $f(x)=\frac{5}{6}x$. נציב זאת בביטוי עבור y ($y=e^{3x}f(x)$), ונקבל פתרון פרטי של המשוואה הנתונה:

השורה לדוגמא א בסעיף הקודם.

$$y_p = \frac{5}{6}xe^{3x}$$

לפתרון זה היינו מגיעים בדרך קצרה יותר לו השכלנו מלכתחילה לחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y=Axe^{3x}.$$

השיטה שהופיעה בדוגמאות לעיל מורכבת משני שלבים. בשלב ראשון, על סמך ניחוש, רושמים ביטוי עבור פתרון פרטי. בביטוי זה מופיעים קבועים (מקדמים) אותם עלינו למצוא. לאחר מכן, מציבים ביטוי זה במשוואה הנתונה ומנסים למצוא ערכים מספריים עבור מקדמים בלתי ידועים כך שפונקציית הבוחן תהפוך לפתרון של המשוואה. אם ניחוש צורת הפתרון היה קולע הרי בדרך זו נשלה את הפתרון. בסעיף זה נטפל במשוואות מיוחדות בהן "הניחוש הקולע" נעשה לפי מרשם.

מכאן שם השיטה - שיטת המקדמים.

נדון במשוואות שצורתן:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

כאשר a, b ו-c הם מקדמים קבועים והאיבר האי-הומוגני הוא בעל אחת מהצורות הבאות:

I פולינום: $g(x) = P_m(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$

II (α קבוע) $g(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$

III $g(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$

או: $g(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

(α ו-β קבועים).

נדון בכל מקרה לגופו.

I. $g(x) = P_m(x)$

<u>טענה I</u>

תהי נתונה המשוואה:

$$ay'' + by' + cy = P_m(x) = a_m x^m + \ldots + a_0 \qquad (10.1)$$

(a, b ו-c קבועים. $P_m(x)$ פולינום ממעלה m).

א. אם $c\neq 0$, למשוואה (10.1) יש פתרון שצורתו:

$$y_p = A_m x^m + \ldots + A_0$$

(זהו פולינום מאותה מעלה של הפולינום $P_m(x)$ שרשום באגף ימין של המשוואה (10.1)).

ב. אם $c=0$ ו-$b\neq 0$, למשוואה (10.1) יש פתרון שצורתו:

$$y_p = x(A_m x^m + \dots + A_0)$$

ג. אם $c=0$ ו-$b=0$, למשוואה (10.1) יש פתרון שצורתו:

$$y_p = x^2(A_m x^m + \dots + A_0)$$

הוכחה

א. $c\neq 0$.

נציב במשוואה (10.1):

$$y = A_m x^m + \dots + A_2x^2 + A_1x + A_0 \tag{10.2}$$

$$y' = mA_m x^{m-1} + \dots + 2A_2x + A_1$$

$$y'' = m(m-1)A_m x^{m-2} + \dots + 2A_2$$

נקבל:

$$a\left[m(m-1)A_m x^{m-2}+\dots+2A_2\right] + b\left[mA_m x^{m-1}+\dots+2A_2x+A_1\right] +$$

$$+ c\left[A_m x^m+\dots+A_1x+A_0\right] =$$

$$= P_m(x) = a_m x^m + \dots + a_0$$

פונקציה (10.2) תהיה פתרון של משוואה (10.1) אם ורק אם בשוויון האחרון שווים המקדמים של החזקות הדומות של x בשני האגפים. דהיינו;

$$cA_m = a_m$$

$$cA_{m-1} + mbA_m = a_{m-1}$$

$$cA_{m-2} + (m-1)bA_{m-1} + m(m-1)aA_m = a_{m-2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$cA_1 + 2bA_2 + 6aA_3 = a_1$$

$$cA_0 + bA_1 + 2aA_2 = a_0$$

זוהי מערכת משוואות אלגברית לינארית בנעלמים $A_0,\dots,A_m$. מאחר ש-$c\neq 0$, למערכת זו יש פתרון. אכן, מן המשוואה הראשונה נמצא כי $A_m = \frac{a_m}{c}$. נציב זאת במשוואה השנייה, ונמצא את A_{m-1}.

$$A_{m-1} = \frac{a_{m-1} - mbA_m}{c}$$

נציב את A_m ואת A_{m-1} במשוואה השלישית, ונמצא את A_{m-2}.

כך נמשיך ונמצא את כל המקדמים: $A_0,\dots,A_m$. נציב אותם ב-(10.2), ונקבל את הפתרון הפרטי המבוקש.

ב. $c=0$, $b\neq 0$.

המשוואה במקרה זה נראית כך:

$$ay'' + by' = a_m x^m + \dots + a_0$$

נציב:

$$y = x(A_m x^m + \dots + A_0) = A_m x^{m+1} + \dots + A_0 x \tag{10.3}$$

$$y' = (m+1)A_m x^m + \dots + 2A_1 x + A_0$$

$$y'' = m(m+1)A_m x^{m-1} + \dots + 2A_1$$

נקבל:

$$a\left[m(m+1)A_m x^{m-1} + \dots + 2A_1\right] + b\left[(m+1)A_m x^m + \dots + 2A_1 x + A_0\right] =$$

$$= a_m x^m + \dots + a_0$$

הפונקציה הרשומה ב-(10.3) תהיה פתרון של המשוואה אם ורק אם מתקיים:

$$\left.\begin{aligned} b(m+1)A_m &= a_m \\ bmA_{m-1} + am(m+1)A_m &= a_{m-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &\ \cdot \\ bA_0 + a\cdot 2A_1 &= a_0 \end{aligned}\right\}$$

מאחר ש-$b\neq 0$ נמצא מן המשוואה הראשונה את A_m $\left(A_m = \dfrac{a_m}{b(m+1)}\right)$ ושאר המשוואות תקבענה את $A_0,\dots,A_{m-1}$.

ג. $b=c=0$.

המשוואה, במקרה זה, היא:

$$ay'' = a_m x^m + \dots a_0$$

נמצא את הפתרון הפרטי על-ידי שתי אינטגרציות:

$$ay' = \frac{a_m}{m+1} x^{m+1} + \dots + a_0 x$$

$$ay = \frac{a_m}{(m+1)(m+2)} x^{m+2} + \dots + \frac{a_0 x^2}{2}$$

כלומר הפתרון הפרטי הזא בעל הצורה:

$$y = x^2(A_m x^m + \ldots + A_0)$$

כאשר:

$$A_0 = \frac{a}{2a}, \ldots, A_m = \frac{a_m}{a(m+1)(m+2)}$$

כטענתנו. ■

שאלה 68 — התשובה בעמוד 183

מצא פתרון פרטי לכל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y'' + 4y' + 2y = x + 1$

ב. $y'' - 49y = 1$

ג. $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 2x + 2$

ד. $y'' + 2y' = 3x$

ה. $y'' + y' = x^4 + 2x + 1$

ו. $3y'' = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

II. $g(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$

נוכל לחזור אל המקרה הקודם אם נציב:

ראה דוגמא ה בעמוד 87

$$y = e^{\alpha x}f(x)$$

$$y' = e^{\alpha x}(f' + \alpha f)$$

$$y'' = e^{\alpha x}(f'' + 2\alpha f' + \alpha^2 f)$$

לכן:

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x}\left[af'' + (2a\alpha + b)f' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)f\right] =$$
$$= P_m(x)e^{\alpha x}$$

נצמצם ב-$e^{\alpha x}$, ונקבל את התנאי על $f(x)$:

$$af'' + (2a\alpha + b)f' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)f = P_m(x)$$

והגענו למשוואה מהטיפוס (10.1). מכאן נובעת הטענה הבאה.

<u>טענה II</u>

תהי נתונה המשוואה:

$$ay'' + by' + cy = P_m(x)e^{\alpha x} \qquad (10.4)$$

(a, b, c ו-α קבועים, $P_m(x)$ פולינום ממעלה m).

א. אם $e^{\alpha x}$ איננה פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה - יש למשוואה (10.4) פתרון שצורתו:

$$y_p = (A_m x^m + \ldots + A_0)e^{\alpha x}$$

ב. אם הפונקציה $e^{\alpha x}$ היא פתרון של המשוואה ההומוגנית, אך לא כך הפונקציה $xe^{\alpha x}$ - יש למשוואה (10.4) פתרון שצורתו:

$$y_p = x(A_m x^m + \ldots + A_0)e^{\alpha x}$$

ג. אם $e^{\alpha x}$ וכן $xe^{\alpha x}$ הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית - יש למשוואה (10.4) פתרון שצורתו:

$$y_p = x^2(A_m x^m + \ldots + A_0)e^{\alpha x}$$

שאלה 69 התשובה בעמוד 185

הוכח את טענה II.

דוגמא

נפתור את המשוואה:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \qquad (10.5)$$

הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}$$

כלומר e^{2x} ו-xe^{2x} הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית.
לפי טענה II נחפש את הפתרון הפרטי בצורה:

$$y_p = x^2(Ax+B)e^{2x}$$

כאשר $Ax+B$ הוא פולינום ממעלה ראשונה (כמעלת הפולינום $P_m(x)=x$ באגף ימין של (10.5)).
נגזרותיו של y_p הן:

$$y' = e^{2x}\left[2Ax^3+2Bx^2+3Ax^2+2Bx\right]$$

$$y'' = e^{2x}\left[4Ax^3+2(2B+3A)x^2+4Bx+ + 6Ax^2+2(2B+3A)x+2B\right]$$

הצבה במשוואה (10.5) וצמצום ב-e^{2x}:

$$\left[4Ax^3+(12A+4B)x^2+(6A+8B)x+2B\right] -$$

$$- 4\left[2Ax^3+(3A+2B)x^2+2Bx\right] + 4(Ax^3+Bx^2) = x$$

השוואת מקדמי החזקות השוות של x:

$:x^3$	$4A - 8A + 4A = 0$	זהות
$:x^2$	$12A + 4B - 12A - 8B + 4B = 0$	זהות
$:x^1$	$6A + 8B - 8B = 1 \leftarrow$	$A = \frac{1}{6}$
$:x^0$	$2B = 0 \leftarrow$	$B = 0$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p(x) = \tfrac{1}{6}e^{2x} \cdot x^3$$

והפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$y = e^{2x}(C_1+C_2x+\tfrac{1}{6}x^3)$$

שאלה 70 התשובה בעמוד 186

מצא את הפתרון הכללי לכל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $2y'' - 4y' + 6y = 3e^{2x}$

ב. $y'' + 9y = x^2e^{3x}$

ג. $y'' - 9y = 5e^{3x}$

שאלה 71 התשובה בעמוד 188

פתור את בעיית ההתחלה:

$$y'' - 2y' + y = (x+4)e^x$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

.III

$$g(x) = \begin{cases} P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \\ P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

אם נשתמש בפונקציה מעריכית מרוכבת $e^{(\alpha+i\beta)x}$ נוכל להציג מקרה זה כמקרה הקודם (II). על-פי הגדרת הפונקציה המעריכית:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ראה הגדרה II.21.

דהיינו:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = Re\,e^{(\alpha+i\beta)x}$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x = Im\,e^{(\alpha+i\beta)x}$$

שאלה 72 התשובה בעמוד 189

תהי נתונה המשוואה:

$$ay'' + by' + cy = P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad (10.6)$$

(a, b, ו-c קבועים ממשיים, $P_m(x)$ פולינום בעל מקדמים ממשיים).
יהי $y=u+iv$ פתרון "מרוכב" של משוואה (10.6). הוכח כי -

א. החלק הממשי של y:

$$u = Re\,y$$

הוא פתרון של המשוואה:

$$ay'' + by' + cy = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad (10.7)$$

ב. החלק המדומה של y:

$$v = Im\,y$$

הוא פתרון של המשוואה:

$$ay'' + by' + cy = P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (10.8)$$

ובכן, כדי למצוא פתרון פרטי של כל אחת מן המשוואות (10.7), (10.8), די למצוא פתרון פרטי של (10.6). משוואה (10.6) היא מהטיפוס II ואם כך, נמצא את פתרונה הפרטי על-פי טענה II. מכאן נובעת הטענה הבאה:

טענה III

א. אם $e^{(\alpha+i\beta)x}$ איננו פתרון של המשוואה ההומוגנית $ay''+by'+cy=0$ (דהיינו $\alpha\pm i\beta$ אינם שורשים של המשוואה האופיינית $a\lambda^2+b\lambda+c=0$) - יש למשוואה (10.6) פתרון שצורתו:

$$y = (A_m x^m + \ldots + A_0)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

ב. אם $e^{(\alpha+i\beta)x}$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית (דהיינו, $\alpha\pm i\beta$ הם שורשי המשוואה האופיינית) - יש למשוואה (10.7) פתרון שצורתו:

$$y = a(A_m x^m + \ldots + A_0)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

הערה

המקרה השלישי, שבו $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ו-$xe^{(\alpha+i\beta)x}$, הם פתרונות של המשוואה ההומוגנית - לא ייתכן כאן.

שאלה 73 התשובה בעמוד 190

הסבר מדוע.

דוגמא

נמצא פתרון פרטי למשוואה:

$$y'' - y = e^x \cos x$$

כאן $\alpha=1$, $\beta=1$. נמצא, תחילה, את פתרון המשוואה:

$$y'' - y = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{(1+i)x} \qquad (10.9)$$

השורשים של המשוואה האופיינית, $\lambda^2-1=0$, הם: ±1. הווה אומר, $1\pm i$ אינם שורשי המשוואה האופיינית וממילא $e^{(1+i)x}$ איננו פתרון של המשוואה ההומוגנית. לכן נחפש פתרון פרטי של (10.9) בצורה:

$$y = Ae^{(1+i)x}$$

על-פי חלק א של טענה III.

הנגזרות הן:

$$y' = A(1+i)e^{(1+i)x}$$

$$y'' = A(1+i)^2 e^{(1+i)x}$$

הצבה במשוואה (10.9) תיתן:

$$A(1+i)^2 e^{(1+i)x} - Ae^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}$$

נצמצם $e^{(1+i)x}\neq0$, ונקבל:

$$A\left[(1+i)^2-1\right] = 1$$

או

$$A = \frac{1}{2i-1}$$

אפשר לרשום את A גם כך:

$$A = \frac{1}{2i-1} = \frac{-1-2i}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-1-2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

ולכן הפתרון הפרטי y הוא:

$$y = (-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5}i)e^{(1+i)x}$$

כדי למצוא פתרון פרטי למשוואה הנתונה ניקח את החלק הממשי של y, כלומר:

על-פי שאלה 72 א.

$$y_p = Re\left[(-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5})ie^{(1+i)x}\right] =$$

$$= Re\left[(-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{5}i)e^{x}(cosx+isinx)\right] =$$

$$= (-\tfrac{1}{5}cosx + \tfrac{2}{5}sinx)e^{x}$$

בדוק שזהו, אכן, פתרון של המשוואה הנתונה.

שאלה 74 התשובה בעמוד 190

מצא את הפתרון הפרטי לכל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y'' - 2y' + 2y = e^{x}sinx$

ב. $y'' + y' = xcosx$

ג. $y'' - 3y' - 4y = 50cos2x$

המשוואה האחרונה הופיעה כבר בראש הסעיף הזה, שם מצאנו פתרון פרטי שלה ללא שימוש במספרים מרוכבים. האם תמיד נוכל לנהוג כך?

שאלה 75 התשובה בעמוד 192

א. יהי $P(x)$ פולינום כלשהו במקדמים <u>מרוכבים</u>. הוכח כי:

$$Re\left[P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\left[S_1(x)cos\beta x + S_2(x)sin\beta x\right]$$

$$Im\left[P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\left[S_3(x)cos\beta x + S_4(x)sin\beta x\right]$$

כאשר S_1, S_2, S_3 ו-S_4 הם פולינומים במקדמים <u>ממשיים</u> שמעלותיהן אינן עולות על מעלת פולינום P.

ב. הסק מחלק א ומטענה III כי פתרון פרטי של כל אחת מן המשוואות (10.7) ו-(10.8) ניתן לחפש בצורה אחידה:

$$y_p = \left[(A_m x^m+\ldots+A_0)cos\beta x + (B_m x^m+\ldots+B_0)sin\beta x\right]e^{\alpha x}$$

אם $\alpha\pm i\beta$ אינם שורשי המשוואה האופיינית.

או:

$$y_p = x\left[(A_m x^m + \ldots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \ldots + B_0)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$$

אם $\alpha \pm i\beta$ הם שורשי המשוואה האופיינית.

כאשר ה-A-ים וה-B-ים הם מקדמים <u>ממשיים</u>.

דוגמא

נתבונן בדוגמא הקודמת:

$$y'' - y = e^x \cos x$$

במקרה זה, הפולינום $P_m(x)$ הוא קבוע, $\alpha + i\beta = 1 + i$ אינו שורש של המשוואה האופיינית ולכן נחפש פתרון בצורה:

על-פי חלק ב של שאלה 75.

$$y = (a\cos x + b\sin x)e^x$$

נגזרותיו הן:

$$y' = e^x\left[(b-a)\sin x + (a+b)\cos x\right]$$

בדוק!

$$y'' = e^x\left[2b\cos x - 2a\sin x\right]$$

בדוק!

הצבה במשוואה הנתונה תיתן:

$$e^x\left[2b\cos x - 2a\sin x\right] - (a\cos x + b\sin x)e^x =$$

$$= e^x \cos x$$

נצמצם ב-e^x, נכנס מחוברים מתאימים, ונקבל:

$$(2b - a - 1)\cos x - (2a + b)\sin x = 0$$

כדי שמשוואה זו תתקיים, לכל x, נדרוש:

$$2b - a - 1 = 0 \quad , \quad 2a + b = 0$$

מכאן:

$$b = \tfrac{2}{5} \quad , \quad a = -\tfrac{1}{5}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p = \left(-\tfrac{1}{5}\cos x + \tfrac{2}{5}\sin x\right)e^x$$

הצגנו שתי שיטות בהן אפשר לפתור את משוואות (10.7) ו-(10.8).
בשיטה הראשונה אנו יוצרים "משוואת עזר" (משוואה (10.6)).
פתרונה הפרטי נמצא, לפי טענה II, והוא מכיל מספרים מרוכבים.
כדי לקבל מפתרון זה את הפתרונות של (10.7) ו-(10.8) יש לקחת את החלק הממשי או את החלק המדומה של הפתרון.

בשיטה השנייה אנו ניגשים ישירות לפתרון המשוואה הנתונה.
בשני המקרים, (10.7) ו-(10.8), אנו מחפשים פתרון פרטי בצורה זהה.
למרות שבשיטה השנייה אין אנו נעזרים במספרים המרוכבים, העבודה הטכנית שנצטרך להשקיע בשיטה זו תהיה, בדרך כלל, רבה יותר ותארך זמן רב יותר.

שאלה 76 *התשובה בעמוד 193*

מצא פתרון פרטי לכל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y'' - 25y = e^{5x}\sin x$

ב. $y'' - 2y' + 5y = xe^{x} + \sin 2x$

רמז - היעזר בעקרון ההרכבה.

ג. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos^2 x$

ד. $y'' - 2y' = \cos 2x - \sin 2x$

---

11. אוסצילטור הרמוני

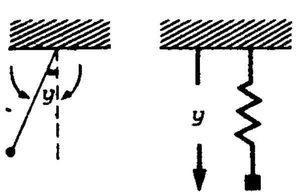
לאחר שיש באמתחתנו שיטות אחדות לפתירת משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסוגים שונים, נפנה למשפחה אחת מסדר שני - משוואות האוסצילטור ההרמוני. יש במשוואות הללו עניין הן מבחינה מתימטית טהורה (בהיותן אב-טיפוס למשוואות כלליות יותר), והן מבחינת השימושים במדעים (אשר ירמז עליהם בהמשך).

I. <u>אוסצילטור הרמוני חופשי</u>

מערכות רבות בטבע מאופיינות בתנאים אידיאליים על-ידי משתנה $y=y(t)$ התלוי בזמן t, כאשר הפונקציה $y(t)$ מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$y'' + \omega_0^2 y = 0 \qquad (11.1)$$

(ω_0 קבוע).



הדבר אמור, בעיקר, לגבי מערכות המוסחות בשיעור זעיר ממצב של שיווי משקל יציב, כמו מטוטלת או מסה התלויה על קצה קפיץ בשדה הכבידה של כדור הארץ או מעגלים חשמליים שיש בהם רכיבים אלקטרוניים שונים. המשוואה עצמה פשוטה מאד, ופתרונה הכללי הוא:

$$y = a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t$$

(a ו-b קבועים שרירותיים).

לעתים נוח יותר לרשום את הפתרון בכתיב אחר:

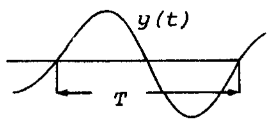
ראה נוסחה (2.9) בסעיף 2 של שיעור זה.

$$y = A\sin(\omega_0 t+\phi)$$

(A ו-ϕ קבועים שרירותיים).

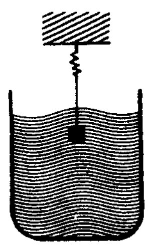
מן הצורה השנייה של הפתרון הכללי ניכר בעליל, שפתרונות משוואה (11.1) הם מחזוריים בזמן:

$$y(t+T) = y(t)$$



כאשר $T=2\pi/\omega_0$ הוא "זמן המחזור" (ω_0 נקראת, בשל הקשר הזה עם T, בשם "התדירות הזוויתית", ובקיצור "התדירות").
הפתרונות הללו באים לידי ביטוי בתופעה המוכרת של תנודת מטוטלת (בתנאים אידיאליים של העדר חיכוך והתנגדות). פשר התואר "חופשי" שניתן בכותרת לתופעה המתוארת על-ידי משוואה (11.1) יתבהר בדיון במשוואה הבאה.

II. אוסצילטור הרמוני מרוסן



משוואה (11.1) היא מודל לתופעות המתרחשות בתנאים אידיאליים - סילוק מוחלט של כל גורמי ההפרעה החיצוניים. במציאות קיימים תמיד אפקטים של אינטראקציה של המערכת עם הסביבה (לדוגמא - התנגדות של תווך חיצוני לתנועת המסה), המביאים ל"ריסון" של תנודת המערכת. במקרה הפשוט ביותר מתוסף לאגף שמאל של המשוואה (11.1) ביטוי של ריסון, שהוא פרופורציונלי לקצב השינוי ("מהירות") של הגודל y. משוואת האוסצילטור ההרמוני המרוסן היא:

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = 0 \qquad (11.2)$$

($\omega_0>0$ ו-$p>0$ קבועים).

גם משוואה (11.2) נפתרת בנקל בשיטה שהוצעה בסעיף 7. שורשי המשוואה האופיינית הצמודה למשוואה (11.2):

$$\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2 = 0$$

תלויים, כמובן, במקדמים p ו-ω_0, ויש להבחין בין המקרים הבאים:

א. ריסון חלש - $p^2 < \omega_0^2$.

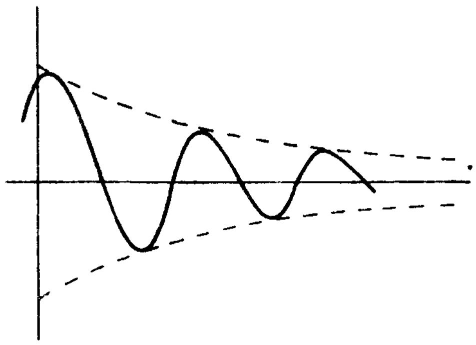
במקרה זה נסמן: $k^2=\omega_0^2-p^2$ ואז שורשי המשוואה האופיינית הם: $\lambda=-p\pm ik$, ופתרון המשוואה הוא:

$$y = e^{-pt}(a\sin kt + b\cos kt)$$

או בצורה אחרת:

$$= Ae^{-pt}\sin(kt+\phi)$$

פונקציית הפתרון ניתנת כמכפלה של פונקציית תנודה



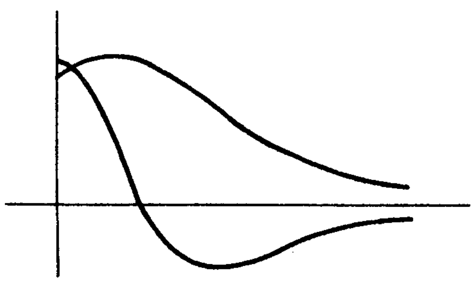
סינוסואידאלית בפונקציית דעיכה אקספוננציאלית (e^{-pt}, $p>0$). אין פתרון זה מתאר תופעה מחזורית ממש, אך אפשר לראות אותו כהרכבה של דעיכה על תנודה מחזורית.
תדירותה של התופעה המחזורית כאן, $k=\sqrt{\omega_0^2-p^2}$, קטנה מתדירות האוסצילטור החופשי מריסון (היינו, כאשר $p=0$). שים-לב, שקיומו של ריסון, קטן ככל שיהיה, גורר את דעיכתה של התופעה אחר זמן די ארוך, שהרי לכל $p>0$,

$$\lim_{t\to 0} e^{-pt} = 0$$

התנועה ההרמונית המרוסנת מלווה אותנו יום-יום: המיתר המתנודד עד שהוא מגיע למצב שיווי-משקל (כלומר עד שמחמת הדעיכה אי-אפשר להבחין יותר בתנודה), המטוטלת ה"מתעייפת", וכדומה.

ב. ריסון עז - $p^2>\omega_0^2$
פתרון המשוואה הוא:

$$y = ae^{\alpha t} + be^{\beta t}$$



כאשר $\alpha=-p+\sqrt{p^2-\omega_0^2}$, $\beta=-p-\sqrt{p^2-\omega_0^2}$ (α ו-β שליליים).

אופייה של התלות בזמן, במקרה זה, שונה בעיקרה מזו שבמקרה של ריסון חלש. כאן אי-אפשר לזהות שוב אלמנט של תנודה מחזורית - עקב הריסון העז שואפות כל עקומות הפתרון אל מצב שיווי המשקל ($y=0$) מבלי להתנודד סביבו (ראה איור בשוליים).

שאלה 77 *התשובה בעמוד 197*

הוכח שכל עקומות הפתרון במקרה II (ב) אינן חותכות את הציר $y=0$ יותר מפעם אחת, בתחום $t\geq 0$. מהי ההגבלה על תנאי ההתחלה, בנקודה $t=0$, אשר תבטיח שלא יהיה אפילו חיתוך אחד?

ג. ריסון קריטי - $p^2 = \omega_0^2$.
פתרון המשוואה הוא:

$$y = (a+bt)e^{-pt}$$

והתמונה האיכותית דומה לזו שבמקרה (ב).

שאלה 78 התשובה בעמוד 198

אשר את הפתרון שלעיל,ודון בתכונות עקומות הפתרונות.

III. אוסצילטור הרמוני מאולץ

מערכות, אשר משוואה (11.1) בחלק I מתארת אותן, הן מערכות מבודדות מסביבתן. אם באה לידי ביטוי במערכות כאלו השפעה של הסביבה, וזו איננה תלויה במצב המערכת (לדוגמא, פעולת כוחות חיצוניים, אינטראקציה של שדות אלקטרומגנטיים חיצוניים, וכדומה) - הרי שיש להוסיף למודל המתימטי (11.1) איבר אי-הומוגני. נדון כאן במקרה הקונקרטי כשהאילוץ החיצוני משתנה עם הזמן בתלות מחזורית, למשל, סינוסואידאלית. גם כאן כמו ב-I, כדי לפשט את הניתוח, נפנה לקונפיגורציה אידיאלית, ונזניח את אפקט הריסון. המשוואה הדיפרנציאלית המתארת "אוסצילטור הרמוני מאולץ" כזה היא:

ראה, למשל, משוואה (3.12) (מעגל RCL חשמלי) כאשר $R=0$.

$$y'' + \omega_0^2 y = \alpha \sin\omega t \tag{11.3}$$

($\omega_0>0$, $\omega>0$ ו-α הם קבועים). נפתור את המשוואה,בהנחת תנאי התחלה:

$$y(0) = y'(0) = 0 \tag{11.4}$$

הקבוע ω משמעותו ברורה - תדירות הגורם המאלץ. מה מובנו של ω_0? מצאנו בחלק I,שאוסצילטור הרמוני חופשי (היינו בלתי מרוסן ובלתי מאולץ) מתנודד בתדירות אשר ריבועה הוא המקדם של y במשוואה. על-כן, גם כאן נקראת ω_0 בשם התדירות החופשית של המערכת. פתרונה הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה ל-(11.3) נרשם כבר בחלק I:

$$y = a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t$$

(a ו-b קבועים שרירותיים).

כדי לקבל את הפתרון הכללי של המשוואה הנתונה יש להוסיף פתרון אחד של המשוואה האי-הומוגנית (11.3). אופיו של פתרון פרטי כזה תלוי ביחס בין תדירות האילוץ והתדירות החופשית.

א. אם $\omega\neq\omega_0$, תוביל הדרך שהתוותה בסעיף 10 לפתרון פרטי מיידי. נציב ב-(11.3) $y=A\sin\omega t$ ונקבל:

$$-\omega^2 A\sin\omega t + \omega_0^2 A\sin\omega t = \alpha\sin\omega t$$

דהיינו:

$$A = \frac{\alpha}{\omega_0^2-\omega^2}$$

לפיכך, פתרון פרטי של המשוואה הנדונה הוא:

$$y = \frac{\alpha}{\omega_0^2-\omega^2} \sin\omega t$$

ופתרונה הכללי:

$$y = a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2-\omega^2} \sin\omega t$$

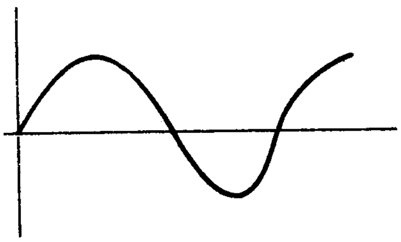
בהצבת שני תנאי ההתחלה מתקבל:

$$a = -\frac{\alpha\omega/\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2} \quad , \quad b = 0$$

בדוק!

פתרון בעיית הערכים ההתחלתיים הנתונה הוא:

$$(11.5) \qquad y(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^2-\omega^2} \left[\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin\omega_0 t\right]$$



עקומת הפתרון היא סכום של שתי עקומות סינוסואידאליות אשר תדירויותיהן שונות. אופיה תלוי ביחס המספרי בין ω ו-ω_0, ובדרך-כלל,אין היא מחזורית. ההסחה מהמצב $y=0$ חסומה (לכל זמן t):

$$|y(t)| \le \frac{\alpha}{|\omega_0^2-\omega^2|} \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\alpha}{\omega_0 |\omega_0-\omega|}$$

ב. אם $\omega=\omega_0$, יש לחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y = t(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)$$

ראה סעיף 10.

ולאחר חישוב לא מסובך נקבל את הפתרון הפרטי של המשוואה האי-הומוגנית:

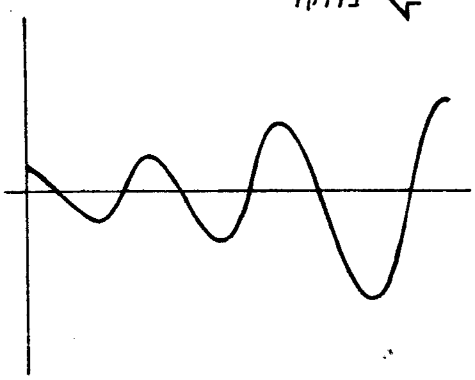
$$y = -\frac{\alpha}{2\omega_0} t\cos\omega_0 t$$

בדוק!

משנוסיף לזה את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית, ונטיל את תנאי ההתחלה (11.4), נגיע אל הפתרון היחיד של בעיית הערכים ההתחלתיים:

$$(11.6) \qquad y = \frac{\alpha}{2\omega_0^2} (\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$$

בדוק!



בניגוד למקרה (א), הרי שפתרון זה איננו חסום (האיבר הראשון, אך לא השני, חסום). האמנם יש להסיק,שמערכת כזאת אשר תדירות האילוץ שלה שווה לתדירותה החופשית, תתנהג כך הלכה למעשה כאשר $t\to\infty$? בזמן t, יעבור $y(t)$ לסירוגין דרך ערכים חיוביים וערכים שליליים, הרחוקים יותר ויותר ממצב ההתחלה $y=0$. יש להניח,שאחר זמן מסוים משפיעות התנודות העזות הללו על הפרמטרים השונים המאפיינים את המערכת, ולבסוף לא יתאים יותר המודל

(11.3) לתיאור המערכת. לדוגמא, ייתכן שבסערת התנודות גדל הריסון ואין עוד הצדקה להזנחתו.

נמצאנו למדים שהתנהגותו של אוסצילטור הרמוני מאולץ רגישה מאד לשינוי ביחס שבין תדירות האילוץ והתדירות החופשית. כשהללו שונות זו מזו, חסום המשתנה $y(t)$ בגודלו, מה שאין כך אם מתלכדות התדירויות. כמובן, התלכדות מדויקת $\omega=\omega_0$ לא תתגשם בפועל בשום מערכת ממשית, שהרי במציאות לא ω ולא ω_0 קבועים ויציבים בדיוק אינסופי, אלא שניהם חשופים בפני השפעות שונות ובלתי-מבוקרות. מה שעלול לקרות הוא התלכדות בקירוב של ω ו-ω_0. לפיכך העניין שבמקרה (ב) הוא תיאורטי בלבד, ואילו הלכה למעשה יש לחקור את מקרה (א) לערכים שונים של ω ו-ω_0 ובפרט, את הגבול (אם קיים) כאשר התדירויות מתקרבות זו אל זו. מתוך עיון בנוסחת הפתרון במקרה (א) מתחוור, שככל ש-$|\omega-\omega_0|$ קטן, ערכי הפונקציה $y(t)$ הרשומה ב-(11.5) הולכים ומתקרבים אל ערכי הפתרון הרשום ב-(11.6). כלומר אותה "קטסטרופה" של מקרה (ב) מתקבלת כמקרה גבולי של (א). התחזית הזאת של המודל מוכרת יפה במערכות, שתדירותן החופשית ω_0 קבועה (יחסית לפרמטרים אחרים). כשמופעל אילוץ בתדירות ω, $\omega\neq\omega_0$ - מובחנת השתנות של $y(t)$, כשהטווח בשינויים הוא סופי. אם מסיחים את התדירות ω אל עבר ω_0, גדל טווח השינוי ב-$y(t)$. כאשר ω קרוב מאד ל-ω_0, תהיה תנודת y נמרצת מאד. תופעה זו קרויה *תהודה (resonance)*, ורישומה ניכר בכל תחומי המציאות הפיסיקלית, החל בהפקת צלילים מוסיקליים בכלי מיתר וכלי נשיפה, דרך רטיטת גופה של מכונה כאשר מספר סיבובי המנוע בדקה מקבל ערך מסוים, וכלה בקליטת גלים אלקטרומגנטיים ברדיו ובטלוויזיה (למעשה התקשורת על כל גילוייה וענפיה בנויה על יסוד תופעת התהודה).

ראה שאלה 79 להלן.

שאלה 79 *התשובה בעמוד 199*

הוכח כי לכל t קבוע:

$$\lim_{\omega\to\omega_0} \frac{\alpha}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{2\omega_0^2}\left[\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t\right]$$

IV. אוסצילטור הרמוני מרוסן ומאולץ

$$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = r\sin\omega t \qquad (11.7)$$

ראה, למשל, משוואה (3.12).

(r, $\omega_0>0$, $\omega>0$ ו-$p>0$ קבועים).

פתרונה הכללי של המשוואה ההומוגנית נרשם בחלק *II*, ונמצא שם שהוא דועך לאפס עם הזמן. הוא יקרא *איבר חולף (transient)*, ויסומן ב-$z(t)$. הפתרון הכללי של משוואת האוסצילטור ההרמוני המרוסן והמאולץ הוא:

$$y(t) = z(t) + \rho\sin(\omega t+\phi) \qquad (11.8)$$

כאשר:

$$\rho = r\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2p\omega)^2\right]^{-1/2}$$

ו-ϕ קבוע מסוים.

גזירת הפתרון הזה וניתוחו מועברים לשאלה 80 שלהלן. די שיצוין כאן, שתופעת התהודה מבצבצת גם בנוסחה הזאת, אלא שהפעם בעטיו של הריסון, אין מתקבלים ערכים גבוליים אינסופיים.

שאלה 80 *התשובה בעמוד 199*

בחן את משוואות האוסצילטור ההרמוני המרוסן והמאולץ, משוואה (11.7), על-פי ההנחיות הבאות:

א. מצא פתרון אחד בשיטת המקדמים.

ב. אשר בעזרת (א) את נוסחת הפתרון הכללי (11.8).

ג. האם קיימת גם כאן "קטסטרופה" של אינסופיות (כבמקרה של אוסצילטור הרמוני מאולץ ללא ריסון) כאשר $\omega\to\omega_0$?

ד. הפתרון ה"יציב" (היינו הפתרון של המשוואה למעט הפתרון החולף) משתנה סינוסואידאלית עם הזמן, כמוהו כאילוץ עצמו. האם מקסימום של זה סימולטני עם מקסימום של זה?

ה. לריסון $p>0$ ותדירות חופשית ω_0 נתונים, הפתרון שנרשם מוגדר בכל ערך של תדירות האילוץ ω (השווה עם מקרה *I*, כשהאפשרות $\omega=\omega_0$ חייבה דיון נפרד), והמקדם ρ בפתרון ה"יציב" תלוי ב-ω: $\rho=\rho(\omega)$. מצא את נקודות המקסימום של הפונקציה $\rho(\omega)$.

(תשובה:

$$\omega_{crit} = \begin{cases} (\omega_0^2-2p^2)^{1/2} & 0 < p < \omega_0/\sqrt{2} \\ 0 & \omega_0/\sqrt{2} \le p \end{cases}$$

ו. חשב את ערכי הפונקציה $\rho(\omega)$ (שהיא "אמפליטודת" הפתרון היציב, כלומר מודדת את הסטייה המקסימלית ממצב האפס) בנקודות הקריטיות שמצאת ב-(ה). אילוץ של מערכת בתדירות קריטית ($\neq 0$) מכונה תהודה. הסק שתופעת התהודה אפשרית רק אם אין הריסון עז דיו, וכשהיא אפשרית, האפקט שלה ניכר יותר ככל שקטן הריסון.

כאמור בראשית הסעיף, המשוואות שהוצגו כאן חשובות כשלעצמן, והן אבני הבניין בתיאוריות רבות במדעי הטבע. אך הסיווג שניתן כאן לפתרונות השונים אופייני למשוואות ליניאריות כלליות יותר מסדר שני, והדיון שלעיל באוסצילטור ההרמוני לא ללמד על עצמו יצא, אלא ללמד על הכלל כולו יצא.

IV
משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר n

12. מבוא

תורת המשוואות הדיפרנציאליות הלינאריות מסדר n דומה בכל פרטיה לתורת המשוואות הלינאריות מסדר שני, אשר נפרשה בפרקים הקודמים. אי-לכך, נחסוך כאן בדברי הסבר. נבסח את המשפטים הרלוונטיים ואת הוכחתם נשאיר לך, בדרך-כלל, כתרגיל.

משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר n היא, כזכור, משוואה בעלת הצורה:

ראה הגדרה II.2.

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} +\ldots+ p_0(x)y = g(x) \qquad (12.1)$$

כאשר הפונקציות p_i ו-g (מקדמי המשוואה) מוגדרות בקטע פתוח I. אם $g(x)\equiv 0$ ב-I, נקראת משוואה (12.1) _משוואה הומוגנית_. משוואה לינארית הומוגנית נראית אפוא כך:

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} +\ldots+ p_0y = 0 \qquad (12.2)$$

פונקציה $y=y(x)$ נקראת _פתרון של משוואה (12.1) בקטע I_ אם $y(x)$ גזירה n פעמים בקטע, והצבתה ב-(12.1) מובילה לזהות ב-I.

באנלוגיה למשוואות מסדר שני ניתן לצפות, שהפתרון הכללי של (12.1) מכיל n קבועים שרירותיים, וממילא דרושים n תנאים נוספים על פתרון $y(x)$ כדי לקבוע אותו כפתרון יחיד. כתנאים אלה ניקח n תנאי התחלה:

ראה לדוגמא שאלה 3.

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

כאשר x_0 נקודה כלשהי ב-I ו-$y_0,\dots,y_{n-1}$ n מספרים נתונים.
בעיית מציאת הפתרון של (12.1) הכפוף לתנאים אלה נקראת
<u>*בעיית הערכים ההתחלתיים (מסדר n)*</u>.
המשפט היסודי עליו נשענת תורת המשוואות הליניאריות הוא משפט הקיום והיחידות. לא נוכיח משפט זה אלא נצטטו בלבד.

משפט II.24

תהיינה $p_{n-1}(x),\dots,p_0(x)$ ו-$g(x)$ פונקציות <u>רציפות</u> בקטע פתוח I. תהי x_0 נקודה כלשהי ב-I ויהיו $y_{n-1},\dots,y_0$ n מספרים כלשהם, אז לבעיית הערכים ההתחלתיים:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = g(x)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

קיים בקטע I פתרון יחיד.

עבור $n=2$ משפט זה אינו אלא משפט II.6.

שאלה 81 התשובה בעמוד 202

א. בשאלה 3 מצאת את אוסף כל הפתרונות של המשוואה:

$$xy^{(4)} - 2y^{(3)} = x^3$$

ראה עמוד 9.

הראה כי בתוך אוסף זה, אכן קיים פתרון אחד ויחיד המקיים:

$$y(1) = -\frac{119}{20} \quad , \quad y'(1) = 15$$

$$y''(1) = \frac{1}{4} \quad , \quad y'''(1) = -59$$

ב. הראה כי כל פונקציה מהצורה $y = Cx^5 + \frac{x^6}{120}$ (C קבוע כלשהו) מקיימת את המשוואה שלעיל ואת תנאי ההתחלה:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

האם גילוי זה אין בו הפרכה למשפט הקיום והיחידות?

13. מרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית

כמו במשוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר שני, נדון תחילה במשוואה ההומוגנית.

שלוש תכונות יסוד מאפיינות משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית בעלת מקדמים רציפים, כפי שנלמד בלמה הבאה:

למה II.25

השורה ללמה II.15.

תהי נתונה המשוואה ההומוגנית:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = 0$$

בעלת מקדמים רציפים בקטע I. אז

א. יש למשוואה פתרון בקטע I - הפתרון $y(x) \equiv 0$ ("הפתרון הטריוויאלי").

ב. כל צירוף לינארי של פתרונות הוא פתרון.

ג. הפתרון היחיד המקיים את המשוואה ואת תנאי ההתחלה:

$$y(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad (x_0 \in I)$$

הוא הפתרון הטריוויאלי.

שאלה 82

התשובה בעמוד 203

הוכח את למה II.25.

בפרק 2 הגדרנו את מושג התלות הלינארית ואת מושג הוורונסקיאן ונוכחנו לדעת כי למושגים אלה נודע תפקיד מרכזי בניתוח מבנה מרחב הפתרונות של משוואה הומוגנית. נזכיר כאן את שני המושגים הללו.

הגדרה II.8

קבוצה של n פונקציות המוגדרות בקטע I, נקראת *קבוצה תלויה לינארית בקטע I* אם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של הפונקציות המתאפס בכל הקטע.

דהיינו הפונקציות $f_1(x),\dots,f_n(x)$ נקראות *תלויות לינארית ב-I* אם קיימים קבועים $C_1,\dots,C_n$ אשר לא כולם אפס המקיימים, לכל x ב-I:

$$C_1f_1(x) + \dots + C_nf_n(x) = 0$$

הגדרה II.12

תהיינה $f_1(x),\dots,f_n(x)$ פונקציות בעלות כל הנגזרות עד הסדר ה-$(n-1)$ בקטע I. *הוורונסקיאן של n הפונקציות* הוא הדטרמיננטה מסדר n המוגדרת על-ידי:

$$W(f_1,\dots,f_n;x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

המשפט הבא הוא הכללת משפט $II.18$:

משפט II.26 *(בוחן לאי-תלות לינארית של פתרונות)*

יהיו $y_1(x),\dots,y_n(x)$ פתרונות של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר n, בעלת מקדמים רציפים בקטע I.

א. אם $y_1(x),\dots,y_n(x)$ בלתי-תלויים לינארית ב-I אז הוורונסקיאן שלהם, $W(x)$, שונה מאפס,בכל נקודה ב-I.

ב. אם $W(y_1,\dots,y_n;x)$ שונה מאפס בנקודה x_0 כלשהי בקטע I, אז הפתרונות $y_1(x),\dots,y_n(x)$ בלתי-תלויים לינארית ב-I (וממילא $W\neq0$ בכל נקודה בקטע).

שאלה 83 *התשובה בעמוד 204*

הוכח את משפט $II.26$.

רמז - להוכחת חלק א שחזר את הוכחת משפט $II.16$. חלק ב של המשפט הוכח כבר קודם (מסקנה $II.14$).

התשובה בעמוד 205

שאלה 84

האם קיימת משוואה מהצורה $y'''+p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$
בעלת מקדמים רציפים בקטע $(-1,1)$ כך שהפונקציות $y_1=x$,
$y_2=x^2$, $y_3=x^3$ הן הפתרונות שלה?

עתה, יש בידינו כל הדרוש לתיאור מרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית.

משפט II.27

תהי נתונה משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית (12.2):

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} +...+ p_0(x)y = 0$$

בעלת מקדמים רציפים בקטע I.

א. יש למשוואה מערכת של n פתרונות בלתי-תלויים ב-I.

ב. אם $y_1,...,y_n$ הם n פתרונות בלתי-תלויים ב-I, אז הפתרון הכללי של המשוואה נרשם בצורה:

$$y = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x)$$

התשובה בעמוד 206

שאלה 85

הוכח את משפט *II.27*

קבוצה של n פתרונות בלתי-תלויים של משוואה הומוגנית (12.2) נקראת *מערכת בסיסית* של פתרונות. ממשפט *II.27* אנו למדים אפוא, שמציאת מערכת בסיסית של פתרונות כמוה כפתרון המשוואה.

התשובה בעמוד 207

שאלה 86

הראה כי הפונקציות שלהלן מהוות מערכת בסיסית של פתרונות עבור המשוואות המתאימות, ורשום את הפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות:

א. $1 , \cos x , \sin x$ $y''' + y' = 0$

ב. $1 , x , \cos x , \sin x$ $y^{(4)} + y'' = 0$

התשובה בעמוד 209

שאלה 87

תהי נתונה המשוואה:

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$$

מצא ארבעה פתרונות פרטיים שצורתם $e^{\lambda x}$ (λ קבוע). בדוק את אי-תלותם הלינארית, ורשום את הפתרון הכללי של המשוואה.

שאלה 88 | התשובה בעמוד 210

א. תהיינה $y_1(x),\dots,y_n(x)$ n פונקציות גזירות (ברציפות) n פעמים בקטע I, ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב-I. הוכח כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר n (מהצורה (12.2)) בעלת מקדמים רציפים ב-I, כך ש-$\{y_1,\dots,y_n\}$ היא מערכת בסיסית של פתרונותיה.

רמז - עיין במשוואה הבאה:

$$\begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n-1)} & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

ב. הוכח שהמשוואה שמצאנו בסעיף א היא יחידה.

ג. רשום משוואה לינארית הומוגנית מסדר 3 (בהצגתה הסטנדרטית (12.2)) כך שהפונקציות: x, x^2 ו-x^3 מהוות מערכת בסיסית של פתרונותיה. באיזה קטע רציפים מקדמי משוואה זו?

השווה לשאלה 84.

---

14. משוואה הומוגנית שמקדמיה קבועים

בסעיף זה נבנה מערכת בסיסית של פתרונות למשוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים. בכתיב הסטנדרטי תירשם משוואה זאת כך:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \qquad (14.1)$$

($a_0,\dots,a_n$ קבועים ו-$a_n \neq 0$).

כשם שעשינו במשוואות מסדר שני, ננסה גם כאן פתרון מן הצורה:

$$y = e^{\lambda x}$$

(λ קבוע).

הנגזרות של y הן:

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad , \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \ ,\dots, \ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

ובהצבה במשוואה (14.1) מתקבל:

$$(a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

לכן הפונקציה $e^{\lambda x}$ תהיה פתרון של משוואה (14.1) אם ורק אם λ הוא שורש של המשוואה:

$$z(\lambda) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (14.2)$$

הפולינום $z(\lambda)$, המופיע במשוואה זו נקרא *הפולינום האופייני* של משוואה (14.1) ואילו משוואה (14.2) נקראת *המשוואה האופיינית* הצמודה למשוואה (14.1). אנו יודעים שלפולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים (ממשיים או מרוכבים), כאשר ב-n אנו מונים גם את ריבוביהם של השורשים.

ראה משפט 6 בנספח 3.

.I

נדון תחילה במקרה שלפולינום האופייני n שורשים **שונים** $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. כל שורש כזה, λ_k, תורם פתרון $e^{\lambda_k x}$ של משוואה (14.1). אם כן, למשוואה (14.1) n פתרונות: $e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_n x}$.

נוכיח שפתרונות אלה בלתי-תלויים לינארית בכל קטע.

נשתמש באינדוקציה.

עבור $n=2$, הוכחנו כבר כי $e^{\lambda_1 x}$ ו-$e^{\lambda_2 x}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ בלתי-תלויים לינארית בכל קטע.

ראה עמוד 60.

נניח כי הטענה נכונה עבור n ונעבור ל-$(n+1)$.

יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$ מספרים שונים, ויהי:

$$C_1e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x} + C_{n+1}e^{\lambda_{n+1} x}$$

צירוף לינארי של $e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_{n+1} x}$ המתאפס בקטע I. נוכיח כי כל מקדמי הצירוף הם אפסים. ובכן, נתון כי:

$$C_1e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x} + C_{n+1}e^{\lambda_{n+1} x} = 0 \qquad (14.3)$$

נכפול ב-$e^{-\lambda_{n+1} x}$:

$$C_1e^{(\lambda_1-\lambda_{n+1})x} + \ldots + C_ne^{(\lambda_n-\lambda_{n+1})x} + C_{n+1} = 0$$

$(x \in I)$

נגזור זהות זו, ונקבל:

$$C_1(\lambda_1-\lambda_{n+1})e^{(\lambda_1-\lambda_{n+1})x} + \ldots \qquad (14.4)$$

$$+ C_n(\lambda_n-\lambda_{n+1})e^{(\lambda_n-\lambda_{n+1})x} = 0 \qquad (x \in I)$$

זהו צירוף לינארי מתאפס של הפונקציות $e^{(\lambda_i-\lambda_{n+1})x}$ $(i=1,\ldots,n)$.

מאחר שה-λ-ים כולם שונים זה מזה הרי שגם המספרים $\lambda_i-\lambda_{n+1}$ $(i=1,\dots,n)$ שונים זה מזה ונקבל מהנחת האינדוקציה, כי הצירוף (14.4) הוא צירוף טריוויאלי, והיינו:

$$C_i(\lambda_i-\lambda_{n+1}) = 0 \qquad (i=1,\dots,n)$$

ומכאן נובע כי $C_i=0$ $(i=1,\dots,n)$.

שכן $\lambda_i-\lambda_{n+1}\neq 0$ $\lambda_i\neq\lambda_{n+1}$ $(i=1,\dots,n)$.

עתה, נקבל מן השוויון (14.3) כי גם $C_{n+1}=0$ הווה אומר, שוויון (14.3) ייתכן רק כאשר כל מקדמיו הם אפסים ולכן הפונקציות:

$$e^{\lambda_1 x},\dots,e^{\lambda_{n+1} x}$$

בלתי-תלויות לינארית. ■

<u>לסיכום</u>, אם לפולינום האופייני, $z(\lambda)$, n שורשים שונים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ הרי הפתרונות $e^{\lambda_1 x},\dots,e^{\lambda_{n+1} x}$ בלתי-תלויים לינארית ולכן מהווים מערכת בסיסית של פתרונות עבור המשוואה (14.1). הפתרון הכללי של המשוואה יירשם כך:

על-פי חלק ב של משפט II.27.

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \dots + C_ne^{\lambda_n x}$$

דוגמאות

א. נתונה המשוואה:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

הפולינום האופייני, במקרה זה, הוא:

$$z(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda^2-2\lambda-3)$$

לפולינום זה יש שלושה שורשים:

$$\lambda_3 = 0\ ,\ \lambda_2 = 3\ ,\ \lambda_1 = -1$$

לשורשים אלו מתאימים הפתרונות:

$$y_1 = e^{-x}$$

$$y_2 = e^{3x}$$

$$y_3 = 1$$

והפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_3$$

ב. נתונה משוואה דיפרנציאלית:

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} - 15y'' - 19y' + 30y = 0$$

הפולינום האופייני הוא:

$$z(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 15\lambda^2 - 19\lambda + 30$$

ושורשיו הם:

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -2 \quad , \quad \lambda_3 = 3 \quad , \quad \lambda_4 = -5$$

שורשים אלה מתגלים תוך בחינת המחלקים של האיבר החופשי, 30. ראה נספח 3, משפט 8.

לכן המערכת הבסיסית של פתרונות היא:

$$y_1 = e^{x}$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

$$y_3 = e^{3x}$$

$$y_4 = e^{-5x}$$

ופתרונה הכללי הוא:

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x} + C_4e^{-5x}$$

שאלה 89 התשובה בעמוד 212

מצא את הפתרון הכללי של המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

א. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$

ב. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

אם אחד משורשי המשוואה האופיינית הוא מרוכב $(\lambda=\alpha+i\beta)$. גם המספר המרוכב הצמוד לו, $\alpha-i\beta$, הוא שורש של המשוואה האופיינית. הפתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית המתאימים לשורשים $\alpha\pm i\beta$ הם:

ראה נספח 3, משפט 7.

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$$

ו- $$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

פתרונות אלו אינם ממשיים. כיון שאנו מעוניינים בפתרונות ממשיים של המשוואה, ננהג כשם שנהגנו במשוואות מסדר שני: נמיר את צמד הפתרונות המרוכבים $e^{(\alpha\pm i\beta)x}$ בצמד הפתרונות הממשיים:

$$e^{\alpha x}\sin\beta x \quad , \quad e^{\alpha x}\cos\beta x$$

כיון שאנו עוסקים בפולינום ממעלה גדולה מ-2 יכולים, כמובן, להיות יותר מאשר צמד אחד של פתרונות מרוכבים, ולגבי כל צמד ננהג בצורה דומה. אפשר להוכיח שקבוצת הפתרונות המתקבלת היא מערכת בסיסית של פתרונות.

א. נתונה המשוואה:

$$y^{(4)} - y = 0$$

המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^4-1 = (\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0$$

שורשיה של המשוואה האופיינית הם: $1, -1, i, -i$, ולכן הפתרונות המתאימים של המשוואה הדיפרנציאלית הם:

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = e^{-x}$$

$$y_3 = \cos x$$

$$y_4 = \sin x$$

שאלה 90 התשובה בעמוד 212

הוכח (על-ידי בדיקת הוורונסקיאן) כי הפתרונות הללו בלתי-תלויים לינארית.

אם כן, הפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

ב. נתונה המשוואה:

$$y''' + 2y'' - 3y + 20 = 0$$

לפולינום האופייני:

$$z(\lambda) = \lambda^3+ 2\lambda^2 - 3\lambda + 20$$

יש שורש רציונלי, $\lambda_1=-4$, נחלק את הפולינום ב-$\lambda+4$, ונמצא כי:

$$z(\lambda) = (\lambda+4)(\lambda^2-2\lambda+5)$$

לכן שני השורשים הנוספים הם: $\lambda_2=1+2i$ ו-$\lambda_3=1-2i$
הפתרונות הבסיסיים הם:

$$y_1 = e^{-4x}$$

$$y_2 = e^x\cos 2x$$

$$y_3 = e^x\sin 2x$$

והפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{x}cos2x + C_3e^{x}sin2x$$

שאלה 91 התשובה בעמוד 213

מצא את הפתרון הכללי עבור כל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y^{(4)} + y = 0$

ב. $y^{(6)} - y'' = 0$

ג. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 3y - 1 = 0$

.II

נטפל עתה במקרה שלפולינום האופייני, $z(\lambda)$, יש שורשים בעלי מידת ריבוב גדולה מ-1. בסעיף 7 ראינו, שאם λ הוא שורש כפול של המשוואה האופיינית, שני הפתרונות המתאימים של המשוואה הדיפרנציאלית הם:

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

ו- $$y_2 = xe^{\lambda x}$$

ניתן לצפות שכאשר λ הוא שורש בעל מידת ריבוב s ($s\geq 2$) של הפולינום $z(\lambda)$, הפתרונות המתאימים של המשוואה הדיפרנציאלית יהיו

$$e^{\lambda x} \ , \ xe^{\lambda x} \ , \ x^2e^{\lambda x} \ ,\ldots, \ x^{s-1}e^{\lambda x}$$

קל להוכיח זאת למקרה הפרטי בו $\lambda=0$.

שאלה 92 התשובה בעמוד 214

א. הוכח שאם $\lambda=0$ הוא שורש של הפולינום האופייני, בעל מידת ריבוב s, אז המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה נראית כך:

$$a_ny^{(n)} +\ldots+ a_sy^{(s)} = 0$$

כאשר $a_s\neq 0$.

ב. הסק מחלק א כי s הפונקציות $1,x,\ldots,x^{s-1}$ הן פתרונות של המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה.

ג. האם x^s הוא פתרון של המשוואה?

במקרה הכללי $(\lambda\neq 0)$, נציב $y(x)=e^{\lambda x}f(x)$ במשוואה הדיפרנציאלית הנתונה. מתברר שעבור f מתקבלת משוואה מן הצורה:

ראה סעיף 10.

$$A_n f^{(n)} +\ldots+ A_s f^{(s)} = 0 \qquad (14.5)$$

לא נוכיח טענה זו.

כאשר $A_1,\ldots,A_s$ קבועים מסוימים ו-$A_s\neq 0$.
משאלה 92 אנו יודעים, שהפונקציות $1,x,\ldots,x^{s-1}$ הן פתרונות של המשוואה (14.5) ולכן למשוואה דיפרנציאלית הנתונה s פתרונות אלה:

$$e^{\lambda x}\ ,\ xe^{\lambda x}\ ,\ldots,\ x^{s-1}e^{\lambda x}$$

שאלה 93 | התשובה בעמוד 215

הוכח כי הפונקציות $e^{\lambda x},\ldots,x^{s-1}e^{\lambda x}$ הן בלתי-תלויות לינארית בכל קטע.

באופן כללי, אם $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ הם שורשים של הפולינום האופייני, בעלי מידות ריבוב $s_1,\ldots,s_k$ בהתאמה, אז הפתרונות הבסיסיים הם:

$$(14.6)\quad \left\{\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 x} & , xe^{\lambda_1 x} & ,\ldots, & x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x} & , xe^{\lambda_2 x} & ,\ldots, & x^{s_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_k x} & , xe^{\lambda_k x} & ,\ldots, & x^{s_k-1}e^{\lambda_k x} \end{array}\right.$$

כיון ש-

$$s_1 + s_2 +\ldots+ s_k = n$$

ראה נספח 3, משפט 5.

אנו מקבלים בדיוק n פתרונות. הוכחנו בשאלה 93, שהפתרונות המתאימים לכל שורש λ_i הם בלתי-תלויים לינארית. אפשר להוכיח, שכל n הפתרונות הרשומים לעיל הם בלתי-תלויים לינארית. לכן קבוצת הפתרונות (14.6) היא מערכת בסיסית של פתרונות.

ראה נספח 3, משפט 7.

אם $\alpha+i\beta$ הוא שורש בעל מידת ריבוב s של המשוואה האופיינית גם $\alpha-i\beta$ הוא שורש בעל מידת ריבוב s. $2s$ הפתרונות המתאימים לשורשים הללו הם:

$$e^{(\alpha+i\beta)x}\ ,\ xe^{(\alpha+i\beta)x}\ ,\ldots,\ x^{s-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x}\ ,\ xe^{(\alpha-i\beta)x}\ ,\ldots,\ x^{s-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

על-ידי תהליך שגרתי ניתן להמיר פתרונות אלה ב-$2s$ הפתרונות הממשיים:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x \; , \ldots , \; x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x \quad , \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x \; , \ldots , \; x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

דוגמא

נתונה המשוואה:

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$$

המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^8 + 8\lambda^4 + 16 = 0$$

או

$$(\lambda^4+4)^2 = 0$$

השורשים של המשוואה $\lambda^4+4=0$ הם:

$$\lambda_k = +\sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$

ראה נספח 2.

$k=0,1,2,3$

מכאן -

$$\lambda_0 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 1+i$$

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -1+i$$

איננו צריכים לבדוק מהם λ_2 ו-λ_3 כיון שידוע לנו שהצמודים ל-λ_0 ו-λ_1 גם הם שורשים, ולכן שורשי המשוואה $\lambda^4+4=0$ הם: $1+i$, $-1+i$, $1-i$, $-1-i$. כל אלה הם <u>שורשים כפולים</u> של המשוואה האופיינית (מדוע?), ועל-כן הפתרונות הבסיסיים של המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה הם:

$$y_1 = e^{-x}\cos x \quad , \quad y_2 = xe^{-x}\cos x$$

$$y_3 = e^{-x}\sin x \quad , \quad y_4 = xe^{-x}\sin x$$

$$y_5 = e^{x}\cos x \quad , \quad y_6 = xe^{x}\cos x$$

$$y_7 = e^{x}\sin x \quad , \quad y_8 = xe^{x}\sin x$$

שאלה 94 התשובה בעמוד 215

מצא את הפתרון הכללי לכל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

ב. $y^{(4)} - 4y = 0$

ג. $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$

שאלה 95 התשובה בעמוד 216

פתור את בעיות הערך ההתחלתי הבאות:

א. $y''' - 6y'' + 10y' = 0$

$y(0) = 5 \quad , \quad y'(0) = 2 \quad , \quad y''(0) = 2$

ב. $y''' - y = 0$

$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad y''(0) = 1$

ג. $y''' + y'' - 34y' + 56 = 0$

$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad y''(0) = 0$

15. משוואה אי־הומוגנית

משפט II.28

הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית לינארית אי-הומוגנית:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = g(x) \qquad (15.1)$$

הוא סכום של הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = 0 \qquad (15.2)$$

ופתרון פרטי של המשוואה האי-הומוגנית הנתונה.

שאלה 96 התשובה בעמוד 217

הוכח את משפט II.28.