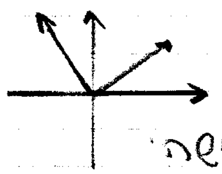
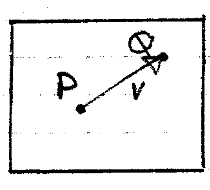
dinazil@notes-heaven.com

גאומטריה היא אחד המקצועות היותר עתיקים במתמטיקה. יש עדויות להתעסקות בגאומטריה עוד בתקופה הבבלית.
אגב הספר "היסודות" של אוקלידס הוא אחד הספרים הפופולריים ביותר. אכן ההישגים הגדולים שלו הוא הניסיון לבנות מערכת שנשענת על אקסיומות ודדוקציה.
במקור התחום הזה עוסק במבנים (צורות, נקודות, ...) ואוקלידס ניסה להגדיר אותם ואת היחסים ביניהם בצורה "סינתטית".
חלק מן היחסים מובנים מאליהם וחלקם שנויים במחלוקת, כמו האקסיומה החמישית, "אקסיומת המקבילים" שמסתבר שהיא לא אינטואיטיבית בכלל. מאז שהוכנסו קואורדינטות למערכת הצירים ניתן לדבר בצורה אלגברית על גיאומטריה.
זה מה שנקרא בביה"ס "גיאומטריה אנליטית". השפה הנוחה לצורך זה היא שפת האלגברה הלינארית.

לאלגברה הלינארית יש את החסרונות שלה. למשל באלגברה לינארית "מישור" חייב להיות תת מרחב, כלומר לעבור דרך האפס. עוד פיתוח מחשבתי שנעשה הוא הפיתוח של פרספקטיבה בציור, שמבטא את הניסיון לבטא משהו תלת-מימדי בתוך עולם דו-מימדי. מכך התפתחה הגיאומטריה הפרוייקטיבית. כך למשל כאשר מציירים זוג ישרים מקבילים על הלוח הם כן "נפגשים" באינסוף.



באלגברה לינארית מדמיינים מישור כך:
אך למעשה אין במישור בגאומטריה אפינית נקודה מיוחדת. ניתן בכל פעם לבחור נקודה במישור ולייצג את הנקודות האחרות באמצעותה ובאמצעות וקטורים.



למשל - Q היא "הזזה" של P בוקטור v.

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

הגדרה: מרחב אפיני מעל $\mathbb{F}$ נתון ע"י: $(\mathbb{A}, \mathbb{V}, +)$

$\mathbb{A}$ קבוצה של נקודות

$\mathbb{V}$ מרחב לינארי (של כיוונים) מעל $\mathbb{F}$

$t = + : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{A}$ (העתקה translation)

$P, Q \in \mathbb{A}$ $\qquad (P, v) \longmapsto P + v = Q$

$w, v \in \mathbb{V}$ $\qquad$ (יש לחשוב על כך כהזזה של הנקודה P בכיוון v)

יחד עם התנאים הבאים:

1. $(P+v)+w = P+(v+w)$
2. $P+0 = P$
3. $\forall P, Q \in \mathbb{A}\ \underset{\text{קיים ויחיד}}{\exists!}\ v \in \mathbb{V} : P + v = Q$

את הוקטור הזה נסמן $v = Q - P$

או $\overrightarrow{PQ}$.

דוגמאות: 0. $\mathbb{A} = \emptyset$

1. אם כל הדוגמאות. $\mathbb{A} = \mathbb{V}$

נבנה את "המבנה האפיני הקנוני" המושרה מעל מרחב כלשהו.

אם $V = \mathbb{F}^n$ אז נציג את $P \in A = \mathbb{F}^n$

כ- $P = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$ (כן, האינדקסים למעלה).

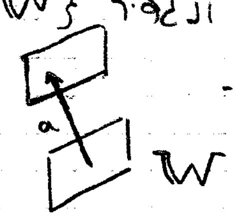
ואת $v \in \mathbb{V} = \mathbb{F}^n$ נציג כך- $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$ ולכן-

$$P + v = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 + v^1 \\ \vdots \\ p^n + v^n \end{pmatrix}$$

2. $\mathbb{V} \geq \mathbb{W}$ תת-מרחב של $\mathbb{V}$

יהי $a \in \mathbb{V}$ ונגדיר $a + \mathbb{W} := \{a + w : w \in \mathbb{W}\}$

ואז הדוגמה היא- $(a + \mathbb{W}, \mathbb{W}, +)$



3. אוסף הפתרונות של מערכת משוואות מעל שדה נתון (לאו דווקא מערכת הומוגנית!)

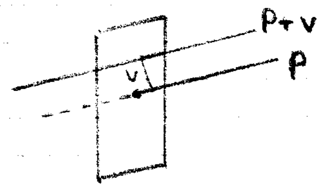
בלבוש מטריציאלי - $Ax=b$ A מטריצה

$b\in\mathbb{F}^n$

x n-יה של משתנים

נסמן ב- $S(b)$ את אוסף הפתרונות
וב- $S(0)$ את אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$. בפרט $x=0$ הוא פתרון.
למדנו באלגברה לינארית ש- $S(b)=x_b+S(0)$
כאשר x_b הוא פתרון פרטי של $S(b)$. יתכן שלא קיים x_b כזה ואז $S(b)=\emptyset$.

דוגמאות אבסטרקטיות יותר, אבל גאומטריות יותר.
נחשוב על ישר דרך הראשית ב-$\mathbb{R}^3$, ונמצא את המרחב בעזרת <u>כל ההזזות</u> של אותו ישר.



ניקח מישור שאינו מכיל את הישר (מישור משלים). כל הזזה של הישר חותכת את המישור בנקודה בלעדית.
חשוב להבחין שהיינו יכולים לקחת כל תת-מרחב במרחב וקטורי כלשהו, ולאו דווקא ישר ב-$\mathbb{R}^3$. הרעיון הזה - לוקחים תת-מרחב משלים (תתי-מרחבים הם משלימים את סכומם שווה למרחב והחיתוך שלהם הוא אפס), והוא ישמש כמרחב ההזזות שלנו. חשוב גם להבחין שאין בחירה יחידה לתת-המרחב המשלים, ונקבל מרחבים אפיניים שונים עבור בחירות שונות אבל איזומורפיים.
נדבר על זה בהמשך...

④ 23.01.08
גיאומטריה
ליניארית.

תזכורת

יש שדה F ומעליו מוגדר מרחב לינארי V. וישנה קבוצה כלשהי A של נקודות. בתנאים מסויימים אפשר לומר שעל A מוגדר מבנה של מרחב אפיני. זה קורה כאשר מוגדרת העתקה $t: A\times V \longrightarrow A$, $(P,v)\longrightarrow P+v$. הרעיון הוא שהוקטורים מזיזים את הנקודות. t כזו צריכה לקיים 3 אקסיומות:

(1) $(P+v)+w = P+(v+w)$

(2) $P+0=P$

(3) $\forall P,Q\ \exists! v : P+v=Q$

פעולה של חבורה על קבוצה

תהי X קבוצה. נסמן ב-$\underline{S(X)}$ את אוסף ההעתקות ההפיכות מ-X לעצמו, כלומר - S תמורות האיברים של X.

S התמורות של הקבוצה X = $S(X)=\{f:X\xrightarrow{\sim}X\}$

הטענה היא שזו לא סתם קבוצה, אלא חבורה. שהפעולה שלה היא הרכבה. הרכבת תמורות היא תמורה. תמורת הזהות היא האיבר הניטרלי. הרכבת תמורות היא אסוציאטיבית ותמורה בהיותה תמונה היא הפיכה, וההופכית שלה תמורה.

נזכיר מהי <u>חבורה</u>. חבורה היא זוג $(G,\cdot)$ כך ש-G קבוצה ו- $\cdot : G\times G\to G$ פעולה שמקיימת-

(1) לכל $g,h,k\in G$ $(gh)k=g(hk)$ (אסוציאטיביות)

(2) קיים $e\in G$ כך שלכל $g\in G$ $ge=g=eg$ (איבר יחידה)

(3) לכל $g\in G$ קיים $g^{-1}\in G$ כך ש- $gg^{-1}=e=g^{-1}g$ (הופכי)

תת חבורה $T\le S(X)$ נקראת (תת)<u>חבורה של טרנספורמציות</u> של X.

<u>דוגמאות</u>

① $T=S(X)$

② $T=\{e\}$

אז מה זה גאומטריה של קבוצה? למעשה זו הסתכלות על התמורות עליה ובדיקה של התכונות שהן מקיימות.
למשל, אפשר להסתכל על המישור האוקלידי ועל G הטרנספורמציות שמשמרות מרחק. טרנספורמציות כאלה מעבירות ישרים לישרים ומעגלים למעגלים. זה מה שגאומטריה אוקלידית מתעסקת בו.

<u>הגדרה</u>: נאמר שחבורה G <u>פועלת</u> על הקבוצה X כאשר נתון הומומורפיזם $\phi: G \to S(X)$, $g \mapsto \phi(g)$, כלומר $\phi(g): X \to X$ ומסמנים $\phi(g)(x) = gx$
(תזכורת: הומומורפיזם זו העתקה בין חבורות ששומרת על הפעולה: $\varphi: G \to H$ כך ש- $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$
ואז מתקיים $\varphi(e_G) = e_H$ ו- $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$).

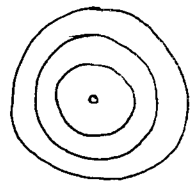
<u>דוגמאות</u>: תהי X קבוצה ותהי $G \le S(X)$.
1) $X = V$ מרחב וקטורי מעל שדה F ו- $G = GL(V)$ אוסף הטרנספורמציות הלינאריות ההפיכות של V. (G זו איזומורפית ל- $GL_n(F)$ - אוסף המטריצות ההפיכות מעל F ממימד n - המימד של V)
2) $X = A$, $G = V$

<u>הגדרה</u>: פעולה <u>נאמנה</u> (faithful) של G על X היינה הומומורפיזם חח"ע $G \to S(X)$, כלומר הפעולה היא שיכון של G ב- $S(X)$.
פעולה תיקרא <u>טרנזיטיבית</u> כאשר לכל $x, y \in X$ קיים $g \in G$ כך ש- $gx = y$.

<u>הגדרה</u>: נניח שחבורה G פועלת על קבוצה X. המסלול של $x \in X$ הוא הקבוצה $Gx = \{gx : g \in G\}$
(אם פעולה היא טרנזיטיבית אמ"מ יש ב- X רק מסלול יחיד תחת G. מספיק לבדוק שעבור נקודה כלשהי a $Ga = X$. המסלולים הם למעשה מחלקות שקילות על הנקודות ב- X).

דוגמאות

יהי $X=\mathbb{C}^*=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ המישור המנוקב. תהי G חבורת הסיבובים.
מסלול של נקודה במרחק $r>0$ מהראשית הוא מעגל ברדיוס r.



מה לגבי החבורה G? אפשר לזהות אותה גיאומטרית ע"י S^1 - מעגל היחידה. לחבורה הזו יש תכונות גיאומטריות: ממש, היא קשיר.
חבורת הסיבובים היא חבורה נאמנה.

הגדרה: פעולה תיקרא טרנזיטיבית פשוטה (Simply transitive) אם לכל $x,y\in X$ קיים $g\in G$ יחיד (!!) כך ש- $gx=y$.

תרגיל (תלמיד הדגים): אם G אבלית, אז פעולה היא טרנזיטיבית פשוטה אמ"מ היא נאמנה וטרנזיטיבית.

משפט: על A מוגדר מבנה אפיני מעל מרחב לינארי V אמ"מ V פועל על A באופן נאמן וטרנזיטיבי (יש רק שימוש בכך ש-V כחבורה חיבורית היא אבלית).

הוכחה: בהינתן מבנה אפיני על A צריך להראות שיש הומומורפיזם $\phi: V\to S(A)$. אז לכל $v\in V$ נגדיר העתקה $t_v: A\to A$ שפועלת באופן הבא: $t_v: P\to P+v$. אנחנו צריכים להראות ש- $t_v\in S(A)$ וש- ϕ הפיכה.
נראה ש- t_v חח"ע ועל, נראה שהיא הפיכה. נטען ש- $t_v^{-1}=t_{-v}$ ואכן, לכל $P\in A$ מתקיים

$$t_v\circ t_{-v}(P)=t_v(t_{-v}(P))=t_v(P-v)=(P-v)+v=P+(-v+v)=$$
$$=P+0=P \quad \Rightarrow \quad t_v\circ t_{-v}=Id$$

ובאותו אופן $t_{-v}\circ t_v=Id$ $\Leftarrow$ t_v הפיכה ולכן תמורה.
כעת נראה ש- ϕ הומומורפיזם. צריך להראות ש $t_v\circ t_w=t_{v+w}$ ואכן לכל $P\in A$ מתקיים

$t_v \circ t_w (P) = t_v(t_w(P)) = t_v(P+w) = (P+w)+v =$

$= P+(w+v) = P+(v+w) = t_{v+w}(P)$

$\Leftarrow$ ϕ הומומורפיזם.

נותר להראות שהפעולה נאמנה וטרנזיטיבית.

בשביל להראות שהיא נאמנה מספיק להראות שהגרעין שלה טריוויאלי, כלומר, אם $t_v = Id$ אז $v=0$. אז נניח שיש לנו v כך ש- $P+v=P$ לכל P. אבל לפי התנאים של מרחב אפיני קיים וקטור יחיד w כך ש- $P+w=P$. אבל $P+0=P$ $\Leftarrow$ $v=0$. האמת היא שיש כאן שימוש בכך ש-A לא ריקה אבל זו דרישה סבירה.

למה ϕ טרנזיטיבית? זה בכוח הדרישה השלישית של מרחב אפיני.

הכיוון השני של המשפט מושאר כתרגיל. ☺

יחס שקילות בקבוצה X

לפעמים נוח לנו לחשוב על עצמים בקבוצה השונים אבל במובן מסוים אנחנו מזהים אותם.

יחס שקילות על X הוא תת הקבוצה $R\subseteq X\times X$ כך שמתקיימים התנאים הבאים ($(x,y)\in R$ נסמן ע"י $x\equiv y$)

(1) רפלקסיביות - לכל $x\in X$ $x\equiv x$

(2) סימטריות - אם $x\equiv y$ אז $y\equiv x$

(3) טרנזיטיביות - אם $x\equiv y$; $y\equiv z$ אז $x\equiv z$

אם R יחס שקילות מסמנים $C_x=\{y\in X : y\equiv x\}$ מחלקת השקילות של x.

דוגמה:

① $X=\mathbb{Z}$ ונאמר $x\equiv y$ אמ"מ לשניהם אותה זוגיות, כלומר $2 \mid x-y$.

אז $C_0=\{0,\pm2,\pm4,\dots\} = C_{\pm2} = C_{\pm4} = \dots$

$C_1=\{\pm1,\pm3,\pm5,\dots\} = C_{\pm3} = C_{\pm5} = \dots$

② נתבונן בכל המשולשים במישור ושני משולשים הם שקולים אמ"מ הם חופפים.

הערה:

תמיד מתקיים $x \in C_x$ $\Leftarrow$ כל איבר ב- X שייך לאיזו מחלקת שקילות.

אלא שמחלקות השקילות מקיימות עוד תכונה חשובה מאוד:

$$C_x \cap C_y = \emptyset \quad \text{או} \quad C_x = C_y$$

למה? נניח ש- $z \in C_x \cap C_y$ $\Leftarrow$ $z \equiv x,\ z \equiv y$ $\Leftarrow$ $x \equiv z$

ומהטרנזיטיביות $x \equiv y$. אז מספיק להראות ש: $x \equiv y$ אמ"מ $C_x = C_y$.

($\Leftarrow$) יהי $z \in C_x$. אז $z \equiv x$ $\Leftarrow$ $z \equiv y$ לפי הטרנזיטיביות

ולכן $z \in C_y$. באופן סימטרי אם $z \in C_y$ אז $z \in C_x$ ולכן

$C_x = C_y$.

($\Rightarrow$) אם $C_x = C_y$ ברור ש- $x \equiv y$, שהרי $x \in C_x$; $y \in C_y$.

מכאן נובע ש- $X = \dot{\bigcup}_{x \in X} C_x$ איחוד זר של מחלקות השקילות. זוהי חלוקה של X.

גם הכיוון ההפוך הוא נכון. אם X ניתן להצגה כאיחוד זר של תת קבוצות

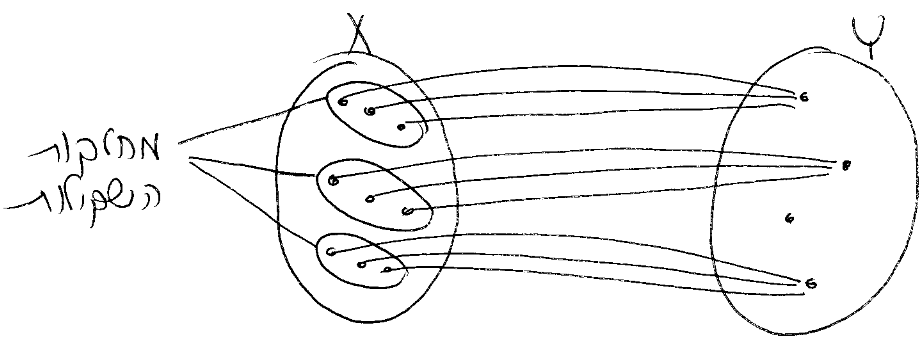
זה מגדיר יחס שקילות על X - $x \equiv y$ אמ"מ הם נמצאים באותה

הקבוצה. במילים אחרות $X = \dot{\bigcup}_{i \in I} X_i$ אז $x \equiv y$ אמ"מ קיים $i \in I$ כך

ש- $x, y \in X_i$. <u>תרגיל</u>: להוכיח שזה אכן יחס שקילות.

<u>דוגמה</u>: בהינתן פונקציה $f: X \to Y$ נגדיר יחס שקילות באופן הבא

$$a \equiv b \iff f(a) = f(b)$$



ג'יאומטריה לינארית

בגלל שאולי לא נפגש ביום חמישי (בגלל השלג) היום נקבע את
מה שעשינו בשבוע שעבר ונראה אחרי שיתפנה לנו אולי לעשות תרגול.
בעתיד יהיה אתר לקורס ב- [illegible]. (לחפש שם תרגיל).

φ

F שדה. V מרחב וקטורי מעל F. אמרנו באילו תנאים קבוצת
נקודות A היא מרחב אפיני מעל V. זה קורה כאשר יש פעולה
חיבורית $\begin{matrix} A\times V \longrightarrow A \\ (P,v) \longmapsto P+v \end{matrix}$ שמקיימת:

$$(1) \quad (P+v)+w = P+(v+w)$$
$$(2) \quad P+0 = P$$
$$(3) \quad \forall P, Q\in A \ \exists! v\in V \quad P+v=Q$$
$$v := Q-P = \overrightarrow{PQ}$$

אם מקבעים וקטור $v\in V$ יש פונקציה $\begin{matrix} t_v: A\to A \\ P\mapsto P+v \end{matrix}$ זו ההזזה
של נקודות ב-v.
הראנו ש- $t_v \in S(A)$, כלומר זו פונקציה חח"ע ועל של A.
וכן מתקיים $t_v\circ t_w = t_{v+w}$

$$t_0 = Id_A$$

$\begin{matrix} \rho: V\longrightarrow S(A) \\ v\longmapsto t_v \end{matrix}$ (הצגה representation)

ρ זו פעולה נאמנה טרנזיטיבית. כש-V פועלת על A בצורה נאמנה וטרנזיטיבית
אומרים ש- A מרחב הומוגני ראשי מעל V (principal homogenous)
אם A לא ריקה שני התנאים שקולים, כלומר אם יש פעולה נאמנה
טרנזיטיבית של V על A אז A מרחב אפיני.

אפשר להסתכל על מרחב אפיני בעוד צורה: ראינו יש פונקציה

$$\begin{matrix} A\times A \longrightarrow V \\ (P,Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ} = Q-P \end{matrix}$$

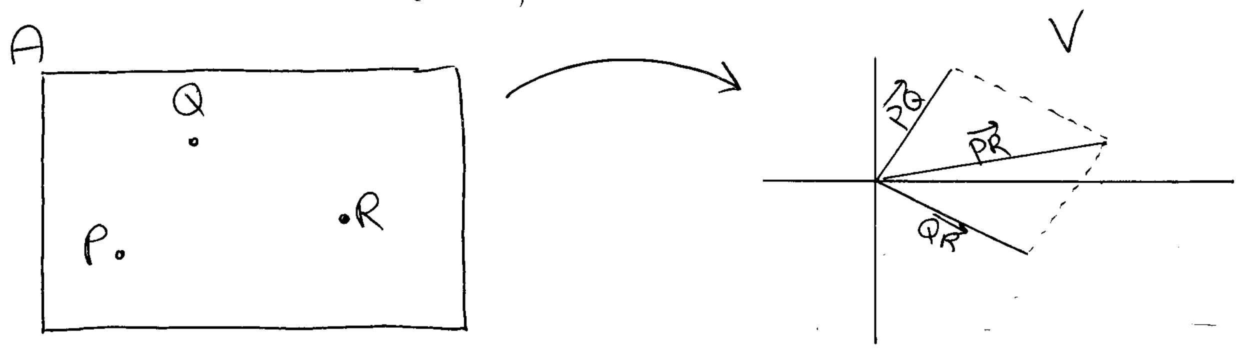
מהגדרה הקודמת של מרחב אפיני

גם כאן ניתן לקבוע נקודה כלשהי $P\in A$ ואז נקבל פונקציה $\begin{matrix} v_P: A\to V \\ Q\mapsto \overrightarrow{PQ} \end{matrix}$
ומתקיים (1) לכל $P\in A$ $v_P: A \xrightarrow{\sim} V$ חח"ע ועל ומכאן על A אפשר
להגדיר מבנה של מרחב וקטורי - נסמנו A_P)

(2) לכל $P,Q,R\in A$: $\vec{PQ}+\vec{QR}=\vec{PR}$

(זה מכונה היחס של Chasles)

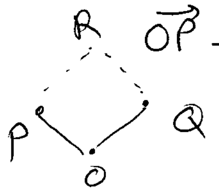
(זה למעשה חיבור בכלל המקבילית)



<u>טענה</u>: שתי "ההגדרות" של מרחב אפיני שקולות. כלומר, אם יש קבוצה שמוגדר עליה המבנה הראשון אפשר להגדיר עליה את המבנה השני ולהפך.

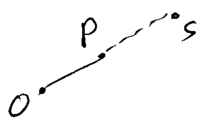
<u>הערה</u>: כדי לתאר מרחב וקטורי באופן מלא ולמעשה לא מספיק להגיד V אלא צריך רביעיה $(V,+,0,\cdot)$.
אז A_P שהגדרנו הוא לא A אלא V. זה מרחב וקטורי אחר $A_P=(A,+_o,o,\cdot_o)$ ראשית:

$$+_o : A\times A \to A$$
$$(P,Q)\mapsto P+_o Q = R$$



כאשר R היא הנקודה שעבורה $\vec{OP}+\vec{OQ}=\vec{OR}$

וזה אומר $o+(P-o)+(Q-o)=R$



$$\cdot_o : F\times A \to A$$
$$(k,P)\mapsto k\cdot_o P = S$$

כאשר S הנקודה שעבורה $\vec{OS}=k\vec{OP}$

שזה אומר $S=o+k(P-o)$

ועכשיו לכל P יש מבנה וקטורי אחר שמוגדר על אותה הקבוצה.

הגדרה שלישית של מרחב אפיני יכולה להיות כזה: קבוצה A כך שלכל $P\in A$ מוגדר מבנה של מרחב וקטורי A_P על A שהם כולם איזומורפיים ומתקשרים ע"י הנוסחה:
$$P+_B Q=(P-_A B)+(Q-_A B)+_A B$$

ועוד כמה קשרים הגיוניים.

(8) 4.2.08
גיאומטריה
לינארית

הודעות

* החל משבוע הבא לומדים שעתיים ביום שני.
* ספרים: Audin, Geometry
עמידור, אלגברה א' (בנספחים)

φ

העתקות אפיניות

יהיו (A_1, V_1) , (A_2, V_2) שני מרחבים אפיניים מעל אותו שדה F.
זוג (f, Df) כאשר $f: A_1 \to A_2$
$Df: V_1 \to V_2$
ש- (1) $Df \in Hom_F(V_1, V_2)$
(2) לכל $P, Q \in A_1$ $f(Q) - f(P) = Df(Q-P)$
יקרא העתקה אפינית מ- A_1 ל- A_2.

אפשר לנסח את זה גם כך: $f(P+v) - f(P) = Df(v)$
או $f(P+v) = f(P) + Df(v)$
זה מאוד מזכיר דיפרנציאביליות, ולכן קראנו לפונקציה השנייה Df.

דוגמאות:

(1) נניח ש- $A_1 = V_1$, $A_2 = V_2$ ונסתכל על $f: V_1 \to V_2$ לינארית.
במקרה זה $Df = f$. כי בוודאי $f(P+v) - f(P) = f(v)$
(2) נניח ש- $f: A_1 \to A_2$ קבועה. אז $Df \equiv 0$.
(3) נניח ש- $A_1 = A = A_2$; $V_1 = V = V_2$. אז $Id_A : A \to A$
היא העתקה אפינית ומתאימה לה $DId_A = Id_V$.
(4) תבניות אפיניות: נניח $A_1 = A$ ו- $A_2 = F$. נניח ש- $P \in A$ (קבועה)
ו- $\varphi : V \to F$ פונקציונל לינארי. נבחר ערך שרירותי ל- $f(P)$.
ולכל $Q = P+v$ (נגדיר) $f(P+v) = f(P) + \varphi(v)$ כי העתקה
אפינית כאשר $Df = \varphi$.

הערה: Df מוגדרת באופן חד ערכי ע"י f: $Df(v) = f(P+v) - f(P)$

5. $t_v : A \to A$, $P \mapsto P+v$ זו העתקה אפינית:

$$t_v(Q) - t_v(P) = (Q+v) - (P+v) = Q - P = Id_V(Q-P)$$

אז $Dt_v = Id_V$

6. נניח ש- $f: A_1 \to A_2$ אפינית אז $t_w \circ f : A_1 \to A_2$ אפינית! $D(t_w \circ f) = D(f)$ (למעשה זה מקרה פרטי של כלל השרשרת)

7. $f: A_1 \to A_2$, $g: A_2 \to A_3$ אפיניות. אז $g \circ f$ אפינית:

$$(g\circ f)(Q) - (g\circ f)(P) = g(f(Q)) - g(f(P)) =$$
$$= Dg(f(Q) - f(P)) = Dg(Df(Q-P)) = (Dg \circ Df)(Q-P)$$

הרכבה של ליניאריות היא ליניארית ולכן $g \circ f$ אפינית!

$$D(g\circ f) = Dg \circ Df$$

נניח שיש לנו קטגוריה $\mathcal{C}$. אפשר להסתכל על מחלקת העצמים שלה $Ob(\mathcal{C})$ ומחלקת המורפיזמים שלה $Mor(\mathcal{C})$. מורפיזמים אלה פונקציות מיוחדות שצריך להגדיר עם הקטגוריה. לכל $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ אפשר להסתכל על קבוצת המורפיזמים $Hom(X,Y)$ - המורפיזמים שהם פונקציות מ-X ל-Y. ודורשים שיתקיים

$$Mor(\mathcal{C}) = \dot{\bigcup}_{X,Y \in Ob(\mathcal{C})} Hom(X,Y)$$

$$Id_X \in Hom(X,X)$$

$$\forall X,Y,Z \in Ob(\mathcal{C}) \quad \varphi : Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) \to Hom(X,Z)$$
$$(f,g) \mapsto f\circ g$$

מוגדר היטב.

<u>משפט</u>: $f: A_1 \to A_2$ אפינית. התנאים הבאים שקולים:

1. f איזומורפיזם
2. Df איזומורפיזם
3. f איזומורפיזם בקטגוריה של קבוצות

<u>הגדרה</u>: $f: A_1 \to A_2$ איזומורפיזם אמ"מ קיימת $g: A_2 \to A_1$ אפינית כך ש-

$$g \circ f = Id_{A_1}$$
$$f \circ g = Id_{A_2}$$

הוכחה:

1) $\Leftarrow$ 2) תהי $g: A_2 \to A_1$ אפינית רק ש- $g \circ f = Id_{A_1}$

$f \circ g = Id_{A_2}$

ראינו שהרכבה של אפיניות היא אפינית ! $D(f \circ g) = Df \circ Dg$ לכן

$$Id_{V_1} = D\,Id_{A_1} = D(g \circ f) = Dg \circ Df$$

$$Id_{V_2} = D\,Id_{A_2} = D(f \circ g) = Df \circ Dg$$

וזה בדיוק אומר ש- Df איזומורפיזם (כי מצאנו את בן הזוג ההפכי שלו)

2) $\Leftrightarrow$ 3) נבחר $O_1 \in A_1$ ונגדיר $A_2 \ni O_2 = f(O_1)$.

הנחנו ש- f אפינית ולכן

$$f(O_1 + v) = O_2 + Df(v)$$

נטען ש- f חח"ע ועל אמ"מ Df חח"ע ועל. אבל זה ומעשה מכוון כי O_2 קבוע.

המשך ביום רביעי.

6.2.08
גיאומטריה
לינארית

משפט: תהי $f: A_1 \to A_2$ אפינית. אזי הטענות הבאות שקולות:

(1) f איזומורפיזם

(2) Df איזומורפיזם

(3) f חח"ע ועל

הבהרה: ההבדל בין (1) ל-(3) הוא בקטגוריה שאנחנו מסתכלים עליה.
ב-(1) דורשים ש-f תהיה פונקציה הופכית שהיא עצמה אפינית ואילו
ב-(3) מדובר על איזומורפיזם בקטגוריה של קבוצות.

הוכחה:

(1 ⇐ 2) עשינו

(2 ⇔ 3) נבחר $O_1 \in A_1$ ונסמן $O_2 = f(O_1)$. אז

$$f(O_1 + v) = O_2 + Df(v)$$

(נשתמש בעובדה ש- Df איזומורפיזם (בקטגוריה של מרחבים וקטוריים)
אמ"מ Df חח"ע ועל (בקטגוריה של קבוצות).

(⇐) f חח"ע: $f(O_1+v) = f(O_1+w)$

$$\Rightarrow \quad Df(v) = Df(w)$$

$$\Rightarrow \quad v = w$$

$$\Rightarrow \quad O_1 + v = O_1 + w$$

f על: תהי $O_2 + w \in A_2$ עבור $w \in V_2$.
Df על לכן קיים $v \in V_1$ כך ש- $Df(v) = w$

$$\Leftarrow \quad f(O_1 + v) = O_2 + Df(v) = O_2 + w$$

(⇒) תרגיל - צריך להניח שה עתקה אפינית היא חח"ע ועל
כה עתקה בין קבוצות ולהראות ש- Df איזומורפיזם של
מרחבים וקטוריים (מספיק להראות ש- Df חח"ע ועל
כה עתקה של קבוצות)

(3 ⇐ 1) תרגיל

משפט: יהיו (A_1,V_1) , (A_2,V_2) מרחבים אפיניים. תהיינה $P_1\in A_1$, $P_2\in A_2$ ו- $g\in Hom_F(V_1,V_2)$. אזי קיימת העתקה אפינית יחידה $f:A_1\to A_2$ כך ש- $f(A)=P_2$ ו- $Df=g$.

הוכחה: נגדיר $f(P_1+v)=P_2+g(v)$. ברור ש- $f(P_1)=P_2$ וברור ש- $Df=g$:

$$\begin{aligned} f(P_1+w)-f(P_1+v) &= P_2+g(w)-(P_2+g(v)) = \\ &= g(w)-g(v) = g(w-v) \\ &= g((P_1+w)-(P_1+v)) \end{aligned}$$

לכן ההפרש הוא פונקציה לינארית של הפרש הנקודות. לכן f אפינית ו- $Df=g$.

למה f יחידה? נניח שיש $f,\tilde f$ אפיניות כך ש- $f(P_1)=P_2$, $\tilde f(P_1)=P_2$ ו- $Df=g$, $D\tilde f=g$. אז לכל P_1+v מתקיים

$$\begin{aligned} f(P_1+v) &= f(P_1)+Df(v) = \\ &= P_2+g(v) = \\ &= \tilde f(P_1)+D\tilde f(v) = \tilde f(P_1+v) \end{aligned}$$

$\Leftarrow f\equiv\tilde f$.

מסקנה: נסתכל על המרחבים האפיניים (A,V) ו- (V,V). יהיו $P\in A$ ו- $0\in V$ ו- $g=Id_V$. אז קיימת העתקה אפינית יחידה $f:A\to V$ כך ש- $f(P)=0$ ו- $Df=Id_V$.

הגדרה: עבור מרחב אפיני $A\neq\emptyset$ נגדיר את המימד $\dim_F A=\dim_F V$

מסקנה: יהיו $f,g:A_1\to A_2$ העתקות אפיניות אזי $Df=Dg$ אמ"מ קיים $v\in A_2$ כך ש- $g=t_v\circ f$.

צירופים אפיניים

יהיו $P_1,\dots,P_n \in A$ ו- $\lambda_1+\dots+\lambda_n \in F$ רק ש- $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$

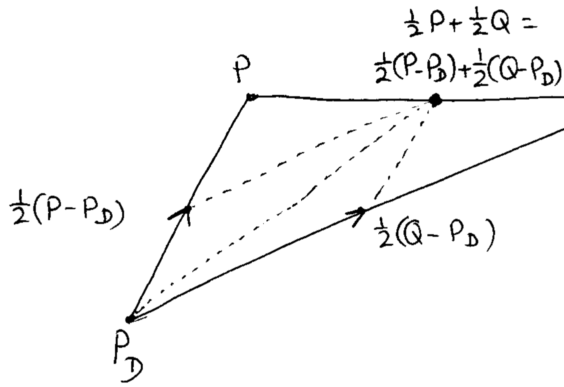
נסמן $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (P_i - P_0)$ זה מוגדר היטב לכל $P_0 \in A$.

__טענה:__ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i$ אינו תלוי ב- P_0.

__הוכחה:__ ניקח נקודה אחרת P_0'. אז

$$P_0' + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (P_i - P_0') = P_0 + (P_0' - P_0) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i((P_i - P_0) + (P_0 - P_0')) =$$
$$= P_0 + (P_0' - P_0) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (P_i - P_0) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (P_0 - P_0') =$$
$$= P_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (P_i - P_0) + (P_0' - P_0) + (P_0 - P_0')\sum_{i=1}^{n}\lambda_i =$$
$$= P_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (P_i - P_0) + \cancel{(P_0' - P_0)} + \cancel{(P_0 - P_0')}\cdot 1 =$$
$$= P_0 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i (P_i - P_0)$$

__דוגמא:__



לא תלוי בבחירת P_D אז למעשה הנקודה $\frac12 P + \frac12 Q$ הוא מוגדר היטב והוא פשוט הנקודה שבדיוק באמצע בין P ו- Q.

__משפט:__ $f: A_1 \to A_2$ העתקה. אז f אפינית אמ"ם לכל $P_1,\dots,P_n \in A_1$ לכל $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in F$ רק ש- $\lambda_1+\dots+\lambda_n = 1$ מתקיים

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(P_i)$$

__הוכחה:__

$(\Leftarrow)$ נבחר $P_0 \in A_1$. אז

$$f(\Sigma\lambda_i P_i) = f(P_0 + \Sigma\lambda_i(P_i - P_0)) =$$
$$= f(P_0) + Df(\Sigma\lambda_i(P_i - P_0)) =$$
$$= f(P_0) + \Sigma\lambda_i Df(P_i - P_0) =$$
$$= f(P_0) + \Sigma\lambda_i(f(P_i) - f(P_0)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(P_i)$$

(⇐) נבחר $P\in A_1$ ווק' $v\in V$ ונגדיר

$$Df(v) = f(P+v) - f(P)$$

נטען ש- Df לינארית.

דרושי—: נשים לב ש

$$\overbrace{(P-Q)+(R-S)}^{\text{סכום וקטורים}} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(P-Q+R)}_{\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=1 \text{ צרוף אפיני עם}} - S}_{\text{וקטור}}$$

בשביל להראות ששני וקטורים הם זהים מספיק להפעיל אותם מאותה נקודה ולראות שיוצא אותו הדבר.

$$S+[(P-Q+R)-S] \underset{\text{לפי ההגדרה}}{=} P-Q+R$$

$$S+[(P-Q)+(R-S)] = S+[(R-S)+(P-Q)] =$$

$$= [S+(R-S)]+(P-Q) =$$

$$= R+(P-Q)$$

עכשיו נטען ש-

$$\underbrace{R+(P-Q)}_{\text{נקודה}} = \underbrace{P-Q+R}_{\text{נקודה}}$$

$$P-Q+R = P_0 + 1(P-P_0) + (-1)(Q-P_0) + 1\cdot(R-P_0)$$

זה בלתי תלוי ב- P_0 אז ניקח $P_0=R$ ונקבל

$$P-Q+R = R+1(P-R)+(-1)(Q-R)+\cancel{1(R-R)} =$$

$$= [R+(P-R)]+(R-Q)$$

$$= P+(R-Q)$$

נו להמשיך באופן עצמאי.

המשפט האחרון שהוכחנו היה - ש $f: A_1 \to A_2$ אפינית
אמ"מ f שומרת על צירופים אפיניים.

משפט: בהינתן $f: A \to A'$ התנאים הבאים שקולים
(1) f אפינית
(2) לכל $p \in A$ $f: A_p \to A'_{f(p)}$ לינארית

A_p זה
המבנה של
המרחב הוקטורי עם
p בתפקיד הראשית

(3) קיים $p \in A$ כך ש- $f: A_p \to A'_{f(p)}$ לינארית

הוכחה: $(1) \Rightarrow (2)$ תהי $p \in A$. ויהיו $x, y \in A$

$x \underset{p}{+} y = p + (x-p) + (y-p)$ A_p תזכורת- חיבור ב-

$$f(x \underset{p}{+} y) = f(p + (x-p) + (y-p)) = f(p) + f(x) - f(p) + f(y) - f(p)$$
$$= f(x) \underset{f(p)}{+} f(y)$$

$kx = p + k(x-p)$ A_p כפל בסקלר ב-
$= p + kx - kp$
$$f(k \underset{p}{x}) = f(p) + kf(x) - kf(p) = \underset{f(p)}{k f(x)}$$

$(2) \Rightarrow (3)$ ברור. (בהנחה ש- $A \neq \emptyset$)
$3 \Rightarrow (1)$ תרגיל: להוכיח כמו $(1) \Rightarrow (2)$
ניתן לחלק זה הוכחה אחרת. תזכורת - הגדרנו
2 העתקות $t: A \times V \to A$, $A \times A \to V$ מכאן ניתן להגדיר
$t^p: V \to A$, $v \mapsto p+v$ כאשר מקבעים ב- t את הרכיב הראשון

$V_p: A \to V$
$Q \mapsto Q + P$

$$V \xrightarrow{t^p} A_p \xrightarrow{f} A'_{f(p)} \xrightarrow{V_{f(p)}} V$$
$$v \longmapsto p+v \longmapsto f(p+v) \longmapsto f(p+v) - f(p)$$

תהי p נק' שהתפקה במשפט לינארית. אם f לינארית
אז- $V_{f(p)} \circ f \circ t^p : V \to V'$ לינארית

וזה בדיוק לומר ש- f אפינית.

$$D_f := v_{f(P)} \circ f \circ t^P$$

$$f(Q)-f(R) = D_f(Q-R)$$

$$f(P+v)-f(P+w) =$$

$$f(P+v)-f(P)-\big(f(P+w)-f(P)\big) =$$

$$D_f(v)-D_f(w) = D_f(v-w) \qquad \square$$

קואורדינטות אפיניות

מערכת קואורדינטות ב- A^n נתונה ע"י זוג (P_0, B)

$P_0 \in A^n$, B בסיס סדור של V.

כלומר: $B=(b_1,\dots,b_n)$

$$v\in V \qquad v = b_1x^1+\dots+b_nx^n = (b_1,\dots,b_n)\begin{bmatrix}x^1\\ \vdots \\ x^n\end{bmatrix} = Bx$$

$$x^1,\dots,x^n\in\mathbb{F}$$

באופן כללי אינדקסים תחתונים יסמנו וקטורים ואינדקסים עליונים יסמנו סקלרים.

$$V \simeq \mathbb{F}^n \simeq \mathbb{F}^{n\times 1}$$
$$v \longmapsto [v]_B = x$$

$P\in A^n$

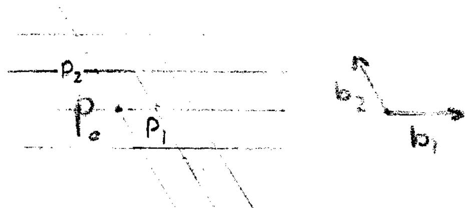
$$P = \underbrace{P_0 + v}_{\text{באופן יחיד}} = P_0 + \sum_{i=1}^n x^i b_i$$

סימון: $x(P) = \begin{pmatrix}x^1\\ \vdots \\ x^n\end{pmatrix}$

בעצם קיבלנו $A^n \simeq \mathbb{F}^n$

נתבונן בנקודה $P_i := P_0 + b_i$

המחשה:



$$P = P_0 + \sum_{i=1}^n x^i(P_i - P_0) = \sum_{i=0}^n x^i P_i \qquad x^0 = 1-\sum_{i=1}^n x^i$$

ל- $(P_0,\dots,P_n)$ קוראים בסיס בריצנטרי, או בסיס אפיני, או מערכת יחוס. כל נקודה ניתן לייצג בצורה יחידה ע"י צירוף אפיני.

נסמן גם $x(P) = (x^1, \dots, x^n)$ וגם $x = x(P) = (x^0, x^1, \dots, x^n)$

משפט: יהיו $P_0, P_1, \dots, P_n \in A^n$

הנ"ל $\{P_0, (P_1, \dots, P_n)\}$ הוא מערכת קואורדינטות של A^n

אמ"מ כל $P \in A^n$ ניתנת להצגה יחידה

$$P = \sum_{i=0}^{n} x^i P_i \quad x^i \in \mathbb{F}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1$$

משפט: אם $(P_0, \dots, P_n)$ מערכת יחוס ב- A^n_1

ו- $Q_0, \dots, Q_n \in A_2$

אזי $\exists! f : A_1 \longrightarrow A_2$ אפינית

$f(P_i) = Q_i$

הוכחה: תרגיל

הצגה מטריציונית של העתקה אפינית

$f : A_1 \rightarrow A_2$

$\{P_0, B\}$ של A_1 $\{Q_0, C\}$ של A_2

תזכורת מאלגברה לינארית:

$T : V_1 \longrightarrow V_2$
$\;\;\;\;B \quad\quad C$

$$V = Bx = b_1 x^1 + \dots + b_n x^n$$

$$Tv = T(b_1)x^1 + \dots + T(b_n)x^n$$

$$= (Tb_1, \dots, Tb_n) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = TBx$$

$$TB = (Tb_1, \dots, Tb_n) = (C_1, \dots, C_m)M$$

$$M = [M_1, \dots, M_n]$$

$$Tb_j = CM_j$$

$$\Rightarrow (Tb_1, \dots, Tb_n) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = (C_1, \dots, C_m) M \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = CMx$$

$$[v]_B = x \longrightarrow [Tv]_C = Mx = y$$

נחזור להעתקות אפיניות -

$$f(P) = f(P_0) + D_f(P-P_0)$$
$$= Q_0 + (f(P_0) - Q_0) + D_f(P-P_0)$$

$$y(f(P)) =$$
$$M x(P) + b$$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] & Tv \\ x=[v]_B \arrow[r, mapsto] & {[Tv]_C = Mx} \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_1 \arrow[r] & V_2 \\ \mathbb{F}^n \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[r] & \mathbb{F}^m \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \\ x \arrow[r, mapsto] & y = Mx \end{tikzcd}$$

כאשר -

$$CM = (D_f(B))$$

בה"כ בשון כותבים·

$$y = Mx + y_0$$
$$y_0 = [f(P_0) - Q_0]_C$$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = M \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

בהצגה של בלוקים:

בהנתן

$$F_e = (P_0, \dots, P_n) \qquad \mathcal{G} = (Q_0, \dots, Q_m)$$

$$f(F_e) = (f(P_0), \dots, f(P_n)) = (Q_0, \dots, Q_m) N_{m+1 \times n+1}$$

תרגיל למחשבה: מהו הקשר בין המטריצות N ו- $\begin{bmatrix} M & y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

16

13.02.08
גאומטריה
לינארית

יריעות לינאריות

<u>הגדרה:</u> $L \subseteq A$ תקרא יריעה לינארית (או תת מרחב אפיני) כאשר $L=\emptyset$ או $W = L-L = \{Q-P : P,Q \in L\} \le V$ תת מרחב וקטורי ומתקיים $\forall v \in W$ $t_v(L) = \{P+v : P \in L\} \subseteq L$ (או במילים אחרות, $L+W \subseteq L$, ומאחר שכמובן $L \subseteq L+W$ ומשמע זה אומר ש- $L+W=L$). מסמנים $L \le A$ ו- W נקרא מרחב הכיוונים של L ונאמר ש- $\dim L = \dim_F W$

<u>הערה:</u> אם $L \neq \emptyset$ אז (L,W) מרחב אפיני.

מדוע? צריך לבדוק כמה תכונות. עבור אחת היא טריוויאלי: זה שיש פעולה של W על L ושהיא אסוציאטיבית זה תורשתי מ- (A,V). מה שצריך להראות שעבור $P,Q \in L$ יש $w \in W$ כך ש- $P+w=Q$. אז כמובן ניקח $w=Q-P$ ומפי הגדרת W $w \in W$. היחידות של w היא ברורה מהיחידות שלו ב- (A,V).

<u>הערה:</u> לכל $P \in L$ $L = P+W$ (וזה אומר $L-P=W$).

<u>הערה:</u> בהינתן $P \in A$ ו- $W \le V$ אז $L = P+W \le A$ יריעה.

<u>הוכחה:</u> $L-L = (P+W)-(P+W) = W-W = W \le V$

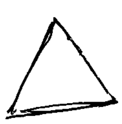
W תת מרחב ולכן סגור לחיסור

נותר לבדוק ש- $L+W \subseteq L$. אבל זה ברור כי

$$L+W = (P+W)+W = P+(W+W) = P+W = L$$

אז יריעה זה דבר מאוד פשוט: או קבוצה ריקה או נקודה בתוספת תת מרחב של V.

<u>דוגמאות:</u> (סתם על) המרחב האפיני $\mathbb{R}^2$. אז משולש הוא לא תת מרחב אפיני משום שההפרשים שלו לא יוצרים תת מרחב וקטורי (הגבול של ההפרשים תחום ע"י גודל המשולש.



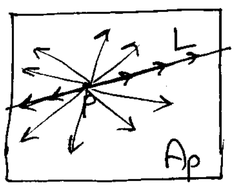
משפט: תהינה $\{(L_i, W_i)\}_{i\in I}$ אוסף יריעות ב- (A,V) אז $\bigcap_{i\in I} L_i = \emptyset$ או ש- $\bigcap_{i\in I} L_i \neq \emptyset$ יריעה עם מרחב כיווני $\bigcap_{i\in I} W_i$.

הוכחה: נניח ש- $\bigcap_{i\in I} L_i \neq \emptyset$. אז קיימת $P\in \bigcap_{i\in I} L_i$ ומתקיים $L_i = P+W_i$. אז $\bigcap_{i\in I} L_i = \bigcap_{i\in I}(P+W_i) = P + \bigcap_{i\in I} W_i$

וזה בדיוק אומר שזו יריעה עם מרחב כיווני $\bigcap_{i\in I} W_i$.

משפט: תהי $L\subseteq A$ קבוצה חלקית לא ריקה של מרחב אפיני A.

אזי התנאים הבאים שקולים:



1. L יריעה ב- A
2. לכל $P\in L$ $L\le A_P$ תת מרחב וקטורי

(הסבר: יש $t: A\times V\to A$ אם מקבעים $P\in A$ יש $t^P: V\to A$, $v\mapsto P+v$ ויש $V_P: A\to V$, $Q\mapsto Q-P$.

$A_P=(A, +_P, P, \cdot_P)$ כאשר $x+_P y = P+(x-P)+(y-P)$ $k\cdot_P x = P+k(x-P)$

L תת קבוצה של A_P ו- A_P מרחב וקטורי אז אנחנו טוענים ש- L עם אותן פעולות שנגזרות מ- A_P הוא תת מרחב)

3. קיימת $P\in L$ כך ש- $L\le A_P$
4. לכל $P\in L$ $V_P(L)\le V$
5. קיים $P\in L$ כך ש- $V_P(L)\le V$
6. לכל $P\in L$ קיים תת מרחב וקטורי $W\le V$ כך ש- $t^P(W)=L$
7. קיימת $P\in L$ קיים $W\le V$ כך ש- $t^P(W)=L$.

משפט: $\emptyset\neq L\subseteq A$ תת יריעה אמ"מ L סגורה תחת צירופים אפיניים של נקודות ב- L.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- L יריעה. לא ריקה. אז יש $P\in L$ ויש $W\le V$ כך ש- $L=P+W$. יהיו $P_1,\dots,P_n\in L$ ו- $\lambda^1,\dots,\lambda^n\in F$ כך ש- $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1$

אז $\sum_{i=1}^n \lambda^i P_i = P+\underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda^i \underbrace{(P_i-P)}_{\in W}}_{\in W}}_{\in W} \in P+W=L$

(⇐) תהי $P\in L$. נסתכל על

$$W = L-P = \{Q-P : Q\in L\}$$

צריך להראות ש- $W\le V$. נניח ש- $v,w\in W$. אז
קיימים $Q,R\in L$ כך ש- $w=R-P$ ו- $v=Q-P$ אז

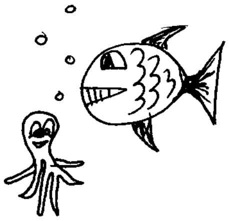
$$v+w = (Q-P)+(R-P) = \underbrace{(Q-P+R)}_{\text{צירוף אפיני ב-}L\text{ לכן שייך ל-}L} - P \in W$$

נניח ש- $v\in W$; $\lambda\in F$. אז

$$\lambda v = \lambda(Q-P) = \lambda(Q-P)+(P-P) = \underbrace{(\lambda Q-\lambda P+P)}_{\text{צירוף אפיני ב-}L\text{ לכן שייך ל-}L}-P \in W$$

$\Leftarrow$ W אכן תת מרחב.

נותר להראות ש- $L=P+W$ אבל זה פשוט מההגדרה של W! (:



<u>הגדרה:</u> נניח ש- $S\subseteq A$ קבוצה חלקית.
נסמן ב- $\langle S\rangle$ את היריעה הקטנה ביותר (מבחינת ההכלה) שמכילה את S. $\langle S\rangle$ נקראת היריעה הנוצרת (נפרשת) ע"י S.

<u>הערה:</u> $\langle S\rangle$ תמיד קיימת כי במקרה הכי גרוע $\langle S\rangle = A$
חיתוך של יריעות היא יריעה. אז למעשה $\langle S\rangle = \bigcap_{S\subseteq L_i\le A} L_i$

<u>משפט:</u> $\langle S\rangle = \{\text{כל הצירופים האפיניים של איברי } S\}$

<u>הוכחה:</u> אם S ריקה אז $\langle S\rangle=\emptyset$ וגם קבוצת הצירופים האפיניים של איברי S היא ריקה.
אחרת, נסמן ב- $\bar S$ את קבוצת כל הצירופים האפיניים של איברי S.
(נ)וכיח הכלה בשני הכיוונים.

($\subseteq$) $S\subseteq \bar S\le A$. אבל $\langle S\rangle = \bigcap_{S\subseteq L_i\le A} L_i$ אז $\bar S$ היא אחד האיברים שבחיתוך. לכן $\langle S\rangle\subseteq \bar S$.

($\supseteq$) תרגיל: $B\subseteq C\subseteq A \Rightarrow \bar B\subseteq \bar C$

עכשיו $S\subseteq\langle S\rangle$ ולכן $\bar S\subseteq \overline{\langle S\rangle} = \langle S\rangle$
כי $\langle S\rangle$ יריעה ולכן סגורה לצירופים אפיניים. (:

18

18.2.08

גיאומטריה לינארית

יריעה ממימד 0 נקראת נקודה

יריעה ממימד 1 נקראת ישר

יריעה ממימד 2 נקראת מישור.

הת ממד 3 אין שם מיוחד...

<u>הגדרה:</u> אם $L_1, L_2 \le A$; $\dim_F L_1 = \dim_F L_2$ נאמר ש- $L_1 \parallel L_2$ אם $W(L_1) = W(L_2)$.

בספרות מדברים על יריעות מקבילות באופן הכללי ואז אין דרישה ש- $\dim L_1 = \dim L_2$ אלא דורשים רק $W(L_1) \subseteq W(L_2)$.

היתרון של ההגדרה שלנו הוא שהיא יוצרת יחס שקילות ואילו בגרסה הרחבה אין סימטריות.

<u>מסקנה:</u> תהיינה $L_1, L_2 \le A$ כך ש- $\dim_F L_1 = \dim_F L_2$.
אזי $L_1 \parallel L_2$ אמ"מ קיים $v \in V$ כך ש- $L_2 = t_v(L_1)$.
יתר על כן, $t_v(L_1) = t_w(L_1)$ אמ"מ $v - w \in W(L_1)$.

<u>הוכחה:</u> נניח ש- $L_1 \parallel L_2$. אז $W(L_1) = W(L_2)$. יהיו $P_1 \in L_1$, $P_2 \in L_2$ כך ש- $L_1 = P_1 + W$, $L_2 = P_2 + W$.
$\Leftarrow$ $L_2 = P_2 + (L_1 - P_1) = (P_2 - P_1) + L_1$. נסמן $v = P_2 - P_1$ ואז $L_2 = t_v(L_1)$. מצד שני, בדיקת התאמות ששתי היריעות אותו מרחב כיוונים. ואז

$$W(L_2) = L_2 - L_2 = t_v(L_1) - t_v(L_2) =$$
$$= \{(Q+v) - (P+v) : P, Q \in L_1\} =$$
$$= \{Q - P : P, Q \in L_1\} = L_1 - L_1 = W(L_1)$$

כמו כן, $t_v(L_1) = t_w(L_1)$ אמ"מ $L_1 + v = L_1 + w$ אמ"מ $L_1 + (v - w) = L_1$ וזה אמ"מ $v - w \in W(L_1)$.

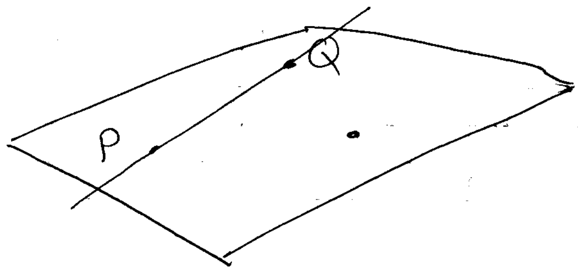
נניח שיש לנו שתי נקודות P,Q. נניח $s+t=1$. אז

$$sP+tQ = P_0 + s(P-P_0) + t(Q-P_0) =$$

$$\underset{P_0=P}{=} P + t(Q-P)$$

וזה ישר! בהינתן שתי נקודות הצירופים האפיניים שלהן זה בעצם הישר שעובר דרך שתי הנקודות.

בצורה דומה אם יש 3 נקודות ויש המון מצב הן על אותו ישר.
אבל אם לא אז הצירופים האפיניים שלהם יוצרים מישור.



<u>משפט</u>: נניח ש- $L\subseteq A$ קבוצה. אז $L\le A$ אמ"מ
לכל $P,Q\in L$ התת יריעה שנפרשת ע"י P ו-Q
$\langle P,Q\rangle = \{sP+tQ : s+t=1\}$ (כלומר הישר שעובר דרך הנקודות)
מוכלת כולה ב-L.

<u>הוכחה</u>: אם $L\le A$ אז ברור שהישרים בפנים כי כל הצירופים האפיניים בפנים.

לצד השני מה שצריך להראות שאם ידוע שצירוף של שניים הוא בפנים אז צירוף של כל מספר של נקודות הוא בפנים.

באינדוקציה מלאה $P = 1\cdot P + 0\cdot P \in L$

$sP+tQ \in L$ לפי הנתון.

כעת נניח לכל $k<n$ ונוכיח ל-$n-1$. נרשום

$$1 = (\lambda^1+\dots+\lambda^{n-2}) + (\lambda^{n-1}+\lambda^n)$$

נניח שאפשר להניח ששני המספרים בסוגריים אינם אפס.

אם $\lambda^1+\dots+\lambda^{n-2}=0$ אז $\lambda^{n-1}+\lambda^n = 1$

$\Rightarrow \lambda^{n-1}P_{n-1}+\lambda^n P_n = P$ צירוף אפיני של שתי נקודות ולכן ב-L.

לכן
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^i P_i = \sum_{i=1}^{n-2}\lambda^i P_i + 1\cdot P$$

עכשיו יש לנו צירוף אפיני של $n-1$ נקודות ולפי הנחת האינדוקציה היא ב-L.

(19) באותו אופן אם $\lambda^{n-1}+\lambda^{n}=0$ אז $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda^i p_i = p \in L$

ואז את $\sum_{i=1}^{n}\lambda^i p_i$ אפשר להציג כצירוף אפיני של שלוש

נקודות ולפי הנחת האינדוקציה הצירוף ב-L.

לכן נשאר לנו לטפל במקרה שבו אחד מהסכומים אינו אפס.

נסמן $s=\lambda^1+\dots+\lambda^{n-2}$ ו- $t=\lambda^{n-1}+\lambda^{n}$.

$$(\lambda^1 P_1+\dots+\lambda^{n-2}P_{n-2})+(\lambda^{n-1}P_{n-1}+\lambda^n P_n)=$$

$$= s\underbrace{\left(\frac{\lambda^1}{s}P_1+\dots+\frac{\lambda^{n-2}}{s}P_{n-2}\right)}_{\in L \text{ מה"א}}+t\underbrace{\left(\frac{\lambda^{n-1}}{t}P_{n-1}+\frac{\lambda^n}{t}P_n\right)}_{\in L \text{ מהנתון}}$$

וזה צירוף אפיני של שתי נקודות ולכן ב-L וסיימנו.

☺

<u>הערה:</u> יש כאן בעיה כי השתמשנו פה בה"א על סכום של 3 איברים וזה אומר שה-n שעבורו מוכיחים הוא לפחות 4 וזאת בעיה כי לא הוכחנו ל-$n=3$! אז צריך להוכיח עבור $n=3$ כמקרה פרטי.

<u>משפט:</u> $f: A_1\to A_2$ אפינית. נניח $L_1\le A_1$ ו- $L_2\le A_2$

אז $f(L_1)\le A_2$ ו- $f^{-1}(L_2)\le A_1$

<u>הוכחה:</u> אם $L_1=\emptyset$ אז $f(L_1)=\emptyset$.

אחרת, תהי $P_1\in L_1$ כך ש- $L_1=P_1+W_1$.

$$f(L_1)=f(P_1)+Df(W_1)\le A_2$$

יתר מכך, $\dim_F f(L_1)\le \dim_F L_1$

כעת נדון ב-L_2. אם $f^{-1}(L_2)=\emptyset$ אז הכל טוב. אחרת,

תהי $P_2\in L_2$ כך ש- $f(P_1)=P_2$ עבור $P_1\in L_1$ כלשהי.

אז $L_2=P_2+W_2$ ואז

$$f^{-1}(L_2)=f^{-1}(\{P_2\})+D_f^{-1}(W_2)$$

אם $P\in f^{-1}(\{P_2\})$, פירוש $f(P)=P_2=f(P_1)$ זה אומר $f(P)-f(P_1)=$
$=Df(P-P_1)=0$

וזה אומר $P-P_1\in \ker Df$. לכן $f^{-1}(\{P_2\})=P_1+\ker Df$

☺ $\Leftarrow f^{-1}(L_2)=P_1+\ker Df+Df^{-1}(W_2)=P_1+Df^{-1}(W)\in A_1$.

מסקנה: $f: A \to F$ תבנית אפינית . אז

כל קו גובה של f הוא תת-יריעה. כלומר עבור $k \in F$

$$\{P \in A : f(P) = k\} \le A$$

שהרי זאת התמונה ההפוכה של הנקודה $\{k\}$ שהיא תת-יריעה.

משפט: $f_1, \dots, f_r : A \to F$ אפיניות. אזי

$$\{P \in A : f_1(P) = \dots = f_r(P) = 0\} \le A$$

יתר על כן, אם A ממימד סופי אז כל תת-יריעה ניתנת להצגה בצורה כזו.

מה שזה אומר למעשה הוא שכל יריעה ניתנת להצגה כחיתוך של על-יריעות (יריעות בממד $\dim_F A - 1$).

(20) 20.02.08
גאומטריה
לינארית

(אלגוריתם - ושם. יש שם תרגיל.

מרחבים דואליים ומאפסים

$\mathbb{F}^n = \{(x^1,\dots,x^n) : x^i \in \mathbb{F}\}$

$\mathcal{L}^{(n)} = \{a_1X_1+\dots+a_nX_n : a_i \in \mathbb{F}\}$ התבניות הלינאריות

$R = \mathbb{F}[X_1,\dots,X_n]$ חוג הפולינומים ב- n משתנים

אפשר להציג $R = R_0 \oplus \dots \oplus R_n \oplus \dots$ סכום ישר אינסופי כאשר R_i זה ה

הפולינום ההומוגניים מדרגה i. למשל

$$\underbrace{a}_{\in R_0} + \underbrace{bx+cy}_{\in R_1} + \underbrace{dx^2+exy+fy^2}_{\in R_2}$$

מונום הוא פולינום מהצורה $X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ ודרגתו $i_1+\dots+i_n$. פולינום הומוגני הוא פולינום שניתן להציגו כצירוף לינארי של מונומים מאותה דרגה.
בפרט כי $\mathcal{L}^{(n)}$ זה למעשה הרכיב הלינארי של R.
ניתן לחשוב על $\mathcal{L}^{(n)}$ כפונקציות לתוך השדה.
אם $\lambda \in \mathcal{L}^{(n)}$ אפשר לחשוב עליה כפונקציה $\lambda: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$
המוגדרת ע"י $\lambda((x^1,\dots,x^n)) = a_1x^1+\dots+a_nx^n$.
נניח שיש לנו $\Lambda = \{\lambda_1,\dots,\lambda_r\} \subseteq \mathcal{L}^{(n)}$. המשוואה $\Lambda = 0$ היא למעשה אוסף המשוואות הסופי $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_r = 0$. אז למעשה 0 פתרון של המערכת וגם כל פתרון של צירוף לינארי של המשוואות. אם השדה $\mathbb{F}$ אינסופי אז התבניות $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ יוצרות מרחב אינסופי, אבל המימד הוא סופי.
באלגברה לינארית עוסקים רק ב- R_1. הצירוף של R_1 עם R_0 יוצר את התבניות האפיניות. הגאומטריה האלגברית המודרנית עוסקת גם באובייקטים הלא לינאריים, פרבולות $y=x^2$, במעגלים $x^2+y^2=1$, בהיפרבולות $x^2-y^2=1$ ועוד.
בוודאי קיום פתרונות למשוואות תלוי באופן חזק בשדה. צד שני מעניין לשאול אם מביטים אובייקט גאומטרי, האם יש משוואות שמתארות אותו. במקרה הלינארי קל לענות על זה - כל תת מרחב הוא אוסף פתרונות של מע' משוואות לינאריות.
לא חייבים לדבר על $\mathbb{F}^n$. במקרה הכללי אם יש לנו מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$ אז באנלוגיה ל- R_1 הוא $V^* = Hom_{\mathbb{F}}(V,\mathbb{F})$. אפשר להסתכל על הפונקציה $V^* \times V \longrightarrow \mathbb{F}$
$(\varphi, v) \longmapsto \varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle$
מה שיפה הוא שאם מקבעים את φ מתקבלת פונקציה לינארית של v ואם מקבעים את v מתקבלת פונקציה לינארית של φ.
אם X קבוצה כלשהי ו- F שדה אפשר להסתכל על קבוצת הפונקציות מ- X ל- $\mathbb{F}$ - $\mathbb{F}^X$. זה מרחב וקטורי מעל F. במקרה ש- $X = V$ V^* היא תת מרחב של $\mathbb{F}^V$.

אם V הוא ממ"ס סופי אז $V \cong V^*$ אבל באופן לא טבעי: אם $(v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור של V אפשר להגדיר את הבסיס הדואלי $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ ל- V^* הם שמקיימים $\langle \varphi^i, v_j \rangle = \delta^i_j$. האיזומורפיזם תלוי בבחירת הבסיס! לעומת זאת $V \cong V^{**}$ והאיזומורפיזם הוא קנוני - לא תלוי בבחירת הבסיס! האיזומורפיזם הוא $v \longmapsto \Gamma_v$ כאשר $\Gamma_v \in V^{**}$ ו- $\Gamma_v(\varphi) = \langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$. וכאן אין שום קשר לבסיס!

נעבור לאפסים. נניח ש- $S \subseteq V$ תת קבוצה. המאפס של S הוא

$$S^\circ = \{ \varphi \in V^* : \forall s \in S \ \ \varphi(s) = 0 \}$$

<u>הערות</u>
- $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^\circ \subseteq S_1^\circ$
- $(\operatorname{span} S)^\circ = S^\circ$
- $S^\circ \leq V^*$ תת מרחב

אפשר ללכת גם בכיוון ההפוך. נניח ש- $\Lambda \subseteq V^*$. אז $\Lambda^\circ \subseteq V^{**}$. אבל אם נזהה את V^{**} עם V^* אז נקבל ש $\Lambda^\circ \subseteq V$

אחרי הזיהוי של V עם V^{**} אז גם $S \subseteq \operatorname{span} S \subseteq S^{\circ\circ}$.

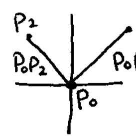
<u>תרגיל</u>: $S \leq V$ אמ"מ $S = S^{\circ\circ}$.

<u>תרגולים בצבור</u>

נסמן
$$x \underset{A}{+} y = Ax + Ay$$
$$k \underset{A}{\cdot} y = kAy$$

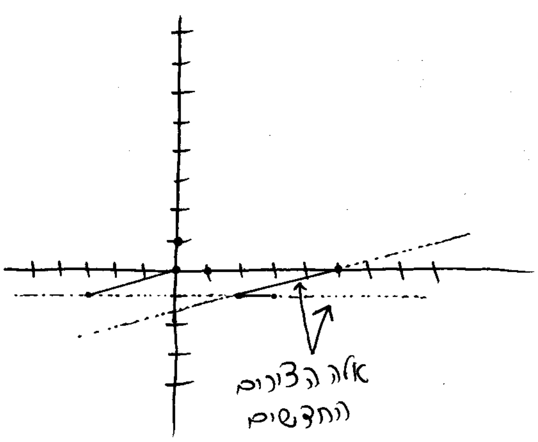
תזכורת: בהינתן מרחב אפיני A אז קואורדינטות זה $\{P, \mathcal{B}\}$ כאשר P נקודה ב- A ו- $\mathcal{B}$ בסיס סדור של V.

במקרה של $\mathbb{F}^n$ כמרחב אפיני זה $\{P_0, (P_0P_1, \dots, P_0P_n)\}$ ואנחנו נסמן את זה בקיצור ע"י $\{P_0, (P_1, \dots, P_n)\}$ (וצריך ש- $P_0 \neq P_i$ ($1 \leq i \leq n$)).



<u>תרגיל</u>:
$$\mathcal{F} = \{ (2,-1), ((5,0), (3,-1)) \}$$
$$\mathcal{G} = \{ (0,0), ((1,0), (0,1)) \}$$

מצאו את הקואורדינטות של ראשית וקטורי הבסיס של $\mathcal{G}$ במערכת $\mathcal{F}$.



גאומטרית: $((0,0)_{\mathcal{G}})_{\mathcal{F}} = (1, -5)$

הרעיון הוא "להטיל" את הנקודה על הצירים החדשים שלנו. אבל הטלה במובן הזה היא ללכת בכיוון שמקביל לצירים החדשים.

אלגברית: נסתכל על הבסיס $\mathcal{B} = \{(5,0)-(2,-1), (3,-1)-(2,-1)\}$
$= \{(3,1), (1,0)\}$

צריך לפתור $(-2,1) = a(3,1) + b(1,0)$
$\Rightarrow a = 1$, $b = -5$

בדוגמה יותר מסודרת ועם הבדלה בין נקודות לוקטורים:

$$B=\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}_{\text{הפרש נקודות}},\ \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\Big)=\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}}_{\text{וקטור}},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Big)$$

באופן כללי, אם $\mathcal{F}=\{P_0, B\}$, אם $P-P_0=\lambda^1 b_1+\dots+\lambda^n b_n$ אז $(P)_{\mathcal{F}}=(\lambda^1,\dots,\lambda^n)$

אם מה שאנחנו צריכים לפתור כאן זה $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\lambda^1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\lambda^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^1\\\lambda^2\end{bmatrix}$$

אז מה שצריך זה לכפול במטריצה ההפוכה.

<u>תרגיל</u> $\mathbb{A}=V$ מרחב אפיני שהוא מרחב וקטורי עם המבנה האפיני.

נניח ש- $A,B,C\in\mathbb{A}$.

$$\mathcal{F}=\{A,(B,C)\}$$
$$\mathcal{G}=\{B,(A,C)\}$$
$$\mathcal{H}=\{C,(A,B)\}$$

יש $X\in\mathbb{A}$ כך ש- $(X)_{\mathcal{F}}=(x^1,x^2)$

$$(X)_{\mathcal{G}}=(y^1,y^2)$$
$$(X)_{\mathcal{H}}=(z^1,z^2)$$

מה הקשר בין ההצגות השונות? $X-A=(B-A)x^1+(C-A)x^2=$

$$=[(B-A),(C-A)]\begin{bmatrix}x^1\\x^2\end{bmatrix}$$

מאותו אופן,

$$X-B=[(A-B),(C-B)]\begin{bmatrix}y^1\\y^2\end{bmatrix}$$

השאלה היא מה הקשר בין ה-y-ים ל-x-ים, כלומר איך אפשר לקבל את ה-y-ים מה-x-ים

(22) 25.02.08
גיאומטריה
לינארית

n וקטורים הם בת"ל אם לא נוכל לשכן אותם בתת מרחב ממימד n-1.
או בלשון אחרת — אם הם פורשים מרחב ממימד n.

<u>הגדרה:</u> נניח ש- $\dim_F A$ סופי. תהיינה $P_0,\dots,P_n\in A$.
נאמר שהנקודות בת"ל אפינית אם $\dim_F\langle P_0,P_1,\dots,P_n\rangle = n$.
(כלומר המימד של n הווקטורים $\overrightarrow{P_0P_1},\dots,\overrightarrow{P_0P_n}$ הוא n).

<u>קונפיגורציות של יריעות</u>

באלגברה לינארית ראינו שחיתוך תת מרחבים הוא תמיד תת מרחב. לגבי איחוד זה לא תמיד נכון. אבל אפשר להסתכל על המרחב שנוצר ע"י האיחוד.
מסמנים $\langle W_1,W_2\rangle = W_1+W_2$. ואז מתקיים

$$(*)\ \dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

מה קורה ביריעות? ראינו שכשיריעות נחתכות, אם החיתוך לא ריק אז מרחב הכיוונים של החיתוך הוא חיתוך מרחבי הכיוונים. ואז ממד החיתוך היריעות הוא ממד חיתוך המרחבים המתאימים.
מה לגבי איחוד יריעות? אם $L_1,L_2\le A$ היינו מצפים ש-

$$\dim\langle L_1,L_2\rangle = \dim(L_1)+\dim(L_2)-\dim(L_1\cap L_2)$$

שכן זה אמור להתלכד עם (*) במקרה שאנחנו מדברים על מרחבים וקטוריים.
הביטוי הזה מוגדר רק אם $L_1\cap L_2\neq\emptyset$ שכן הקבוצה הריקה אפשר להתאים לה כל מרחב כיוונים שנרצה.
ניקח שתי אפשרויות: אם L_1, L_2 לא נחתכים ומקבילים. אז הם פורשים מישור אז היינו מצפים ש- $\dim(L_1\cap L_2)=0$.
אבל אם L_1, L_2 לא נחתכים אבל גם לא מקבילים אז הם פורשים את כל המרחב ואז היינו מצפים ש- $\dim(L_1\cap L_2)=-1$.

<u>משפט:</u> יהי A מרחב אפיני ותהיינה $L_1,L_2\le A$ יריעות לינאריות.
אם $L_1\cap L_2\neq\emptyset$ אז

$$\dim\langle L_1,L_2\rangle = \dim(L_1)+\dim(L_2)-\dim(L_1\cap L_2)$$

אם $L_1\cap L_2=\emptyset$ אז

$$\dim\langle L_1,L_2\rangle = \dim L_1+\dim L_2-\dim(W(L_1)\cap W(L_2))+1$$

הוכחה:

נניח ש- $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. אז יש $P_0 \in L_1 \cap L_2$ כך ש- $L_1 = P_0 + W(L_1)$

$L_2 = P_0 + W(L_2)$

אז $$L_1 \cap L_2 = P_0 + \underbrace{(W(L_1) \cap W(L_2))}_{W(L_1 \cap L_2)}$$

שכן אם $P \in L_1 \cap L_2$ אז

$$P = P_0 + w_1 = P_0 + w_2 \Rightarrow w_1 = w_2 \in W(L_1) \cap W(L_2)$$

מצד שני, $\langle L_1, L_2 \rangle = P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$

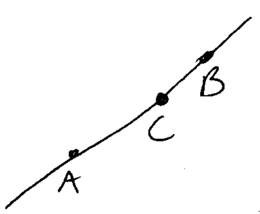
ברור ש- $P_0 + (W(L_1) + W(L_2)) \subseteq \langle L_1, L_2 \rangle$. מצד שני, $P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$ יריעה שמכילה גם את L_1 וגם את L_2 ולכן לפי ההגדרה $\langle L_1, L_2 \rangle$ מוכלת בה.

$$\Rightarrow \dim \langle L_1, L_2 \rangle = \dim(W(L_1) + W(L_2)) =$$
$$= \dim(W(L_1)) + \dim(W(L_2)) - \dim(W(L_1) \cap W(L_2)) =$$
$$= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

אם $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ אז $(W(L_1) + W(L_2)) \oplus \langle P_2 - P_1 \rangle$

כאשר $P_i \in L_i$ $i=1,2$. מכאן ש-

$$\dim \langle L_1 + L_2 \rangle = \dim(W(L_1) + W(L_2)) + 1 =$$
$$= \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(W(L_1) \cap W(L_2)) + 1$$



יחס פשוט: נניח ש- $A, B, C \in \mathbb{A}$. אם $A \neq B$; $C \in \langle A, B \rangle$

אז קיים t יחיד כך ש- $C = A + t(B-A) =$

$= tB + (1-t)A$

אם $C \neq B$ אז $t \neq 1$ ולכן $\frac{t}{t-1}$ מוגדר היטב. לו נקרא היחס הפשוט ומסמנים $[A, B, C] = \frac{t}{t-1}$. זה יחס שתלוי בסדר של הנקודות!! מעניין לראות איך זה משתנה כשעוברים על שש התמורות האפשריות לנקודות.

הערה: $f: A_1 \to A_2$ אפינית. אז f שומרת על יחס פשוט. (כי היא שומרת על צירופים ליניאריים).

משפט: $f: A_1 \to A_2$ אפינית שומרת על יחס פשוט ומעתיקה יריעות מקבילות ליריעות מקבילות.

בפרט, אם $L_1 // L_2 \subseteq A$ ו- f אפינית אז

$P_1 + W \longrightarrow f(P_1) + D_f(W)$

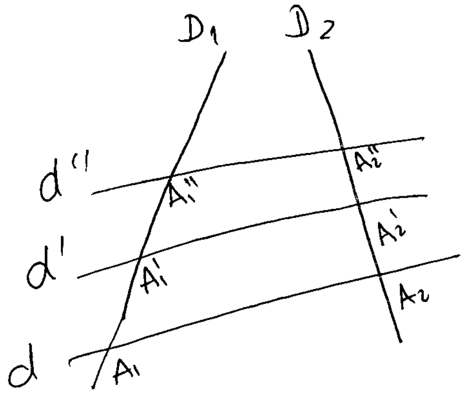
$P_2 + W \longrightarrow f(P_2) + D_f(W)$

אז בתמונות מרחב הכיוונים זהה ולכן הם מקבילים.

<u>משפט:</u> תהא $f: A_1 \to A_2$ חח"ע ועל ששומרת על יחס פשוט ועל ישרים מקבילים. אזי f אפינית.

<u>תרגיל:</u> למצוא את הטענה ולהוכיח.

משפט Thales:

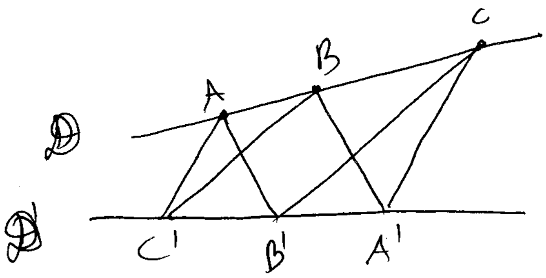


$d \| d' \| d''$ והם לא מקבילים לא ל- D_1 ולא ל- D_2.

בתיכון מנסחים את המשפט רק:

$$\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$$

משפט Pappus:



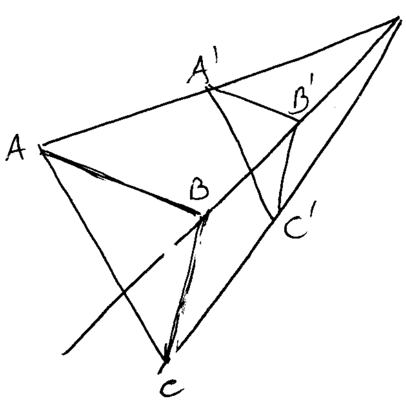
$A, B, C \in \mathcal{D}$

$A', B', C' \in \mathcal{D}'$

$$\left.\begin{array}{l} AB' \| BA' \\ BC' \| CB' \end{array}\right\} \Rightarrow AC' \| CA'$$

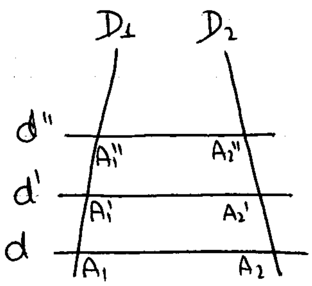
משפט Desargues

יש שני משולשים $\left\{\begin{array}{l}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{array}\right.$ מקבילים ללא קודקוד משותף



אז AA', BB', CC' נחתכים בנקודה אחת או מקבילים.

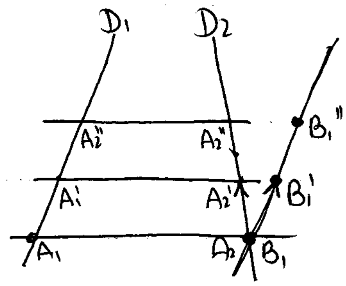
(24) 27.02.08
גיאומטריה
עיונית



כהמחשה של משפט תלס: יש שלושה ישרים מקבילים d, d', d'' ועוד שני ישרים D_1, D_2 שלא מקבילים להם.

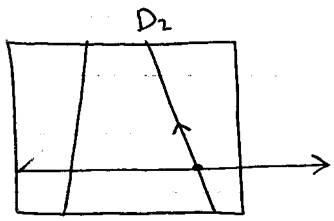
צ"ל:
$$\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$$

ניסיון 1 ראשית, נזיז את D_1 ב-$\overrightarrow{A_1A_2}$. ונניח ש-A_1 עוברת ל-$A_2 = B_1$, A_1' עוברת ל-B_1' ו-A_1'' עוברת ל-B_1''.



עכשיו נסתכל על $A_2 = B_1$ כראשית שלנו ונתבונן בכל הוקטורים שיוצאים משם. קיים t רק ש- $t\overrightarrow{B_1B_1'} = \overrightarrow{B_1B_1''}$. הטענה היא שאותו t מקיים $t\overrightarrow{A_2A_2'} = \overrightarrow{A_2A_2''}$.

ניסיון 2 מה שצריך זה העתקה אפינית שלוקחת את ה-A_1-ים ל-A_2-ים המתאימים. העתקה אפינית שומרת על היחס ואז נסיים. אז צריך למצוא העתקה כזאת. אינטואיטיבית מה שנרצה הוא להטיל את D_1 על D_2. איך נעשה את זה? ניקח את $\overrightarrow{A_1A_2}$ ואת $\overrightarrow{A_2A_2'}$ בתור בסיס למישור.



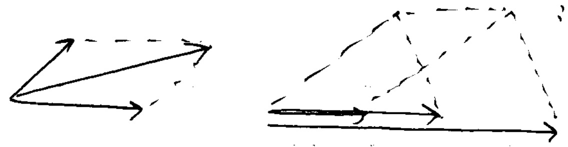
ניסיון 3 יש העתקה אפינית יחידה שמעבירה את A_1 ל-A_2 ואת A_1'' ל-A_2''. ההעתקה הזאת מעבירה את D_1 ל-D_2 ולכן A_1' עוברת לנקודה על D_2. אנחנו נטען ש-A_1' עוברת ל-A_2'.

למה יש העתקה כזאת? אנחנו מסתכלים על הבסיסים $\mathcal{B}_{D_1} = (A_1, A_1'')$ $\mathcal{B}_{D_2} = (A_2, A_2'')$. יש העתקה $f: D_1 \to D_2$ אחת ויחידה שמעבירה את הבסיס של D_1 לבסיס של D_2.

נכתוב את A_1' כצירוף אפיני של הבסיס $A_1' = \lambda A_1 + (1-\lambda) A_1''$. אז
$$f(A_1') = \lambda f(A_1) + (1-\lambda) f(A_1'') =$$
$$= \lambda A_2 + (1-\lambda) A_2''$$
אנחנו צריכים להראות ש- $f(A_1') = A_2'$. כעת
$$f(A_1') - A_1' = \lambda(A_2 - A_1) + (1-\lambda)(A_2'' - A_1'')$$
מאחר ש- $A_2 - A_1 \parallel A_2'' - A_1''$ ההפרש הזה מקביל ל-d ואפשר להציג אותו כ- μv. אז $f(A_1') = A_1' + \mu v$ אז מצד אחד $f(A_1')$ על D_2 ומצד שני היא על d'. $\Leftarrow$ בהכרח $f(A_1') = A_2'$.

אולי על המשפט הלא נכון: אם יש העתקה אפינית השומרת על יחס פשוט ועל ישרות מקבילות. מה עם הכיוון ההפוך? ושומר על יחס פשוט זה במקום של לשמור על ישרים. האם העתקה ששומרת על ישרים היא אפינית? זה בוודאי לא נכון!

המשפט היסודי של הגיאומטריה האפינית (FTAG): נניח שיש פונקציה $f:A_1\to A_2$ ששומרת על נקודות קולינאריות (כלומר על אותו ישר) ו-f חח"ע ועל, אז אם המרחבים הם מממד 2 אז f אפינית.
שלבים: אם יש 3 נקודות קולינאריות הן גם עוברות ל-3 נקודות כאלה.
מראין צריך להוכיח שהישר שנקבע ע"י הראשונות הוא עובר לישר שנקבע ע"י האחרונות. אפשר גם להראות שישרים מקבילים עוברים לישרים מקבילים. הטענה היא שצריך ברור שההעתקה אפינית: צריך להראות שהיא שומרת על צירופים אפיניים: על חיבור ועל כפל בסקלר.
חיבור אפשר לפי כלל המקבילית:



בגלל שההעתקה שומרת על מקבילים יוצא שהיא שומרת על סכום.
צריך רק לשים לב לכמה פרטים: למה בכלל הישרים של המקבילית נפגשים? למה אפשר לבחור נקודה חוץ לישר? ומה זה מוגדר היטב? ומה בסוף הסכום ב-A_1 עובר לסכום ב-A_2?
עכשיו צריך גם לחשוב איך לעשות כפל בסקלר בצורה גיאומטרית.

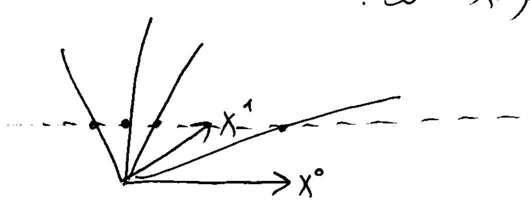
(25) 3.3.08
גיאומטריה
לינארית

מרחבים פרויקטיביים

יהי V מרחב וקטורי לא טריוויאלי מעל שדה F. נאמר ש- $w \sim v$ אמ"מ קיים $0 \neq \lambda \in F$ כך ש- $v = \lambda w$.
ברור שזה יחס שקילות. נסמן ב- $P(V) := V\setminus\{0\}/\sim$ את אוסף מחלקות השקילות של $\sim$. יש העתקה טבעית $V\setminus\{0\} \longrightarrow P(V)$, $v \longmapsto [v]$.
מה שקורה כאן גיאומטרית הוא שלוקחים את כל הישרים שעוברים דרך הראשית ונראה אותם כנקודה אחת.
נגדיר $\dim P(V) = \dim V - 1$ (זה גם אינטואיטיבי כי ראינו שאיבדנו מימד אחד).
מה שקורה כאן זה שהחבורה הכפלית של השדה F^* פועלת על הקבוצה $V\setminus\{0\}$. המסלול של כל איבר הוא הישר שעובר דרכו ודרך הראשית.

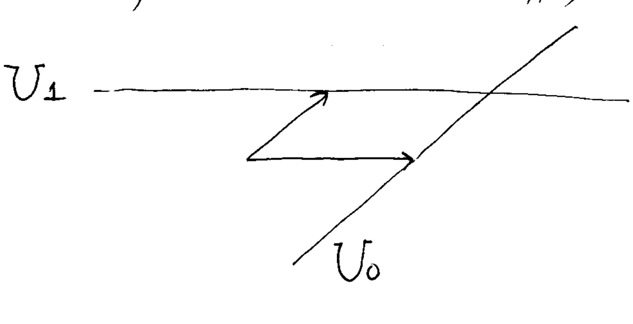
<u>דוגמאות:</u>

$F = \mathbb{R}$, נסמן $P^1(F) = P(F^2)$. נבחר בסיס ל- $\mathbb{R}^2$. $\{x^0, x^1\}$
אז כל ישר שאינו $\vec{x^0}$ חותך את x^1 בנקודה אחת בדיוק. ככה אפשר לזהות כל נקודה עם $x^1 = 1$ עם נקודה במישור הפרויקטיבי. ובשביל לייצג את $x^1 = 0$ נוסיף נקודה מלאכותית ∞.



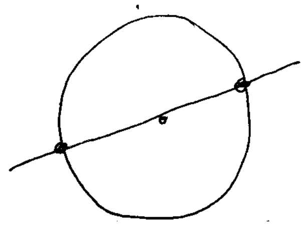
זה גם הגיוני שנקרא לה ∞ כי ככל שאנחנו מתרחקים על $x^1 = 1$ הישר יותר ויותר קרוב ל $x^1 = 0$. $P(F^2) = F \cup \{\infty\}$
כמובן אפשר היה גם לבחור את $x^0 = 1$ בתור הישר המאפיין.
$(x_1^0, x_1^1) \sim (x_2^0, x_2^1)$ אמ"מ $(x_1^0, x_1^1) = \lambda(x_2^0, x_2^1)$. מסמנים $(x^0 : x^1) = [(x_1^0, x_1^1)]$ - מחלקת השקילות של (x_1^0, x_1^1). לזה נקרא קואורדינטות הומוגניות. אם $x^1 \neq 0$ אז $(x^0 : x^1) = (\frac{x^0}{x^1} : 1)$.
נקודות שעבורן $x^1 \neq 0$ מסמנים ע"י U_1.
אם $x^0 \neq 0$ אז $(x^0 : x^1) = (1 : \frac{x^1}{x^0})$. נקודות אלה מסמנים ב- U_0.

$(\frac{x^0}{x^1} : 1) \cong F$
$(1 : \frac{x^1}{x^0}) \cong F$

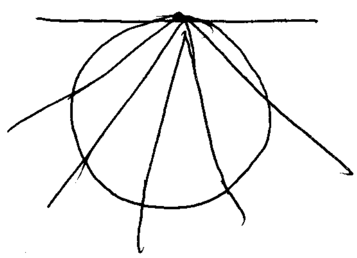


אז אנחנו מכסים את הישר הפרויקטיבי באמצעות שני ישרים אפיניים.

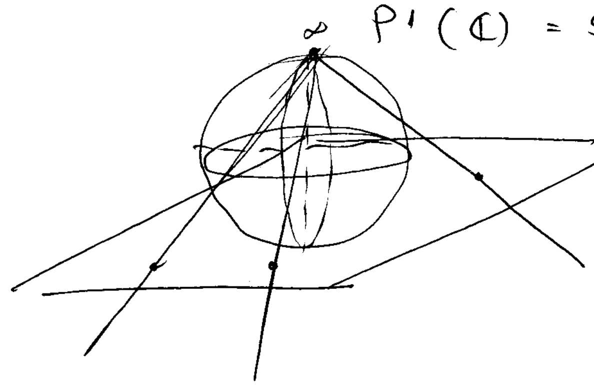
עוד דרך להסתכל על זה היא כזאת: כל ישר שעובר בראשית חותך את מעגל היחידה בשתי נקודות.



אז ניקח חצי מעגל יחידה. ורואים שלכל ישר יש נקודת חיתוך אחת חוץ מציר ה-X. אז צריך לזהות את הנקודה $(1,0)$ עם $(-1,0)$ ואז נקבל מעגל. אז $P^1(\mathbb{R}) \sim S^1$.



עוד דרך היא בעזרת הטלה גיאודזית: כל ישר חותך את המעגל בנקודה כלשהי. את המודל הזה אפשר להרחיב ל-$\mathbb{C}$. ונמצא ש- $P^1(\mathbb{C}) = S^2$.

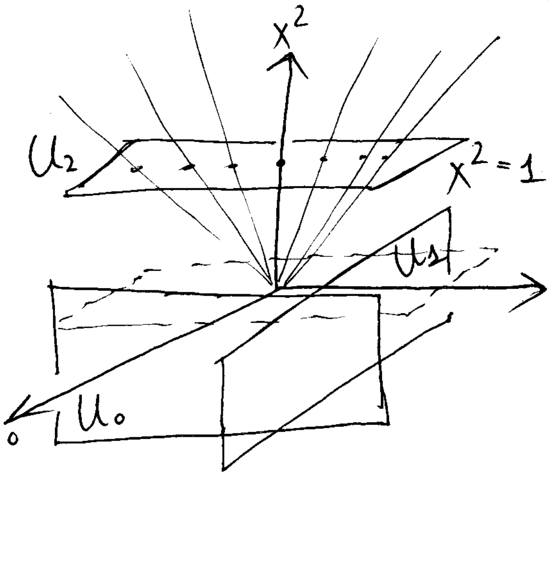


מה קורה ב- $\mathbb{R}^3$?

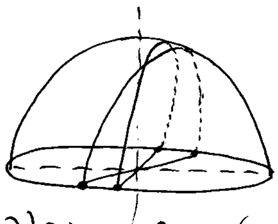
$$P^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$$

$\mathbb{R}^2$: המישור $X^2=1$

$P^1(\mathbb{R})$: הישרים שבמישור $X^2=0$



ואם נאמר את המודל עם מעגל היחידה אפשר לעשות משהו דומה גם
ב- $\mathbb{R}^3$: כל ישר חותך את ספירת היחידה בשתי נקודות -
אז נקח חצי ספירה.



מה שקורה על הקליפה הפתוחה הוא ברור, כל
נקודה שם קובעת ישר אחד בדיוק.
אבל מה קורה על קו המשווה? שם צריך לזהות כל שתי נקודות
אנטיפודיות. אם נדביק את הרצועה שבציור תצא טבעת מביוס.

מילה על השפה כללית - הגדרנו מישור פרויקטיבי ע"י לקיחת כל התת
מרחבים ממימד 1. אבל אפשר גם לקחת תת מרחבים ממימדים
שונים. מתמטיקאי בשם גרסמן התעסק עם זה.

תתי מרחב פרויקטיביים

נניח V מ"ו: $W \le V$. אז $W-\{0\} \subseteq V-\{0\}$. את הזיהוי של
כל הישרים ב- $V\setminus\{0\}$ אפשר לצמצם ל- $W\setminus\{0\}$. כלומר אם
יש העתקה $P: V-\{0\} \to P(V)$ אז התמונה של $P|_{W-\{0\}}$ היא למעשה
$P(W)$. אז נאמר ש- $P(W) \le P(V)$.

משפט: נניח ש- $S_1, S_2 \le P$ תתי מרחב של מרחב פרויקטיבי. אז

$$\dim\langle S_1, S_2\rangle + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$$

כאשר $\dim \emptyset = -1$.

הערה: למעשה קודם צריך להוכיח שחיתוך תתי מרחבים הוא תת
מרחב ואז גם אפשר להגדיר את $\langle S_1, S_2\rangle$.

מסקנות:

1. אם $\dim P \le \dim S_1 + \dim S_2$ אז $S_1 \cap S_2 \ne \emptyset$.
2. אם $H \le P$ על מישור (כלומר $\dim H = \dim P - 1$): $p \notin H$
לכל ישר L אם $p \in L$ אז $|L \cap H| = 1$

27 5.03.08
גיאומטריה לינארית

במקרה של מרחב פרוייקטיבי נסמן ב- $\overline{S}$ את המרחב שנוצר ע"י S.

<u>משפט:</u> יהי $\mathbb{P}$ מרחב פרוייקטיבי; $S_1, S_2 \le \mathbb{P}$ תת מרחבים. אזי

1. $\dim \overline{S_1 \cup S_2} + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$
2. אם $H < \mathbb{P}$ על מישור ($\dim H = \dim \mathbb{P} - 1$) ו- $P \notin H$. אזי לכל ישר L כך ש- $P \in L$ $H \cap L = \{נקודה\}$.

<u>הערה:</u> V מרחב וקטורי; $W_i \le V$ תת מרחבים. אז $\mathbb{P}(W_i) \subseteq \mathbb{P}(V)$.
$\bigcap_i \mathbb{P}(W_i)$ תת מרחב פרוייקטיבי ששווה ל- $\mathbb{P}(\bigcap_i W_i)$
אם $M \subseteq \mathbb{P}$ תת קבוצה אז $\bar{M} = \bigcap_{\substack{S \le \mathbb{P} \\ M \subseteq S}} S$. ומכאן
$\bar{M} = \mathbb{P}(\langle M \rangle)$ אבל פה אנחנו קצת אונסים את הסימונים. מלכתחילה M תת קבוצה של $\mathbb{P}$, כלומר זה אוסף נציגים של ישרים ב- V.
אבל אם נחשוב על M לא רק כאוסף נציגים של ישרים, אלא כאוסף <u>כ</u>ל הנציגים - כלומר המקורות של M תחת ההעתקה הטבעית, אז $\langle M \rangle$ זה תת המרחב הווקטורי שנוצר ע"י מקורות אלה, ואז אנחנו טוענים ש- $\bar{M} = \mathbb{P}(\langle M \rangle)$. ברור ש- $M \subseteq \mathbb{P}(\langle M \rangle)$ שהרי אם $[v] \in M$ אז הישר שנוצר ע"י v הוא ב- $\langle M \rangle$ ולכן $[v] \in \mathbb{P}(\langle M \rangle)$.
אם $A \subseteq B$ אז $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ ולכן $\bar{M} \subseteq \overline{\mathbb{P}(\langle M \rangle)} = \mathbb{P}(\langle M \rangle)$.
ומהמינימליות של $\bar{M}$ ברור עכשיו ש- $\bar{M} = \mathbb{P}(\langle M \rangle)$.

<u>הוכחת המשפט:</u>

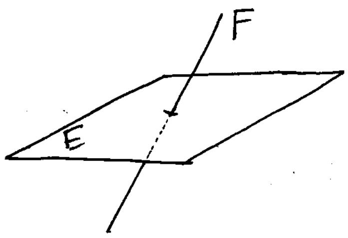
1. נניח ש- $S_1, S_2 \le \mathbb{P}$. אז $S_1 = \mathbb{P}(W)$, $S_2 = \mathbb{P}(U)$.

$\Leftarrow$ $S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W \cap U)$, $\overline{S_1 \cup S_2} = \mathbb{P}(W + U)$

$$\dim S_1 = \dim W - 1$$
$$\dim S_2 = \dim U - 1$$
$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(W \cap U) - 1$$
$$\dim \overline{S_1 \cup S_2} = \dim(W + U) - 1 =$$
$$= \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) - 1$$

$$\Rightarrow \dim \overline{S_1 \cup S_2} + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$$

(2) אם $H < \mathbb{P}$ על מישור אז $H = \mathbb{P}(E)$ כאשר $E < V$ על מישור, כלומר $\dim E = \dim V - 1$. P נקודה ב- $\mathbb{P}$. פירוש הדבר שיש $F < V$ רק ש- $\dim F = 1$ ו- $P = \mathbb{P}(F)$. $P \notin H$ ולכן $F \not\subset E$ ולכן $V = E \oplus F$.



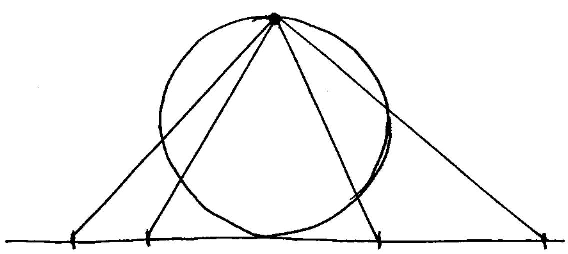
כעת, לפי הסעיף הקודם.

$$\dim(H \cap L) = \dim H + \dim L - \dim \overline{H \cup L} =$$
$$= \dim H + \dim L - \dim \mathbb{P} =$$
$$= (\dim \mathbb{P} - 1) + 1 - \dim \mathbb{P} =$$
$$= 0$$

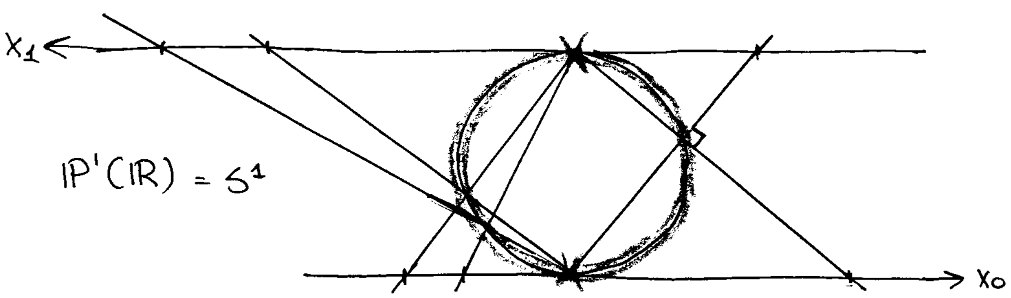
$\Leftarrow$ $H \cap L$ היא נקודה בודדת. ☺

את המשפט הזה אפשר להכליל קצת: אם יש שני תת מרחבים שאף אחד מהם לא מוכל בשני והמימדים שלהם משלימים (כלומר סכום הממדים שווה לממד המרחב) אז החיתוך שלהם הוא נקודה אחת.

רימן שאל את עצמו מהי יריעה גאומטרית – זה לוקחים עצמים קטנים מוכרים (כמו קטעים פתוחים) ומדביקים אותם. ההדבקה של המרכיבים הם לא מוכרח כמו האובייקטים המקוריים – זה כמו שמקוביות לגו אפשר ליצור כל מיני דברים. למשל הישר והמעגל הם לא זהים מבחינה טופולוגית. אבל אפשר להגדיר התאמה כזאת באופן מקומי. ולמעשה מספיק להוריד אפילו נקודה אחת כדי שאפשר יהיה להגדיר התאמה:



ואז לכל הנקודות חוץ מהקוטב הצפוני יש קואורדינטות. אם לא כיסינו הכל, אז אפשר לעשות את זה פעמיים.

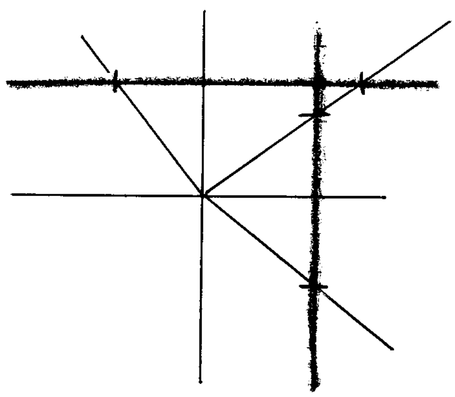


עכשיו את S^1 הצלחנו לכסות ע"י שני ישרים. אבל עכשיו יש נקודות שאפשר לייחס להן שתי קואורדינטות.

רימן דיבר על ההבדל בין הלוקאלי לגלובאלי. למשל, באופן לוקאלי גליל וטבעת מביוס נראים אותו הדבר. אבל גלובאלית אלה שני עצמים שונים לגמרי.

בקורס הזה אנחנו מדברים על הדבקה של עצמים לינאריים - ישרים וכו'.

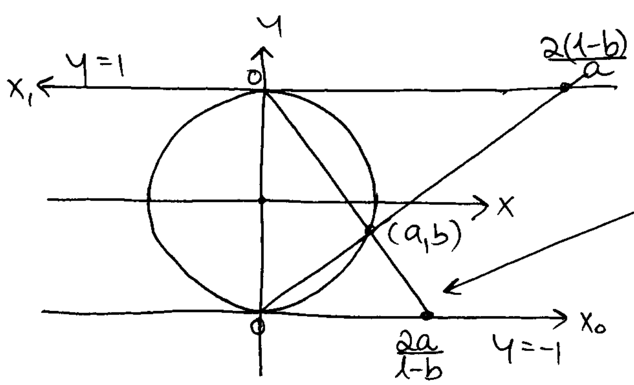
גם במובן השני של $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ידענו שיש נקודות שאפשר לתת להן שתי קואורדינטות:



למעשה את כל הנקודות פרט לציר ה-x וציר ה-y.

האם ניתן למצוא קשר בין הקואורדינטות השונות?

עוד נשאלת השאלה - איך "הדבקנו" כאן את שני הישרים שיוצרים את הקואורדינטות? הציור מטעה מכך שההדבקה לא נראית חלקה.



נחשב את הקשר בין הקואורדינטות:

$$y = \frac{b-1}{a}(x-a)+b$$

נמצא את נקודת החיתוך עם $y=-1$:

$$-1 = \frac{b-1}{a}(x-a)+b$$

$$-a-ab = (b-1)(x-a)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-a-ab}{b-1}+a = \frac{2a}{1-b}$$

$$1 = \frac{a}{1-b}(x-a)+b \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{a^2-(1-b)^2}{a} = \frac{2(1-b)}{a}$$

ובאופן דומה

29 10.03.08
גיאומטריה
לינארית

הצגה פרמטרית של יריעות פרוייקטיביות

בשביל להציג יריעה של מרחב אפיני אפשר לבחור אחת משתי דרכים: - הצגה פרמטרית

- הצגה בעזרת מע' משוואות.

למשל ב- A^3 הצגה עם משוואה: $x-y+2z-1=0$

או בעזרת פרמטריזציה:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

במרחבים פרויקטיביים קורה משהו אנלוגי.

נניח ש- $S \le \mathbb{P}(V)$ רק ש- $S = \mathbb{P}(W)$ כאשר $W \le V$

נניח ש- $[w] = P \in S$, $w \in W$.

נניח ש- $(w_0, w_1, \dots, w_k)$ בסיס (סדור) של W !-

$$w = w_0t^0 + w_1t^1 + \dots + w_kt^k = (w_0, \dots, w_k)\underbrace{\begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^k \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{F}^{k+1}}$$

זאת הצגה פרמטרית של W.

נניח ש- $\mathcal{B} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ בסיס סדור של V. אז וקטורי הבסיס של W אפשר להציג כצירופים לינאריים של $\mathcal{B}$.

$$(w_0, w_1, \dots, w_k) = (b_0, b_1, \dots, b_n)\begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 & \dots & x_k^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & & x_k^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & & x_k^n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow w = (w_0, \dots, w_k)\begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^k \end{bmatrix} = (b_0, \dots, b_n)\begin{bmatrix} \underbrace{x_0^0}_{x_0} & \dots & \underbrace{x_k^0}_{x_k} \\ \vdots & & \\ x_0^n & \dots & x_k^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^k \end{bmatrix} =$$

$$= (b_0, \dots, b_n)\left[x_0t^0 + x_1t^1 + \dots + x_kt^k\right]$$

אם נותנים ל- t^i-ים לרוץ באופן חופשי נקבל את W.

אם $(w) = (y^0, y^1, \dots, y^n)$ אז

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^0 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} t^0 + \dots + \begin{pmatrix} x_k^0 \\ \vdots \\ x_k^n \end{pmatrix} t^k$$

$$y^0 = x_0^0 t^0 + x_1^0 t^1 + \dots + x_k^0 t^k$$
$$y^1 = x_0^1 t^0 + x_1^1 t^1 + \dots + x_k^1 t^k$$
$$\vdots$$
$$y^n = x_0^n t^0 + x_1^n t^1 + \dots + x_k^n t^k$$

זאת הצגה פרמטרית של W. ואם נכפול את t ה- t-ים מסוים סקלר נקבל למעשה הצגה פרמטרית של $[W]$.

משוואות סתומות ל-S

איך מוצאים מע' משוואות סתומות ל- $W^{(k+1)} \le V^{(n+1)}$

נתבונן ב-$W^0 \le V^*$. אם $(b_0, \dots, b_n)$ בסיס סדור של V ; $(\varphi^0, \dots, \varphi^n)$ הבסיס הדואלי ל- V^*. אז W^0 אפשר להציג בעזרת המשוואות

$$\lambda_0^0 \varphi^0 + \lambda_1^0 \varphi^1 + \dots + \lambda_n^0 \varphi^n = 0$$
$$\vdots$$
$$\lambda_0^{n-k} \varphi^0 + \lambda_1^{n-k} \varphi^1 + \dots + \lambda_n^{n-k} \varphi^n = 0$$

S מתקבל ע"י כ המכפלות באותו סקלר של איברי W, אז המשוואות של W הן למעשה המשוואות של W כאשר אנחנו מסתכלים על הווקטורים כנציגים של מחלקות השקילות שהן איברי S.

<u>פרסומת:</u> נתבונן במשוואה $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$
זה יצור הומוגני.

ב- U_0 $x^0 \neq 0$ ואז יוצא אליפסה:

$$1 - \left(\frac{x^1}{x^0}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{x^0}\right)^2 = 0$$

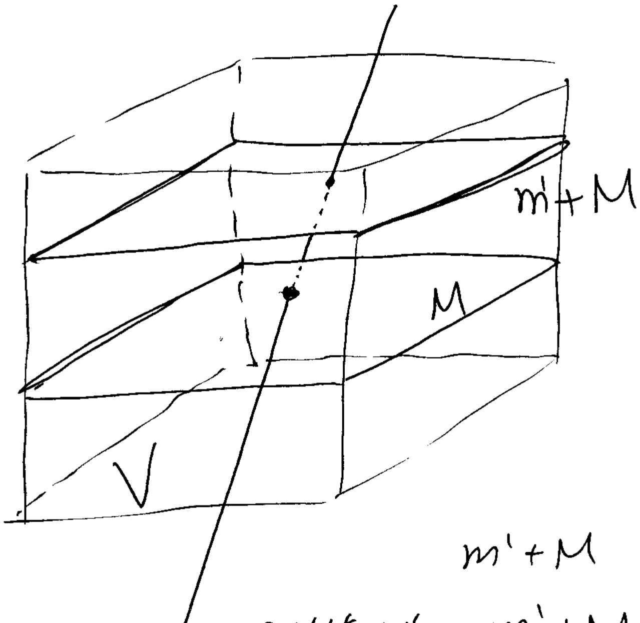
ב- U_1 $x^1 \neq 0$ ואז יוצאת היפרבולה:

$$\left(\frac{x^0}{x^1}\right)^2 - 1 - \left(\frac{x^2}{x^1}\right)^2$$

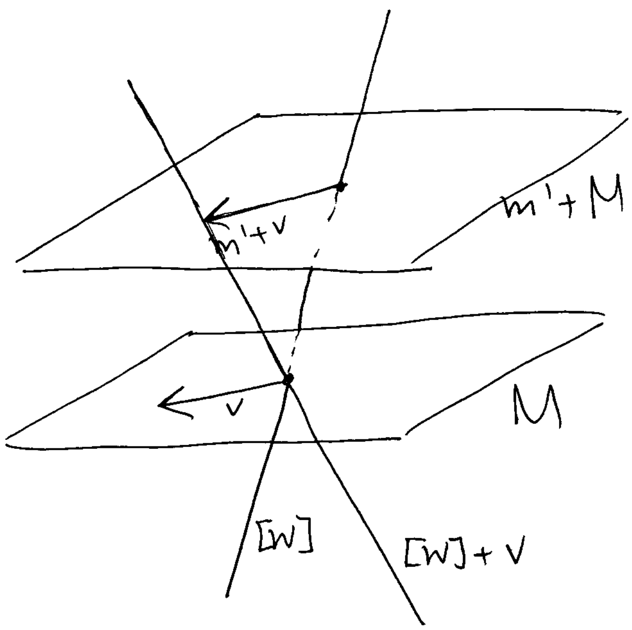
גם ב- U_2 יוצאת היפרבולה...

טענה: נניח $M \le V$ על מישור. אז $A_M = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(M)$ יריעה אפינית.

הוכחה: צריך להראות שיש מרחב וקטורי שמהווה מרחב כיוונים.
נראה ש- (A_M, M) יריעה אפינית (A_M - אלה מחלקות השקילות!!.)



A_M זה כל הישרים דרך הראשית של V חוץ מאלה שעוברים ב- M.
נבחר $m' \notin M$ כלשהו. אז יש איזומורפיזם של קבוצות
$A_M \cong m'+M$
כל נקודה ב- A_M חותכת את $m'+M$ בדיוק בנקודה אחת וכל נקודה ב- $m'+M$ מתאימה לישר ב- A_M. את החיבור מגדירים ע"י חיבור לנקודת החיתוך:



אבל m' הוא לא יחיד. אז לכאורה יש לנו שפע מבנים אפיניים. אבל הטענה היא שלמעשה כל המבנים האלה איזומורפיים. הם כולם קשורים אחד לשני ע"י הומותטיה (ניפוח).

(31) 12.03.08

גאומטריה לינארית

יום הולדת שמח לעמית!!

משפט: $M \le V$ על מישור.

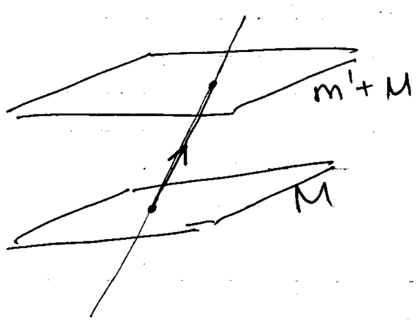
$\mathbb{P}(M) \le \mathbb{P}(V)$ על מישור

אז $A_M = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(M)$ מרחב אפיני עם M בתור מרחב כיוונים. וכן, אם $(A_M, M, +')$ ו- $(A_M, M, +'')$ שני מבנים כאלה* אז יש איזומורפיזם אפיני $A_M \xrightarrow[\sim]{Id} A_M$, $M \xrightarrow{h} M$ (הומותטיה)

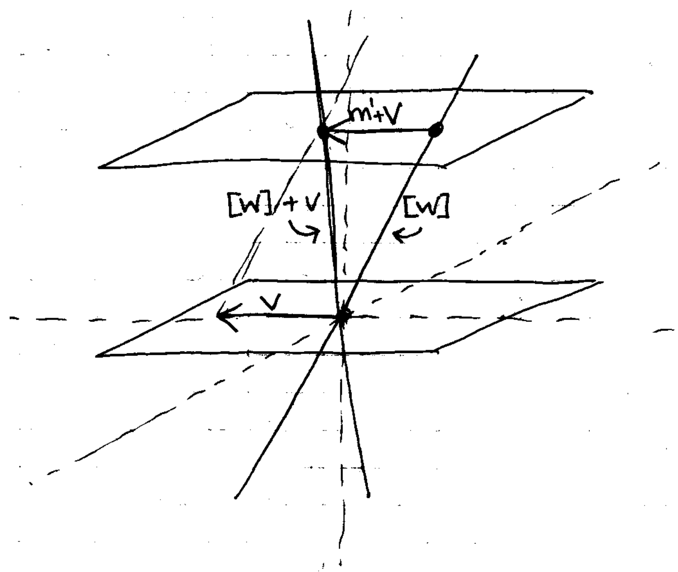
*״כאלה״ = כמו שנגדיר בהוכחה.

אם $A \le A_M$ אפיני ו- $\bar{A} \le \mathbb{P}(V)$ סגור פרויקטיבי אז $\bar{A} \setminus A \subsetneq \mathbb{P}(M)$, $\dim A = \dim \bar{A}$ ו- $\bar{A} \setminus A \le \mathbb{P}(M)$ עם ממד $\dim A - 1$.

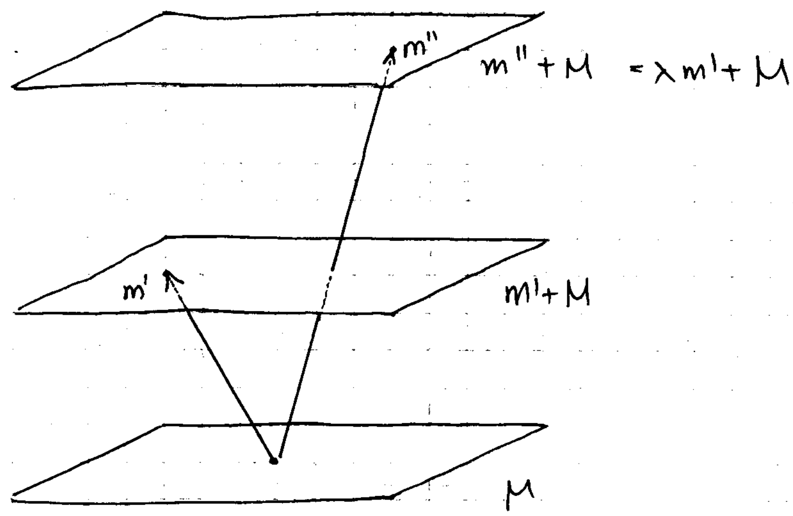
הוכחה: יהי $0 \ne m' \in V \setminus M$ ונתבונן ב- $m'+M$. יש התאמה חח״ע ועל $A_M \simeq m'+M$ (כקבוצות) המוגדרת ע״י $P=[v] \to \langle v \rangle \cap (m'+M)$ - כל נקודה ב- A_M היא ישר שעובר דרך הראשית ב- V. אך לא נמצא ב- M ולכן יש נקודה אחת בדיוק על הישר הזה שחותכת את $m'+M$ - ברור שההתאמה הזו הפיכה: בהינתן $Q \in m'+M$ הישר המתאים לה הוא הישר שעובר דרך Q והראשית.



נגדיר את פעולת החיבור ב- A_M. החיבור פשוט מושרה מהחיבור במרחב האפיני $m'+M$ עם מרחב כיוונים M.



מצד שני, יהיו $m' \ne m'' \notin M$ ונתבונן בשני המבנים $(A_M, M, +')$ ו- $(A_M, M, +'')$



אנחנו רוצים להראות ש- $(A_M, M, +') \cong (A_M, M, +'')$.

ברור שב- A_M ההעתקה הזו $f: P \mapsto P$.

נטען שקיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש- $m''+M = \lambda m' + M$

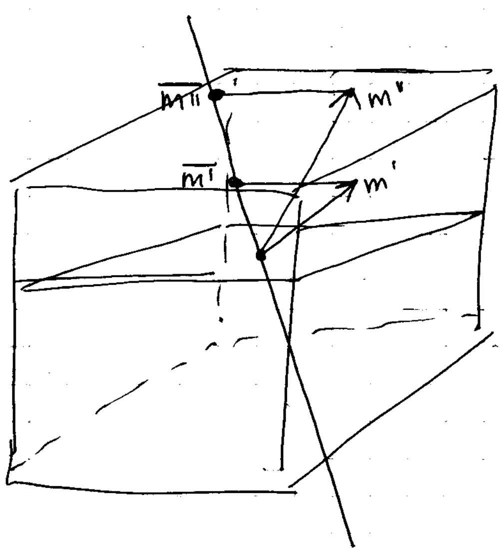
באופן כללי, $P+M = Q+N$ אמ"מ $M=N$! $Q-P \in M$.

אז אנחנו דורשים ש- $m'' - \lambda m' \in M$ וזה תמיד נכון כי

$\dim M = \dim V - 1$ לכן תמיד יש פתרון: M תת יריעה ממימד $n-1$.

אז V/M ממימד 1 (השמטתי פה שליהם כחבורה אדטיבית).

m', m'' לא ב- M ולכן התמונה שלהם במנה היא לא 0 (ב V/M) לכן יש יש λ כך ש- $\lambda \overline{m'} = \overline{m''}$



עכשיו נניח שיש לנו $P \in A_M$. נניח

שב- $m'+M$ זה מזוהה עם P' וב

$m''+M$ זה מזוהה עם P''.

מה זה $P+m$ עבור $m \in M$?

נניח $P = [v]$. יש μ'' כך ש-

$$P'' = \mu'' v \in P \cap (m''+M)$$

אז $P +'' m = P'' + m = \mu'' v + m \in m''+M$

באופן דומה יש μ' כך ש- $P' = \mu' v$. ואז

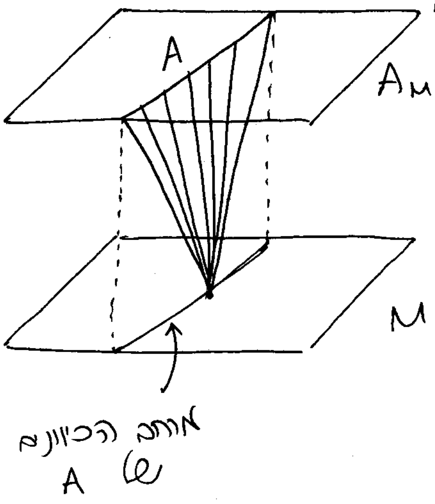
$$P +' m = \mu' v + m \in m' + M$$

עכשיו נגדיר את האיזומורפיזם:

$$(A_M, M, +') \longrightarrow (A_M, M, +'')$$
$$f: P \longmapsto P$$
$$Df: m \longmapsto \frac{\mu''}{\mu'} m = \lambda m$$

הראנו שכל שני מבנים כאלה הם איזומורפיים.

נוכיח את שאר המשפט. נתבונן ב- $\bar{A} \setminus A$ כאשר $A \subseteq A_M$



מה זה $\bar{A}$? - אלה הם הישרים ב-V שהם ב-A

יחד עם הישרים ב-M שמקבילים ל-A (טומי ומקורות)

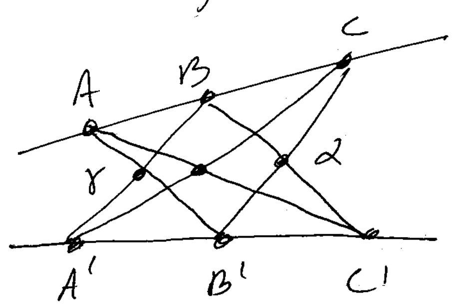
לכן, $\bar{A} = A \cup \infty_A$ כאשר

$\infty_A =$ נקודות האינסוף מימד $A-1$

$= \bar{A} \setminus A \subseteq \mathbb{P}(V)$

מפני ש $\dim A = \dim \bar{A}$ ו- $A \subseteq \bar{A}$.

איך נראה משפט Desarges הפרויקטיבי?

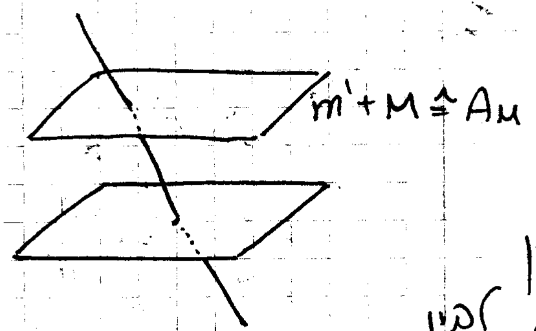


α

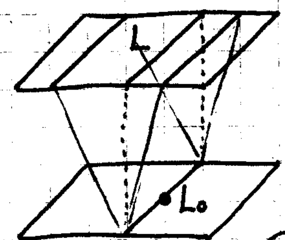
להסתכל ב- Audin

(38) 17.03.08
גאומטריה
לינארית

<u>משפט</u>: $M \le V$ של מישור
$\mathbb{P}(M) \le \mathbb{P}(V)$ של מישור
$A_M = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(M)$ מרחב אפיני.



<u>טענה</u>: יש התאמה חח"ע ועל בין קבוצות של ישרים מקבילים ב- A_M לבין נקודות ב- $\mathbb{P}(M)$.



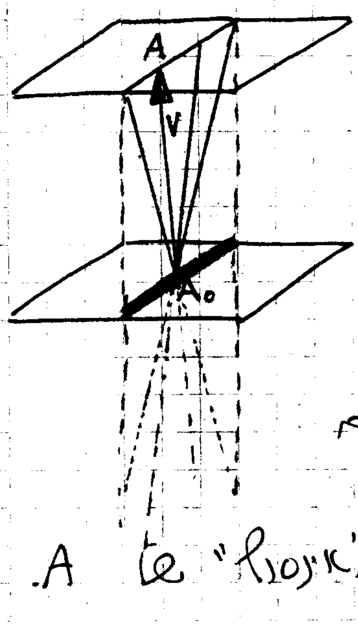
<u>הוכחה</u>: לישרים מקבילים ב- A_M יש להם במשותף מרחב כיווני $L_0 \le M$ ישר. במילים אחרות, נקודה ב- $\mathbb{P}(M)$ ולהפך. ☺

<u>הכללה</u>: יש התאמה חח"ע ועל בין קבוצות של יריעות מקבילות ב- A_M לבין תת יריעות פרוייקטיביות של $\mathbb{P}(M)$.
<u>הוכחה</u>: ליריעות מקבילות יש מרחב כיווני משותף $L_0 \le M$ שהוא תת מרחב של M. לתת מרחב זה מתאים תת מרחב פרוייקטיבי של $\mathbb{P}(M)$ ולהפך. ☺

נניח $A \le A_M$. אם נסמן ב- $\bar{A}$ את הסגור הפרוייקטיבי של A ב- $\mathbb{P}(V)$ אז $\bar{A} \,|\, A \subseteq \mathbb{P}(M)$.

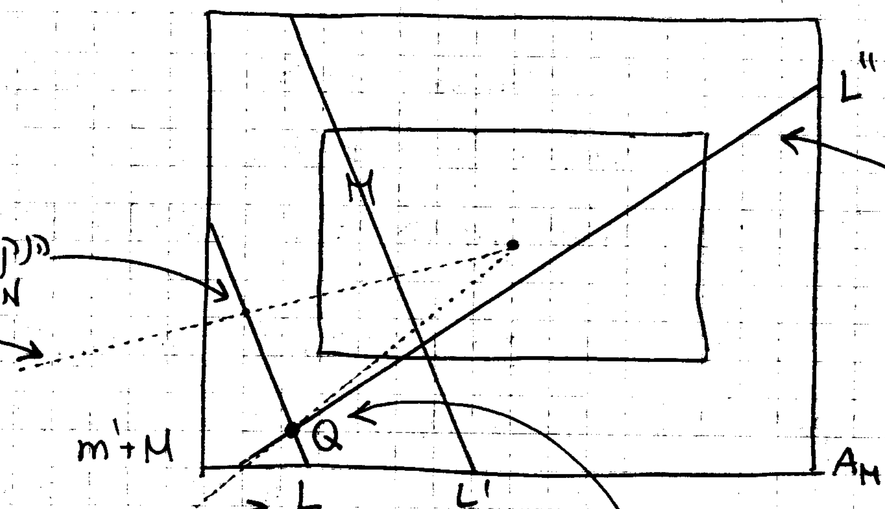
אם $A = v + A_0$ $\quad A_0 \le M$ $\quad v \in A$
אז $\bar{A} = \mathbb{P}(\langle v \rangle \oplus A_0)$

$$\Rightarrow \dim \bar{A} = \dim(\langle v \rangle + A_0) - 1 = \dim A_0 = \dim A$$



למעשה מה שחסר ב- A כדי להגיע ל- $\bar{A}$ הוא הנקודות באינסוף. ב- A יש את כל הישרים שעוברים בראשית וחותכים את A. A_0 עצמו למעשה מתאים לישר שעובר בראשית וה"אינסוף" של A.

תרגול: חיתוך של ישרים במישור הפרויקטיבי.
איך זה נראה?



הנקודה הנ"ל מתאימה לישר הנ"ל

אם L'' ו-L לא מקבילים ב-A_M אז יש להם מישורים מתאימים שנחתכים בישר והישר הזה מתאים לנקודה Q.

ישר פרויקטיבי ראשון בציור הזה חסרה לו משהו נקודת האינסוף שלו.

ישר שהחלק האפיני שלו מקביל לחלק האפיני של L. אז L' ו-L נחתכים באינסוף.

באופן כללי לשני ישרים במישור הפרויקטיבי יש חיתוך אחד ויחיד!

העתקות פרויקטיביות

יהיו V, V' שני מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$.
נניח $f: V \to V'$ לינארית. אז לכל תת מרחב $W \leq V$
$f(W)$ תת מרחב של V'. אז לישרים אין יותר
מדי ברירה — או שהם עוברים לישרים או שהם עוברים
ל-0. לכן, הפרויקטיביזציה של f היא ההעתקה

$$P(f): \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\operatorname{Ker} f) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$$

שפועלת באופן הטבעי.

זאת partially defined function והרבה
מתמטיקאים לא אוהבים את זה אבל מניחים
ש- $\ker f = \{0\}$, כלומר f חח"ע ואז יש
פונקציה מושרית $P(f): \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$.
אם $f: V \xrightarrow{\sim} V'$ איזומורפיזם אז
$$P(f): \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V')$$
איזומורפיזם.
הומומורפיזם זו העתקה פרויקטיבית (או דווקא איזומורפיזם) מישר פרויקטיבי לישר פרויקטיבי.

קואורדינטות הומוגניות ובסיסים פרויקטיביים

נניח ש- $\dim_{\mathbb{F}} V = n+1$. ונניח ש- $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_n)$
בסיס סדור. כל נקודה ב- V אפשר להציג באמצעות
קואורדינטות בבסיס הזה.
נניח $P \in \mathbb{P}(V)$. אז יש $0 \neq v \in V$ רק ש- $P = [v]$.
ניקח את הקואורדינטות של v לפי $\mathcal{B}$ $(v)_{\mathcal{B}} = (x^0, x^1, \dots, x^n)$.
אז לכל $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$ $[v] = [\lambda v]$ ומתקיים
$$(\lambda v)_{\mathcal{B}} = (\lambda x^0, \lambda x^1, \dots, \lambda x^n).$$
את המשפחה הזו מייצגים ע"י $(x^0 : x^1 : \dots : x^n)$
הקואורדינטות ההומוגניות.

הגדרה: V מרחב וקטורי ממימד $n+1$. $(p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$
כאשר $p_i \in \mathbb{P}(V)$ נקרא "בסיס פרויקטיבי" (מערכת "יחוס פרויקטיבית") של $\mathbb{P}(V)$ במקרה שקיים
בסיס $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_n)$ של V רק ש-
$p(b_i) = p_i$ לכל $0 \le i \le n$ כאשר p ההטלה
הטבעית וכן $p(b_0 + \dots + b_n) = p_{n+1}$.
זה מעין סימפלקס כזה.
למשל במישור ישר פרויקטיבי צריך 3 קואורדינטות.

<u>למה:</u> יהי $(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ בסיס סדור של $\mathbb{P}(V)$.
B, B' שני בסיסים סדורים של V

$$B = (b_0, \dots, b_n)$$
$$B' = (b'_0, \dots, b'_n)$$

נניח ש $p(b_i) = p_i = p(b'_i)$ ($i = 0, \dots, n$)

ו- $p(b_0 + \dots + b_n) = p_{n+1} = p(b'_0 + \dots + b'_n)$.

אזי קיים $\lambda \in \mathbb{F}^*$ כך ש- $B = \lambda B'$.

<u>הוכחה:</u> $p(b_i) = p(b'_i) \iff [b_i] = [b'_i]$

$$\iff \forall i \; \exists \lambda_i \; b_i = \lambda_i b'_i$$

כמו כן $[b_0 + \dots + b_n] = [b'_0 + \dots + b'_n] \iff$

$$\Leftarrow \exists \lambda \; (b_0 + \dots + b_n) = \lambda (b'_0 + \dots + b'_n)$$

$$\iff \lambda_0 b'_0 + \dots + \lambda_n b'_n = \lambda b'_0 + \dots + \lambda b'_n$$

אבל B' בסיס $\Leftarrow$ $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \lambda$

☺

<u>למה:</u> בהינתן $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(V')$ מאותו מימד. עם
$(p'_0, \dots, p'_{n+1})$, $(p_0, \dots, p_{n+1})$ בסיסים
פרויקטיביים אז קיימת העתקה פרויקטיבית יחידה
$\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V')$ כך ש- $\mathbb{P}(f)(p_i) = p'_i$

(35) 19.03.08

גאומטריה לינארית

היחס הכפול (Cross Ratio)

במרוכבות הגדרנו העתקת מביוס $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
$z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}$

את ההעתקה הזאת אפשר להרחיב לספרה של רימן $\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$

אבל $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. אז למעשה יש לנו כאן העתקה בין מרחבים פרויקטיביים.

איך נראית העתקה פרויקטיבית מ- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$?

יש העתקה לינארית $f:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ כאשר $ad-bc\neq0$ (כדי ש-f תהיה הפיכה)

$$\begin{bmatrix} z_0\\ z_1\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_0\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} az_0+bz_1\\ cz_0+dz_1\end{bmatrix}$$

וזה משרה העתקה פרויקטיבית $P(f):\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)\longrightarrow\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$

אם $(z_0:z_1)\in U_1$ אז אפשר להסתכל בקואורדינטות $(\frac{z_0}{z_1},1)$ ונסמן $\frac{z_0}{z_1}=z$.

אם $f(z_0:z_1)$ גם ב-U_1 אז למעשה ההעתקה היא

$$f:\begin{bmatrix} z\\ 1\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix} \frac{az+b}{cz+d}\\ 1\end{bmatrix}$$

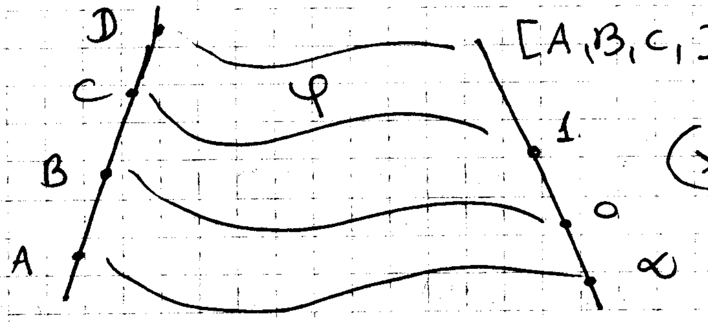
פרויקטיבית $\begin{bmatrix} z\\ 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} z_0\\ z_1\end{bmatrix}$ הן אותה נקודה ורק גם
$\begin{bmatrix} \frac{az+b}{cz+d}\\ 1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} az_0+bz_1\\ cz_0+dz_1\end{bmatrix}$

פורמלית $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ לא מוגדרת ב-$z=\infty$ וב-$z=-\frac{d}{c}$

אז כפי שזה יסתדר עם הטופולוגיה והגבולות זה מרחיבים

$-\frac{d}{c}\longmapsto\infty$ $\qquad \infty\longmapsto\frac{a}{c}$

יהי $P(L)$ ישר פרויקטיבי - כלומר יריעה פרויקטיבית ממד 1. ויהיו $A,B,C\in P(L)$ בסיס פרויקטיבי. בהינתן בסיס נוסף יש העתקה פרויקטיבית יחידה שמעבירה את הראשון לשני (נזכור העתקת מביוס נקבעת באופן חד ערכי ע"י 3 נקודות!)

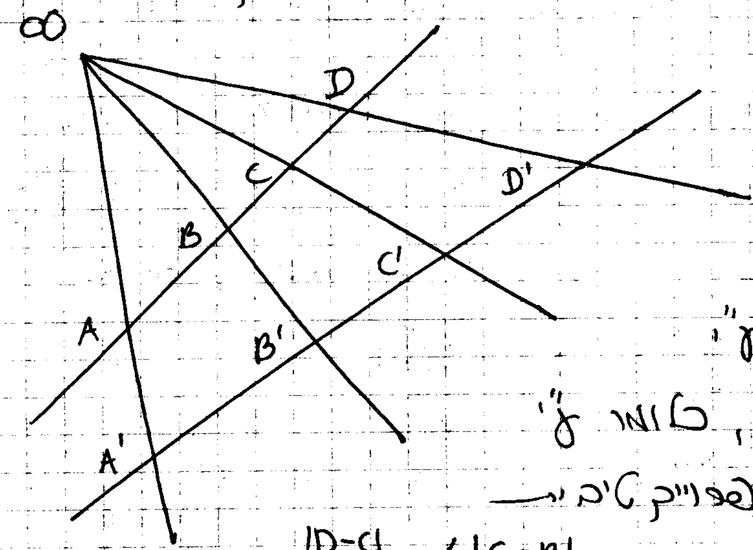


$[A,B,C,D] = \varphi(D)$

(*)

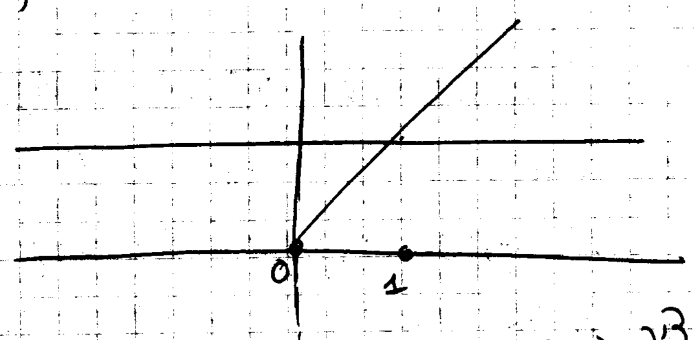
אז היחס הכפול $[A,B,C,D]$ הוא התמונה של D
תחת ההעתקה הפרויקטיבית היחידה שמעבירה את A
ל-∞, את B ל-0 ואת C ל-1.
נשים לב שיש כאן חשיבות גדולה לסדר הנקודות
שמשתמשים $[A,B,C,D]$!

גיאומטרית, היחס הכפול נראה כך:



מה שנשמר ע"י
פרספקטיבה, כלומר ע"י
העתקה פרויקטיבית
הוא היחס $\frac{|D-C|}{|C-B|} \Big/ \frac{|C-B|}{|B-A|}$ וזה היחס הכפול של
$[A,B,C,D]$.

(*) מה זה $1, 0, \infty$? יש פרויקטיבי זה
פרויקטיביזציה של מישור: למישור יש קואורדינטות



אז 1 זה למעשה
מה שמתאים
לישר (1:1)
0 מתאים
לישר (0:1)
∞ - מתאים לציר ה-x.

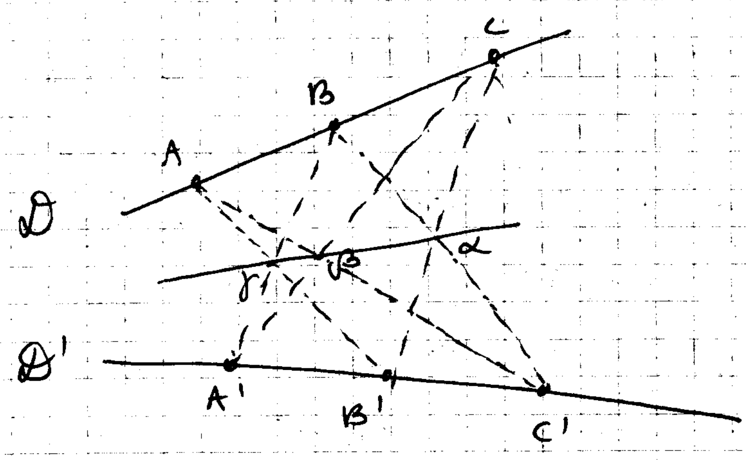
פונקציות במרחב הפרויקטיבי

נניח ש- $W \le V$ תת מרחב. אז ב- V^* יש תת
מרחב המאפס $W^0 \le V^*$. וכאשר הממד סופי
תחת הזיהוי $V = V^{**}$ של הדואליים של W^0 אפשר
לחשוב באיברים ב- V. אלא שהממדים מתהפכים.
אם $\dim V = \dim V^* = n$; $\dim W = r$
אז $\dim W^0 = n-r$.
מה זה $\mathbb{P}(V^*)$? צריך לחשוב על הישרים ב- V^*.
מה זה ישר במרחב שלנו? זה וקטור שכופלים אותו
בכל הסקלרים.
אז ניקח $0 \ne \varphi \in V^*$. אז $\{\lambda\varphi\}_{\lambda \ne 0} \le V^*$ ישר
יש לו מישור ב- V $H_\varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$.
אבל למישור H לא ממש תלוי ב- φ אלא ב- $\{\lambda\varphi\}$
כי הכפלה בסקלר שונה מאפס לא משנה את האפסים.
יש תרגום של כל הפעולות. אם $W_1 \le W_2$ אז
$W_2^0 \le W_1^0$, $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$,
$(W_1 + W_2)^0 = W_1 \cap W_2$.

עקרון הדואליות

אם יש משפט על V שמדבר על תת יריעות ויחסי הכלה, חיתוכים
ויצירה אז יש משפט דואלי על V רק שתת
יריעה מממד k מתורגמת ליריעה מממד $n-k$
והיחסים מתורגמים כמו למעלה.

משפט פפוס (עמ' 151 ב- Audin)



הגרסה הפרויקטיבית אומרת שאם לוקחים $A,B,C \in \mathcal{D}$ ו- $A',B',C' \in \mathcal{D}'$ אז החיתוכים על ישר אחד.

הגרסה האפינית

הישרים צריכים להיות מקבילים אבל פה אין דרישה כזאת

מה הניסוח הפורמלי של משפט פפוס?

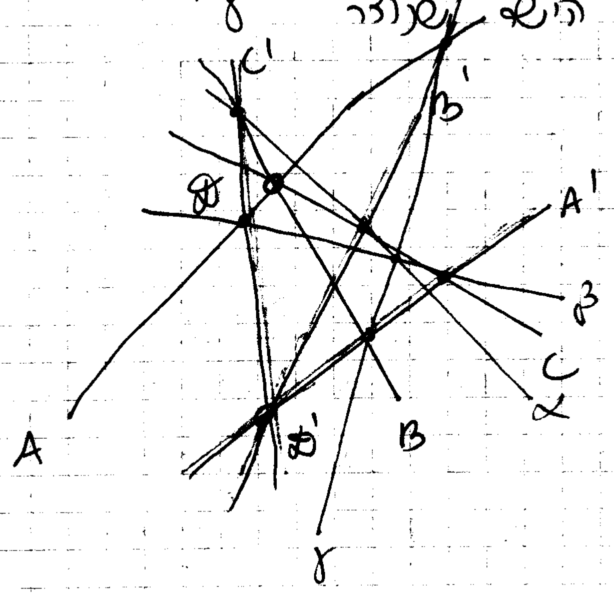
שני הישרים $\mathcal{D}$ ו- $\mathcal{D}'$ עוברים לשתי נקודות $\mathcal{D}$ ו- $\mathcal{D}'$ שונות. אז הנקודות עוברות לישרים ומתקבל:

$\mathcal{D},\mathcal{D}'$ שתי נקודות שונות. יהיו A,B,C שלושה ישרים שעוברים דרך $\mathcal{D}$ ו- A',B',C' שלושה ישרים שעוברים דרך $\mathcal{D}'$. יהי β הישר שנוצר ע"י $A\cap C'$ ו- $C\cap A'$

$\alpha = (B\cap C') \cup (C\cap B')$

$\gamma = (A\cap B') \cup (B\cap A')$

אז α, β ו- γ נחתכים בנקודה אחת!



(57) 24/03/08
גאומטריה לינארית

ARXIV.ORG

מרחבים לינאריים אוקלידיים

V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. מכפלה פנימית הינה פונקציה

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w) \longmapsto v\cdot w = \langle v,w\rangle = (v|w)$$

שמקיימת את התכונות הבאות: $v\cdot w = w\cdot v$ - סימטרית

בילינארית
$$\begin{cases} (v+v')\cdot w = v\cdot w + v'\cdot w \\ (kv)\cdot w = k(v\cdot w) \\ v(w+w') = v\cdot w + v\cdot w' \\ v(kw) = k(v\cdot w) \end{cases}$$

חיובית $0 \le v\cdot v \ \wedge\ v\cdot v = 0 \Longleftrightarrow v=0$

כלומר דוגמה של תבנית בי-לינארית.

דוגמה: $V=\mathbb{R}^n$ $\quad x=(x^1,\dots,x^n)$

$y=(y^1\dots y^n)$

$$x\cdot y = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

קל לראות שזה מקיים את הדרוש.

ברגע שיש מ"פ אפשר להגדיר נורמה: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

זו פונקציה $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת:

1) חיובית $\|x\|\ge 0$, $\|x\|=0$ אמ"מ $x=0$

2) א"ש המשולש $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$ ושוויון אמ"מ $x=ty$ עבור $t\ge 0$ או להפך.

3) לכל $k\in\mathbb{R}$ $\quad \|kx\| = |k|\,\|x\|$

וזה מגדיר מטריקה על V:
$$d: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w) \longmapsto d(v,w) = \|w-v\|$$

ומקיימים:

1) חיובית: $0\le d$; $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

2) סימטריות $d(x,y) = d(y,x)$

3) א"ש המשולש $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$
ושוויון אמ"מ הן קולינאריות - y באמצע.

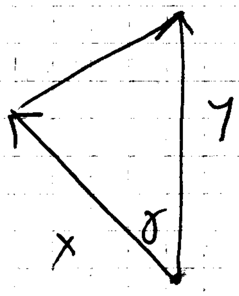
מתקיים $-1 \le \frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|} \le 1$ לכן אפשר להגדיר

את ה"זווית בין x ל-y" ע"י

$$\alpha(x,y) = \arccos\left(\frac{x\cdot y}{\|x\|\|y\|}\right)$$

זאת זווית לא מכוונת וכמובן מוגדרת רק ש- $x,y \neq 0$.

משפט הקוסינוסים:



$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x\cdot y$$

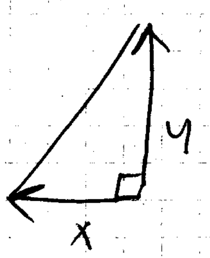
זה נכון בכל מרחב אוקלידי ממשי סופי.

<u>הגדרה:</u> $v \perp w$ אמ"מ $v\cdot w = 0$.

אם התבנית סימטרית אז היחס סימטרי.

אם היא מוגדרת חיובית אז הווקטור היחיד שניצב לעצמו הוא וקטור האפס.

ממשפט הקוסינוסים נובע משפט פיתגורס:



$$\|y-x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \cancel{2x\cdot y} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

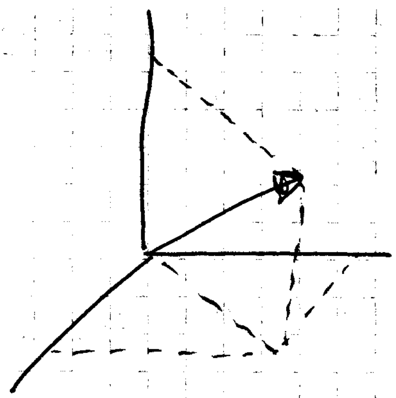
מתקיים $x \perp y$ אמ"מ $\|x+y\| = \|y-x\|$

$$\|x+y\| = \|y-x\| \iff$$
$$\|x+y\|^2 = \|y-x\|^2 \iff$$
$$(x+y)\cdot(x+y) = (y-x)\cdot(y-x) \iff$$
$$2x\cdot y = -2x\cdot y \iff$$
$$x\cdot y = 0$$

כי $F = \mathbb{R}$

<u>הגדרה</u> $\{v_i\}_{i\in I}$ ($v_i \neq 0$) תיקרא אורתוגונלית
כאשר $v_i \cdot v_j = 0$ לכל $i \neq j$ והיא אורתונורמלית
אמ"מ $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$

<u>משפט</u> יהי $\{v_i\}_{i\in I}$ משפחה אורתוגונלית במרחב אוקלידי V. אז:



$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} v_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$$

(משפחה אורתוגונלית היא בת"ל)

(יש הכללות של המושג הזה למרחבים שאינם ממימד סופי - למשל מרחב הילברט מרחב ממימד בן מניה ופירוק פורייה של פונקציה זה למעשה למרחב לא בן מניה).

V מ"ו ממימד סופי.
אם $A \subseteq V$ מגדירים $A^\perp = \{v\in V : va=0 \ \forall a\in A\}$
זו קבוצה לא ריקה כי $0 \in A^\perp$. למעשה $A^\perp$ תת מרחב.
ומתקיים $A^\perp = \langle A\rangle^\perp$; $\langle A\rangle = A^{\perp\perp}$
אם $W \leq V$ אז $W \oplus W^\perp = V$.

מבחינת $U, W \subseteq V$ מגדירים את המרחק בין הקבוצות

$$d(U,W) = \inf\{d(u,w) : u\in U, w\in W\}$$

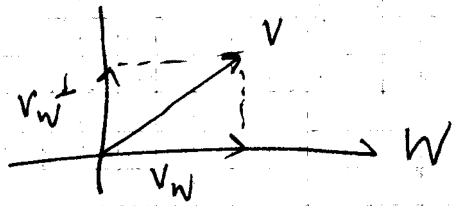
האינפימום קיים כי המרחק חסום מלמטה ע"י 0.

ואם $v \in W$ המרחק בין נקודה לקבוצה

$$d(v,W) = \inf(d(v,w) : w\in W)$$

בהינתן $v \notin W$ איך מחשבים את $d(v,W)$?
$W \oplus W^\perp = V \Leftarrow$ קיימים $v_W \in W$, $v_W^\perp \in W^\perp$
רק ש- $v = v_W + v_W^\perp$

נסמן ש- $d(v,W) = \|v_W^\perp\|$.



דרך להבין שלכל $w \in W$

$\|v_W^\perp\| \le \|w - v\|$

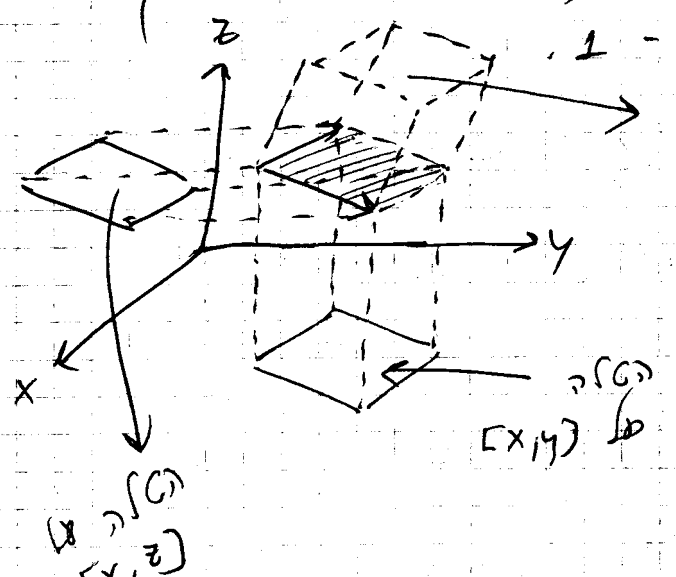
וזה נשאר כתרגיל.

<u>תרגיל:</u> איך מחשבים את המרחק בין שני יריעות? האם בכלל המרחק קיים? כלומר, האם האינפימום מתממש?

<u>טענה:</u> יהיו $B_1, B_2 \subseteq E$ יריעות במרחב אוקלידי. כך ש- $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. אז קיימים $b_i \in B_i$ כך ש- $b_1 - b_2 \perp M_1, M_2$ (כאשר M_1, M_2 המרחבים של הכיוונים של B_1, B_2).

מנו זוג כזה!

בהינתן שני וקטורים בת"ל המקבילית שנוצרת על ידם ע"י הצירופים הליניאריים שלהם כך שהסקלרים נעים בין 0 ל- 1.



אז ריבוע שטח המקבילית הוא סכום ריבועי השטחים של ההיטלים.

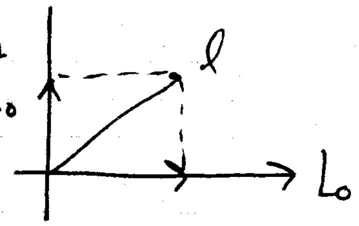
(39) 26.03.08

גאומטריה לינארית

בהינתן יריעה L_0 ונקודה l מחוץ לה איך מוצאים את המרחק? אפשר לכתוב $l = l_0 + l_0^\perp$

כאשר $l_0 \in L_0$ ו- $l_0^\perp \in L_0^\perp$. אז $d(L_0,l) = \|l-l_0\|$.

צ"ל: לכל $l_0' \in L_0$ $\|l-l_0\| \le \|l-l_0'\|$



זה טריוויאלי משום ש-

$$\|l-l_0'\|^2 = \|\underbrace{l-l_0}_{\in L_0^\perp} + \underbrace{l_0-l_0'}_{\in L_0}\|^2 =$$

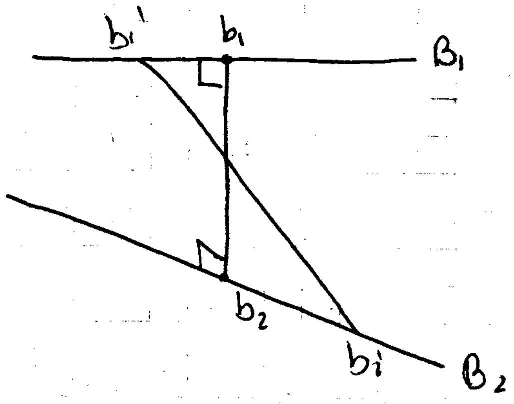
$$= \|l-l_0\|^2 + \|l_0-l_0'\|^2 \ge$$

פיתגורס

$$\ge \|l-l_0\|^2$$

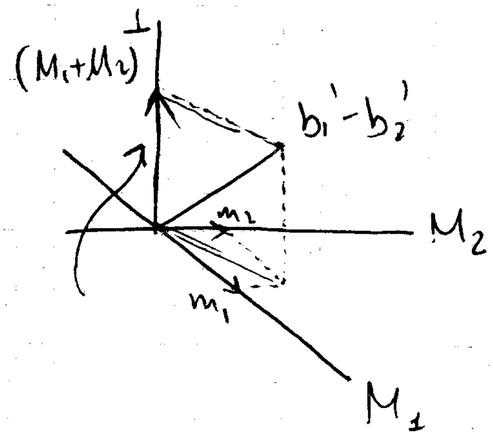
$$\Rightarrow \|l-l_0'\| \ge \|l-l_0\|$$

ואיך מחשבים את המרחק בין שתי יריעות מצטלבות?



לשתי יריעות כאלה תמיד יש ניצב משותף - שתי נקודות b_1, b_2 כך ש- $b_1-b_2 \perp B_1,B_2$

איך מוצאים כאלה נקודות? נבחר סתם נקודות b_1', b_2'. נבחר וקטור ממרחב הכיוונים של B_1 ווקטור ממרחב הכיוונים של B_2. אם שלושת וקטורים אלה נפעיל גרם-שמידט.



משפט: יהיו $B_1, B_2 < E$. קיימים $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$ כך ש- $b_1-b_2 \perp B_1,B_2$ ו- $d(B_1,B_2) = |b_1-b_2|$

הוכחה: נבחר $b_1' \in B_1$, $b_2' \in B_2$ ונתבונן ב- $b_1'-b_2'$. (טו) וקטור זה אורתוגונלית

ש M_1+M_2 כאשר M_i מרחב הכיוונים של B_i.
יהיו $m_i \in M_i$ רק ש- $m_1+m_2=$(ההיטל) של $b_1'-b_2'$ (
(תמונת ב- $(M_1+M_2)^\perp \ni b_1'-b_2'-(m_1+m_2)$
אז נסמן $b_1=b_1'-m_1\in B_1$; $b_2=b_2'+m_2\in B_2$.
נטען ש- b_1, b_2 אלה מקיימות את הדרוש.
יהיו $b_i''\in B_i$. נראה ש- $\|b_1''-b_2''\|\geq\|b_1-b_2\|$

$$\|b_1''-b_2''\|^2=\|\underbrace{b_1''-b_1}_{\in M_1}+\underbrace{b_1-b_2}_{\in (M_1+M_2)^\perp}+\underbrace{b_2-b_2''}_{\in M_2}\|^2=$$

$$=\|b_1-b_2\|^2+\|b_1''-b_1+b_2-b_2''\|^2\geq\|b_1-b_2\|^2$$

פיתגורס

$$\Rightarrow \|b_1''-b_2''\|\geq\|b_1-b_2\|^2$$

☺

<u>הגדרה</u>: מרחב אפיני (A,V) ייקרא מרחב אפיני אוקלידי כאשר V מרחב וקטורי אוקלידי.

ולמעשה אפשר לדרוש פחות. ההגדרה הנכונה היא:
מרחב מטרי (E,d) ייקרא אוקלידי אם קיימת $\varphi:E\to\mathbb{R}^n$ רק שלכל $P,Q\in E$ $d(P,Q)=\|\varphi(P)-\varphi(Q)\|$
כאשר $\|\cdot\|$ היא הנורמה הרגילה של $\mathbb{R}^n$.
התלמיד הרציני ישים לב ששתי ההגדרות שקולות. כלומר,
אם E הנ"ל אפשר לה להגדיר מבנה של מרחב אפיני ולמרחב
הכיוונים יש מבנה אוקלידי.

<u>הגדרה</u>: יהיו E_1, E_2 שני מרחבים אוקלידיים אפיניים. $f:E_1\to E_2$
ייקרא <u>איזומטריה לינארית</u> אם היא העתקה אפינית אשר
מקיימת $Df: V_1\to V_2$ איזומטריה לינארית של מרחבים
הוקטוריים אוקלידיים.

נסמן ב- $I(E)$ את חבורת האיזומטריות של מרחב
אוקלידי E. למה זו חבורה? מה שצריך לבחון

(מ)

הוא קיים ההפכי. מאחר שזו איזומטריה וקטור האפס עובר לאפס ורק הוא לכן חח"ע. במרחבים ממימד סופי זה אומר שהיא גם על.

איזה איזומטריות יש במישור? סיבובים סביב כל הנקודות, הזזות, שיקופים ביחס לישרים והרכבות של הדברים האלה.

<u>משפט</u>: כל איזומטריה במישור הינה מהצורה:

- הזזה
- סיבוב

} שומרות מגמה (אוריינטציה)

- שיקוף
- החלקה (שיקוף והזזה בכיוון הווקטור המאונך)

} משנות מגמה

במישור כל העתקות האורתוגונליות הן מהצורה

$$\begin{pmatrix} \cos t & (\pm)-\sin t \\ \sin t & (\pm)\cos t \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה היא ± 1. אם היא 1 להעתקה קוראים משמר מגמה ואחרת לא. באופן כללי, של העתקה לינארית אומרים שהיא שומרת כיוון אם הדטרמיננטה שלה חיובית.
אז יש אפשרות לחלק את ההעתקות לשומרות כיוון ולא שומרות כיוון. ואז אפשר לעשות חלוקה של בסיסים. לשני בסיסים יש אותו כיוון אם למטריצת המעבר יש דטרמיננטה חיובית.

אפשר להגדיר הומומורפיזם $I(E) \to \{-1,1\}$ ע"י הדטרמיננטה של החלק הלינארי. החיוביות $I^+(E)$ הן תת חבורה מפני עצמן, אבל השליליות לא.

* מה זה הרכבה של שיקופים?
- אם הישרים שביחס אליהם עושים שיקוף נחתכים אז יש נקודה שמורה וזה סיבוב.
- אם הישרים מקבילים אז זו הזזה בכיוון הניצב להם.

$\boxed{\text{ARTIN, ALGEBRA}}$

ממז

הוכחת המשפט: נניח שנעשה זיהוי בין E^2 ל-$\mathbb{R}^2$

$$P \longmapsto \varphi(P) = \begin{bmatrix} x(P) \\ y(P) \end{bmatrix}.$$

הזזה בווקטור a היא $t_a : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x+a_1 \\ y+a_2 \end{bmatrix}$

סיבוב בזווית θ סביב הראשית היא

$$\rho_\theta : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

שיקוף סביב ציר ה-x הוא

$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

הטענה היא שאם $m : E^2 \to E^2$ איזומטריה אז

$$m = t_a \circ \rho_\theta$$

או

$$m = t_a \circ \rho_\theta \circ r$$

כלומר t_a, ρ_θ, r יוצרים.

41 31.03.08
גאומטריה
לינארית

$\mathbb{E}^2$ אוקלידי ו- $\mathbb{R}^2$. הגדרנו משפחות של פונקציות:

הזזה t_a : $t_a(x) = x+a = \begin{bmatrix}x^1+a^1\\ x^2+a^2\end{bmatrix}$

סיבוב ρ_θ : $\rho_\theta(x) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix}$

שיקוף r : $r(x) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x^1\\ -x^2\end{bmatrix}$

<u>משפט:</u> כל תנועה m (ששומרת מרחק) אפשר להציג כ- $m = t_a\circ\rho_\theta$ או $m = t_a\circ\rho_\theta\circ r$
יתר על כן, ההצגה הינה יחידה. (אם הזווית בין 0 ל- 2π כמובן)

<u>הוכחה:</u> נבחר נקודה p ונסמן $q = p - m(p)$. אז ל- $t_q\circ m$ יש נקודת שבת ב- p. נבחר מע' קואורדינטות ששמה את p בראשית. אז קיבלנו העתקה אורתוגונלית ב- $\mathbb{R}^2$ (אורתוגונלית כי גם m וגם t_q משמרות מרחקים). לכן $t_q\circ m$ הינו או סיבוב או סיבוב ושיקוף. אם הוא סיבוב:
אז $t_q\circ m = \rho_\theta \Leftarrow m = t_a\circ\rho_\theta$ כאשר $a=-q$.
אם הוא סיבוב ושיקוף אז $t_q\circ m = \rho_\theta\circ r$ ולכן $m = t_a\circ\rho_\theta\circ r$.
היחידות מושארת לנו כתרגיל. (פתרון למטה *) ☺

מסקנה $\{\{t_a\},\{\rho_\theta\},r\}$ הם יוצרים של החבורה.

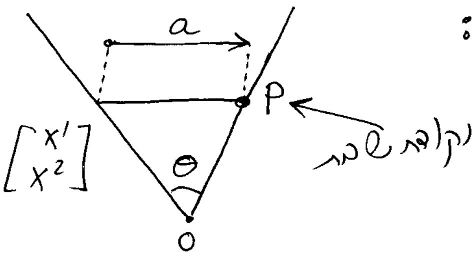
<u>משפט:</u> כל איזומטריה במישור האוקלידי הינה אחת מהבאות:
- הזזה } ישור
- סיבוב }
- שיקוף } לא ישור
- החלקה }

<u>הערות:</u>
- $t_a\circ t_{a'} = t_{a+a'}$
- $\rho_\theta\circ\rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'}$
- $r^2 = 1$

לכל a,θ קיים a' רק ש- $t_{a'}\circ\rho_\theta = \rho_\theta\circ t_a$. ה. a' הנ"ל
הוא $a' = \rho_\theta(a)$. קל להשתכנע ע"י ציור שזה נכון.
- $r\circ t_a = t_{a'}\circ r$ כאשר $a' = r(a)$
- $r\circ\rho_\theta = \rho_{\theta'}\circ r$ כאשר $\theta' = -\theta$.

(*) <u>הוכחת היחידות:</u> נניח $m = t_a\rho_\theta r^i = t_{a'}\rho_{\theta'}r^j$, $i,j=0,1$. לכן
הם חייבים להיות שווים כי $\det(m) = (-1)^i = (-1)^j$. אז נניח $i=0$
(אחרת נכפול ב- r). נקבל $t_a\rho_{\theta-\theta'} = t_{a'} \Leftarrow t_{a-a'} = \rho_{\theta'-\theta}$ ומפה ברור
ש- $a'=a$; $\theta'=\theta$.

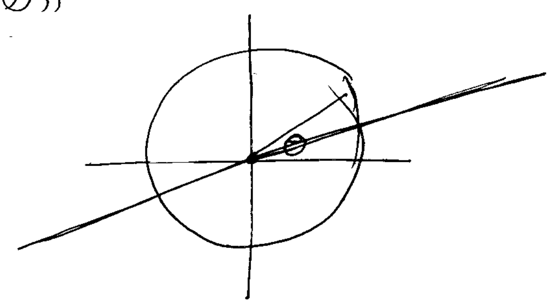
הוכחת המשפט: תהי m שומרת מגמה. נראה שהיא הזזה או סיבוב. אם m הזזה סיימנו. אחרת, $m = t_a \circ \rho_\theta$. אם נראה שיש ל-$m$ נקודת שבת נקבל שהיא סיבוב (כי בגלל שהיא שומרת מגמה היא לא שיקוף).
ואכן יש לה נקודת שבת:



אלגברית, צריך לפתור את המשוואה

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

אם m לא שומרת מגמה אז $m = t_a \circ \rho_\theta r$ $\Leftarrow$ mr הזזה או סיבוב. כלומר $mr = t_a$ או $mr = \rho_\theta^c$ (סיבוב סביב c)
אם $mr = \rho_\theta^c$ אז $m = \rho_\theta^c r$. צריך למצוא ישר שזה למעשה השיקוף סביבו.



יום חמישי ב-16^{00} שיעור חזרה.

42 2.04.08
גיאומטריה לינארית

Conics and Quadrics

K שדה ; $\mathbb{A}^n(K)$ מרחב אפיני. $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n(K)$

$p(X)\in K[X]=K[X_1,\dots,X_n]$ פולינום.

מגדירים $V(p(X))=\{a\in\mathbb{A}^n : p(a)=0\}$. מעניין לחקור קבוצה זו.
אם $n=2$ אז מדובר בפולינומים בשני משתנים. אנחנו נתבונן בפולינומים ממעלה שנייה. אז אין יותר מדי אופציות:

אנחנו נחקור את האפשרויות האלה.

<u>הגדרה</u>: תבנית ריבועית במרחב וקטורי היא פונקציה $q:V\to\mathbb{F}$ כך שיש תבנית בילינארית (סימטרית) $\phi:V\times V\to\mathbb{F}$ כך ש-
$$\forall v\in V \quad q(v)=\phi(v,v)$$

קל לראות שאם q תבנית ריבועית אז $q(\lambda v)=\lambda^2 q(v)$

<u>דוגמה</u>: $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ $\quad V=\mathbb{R}^n$
$$q(x_1,\dots,x_n)=x_1^2+\dots+x_n^2$$
זו התבנית האוקלידית הרגילה. מהי התבנית הבילינארית המתאימה? ברור ש- $\phi(x,y)=\langle x,y\rangle$ מ"פ.

<u>הגדרה</u>: פונקציה ריבועית במרחב וקטורי היא $Q:V\to\mathbb{F}$ כך ש- $Q(v)=q(v)+\varphi(v)+c$ כאשר.
- q תבנית ריבועית
- φ תבנית לינארית
- c קבוע

פונקציה ריבועית במרחב אפיני היא פונקציה כך שאם נעשה וקטוריזציה באחת מהנקודות נקבל פונקציה ריבועית במרחב וקטורי. אפשר להראות שזה לא תלוי בנקודה.

<u>דוגמה:</u> $n=1$ $\quad V = \mathbb{R}^1 \quad Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$Q(t) = gt^2 + 2pt + c$$

$n=2$

$$Q(x,y) = \underbrace{ax^2+2bxy+cy^2}_{\text{חלק ריבועי}} + \underbrace{2dx+2ey}_{\text{חלק ליניארי}} + \underbrace{f}_{\text{קבוע}}$$

נוח לכתוב את זה בכתיב מטריציוני:

$$Q(x,y) = [x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\text{מטריצה סימטרית}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2[d\ e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f$$

איך אפשר למיין את התבניות האלה?
הרבה פעמים נוח לעבור לקואורדינטות חדשות. נציב

$$x \mapsto x+u \qquad y \mapsto y+v$$

בנוסחה של Q ונקבל ש- $Q(x+u,y+v)$ זה

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+2axu+2bxv+2buy+$$
$$+au^2+2buv+cv^2+2du+2ev+2cyv+f =$$
$$ax^2+2bxy+cy^2 + x(2d+2au+2bv) +$$
$$+ y(2e+2bu+2cv) +$$
$$au^2+2buv+cv^2 + 2du+2ev+$$
$$+f$$

אם קיים פתרון למערכת $\begin{cases} au+bv+d=0 \\ bu+cv+e=0 \end{cases}$

[למשל אם $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$] נניח ש- $Q(x,y)=0$ יש מרכז. אם נעבור לקואורדינטות במרכז (כלומר הראשית היא אחד המרכזים) נקבל $ax^2+2bxy+cy^2+\underbrace{f}_{\text{קבוע}}$ (שונה מה-f הקודם).

<u>דוגמה:</u> $Q(x,y) = x^2-2xy+2y^2+2y-1$

נפתור את

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{(u)}{c_1} = \underset{(v)}{c_2} = -1$$

נציב בתבנית:

$$(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + 2(y-1)^2 + 2(y-1) - 1 =$$
$$= x^2 - 2xy + 2y^2 - \cancel{2x} \cancel{+1} \cancel{-2} \cancel{+2x} + \cancel{2y} - \cancel{4y} \cancel{+2} + \cancel{2y} - 2 \cancel{-1}$$
$$= x^2 - 2xy + 2y^2 - 2 \quad (*)$$

האפסים של $Q(x,y)$ ושל $(*)$ שקולים עד כדי הזזה ול-$(*)$ יש צורה פשוטה יותר. זה היתרון של מה שעשינו.

נתבונן את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (נמצא את הע"ע שלה)

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

טוב, המספרים יוצאים מכוערים אז ניקח דוגמה אחרת.

דוגמה: $2x^2 + 4xy - y^2 + f$. המטריצה המתאימה היא $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

היא כמובן הפיכה. נמצא את הערכים העצמיים:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$$

אז יש שני ע"ע $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$

נמצא בסיס של ו"ע ובמקרה שהמטריצה סימטרית הם יהיו אורתוגונליים.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

אז ניקח למשל $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

אז ניקח למשל $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

אלה ו"ע והם ניצבים. המטריצה $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ אורתוגונלית וההופכית שלה היא $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (במקרה שהיא סימטרית היא שווה למשוחלפת שהיא ההופכית).

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

אז אם נעבור לבסיס חדש בעזרת המטריצה המלכסנת

$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ התבנית שלנו תקבל את הצורה

$$3x^2-2y^2+f'$$

ואם זה נרצה להשוות ל-0. התשובה הזאת נותנת לנו משהו מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

מה יהיה תרגיל במבחן - להביא תבנית לצורה נורמלית -

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (*) \quad \text{או} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (**)$$

איך מראש נדע מה צריך לצאת לנו? נניח $ax^2+2bxy+cy^2$.
כי פונקציה בשני משתנים - או שזה אוכף או שזה פרבולואיד.
איך יודעים איזה מהם? נתבונן בסימן.
אם $\left|\begin{matrix}a & b\\ b & c\end{matrix}\right|<0$ זה אוכף וקווי הגובה שלו הם היפרבולות (**)
ואם $\left|\begin{matrix}a & b\\ b & c\end{matrix}\right|>0$ זה פרבולואיד וקווי הגובה שלו הם אליפסות (*)

איך מוצאים תבנית ריבועית בלי ע"ע? עושים השלמה לריבוע.

$$2x^2+4xy-y^2=$$
$$=2(x^2+2xy)-y^2=$$
$$=2((x+y)^2-y^2)-y^2=$$
$$=2(x+y)^2-3y^2$$

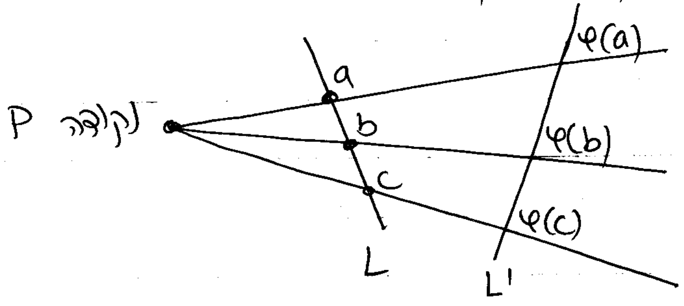
נסמן $z=x+y$ ונקבל $2z^2-3y^2$

יום חמישי 16:00 שפ' 202
יום שישי 12:00 שפ'

<u>המבחן</u> - צריך לדעת את כל המשפטים שהוכחנו
צריך לדעת את כל התרגילים
כנראה תהיה איזו שאלה חישובית (למשל, לחשב מרחק
בין נקודה לישר או בין שני ישרים

(44) 4.4.08
גיאומטריה
לינארית

אז מה היטל פרויקטיבי? נתונים שני מרחבים ונקודה מחוץ להם.
אז ההיטל הפרויקטיבי מתקבל כך:



$\varphi: L \to L'$
העתקה
פרויקטיבית
ביחס ל-P

מיון אפיני ומטרי

מטרה מיון - תשובה של העולם למחלקות שקילות. בגיאומטריה - יש מרחב שיש בו עצמים - כגון תת-קבוצות וצריך להחליט מתי צורות שקולות. בגיאומטריה הכוונה הוא שיש העתקה ששומרת מבנה ומעבירה עצם אחד לשני. כמובן מדובר באיזומורפיזם של הקטגוריה.
בעולם האפיני טבעי לדבר על העתקות אפיניות - איזומורפיזמים אפיניים.
בעולם האוקלידי מדברים על איזומטריות. אבל אפשר לדבר גם על משולשים דומים שהם לא רק חופפים ובכל זאת היינו רוצים לייחס אותם לאותה מחלקת שקילות. היחס בין משולשים הוא הומותטיה. אז למעשה אנחנו מדברים על שילוב של איזומטריה והומותטיה.

משפט: (מיון מטרי של שניוניות) נתבונן במישור אפיני A^2. אזי כל שניונית לא מנוונת $Q(x,y)=0$ חופפת לאחת מ-:
1. אליפסה $ax^2+by^2-1=0$
2. היפרבולה $ax^2-by^2-1=0$
3. פרבולה $ax^2-y=0$

* לא מנוונות הכוונה שלא זה זוג ישרים, ישר או נקודה

הוכחה: נסמן $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. ראינו כבר שאפשר לכתוב
$$Q(x,y)=X^tAX+2BX+f=0$$
כאשר $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $B=[d\ e]$.
A סימטרית ⟸ אפשר ללכסן אותה והו"ע של ע"ע שונים הם אורתוגונליים.
⟸ אפשר למצוא בסיס אורתונורמלי שמלכסן את המטריצה. כלומר יש U אורתוגונלית כך ש- $U^tAU=D$ אלכסונית. נסמן $X'=U^{-1}X$.

אז $X = UX'$ אם

$$Q(X) = Q(UX') = (UX')^t A (UX') + 2B(UX') + f =$$
$$= X'^t (U^t A U) X' + 2(BU)X' + f =$$
$$= X'^t D X' + 2(BU)X' + f = 0$$

אז במידה ש- D אלכסונית ניטרלנו את החלק המעורב.

אז אפשר לומר ש- $Q(x,y) = ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f$

רושם המקדמים כאן שונים מקודם.

נעשה השלמה לריבוע (מאחר ש- $ac \neq 0$)

$$Q(x,y) = a\left(x + \frac{d}{a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 + f' = 0$$

אם $f'=0$; a,c שווי סימן אז זה מקרה מנוון - יש רק פתרון אחד. אם הם שוני סימן אז יש לנו משהו כמו $4x^2 - 9y^2 = 0$ וזה גם מקרה מנוון של שני ישרים.

אם $f'>0$; $a,b>0$ - אז אין פתרון בכלל.

שאר המקרים מתאימים לאחת מהצורות שציינו.

דוגמה: $Q(x,y) = 52x^2 + 73y^2 + 72xy + 120x + 160y + 75 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$p_A(x) = x^2 - \underbrace{125}_{trA}\lambda + \underbrace{2500}_{detA}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 100 \quad \lambda_2 = 25$$

נמצא ו"ע

- $(A - \lambda_1)v_1 = \begin{pmatrix} -48 & 36 \\ 36 & -27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

- $(A - \lambda_2)v_2 = \begin{pmatrix} 27 & 36 \\ 36 & 48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

אז $V_1 \perp V_2$. $\|V_1\| = 5$. אז ניקח $U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

נציב:

$$Q(x',y') = [x'\ y'] \cdot \underbrace{\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{הגדה } \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2[60\ \ 80]\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 75 =$$

$$= [x'\ y']\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\cdot 20\,[25\ \ 0]\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 75 =$$

$$= 100x^2 + 25y^2 + 200x + 75 = 0$$

שינוי סימונים $\left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \end{array} \right.$

$$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 8x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 4(x+1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

וזו אליפסה!

אפשר גם פשוט לעשות של זה מניפולציות אלגבריות:

$$Q(x,y) = 52\left(x+\frac{36}{52}y+\frac{60}{52}\right)^2 - 52\left(\frac{36}{52}y\right)^2 - 52\left(\frac{60}{52}\right)^2 - 2\cdot\frac{36}{52}y\cdot\frac{60}{52}\cdot 52$$

$$+ 73y^2 + 160y + 75 = \dots$$

אבל כאן השינוי הוא לא מטריד כי משנים באופן שונה את הפרופורציות של x ו-y.

<u>שאלות</u> (אין אחריות על התשובות)

1. לחשב מרחק בין נקודה לישר: $p=\binom{1}{4}$ $\ell: 4x-3y+7=0$
<u>תשובה</u>: $\frac{1}{5}$
2. למצוא משוואה של מישור "ניצב" למישור $2x+2y+7=0$
שמכיל את הישר $\ell: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}$
<u>תשובה</u>: $5x-6y+2z+7=0$
3. למצוא משוואה של ישר דרך $p=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ אשר חותך וניצב
לישר $x+1=y-z=x+z$.
<u>תשובה</u>: $x+y-3=0$, $z=1$
4. למצוא היטל אורתוגונלי של $p=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ על הישר $\begin{matrix}3x+z=1\\x-y=-1\end{matrix}$
5. למצוא משוואה של מישור שמכיל את הישר $\begin{matrix}x+y=1\\x-y+z=0\end{matrix}$ וניצב לישר
דרך $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
7. להביא לצורה נורמלית:

- $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+1=0$
- $3x^2-24xy+32x+40=0$
- $5x^2+8xy+5y^2-3x+y-2=0$
- $3x^2-4xy-4y^2+16x+16y-12=0$
- $4x^2-4xy+y^2-4x-8y-4=0$
- $2x^2-12xy+18y^2+x-3y-6=0$

<u>תיקון</u>: יחס פשוט:

$$C = A+\lambda(B-A) =$$
$$= A(1-\lambda)+\lambda B$$
$$[A,B,C] = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

מטריצות והעתקות אפיניות:

$f: A^2 \to A^2$. נניח שיש בסיס של כיוון.

$$f(P+v) = f(P) + Df(v)$$

$$[P+v] = [f(P)] + \underbrace{A}_{\text{מטריצה}} v$$ מקואורדינטות

אם כל קואורדינטה היא מהצורה $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}ax+by+k\\cx+dy+l\end{pmatrix}$

למשל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2x-3y+1\\4x-2y+6\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

במטריצה אחת אפשר לייצג את זה רק:

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\4 & -2 & 6\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}$$

<u>שאלה:</u> נמצא מרחק בין שני הישרים המצטלבים:

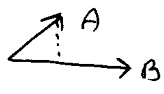
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

נבחר שני נקודות ונתבונן בהפרש: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

זה לא ניצב לישרים אז צריך לתקן.

המכפלה הווקטורית $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ נותנת את הכיוון שמאונך למישור שנפרש על ידם. מה שאנחנו צריכים זה את ההיטל של $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ על $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ שזה

$$p\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \qquad \left(p_B(A) = \frac{A\cdot B}{B\cdot B} B \right)$$



$\Leftarrow$ המרחק הוא $\frac{\sqrt{6}}{6}$ שזה אורך ההטלה.

הצגה פרמטרית של יריעה אפינית:

משוואה סתומה $x - 2y + z = 0$

ופרמטרית

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

אם חושבים על זה כמחלקת שקילות של וקטור מסקלר אז נקבל גם הצגה פרמטרית של יריעה פרוייקטיבית. כמובן, זה משהו לא טבעי כל כך. במקרה הפרוייקטיבי יותר טבעי להציג כמשוואה הומוגנית סתומה כי שם המכפלה מסקלר דבר מובנה בפנים - הרי אוסף הפתרונות הוא מרחב.

* יש נקודה וישר. ההיטל האורתוגונלי זו הנקודה שממשת את המרחק: