

גיאומטריה ליניארית

מבוסס על הרצאותיו של איתמר צביק

תשס"ח סמסטר א'

Notes Heaven

דינה זליגר

עדכון אחרון: 08:44 06/04/2008

תוכן עניינים

2	תוכן עניינים
3	תנאי שימוש
4	הקדמה
5	גיאומטריה אפינית
5	מרחבים אפיניים
5	הגדרה ודוגמאות
7	פעולה של חבורה על קבוצה
13	העתקות אפיניות
16	צירופים אפיניים
19	קואורדינטות אפיניות
21	הצגה מטריציונית של העתקות אפיניות
23	יריעות לינאריות
30	קונפיגורציה של יריעות
31	היחס הפשוט
32	שלושה משפטים בגיאומטריה של המישור
35	גיאומטריה פרויקטיבית
35	מרחבים פרויקטיביים
36	תת-מרחבים פרויקטיביים
38	העתקות פרויקטיביות
39	בסיסים פרויקטיביים
40	היחס הכפול
40	דואליות במרחבים פרויקטיביים
41	משפטים בגיאומטריה של המישור – גרסה פרויקטיבית
42	גיאומטריה אוקלידית
42	מרחבים אוקלידיים
44	הצגה של יריעות במרחב אוקלידי
44	הצגה פרמטרית
44	הצגה סתומה
45	מרחקים בין עצמים במרחבים אוקלידיים
45	מרחק בין נקודה ליריעה
46	מרחק בין ישר ליריעה
47	מרחק בין מישורים
47	איזומטריות לינאריות
48	מיון שניוניות

Please read the following important legal information before reading or using these notes. The use of these notes constitutes an agreement to abide by the terms and conditions below, just as if you had signed this agreement.

A. THE SERVICE.

The following notes ("The service") are provided by Dina Zil's Notes-Heaven ("Notes-Heaven").

B. DISCLAIMER OF WARRANTIES; LIMITATION OF LIABILITY.

Notes-Heaven does not endorse content, nor warrant the accuracy, completeness, correctness, timeliness or usefulness of any opinions, advice, content, or services provided by the Service.

YOU AGREE THAT USE OF THE SERVICE IS ENTIRELY AT YOUR OWN RISK. THE SERVICE PROVIDED IS PROVIDED "AS IS," WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND. NOTES-HEAVEN EXPRESSLY DISCLAIMS ALL WARRANTIES OF ANY KIND, WHETHER EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING WITHOUT LIMITATION: ANY WARRANTIES CONCERNING THE ACCURACY OR CONTENT OF INFORMATION OR SERVICES. NOTES-HEAVEN MAKES NO WARRANTY THAT THE SERVICE WILL MEET YOUR REQUIREMENTS, OR THAT THE SERVICE WILL BE ERROR FREE; NOR DOES NOTES-HEAVEN MAKE ANY WARRANTY AS TO THE RESULTS THAT MAY BE OBTAINED FROM THE USE OF THE SERVICE OR AS TO THE ACCURACY OR RELIABILITY OF ANY INFORMATION OBTAINED THROUGH THE SERVICE. YOU UNDERSTAND AND AGREE THAT ANY DATA OBTAINED THROUGH THE USE OF THE SERVICE IS DONE AT YOUR OWN DISCRETION AND RISK AND THAT YOU WILL BE SOLELY RESPONSIBLE FOR ANY DAMAGE TO YOUR GPA.

NEITHER NOTES-HEAVEN NOR ANY OF ITS PARTNERS, AGENTS, AFFILIATES OR CONTENT PROVIDERS SHALL BE LIABLE FOR ANY DIRECT, INDIRECT, INCIDENTAL, SPECIAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES ARISING OUT OF USE OF THE SERVICE OR INABILITY TO GAIN ACCESS TO OR USE THE SERVICE OR OUT OF ANY BREACH OF ANY WARRANTY.

C. INDEMNIFICATION.

You agree to indemnify and hold Notes-Heaven, its partners, agents, affiliates and content partners harmless from any dispute which may arise from a breach of terms of this Agreement. You agree to hold Notes-Heaven harmless from any claims and expenses, including reasonable attorney's fees and court costs, related to your violation of this Agreement.

D. OWNERSHIP RIGHTS.

The materials provided by the Service may be downloaded or reprinted for personal use only. You acknowledge that the Service contains information that is protected by copyrights, trademarks, trade secrets or other proprietary rights, and that these rights are valid and protected in all forms, media and technologies existing now or hereafter developed. You may not modify, publish, transmit, participate in the transfer or sale, create derivative works, or in any way exploit, any of the Content, in whole or in part. You may not upload, post, reproduce or distribute Content protected by copyright, or other proprietary right, without obtaining permission of the owner of the copyright or other proprietary right.

E. NO COPYING OR DISTRIBUTION.

You may not reproduce, copy or redistribute the design or layout of this service, individual elements of the design, Notes-Heaven logos or other logos appearing on this service, without the express written permission of Notes-Heaven, Inc. Reproduction, copying or redistribution for commercial purposes of the service is strictly prohibited without the express written permission of Notes-Heaven, Inc.

If you have any questions about this statement or the practices of this service you can contact

Dina Zeliger
dinazil @ notes-heaven.com

הקדמה

שלום לכולם,

הסיכום הזה מכיל את החומר הנלמד בכיתה עם תוספות והסברים רבים שהוספתי אני בעצמי ולא נבדקו ע"י אף אחד. את החלקים המסומנים באדום לא הצלחתי להוכיח, אף כי עלי להודות שלא ניסיתי יותר מדי חזק. לכן אשמח אם מישהו ירצה לחלוק איתו הוכחה. כמו כן, אנא שלחו לי הערות ותיקונים!!!

רוב תודות לרועי על תרומתו לסיכום!

דינה

dinazil @ notes-heaven.com

גיאומטריה אפינית

מרחבים אפיניים

הגדרה ודוגמאות

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה. **מרחב אפיני** מעל $\mathbb{F}$ הוא שלישייה $(\mathbb{A}, \mathbb{V}, +)$ כאשר:

1. $\mathbb{A}$ קבוצה שלאיבריה נקרא **נקודות**
2. $\mathbb{V}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ שנקרא לו **מרחב הכיוונים**
3. $+: \mathbb{A} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A}$ העתקה שנקרא לה **הזזה** והיא מקיימת את התכונות הבאות:
 $(P, v) \mapsto P+v$
 - לכל $P \in \mathbb{A}$ ולכל $v, w \in \mathbb{V}$ $(P + v) + w = P + (v + w)$
 - לכל $P \in \mathbb{A}$ $P + 0_{\mathbb{V}} = P$
 - לכל $P, Q \in \mathbb{A}$ קיים וקטור יחיד $v \in \mathbb{V}$ שנסמנו ב- $P - Q$ או ב- $\overrightarrow{PQ}$ כך שמתקיים $P + v = Q$

הגדרה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני כך ש- $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$ סופי. אז נגדיר את **הממד** של $\mathbb{A}$ להיות

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{A} = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{V}$$

דוגמאות:

1. $\mathbb{A} = \emptyset$ (נשים לב שבהגדרת המרחב האפיני אין שום דרישה של קיום נקודות ולכן כל הדרישות מתקיימות באופן ריק)
2. יהי $\mathbb{V}$ מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. על $\mathbb{A} = \mathbb{V}$ מוגדר **מבנה קנוני של מרחב אפיני**. בה"כ $\mathbb{V} = \mathbb{F}^n$. כל נקודה $P \in \mathbb{A} = \mathbb{F}^n$ נציג ע"י $P = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix}$ וכל כיוון $v \in \mathbb{V} = \mathbb{F}^n$ נציג ע"י $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$. פונקציית ההזזה מוגדרת ע"י $P + v = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 + v^1 \\ \vdots \\ p^n + v^n \end{pmatrix}$. קל לראות שפונקציה זו מקיימת את התנאים הדרושים.
3. יהי $\mathbb{W}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ תת מרחב. יהי $a \in \mathbb{V}$. נגדיר את הסכום $a + \mathbb{W} = \{a + w : w \in \mathbb{W}\}$. אז $(a + \mathbb{W}, \mathbb{W}, +)$ מרחב אפיני כאשר ההזזה היא פעולת חיבור הווקטורים במרחב $\mathbb{W}$.
4. תהי $Ax = b$ מערכת משוואות לינאריות מעל שדה $\mathbb{F}$ כאשר $b \in \mathbb{F}^n$. אם למערכת לא קיים פיתרון אז קבוצת הפתרונות שלה היא ריקה וזהו מרחב אפיני. אחרת, נסמן ב- $\mathbb{W}$ את מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה $Ax = 0$. ידוע שזהו תת מרחב של $\mathbb{F}^n$. יהי $a \in \mathbb{F}^n$ פיתרון פרטי כלשהו של המערכת הלא הומוגנית. ידוע שכל הפתרונות שלה הם $a + \mathbb{W}$. ואז גם $a + \mathbb{W}$ מרחב אפיני. בכל אופן, קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות מעל שדה נתון היא מרחב אפיני.
5. נסתכל על $\mathbb{R}^3$ ונבחר ישר כלשהו ℓ שעובר דרך הראשית. נמלא את המרחב בכל ההזזות שלו. ניקח מישור שאינו מכיל את הישר הזה. כל הזזה של ℓ חותכת את המישור בנקודה אחת בדיוק. אז נקודות חיתוך אלא יחד עם המישור הם מרחב אפיני. בחירה שונה של המישור נותנת מרחבים אפיניים שונים.

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $P, Q \in \mathbb{A}$ $P - Q = -(Q - P)$.

הוכחה: $Q + ((P - Q) + (Q - P)) = (Q + (P - Q)) + (Q - P) = P + (Q - P) = Q$ לכן $(P - Q) + (Q - P) = 0$, כלומר $P - Q = -(Q - P)$.

☺

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $P, Q \in \mathbb{A}$ ולכל $v \in \mathbb{V}$ מתקיים $(Q + v) - (P + v) = Q - P$.

הוכחה: צריך להראות ש- $\overrightarrow{PQ} = Q + v$. מספיק להוכיח ש- $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ שהרי אז

$$Q + v = (P + \overrightarrow{PQ}) + v = P + (\overrightarrow{PQ} + v) = P + (v + \overrightarrow{PQ}) = (P + v) + \overrightarrow{PQ}$$

אבל הרי $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ לפי הגדרת $\overrightarrow{PQ}$. לכן סיימנו.

☺

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $P \in \mathbb{A}$ ולכל $v, w \in \mathbb{V}$ מתקיים $(P + v) - (P + w) = v - w$.

הוכחה: מספיק להראות ש- $(P + w) + (v - w) = P + v$, אבל זה ברור, שהרי

$$(P + w) + (v - w) = P + (w + (v - w)) = P + v$$

☺

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $P, Q, A \in \mathbb{A}$ אם $P - A = Q - A$ אז $P = Q$.

הוכחה: אם $P - A = Q - A$ אז $A + (P - A) = A + (Q - A)$. אבל לפי ההגדרה מתקיים $A + (P - A) = P$ וכן $A + (Q - A) = Q$. לכן $P = Q$.

☺

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $P \in \mathbb{A}$ ולכל $v, w \in \mathbb{V}$ אם $P + v = P + w$ אז $v = w$.

הוכחה: אם $P + v = P + w$ אז

$$P = P + 0 = P + (v + (-v)) = (P + v) + (-v) = (P + w) + (-v) = P + (w + (-v))$$

אבל יש וקטור יחיד שמחבר בין P ל- P והוא וקטור האפס. לכן $w - v = 0$ ולכן $w = v$.

☺

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $P, Q \in \mathbb{A}$ ולכל $v, w \in \mathbb{V}$ מתקיים $P + v = Q + w$ אם ורק אם $P - Q = w - v$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- $P + v = Q + w$ אז

$$P = P + 0 = P + (v - v) = (P + v) + (-v) = (Q + w) + (-v) = Q + (w - v)$$

אבל $Q + (P - Q) = P$ לפי ההגדרה. ומכאן ש- $P - Q = w - v$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $P - Q = w - v$ אז

$$Q + w = Q + ((w - v) + v) = (Q + (w - v)) + v = (Q + (P - Q)) + v = P + v$$

😊

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $P, Q, S \in \mathbb{A}$ מתקיים $P + (Q - S) = Q + (P - S)$ וכן $P - Q = (P - S) - (Q - S)$.

הוכחה: לפי הטענה הקודמת מספיק להראות רק ש- $P - Q = (P - S) - (Q - S)$. אבל זה ברור משום ש- $Q + (P - Q) = P$ וגם

$$\begin{aligned} Q + ((P - S) - (Q - S)) &= (Q + (-(Q - S))) + (P - S) \\ &= (Q + (S - Q)) + (P - S) \\ &= S + (P - S) \\ &= P \end{aligned}$$

ומאחר שהווקטור שמחבר בין Q ל- P הוא יחיד נקבל ש- $P - Q = (P - S) - (Q - S)$.

😊

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $A, B, C, D \in \mathbb{A}$ מתקיים

$$A - (B + (C - D)) = (A - B) + (D - C)$$

הוכחה: מספיק להראות ש- $A = (B + (C - D)) + ((A - B) + (D - C))$ ואכן,

$$\begin{aligned} (B + (C - D)) + ((A - B) + (D - C)) &= B + ((C - D) + ((A - B) + (D - C))) \\ &= B + (A - B) \\ &= A \end{aligned}$$

😊

מסקנה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אז לכל $A, B, C, D \in \mathbb{A}$ מתקיים $A - B = (A - P) - (B - P)$.

הוכחה: לפי הטענה הקודמת מתקיים

$$\begin{aligned} (A - P) - (B - P) &= (A - P) + (P - B) \\ &= A - (P + (B - P)) \\ &= A - B \end{aligned}$$

😊

פעולה של חבורה על קבוצה

הגדרה: חבורה היא זוג $(G, \cdot)$ כאשר G קבוצה ו- $G \times G \rightarrow G$ פעולה דו-מקומית על G שמקיימת:

1. **אסוציאטיביות:** לכל $g, h, k \in G$ $(gh)k = g(hk)$
2. **איבר יחידה:** קיים $e \in G$ כל שלכל $g \in G$ $eg = g = ge$
3. **איבר הופכי:** לכל $g \in G$ קיים $g^{-1} \in G$ כך ש- $g^{-1}g = e = gg^{-1}$.

דוגמאות:

1. החבורה הטריבויאלית $G = \{e\}$.
2. תהי X קבוצה. נסמן ב- S_X את אוסף כל התמורות של איברי X . S_X עם פעולת הרכבת העתקות היא חבורה. תת חבורה $T \leq S_X$ נקראת **חבורה של טרנספורמציות של X** .

הגדרה: חבורה G נקראת **אבילית** אם לכל $a, b \in G$ מתקיים $ab = ba$.

הגדרה: תהיינה G, H שתי חבורות. נאמר שפונקציה $\varphi: G \rightarrow H$ היא **הומומורפיזם** אם לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot_G b) = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$.

טענה: תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$. אז למשוואה $ax = b$ קיים פיתרון יחיד בחבורה.

הוכחה: ראשית נראה קיום. מאחר ש- $a \in G$ קיים $a^{-1} \in G$ וכן $a^{-1}b \in G$. נטען ש- $x = a^{-1}b$ הוא פיתרון. ואכן,

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$$

כעת נראה שיש רק פיתרון אחד. נניח שגם $ax = b$ וגם $ax' = b$. אז

$$x = ex = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = a^{-1}(ax') = (a^{-1}a)x' = ex' = x$$

ולכן הפיתרון הוא יחיד.

😊

טענה: יהיו $(G, \cdot_G)$ ו- $(H, \cdot_H)$ שתי חבורות ותהי $\varphi: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. אז:

1. $\varphi(e_G) = e_H$
2. לכל $a \in G$ $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

הוכחה:

1. $\varphi(e_G) \cdot_H \varphi(e_G) = \varphi(e_G \cdot_G e_G) = \varphi(e_G)$. נתבונן במשוואה $\varphi(e_G) \cdot_H x = \varphi(e_G)$. כמובן e_H מקיים אותה, אבל ממה שראינו גם $\varphi(e_G)$. מאחר שידוע שהפיתרון הוא יחיד נובע ש- $\varphi(e_G) = e_H$.
2. יהי $a \in G$. אז $\varphi(a) \cdot_H \varphi(a^{-1}) = \varphi(a \cdot_G a^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H$. נתבונן במשוואה $\varphi(a) \cdot_H x = e_H$. בוודאי $\varphi(a)^{-1}$ מקיים אותה אבל לפי מה שראינו גם $\varphi(a^{-1})$ מקיים אותה. מאחר שהפיתרון הוא יחיד נובע ש- $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

😊

הגדרה: נאמר שחבורה G **פועלת** על קבוצה X אם קיים הומומורפיזם $\phi: G \rightarrow S_X$. במקרה זה $\phi(g)(x) = gx$ ומסמנים $\phi(g): X \rightarrow X$.

דוגמה: תהי $X = \mathbb{V}$ מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $G = GL(\mathbb{V})$ אוסף הטרנספורמציות הלינאריות הפיכות מ- $\mathbb{V}$ ל- $\mathbb{V}$. זוהי חבורה ביחס לפעולת ההרכבה. אז G פועלת על X ע"י $\phi(g)(x) = gx$. נראה שזה הומומורפיזם. צריך להראות ש- $\phi(g \circ h) = \phi(g) \circ \phi(h)$. אבל אלה פונקציות ולכן צריך להראות שלכל $x \in X$

$$\phi(g \circ h)(x) = (\phi(g) \circ \phi(h))(x)$$

אבל $\phi(g \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$ ואילו

$$(\phi(g) \circ \phi(h))(x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = \phi(g)(h(x)) = g(h(x))$$

טענה: תהי חבורה G שפועלת על קבוצה X . אזי:

1. לכל $x \in X$ $ex = x$
2. לכל $g, h \in G$ ולכל $x \in X$ $(gh)x = g(hx)$

הוכחה: יהי $\phi: G \rightarrow S_X$ ההומומורפיזם שמגדיר את הפעולה.

$$ex = \phi(e)(x) = e_{S_X}(x) = id(x) = x$$

$$(gh)x = \phi(gh)(x) = (\phi(g) \circ \phi(h))(x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = \phi(g)(hx) = g(hx)$$

☺

הגדרה: פעולה של חבורה G על קבוצה X תיקרא **נאמנה** אם ההומומורפיזם $\phi: G \rightarrow S_X$ חח"ע. פעולה תיקרא **טרנזיטיבית** אם לכל $x, y \in X$ קיים $g \in G$ כך ש- $gx = y$.

טענה: נניח שחבורה G פועלת על קבוצה X . אם ההומומורפיזם המתאים $\phi: G \rightarrow S_X$ הוא הפיך אז הפעולה היא נאמנה וטרנזיטיבית.

הוכחה: נתון שההומומורפיזם הפיך ולכן חח"ע ולכן הפעולה נאמנה. נותר להראות שהפעולה טרנזיטיבית. ואכן, יהיו $x, y \in X$. ϕ על ולכן קיים $g \in G$ כך ש- $\phi(g)$ היא התמורה שמחליפה את x עם y . לכן $gx = \phi(g)(x) = y$.

☺

דוגמה: הכיוון ההפוך בטענה הקודמת אינו נכון. נתבונן ב- $G = (\mathbb{Z}, +)$ ו- $X = \mathbb{Z}$. נגדיר פעולה ע"י $gx = g + x$. ההומומורפיזם המתאים $\phi: G \rightarrow S_X$ מוגדר ע"י $\phi(g)(x) = g + x$. זה ההומומורפיזם משום שלכל $g, h \in G$ ולכל $x \in X$ מתקיים:

$$\phi(g + h)(x) = x + (g + h) = (x + h) + g = \phi(g)(\phi(h)(x)) = (\phi(g) \circ \phi(h))(x)$$

ההומומורפיזם גם חח"ע משום שאם $\phi(h) = \phi(g)$ אז לכל $x \in X$ $\phi(h)(x) = \phi(g)(x)$. בפרט עבור $x = 0$ ואז $h = h + 0 = \phi(h)(0) = \phi(g)(0) = g + 0 = g$. כמו כן, הפעולה טרנזיטיבית כי אם $x, y \in X$ ניקח $g = y - x \in G$ ואז $gx = (y - x)x = \phi(y - x)(x) = x + (y - x) = y$

אבל ההומומורפיזם אינו הפיך משום שאינו על. למשל, התמורה $x \mapsto -x$ אינה מתקבלת.

הגדרה: תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X . **המסלול** של $x \in X$ הוא הקבוצה $Gx = \{gx: g \in G\}$.

טענה: פעולה של חבורה G על קבוצה X מחלקת את X למחלקות שקילות שהן מסלולים של איברי X .

הוכחה: צריך להראות שהיחס שמוגדר ע"י $x \sim y$ אמ"מ קיים $g \in G$ כך ש- $gx = y$ הוא יחס שקילות.

- רפלקסיביות: $x \sim x$ כי $ex = x$
- סימטריות: נניח ש- $x \sim y$. לכן קיים $g \in G$ כך ש- $gx = y$. אבל אז $y = g^{-1}(gx) = g^{-1}y$ כלומר $y \sim x$
- טרנזיטיביות: נניח ש- $x \sim y$ וגם $y \sim z$. אז קיימים $g, h \in G$ כך ש- $gx = y$ ו- $hy = z$. אז $h(gx) = h(y) = z$ כלומר $(hg)x = z$

☺

מסקנה: פעולה של חבורה G על קבוצה X היא טרנזיטיבית אמ"מ יש ב- X מסלול יחיד תחת G .

הוכחה: ב- X יש מסלול יחיד אמ"מ יש מחלקת שקילות אחת, כלומר אמ"מ כל האיברים של X שקולים וזה אמ"מ לכל $x, y \in X$ קיים $g \in G$ כך ש- $gx = y$, כלומר אמ"מ הפעולה טרנזיטיבית.

☺

הגדרה: פעולה של חבורה G על קבוצה X תיקרא **טרנזיטיבית פשוטה** (Simply Transitive) אם לכל $x, y \in X$ קיים $g \in G$ יחיד כך ש- $gx = y$.

טענה: תהי G חבורה אבלית שפועלת על קבוצה לא ריקה X . אזי הפעולה היא טרנזיטיבית פשוטה אם"מ היא נאמנה וטרנזיטיבית.

הוכחה:

($\Leftarrow$) ברור שהפעולה טרנזיטיבית. נראה שהיא נאמנה. יהיה $\phi: G \rightarrow S_X$ ההומומורפיזם המושרה מהפעולה. ונניח ש- $\phi(g) = \phi(h)$, כלומר לכל $x \in X$, $gx = hx$, $gx = \phi(g)(x) = \phi(h)(x) = hx$. נסמן $gx = y = hx$. בגלל שהפעולה טרנזיטיבית פשוטה קיים $a \in G$ יחיד כך ש- $ax = y$. מכאן ש- $g = a = h$. כלומר ϕ חח"ע.

($\Rightarrow$) נניח שהפעולה נאמנה וטרנזיטיבית. צריך להוכיח שלכל $x, y \in X$ קיים $g \in G$ יחיד כך ש- $gx = y$. מהטרנזיטיביות ברור שקיים g כזה. צריך להוכיח שהוא יחיד. נניח שיש $x, y \in X$ כך ש- $gx = y = hx$. עבור $g, h \in G$. יהי $z \in X$. מהטרנזיטיביות קיים $f \in G$ כך ש- $fx = z$. לכן

$$gz = g(fx) = (gf)x = (fg)x = f(gx) = f(hx) = (fh)x = (hf)x = h(fx) = hz$$

זה נכון לכל $z \in X$ ולכן מהנאמנות של הפעולה נובע ש- $g = h$ והפעולה טרנזיטיבית פשוטה.

☺

משפט: על $\mathbb{A} \neq \emptyset$ מוגדר מבנה של מרחב אפיני מעל מרחב וקטורי $\mathbb{V}$ אמ"מ $\mathbb{V}$ פועל על $\mathbb{A}$ באופן נאמן וטרנזיטיבי.

הוכחה:

($\Leftarrow$) צריך להראות שיש הומומורפיזם $\phi: \mathbb{V} \rightarrow S_{\mathbb{A}}$. לכל $v \in \mathbb{V}$ נגדיר העתקה $t_v: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ ע"י $t_v(P) = P + v$. צריך להראות ש- $t_v \in S_{\mathbb{A}}$ ו- $\phi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, S_{\mathbb{A}})$. ברור ש- t_v משום שהיא הפיכה. נטען ש- $t_v^{-1} = t_{-v}$. ואכן, לכל $P \in \mathbb{A}$ מתקיים

$$\begin{aligned}(t_v \circ t_{-v})(P) &= t_v(t_{-v}(P)) = t_v(P + (-v)) \\ &= (P + (-v)) + v = P + ((-v) + v) = P + 0 = P\end{aligned}$$

ובאותו אופן גם $(t_{-v} \circ t_v)(P) = P$. לכן $t_v^{-1} = t_{-v}$ ו- $t_v \in S_{\mathbb{A}}$. נותר להראות ש- $\phi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, S_{\mathbb{A}})$. לצורך כך יש להראות שלכל $v, w \in \mathbb{V}$, $\phi(v + w) = \phi(v) \circ \phi(w)$. ואכן, תהי $P \in \mathbb{A}$. אז מתקיים:

$$\begin{aligned}\phi(v + w)(P) &= t_{v+w}(P) \\ &= P + (v + w) \\ &= P + (w + v) \\ &= (P + w) + v \\ &= t_v(P + w) \\ &= t_v(t_w(P)) \\ &= (t_v \circ t_w)(P)\end{aligned}$$

לכן $\phi \in \text{Hom}(\mathbb{V}, S_{\mathbb{A}})$.

עד כאן הראנו ש- $\mathbb{V}$ אכן פועל על $\mathbb{A}$. צריך להראות שהפעולה נאמנה וטרנזיטיבית. נראה ש- ϕ חח"ע. נניח ש- $\phi(v) = \phi(w)$ ונראה ש- $v = w$. לכל $P \in \mathbb{A}$ מתקיים

$$P + v = t_v(P) = \phi(v)(P) = \phi(w)(P) = t_w(P) = P + w$$

נסמן $P + w = Q$. אז $P + v = Q$. אבל קיים וקטור יחיד $u \in \mathbb{V}$ כך ש- $P + u = Q$. לכן $v = u = w$ ומכאן ש- ϕ חח"ע והפעולה נאמנה. נראה שהיא טרנזיטיבית. יהיו $P, Q \in \mathbb{A}$. אזי קיים וקטור $v \in \mathbb{V}$ כך ש- $P + v = Q$. פירוש הדבר ש- $P + v = Q$, $\phi(v)(P) = t_v(P) = P + v = Q$, כלומר $vP = Q$ והפעולה טרנזיטיבית. למעשה, מאחר ש- v הוא יחיד הפעולה אפילו טרנזיטיבית פשוטה.

($\Rightarrow$) נניח ש- $\mathbb{V}$ פועל באופן נאמן וטרנזיטיבי על $\mathbb{A}$. מאחר ש- $\mathbb{V}$ חבורה אבלית הפעולה היא טרנזיטיבית פשוטה. נגדיר $+: \mathbb{A} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A}$ ע"י $P + v = \phi(v)(P)$. נוכיח שהגדרה זו מקיימת את התנאים הדרושים: ראשית, בהינתן $P \in \mathbb{A}$ לכל $v, w \in \mathbb{V}$ מתקיים $(P + v) + w = \phi(w)(\phi(v)(P)) = w(vP) = (w + v)P = \phi(w + v)(P) = P + (v + w)$. שנית, מאחר ש- ϕ הומומורפיזם, ברור ש- $P + 0_{\mathbb{V}} = \phi(0_{\mathbb{V}})(P) = id(P) = P$ ש- $0_{\mathbb{V}}$ ולבסוף, אם $P, Q \in \mathbb{A}$ אז מאחר שהפעולה טרנזיטיבית פשוטה קיים $v \in \mathbb{V}$ יחיד כך ש- $vP = Q$, כלומר כך ש- $P + v = \phi(v)(P) = vP = Q$.

הראנו המתקיימות כל התכונות של מרחב אפיני ולכן על $\mathbb{A}$ מוגדר מבנה של מרחב אפיני מעל $\mathbb{V}$.

☺

הגדרה: תהי $\mathbb{A} \neq \emptyset$ ונניח ש- $\mathbb{V}$ פועל על $\mathbb{A}$ באופן נאמן וטרנזיטיבי. אז נאמר ש- $\mathbb{A}$ **מרחב הומוגני ראשי** (Principal Homogenous) מעל $\mathbb{V}$.

הגדרה: נאמר שעל קבוצה $\mathcal{E}$ מוגדר **מבנה של מרחב אפיני** ע"י המרחב הווקטורי E וההעתקה $\theta: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$ שמתאימה לזוג $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ וקטור שנשמנו ב- $\overrightarrow{AB}$ אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. לכל נקודה $A \in \mathcal{E}$ ההעתקה החלקית $\theta_A: B \mapsto \overrightarrow{AB}$ היא העתקה הפיכה מ- $\mathcal{E}$ ל- E .

2. מתקיים **היחס של Chasles**: לכל $A, B, C \in \mathcal{E}$ מתקיים $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

הערה: נשים לב שמההגדרה נובע ש- $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$ ולכן $\overrightarrow{PP} = 0$ ומכאן ש- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ ולכן $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

טענה: שתי ההגדרות של מרחב אפיני שקולות, כלומר, אם יש קבוצה שמוגדר עליה המבנה הראשון ניתן להגדיר עליה גם את המבנה השני ולהפך.

הוכחה: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V}, +)$ מרחב אפיני במובן הראשון שהגדרנו. נגדיר העתקה $\theta: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ באופן הבא: בהינתן $P, Q \in \mathbb{A}$ קיים וקטור יחיד $\overrightarrow{PQ} \in \mathbb{V}$ שמקיים $P + \overrightarrow{PQ} = Q$. נגדיר $\theta(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$. זה מוגדר היטב משום שכאמור, וקטור זה קיים ויחיד. נוכיח שמתקיימות התכונות הדרושות:

תהי $A \in \mathbb{A}$ ונתבונן ב- $\theta_A: B \mapsto \overrightarrow{AB}$. נראה שהיא חח"ע ועל. נניח ש- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. אז לפי הגדרת $\overrightarrow{AB}$, $A + \overrightarrow{AB} = B$ ולפי ההנחה $A + \overrightarrow{AC} = B$. אבל קיים $v \in \mathbb{V}$ יחיד כך ש- $A + v = B$. לכן $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, כלומר θ_A חח"ע. מצד שני, נניח ש- $v \in \mathbb{V}$ ונסמן $B = A + v$. אזי $\overrightarrow{AB} = \theta_A(B) = \theta_A(A + v) = \theta_A(A) + v$. אבל לפי הגדרת θ $\overrightarrow{AB} = v$ ולכן $\theta_A(B) = v$, כלומר θ_A היא על.

יהיו $A, B, C \in \mathbb{A}$. אזי $A + \overrightarrow{AB} = B$, $A + \overrightarrow{AC} = C$, $C + \overrightarrow{CB} = B$.

$$A + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = (A + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB}$$

$$= C + \overrightarrow{CB}$$

$$= B$$

אבל יש וקטור יחיד $v \in V$ כך ש- $A + v = B$ ולכן $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

מצד שני, נניח שעל $\mathcal{E}$ מוגדר מבנה של מרחב אפיני ע"י מרחב וקטורי E והעתקה $\Theta: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$ נראה ש- E פועל על $\mathcal{E}$ בצורה טרנזיטיבית ונאמנה ונקבל שאפשר להגדיר על $\mathcal{E}$ מבנה של מרחב וקטורי במובן הראשון שהגדרנו. צריך להראות שיש הומומורפיזם חח"ע $\phi: E \rightarrow S_{\mathcal{E}}$. נתבונן ב- $v \in E$ ונגדיר $\phi(v)(P) = \Theta_P^{-1}(v)$. זה מוגדר היטב משום ש- Θ_P הפיכה. נטען שזה הומומורפיזם: יהיו $v, w \in E$. נראה שלכל $P \in \mathcal{E}$ מתקיים $\phi(v+w)(P) = (\phi(v) \circ \phi(w))(P)$. כלומר צריך להראות ש- $\Theta_{\Theta_P^{-1}(v+w)}^{-1}(v+w) = \Theta_{\Theta_P^{-1}(v)}^{-1}(v) \circ \Theta_{\Theta_P^{-1}(w)}^{-1}(w)$. בגלל ש- Θ_P הפיכה קיימת $A \in \mathcal{E}$ כך ש- $w = \overrightarrow{PA}$ ובגלל ש- Θ_A הפיכה קיימת $B \in \mathcal{E}$ כך ש- $v = \overrightarrow{AB}$. לכן $v+w = w+v = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$. כלומר מתקיים $\Theta_{\Theta_P^{-1}(w)}^{-1}(v) = \Theta_A^{-1}(\overrightarrow{AB}) = B$ ולכן $\Theta_P^{-1}(w) = A$ מצד שני, $\Theta_P^{-1}(v+w) = \Theta_P^{-1}(w+v) = B$ וסיימנו. נראה ש- ϕ חח"ע. נניח ש- $\phi(v) = \phi(w)$ ונראה ש- $v = w$. תהי $P \in \mathcal{E}$ אז ניתן לכתוב $v = \overrightarrow{PA}, w = \overrightarrow{PB}$ כלומר $\phi(v)(C) = \phi(w)(C)$ ובפרט עבור P . כלומר

$$A = \Theta_P^{-1}(\overrightarrow{PA}) = \phi(\overrightarrow{PA})(P) = \phi(v)(P) = \phi(w)(P) = \phi(\overrightarrow{PB})(P) = \Theta_P^{-1}(\overrightarrow{PB}) = B$$

כלומר $A = B$ ולכן $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} = w$ מכאן שהפעולה היא נאמנה.

נותר להראות שפעולת E על $\mathcal{E}$ היא טרנזיטיבית. יהיו $A, B \in \mathcal{E}$. צריך להראות שקיים $v \in E$ כך ש- $vA = B$. ניקח $v = \Theta_A^{-1}(B)$. אז $vA = \phi(v)(A) = \Theta_A(v) = \Theta_A(\Theta_A^{-1}(B)) = B$.

☺

ההגדרה השנייה של מרחב אפיני מאפשרת לנו לתת מבנה של מרחב וקטורי לכל מרחב אפיני. יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני לא ריק ובנחר נקודה קבועה $P \in \mathbb{A}$. ניתן ל- $\mathbb{A}$ מבנה של מרחב וקטורי שנסמן ב- $\mathbb{A}_P$. ההעתקה $\Theta_P: \mathbb{A} \rightarrow V$ הנתונה ע"י $A \mapsto \overrightarrow{PA}$ היא חח"ע ועל והיא מאפשרת לנו להעביר את המבנה של V ל- $\mathbb{A}$: נאמר ש- $A+B = C$ אם $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$, כלומר $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$. נאמר ש- $A+B = C$ אם $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$. תחת הגדרה זו וקטור האפס ב- $\mathbb{A}_P$ הוא הנקודה P , שהרי $\overrightarrow{PP} = 0$. לכל $c \in F$ נגדיר $c \cdot_P A = B$ אם $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB}$ ונאמר $c \cdot_P A = P + c(A - P)$. קל לראות שהגדרות אלה אכן מגדירות מבנה של מרחב וקטורי על $\mathbb{A}$.

חיסור וקטורים מתקבל באופן הטבעי הבא:

$$x -_P y = x +_P (-1) \cdot_P y = x +_P (P - (y - P)) = P + (x - P) + ((P - (y - P)) - P)$$

$$= P + (x - P) - (y - P)$$

כמו כן, נשים לב שאם $x, y, z \in \mathbb{A}_P$ אז

$$x +_P y +_P z = (x +_P y) +_P z$$

$$= (P + ((x - P) + (y - P))) +_P z$$

$$\begin{aligned}
&= P + \left(\left(\left(P + ((x - P) + (y - P)) \right) - P \right) + (z - P) \right) \\
&= P + (x - P) + (y - P) + (z - P)
\end{aligned}$$

ובאינדוקציה $x_1 +_P \dots +_P x_n = P + \sum_{i=1}^n (x_i - P)$ באופן כללי

$$c_1 \cdot_P x_1 +_P \dots +_P c_n \cdot_P x_n = P + \sum_{i=1}^n c_i (x_i - P)$$

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהי $P \in \mathbb{A}$ אז לכל $A, B, C, D \in \mathbb{A}_P$ מתקיים

$$(A - B) + (C - D) = (A +_P C) - (B +_P D)$$

הוכחה: נשתמש בהגדרת החיבור ב- $\mathbb{A}_P$:

$$\begin{aligned}
(A +_P C) - (B +_P D) &= (P + ((A - P) + (C - P))) - (P + ((B - P) + (D - P))) \\
&= ((A - P) + (C - P)) - ((B - P) + (D - P)) \\
&= ((A - P) - (B - P)) + ((C - P) - (D - P)) \\
&= (A - B) + (C - D)
\end{aligned}$$

☺

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהי $P \in \mathbb{A}$ אז לכל $A, B \in \mathbb{A}_P$ ולכל $k \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$k(A - B) = k \cdot_P A - k \cdot_P B$$

הוכחה: נשתמש בהגדרת הכפל בסקלר ב- $\mathbb{A}_P$:

$$\begin{aligned}
k \cdot_P A - k \cdot_P B &= (P + k(A - P)) - (P + k(B - P)) \\
&= k(A - P) - k(B - P) \\
&= k((A - P) - (B - P)) \\
&= k(A - B)
\end{aligned}$$

☺

העתקות אפיניות

הגדרה: יהיו $(\mathbb{A}_1, \mathbb{V}_1)$ ו- $(\mathbb{A}_2, \mathbb{V}_2)$ שני מרחבים אפיניים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. העתקה אפינית הוא זוג (f, Df) כאשר:

1. $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$
2. $Df \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ כך שלכל $P, Q \in \mathbb{A}_1$ מתקיים $f(Q) - f(P) = Df(Q - P)$ (או באופן שקול, לכל $P \in \mathbb{A}_1$ ולכל $v \in \mathbb{V}$ $f(P + v) - f(P) = Df(v)$)

הערה: נשים לב שכדי להגדיר העתקה אפינית מספיק לתת רק את $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ שהרי אם קיימת Df מתאימה אז היא מוגדרת באופן חד ערכי ע"י $Df(v) = f(P + v) - f(P)$.

דוגמאות:

1. יהיו V_1, V_2 מרחבים וקטוריים ונתבונן במרחבים האפייניים $A_i = V_i$ עבור $i = 1, 2$. אז כל העתקה לינארית $f: V_1 \rightarrow V_2$ היא למעשה העתקה אפינית כאשר $Df = f$, שהרי מהלינאריות של f נובע ש- $f(P+v) - f(P) = f(v)$. נקרה פרטי של דוגמה זו הוא עבור $V_1 = V = V_2$ ו- $A_1 = A = A_2$ והעתקה הזוהת $DId_A = Id_V$ אז גם $f = Id_A$.
 2. אם $f: A_1 \rightarrow A_2$ קבועה אז העתקה אפינית עם $Df \equiv 0$.
 3. יהי $A = A_1$ מרחב אפיני מעל $\mathbb{F}$. תהי $P \in A$ ויהי $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$ פונקציונל לינארי. נבחר באופן שרירותי ערך ל- $f(P)$. כעת, לכל $Q = P + v$ נקבע $f(Q) = f(P) + \varphi(v)$. קל לראות ש- f העתקה אפינית. נשים לב שההגדרה טובה משום ש-

$$(P) = f(P+0) = f(P) + \varphi(0) = f(P) + 0 = f(P)$$
 4. יהי A מרחב אפיני. אז $t_v: A \rightarrow A$ $P \mapsto P+v$ זו העתקה אפינית, שהרי לכל $P, Q \in A$ מתקיים

$$t_v(Q) - t_v(P) = (Q+v) - (P+v) = Q - P = Id_V(Q - P)$$
לכן $Dt_v = Id_V$.
 5. **כלל השרשרת:** נניח ש- $f: A_1 \rightarrow A_2, g: A_2 \rightarrow A_3$ אפיניות. אז $g \circ f: A_1 \rightarrow A_3$ אפינית, שהרי לכל $P, Q \in A_1$ מתקיים:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(P) - (g \circ f)(Q) &= g(f(P)) - g(f(Q)) \\ &= Dg(f(P) - f(Q)) \\ &= Dg(Df(P - Q)) \\ &= (Dg \circ Df)(P - Q) \end{aligned}$$
 Dd, Dg לינאריות ולכן הרכבתן $Dg \circ Df$ לינארית ולכן $g \circ f$ אפינית ומתקיים השוויון $D(g \circ f) = Dg \circ Df$.
 6. מקרה פרטי של כלל השרשרת הוא עבור $f: A_1 \rightarrow A_2$ אפינית. אז לכל $w \in V_2$ ההרכבה $t_w \circ f: A_1 \rightarrow A_2$ אפינית.
- הגדרה:** $f: A_1 \rightarrow A_2$ אפינית היא איזומורפיזם אם קיימת $g: A_2 \rightarrow A_1$ אפינית כך ש- $g \circ f = Id_{A_1}$ ו- $f \circ g = Id_{A_2}$.
- משפט:** $f: A_1 \rightarrow A_2$ אפינית. אזי התנאים הבאים שקולים:
1. f איזומורפיזם בקטגוריית המרחבים האפייניים
 2. Df איזומורפיזם בקטגוריית המרחבים הווקטוריים
 3. f איזומורפיזם בקטגוריית הקבוצות

הוכחה:

($3 \Leftarrow 1$) אם f איזומורפיזם בקטגוריית המרחבים האפייניים אז קיימת $g: A_2 \rightarrow A_1$ אפינית כך ש- $g \circ f = Id_{A_1}$ ו- $f \circ g = Id_{A_2}$. ראינו שהרכבה של העתקות אפיניות היא אפינית ולכן $g \circ f, f \circ g$ אפיניות ומתקיים:

$$\begin{aligned} Id_{V_1} &= DId_{A_1} = D(g \circ f) = Dg \circ Df \\ Id_{V_2} &= DId_{A_2} = D(f \circ g) = Df \circ Dg \end{aligned}$$

זוה בדיוק אומר ש- Df איזומורפיזם.

($3 \Leftarrow 2$) נניח ש- Df איזומורפיזם בקטגוריית המרחבים הווקטוריים. נראה ש- f חח"ע ועל. נניח ש- $f(P) = f(Q)$ אז $0 = f(P) - f(Q) = Df(P - Q)$. אבל Df הפיכה ולכן $\ker Df = \{0\}$. לכן $P - Q = 0$ ומכאן ש- $P = Q$ ולכן f חח"ע. מצד שני, $f(P+v) = f(P) + Df(v)$. אם נבחר P קבוע אז $f(P)$ קבוע ולכל $Q \in A_2$ קיים $w \in V_2$ כך ש- $Q = f(P) + w$. אבל Df הפיכה ולכן קיים

$v \in \mathbb{V}_1$ כך ש- $w = Df(v)$. לכן $f(P+v) = f(P) + Df(v) = f(P) + w = Q$. כלומר $P+v$ הוא מקור של Q , כלומר f על.

($2 \Leftarrow 3$) נראה ש- Df חח"ע ועל וזה יספיק משום שבקורס אלגברה לינארית 1 ראינו שזה שקול לכך ש- Df איזומורפיזם בקטגוריה של מרחבים וקטוריים. נניח ש- $Df(w) = Df(v)$. אז מתקיים $f(P+v) = f(P) + Df(v) = f(P) + Df(w) = f(P+w)$. אבל f חח"ע ולכן $P+v = P+w$ ומכאן $v=w$. מצד שני, אם $w \in \mathbb{V}_2$ אז נבחר $P \in \mathbb{A}_1$ ונתבונן ב- $w + f(P)$. בגלל ש- f על קיימת $Q \in \mathbb{A}_1$ כך ש- $f(Q) = f(P) + w$. לכן $f(Q) = f(P) + w = f(Q) - f(P) = w$, כלומר מצאנו מקור ל- w . מכאן ש- Df על וסיימנו.

($1 \Leftarrow 2$) צריך להראות שקיימת $g: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1$ אפינית כך ש- $g \circ f = Id_{\mathbb{A}_1}$ ו- $f \circ g = Id_{\mathbb{A}_2}$. ראינו כבר שמכך ש- Df איזומורפיזם נובע ש- f חח"ע ועל ולכן קיימת לה פונקציה הופכית g בקטגוריה של קבוצות. צריך רק להראות ש- g אפינית. נטען ש- $(Df)^{-1} = Dg$. צריך להראות שלכל $P \in \mathbb{A}_2$ ולכל $v \in \mathbb{V}_2$ מתקיים $g(P+v) - g(P) = (Df)^{-1}(v)$. מאחר ש- Df הפיכה מספיק להראות ש- $Df(g(P+v) - g(P)) = Df((Df)^{-1}(v)) = v$, ואכן,

$$\begin{aligned} Df(g(P+v) - g(P)) &= f(g(P+v)) - f(g(P)) \\ &= (P+v) - P \\ &= v \end{aligned}$$

😊

משפט: יהיו $(\mathbb{A}_1, \mathbb{V}_1), (\mathbb{A}_2, \mathbb{V}_2)$ מרחבים אפיניים. תהיינה נקודות $P_1 \in \mathbb{A}_1, P_2 \in \mathbb{A}_2$ והעתקה $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ כך ש- $f(P_1) = P_2$ ו- $Df = g$. אזי קיימת העתקה אפינית יחידה $g: \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1$ כך ש- $f(P_1) = P_2$ ו- $Df = g$.

הוכחה: לכל $v \in \mathbb{V}_1$ נגדיר $f(P_1+v) = P_2 + g(v)$. ברור ש- $f(P_1) = P_2$. נראה שזו העתקה אפינית ו- $Df = g$.

$$\begin{aligned} f(P_1+w) - f(P_1+v) &= (P_2 + g(w)) - (P_2 + g(v)) \\ &= g(w) - g(v) \\ &= g(w-v) \\ &= g((P_1+w) - (P_1+v)) \end{aligned}$$

נותר להראות ש- f יחידה. נניח שגם $\tilde{f}$ מקיימת את התנאים הנ"ל. אז לכל $v \in \mathbb{V}_1$ מתקיים

$$\begin{aligned} f(P_1+v) &= f(P_1) + Df(v) \\ &= P_2 + g(v) \\ &= \tilde{f}(P_1) + D\tilde{f}(v) \\ &= \tilde{f}(P_1+v) \end{aligned}$$

לכן $f = \tilde{f}$.

😊

מסקנה: נסתכל על המרחבים האפיניים $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ ו- $(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. תהי $P \in \mathbb{A}$. קיימת העתקה אפינית יחידה $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ כך ש- $f(P) = 0$ ו- $Df = Id_{\mathbb{V}}$.

מסקנה: תהיינה $f, g: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ העתקות אפיניות. אזי $Df = Dg$ אם ורק אם קיים $v \in \mathbb{A}_2$ כך ש- $g = t_v \circ f$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) תהי $A \in \mathbb{A}_1$ ונגדיר $v = g(A) - f(A)$. אז לכל $P \in \mathbb{A}_1$ מתקיים

$$\begin{aligned}(t_v \circ f)(P) &= t_v(f(P)) \\&= f(P) + (g(A) - f(A)) \\&= g(A) + (f(P) - f(A)) \\&= g(A) + Df(P - A) \\&= g(A) + Dg(P - A) \\&= g(A) + (g(P) - g(A)) \\&= g(P)\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) נניח ש- $g = t_v \circ f$ אז לכל $w \in \mathbb{V}_1$ מתקיים

$$\begin{aligned}Dg(w) &= g(P + w) - g(P) \\&= t_v(f(P + w)) - t_v(f(P)) \\&= t_v(f(P) + Df(w)) - t_v(f(P)) \\&= t_v(f(P)) + Dt_v(Df(w)) - t_v(f(P)) \\&= Dt_v(Df(w)) \\&= Id_{\mathbb{V}_2}(Df(w)) \\&= Df(w)\end{aligned}$$

לק $Df = Dg$.

☺

צירופים אפיניים

הגדרה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. נגדיר את הצירוף האפיני $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0)$ עבור P_0 כלשהו.

טענה: הביטוי $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ אינו תלוי ב- P_0 .

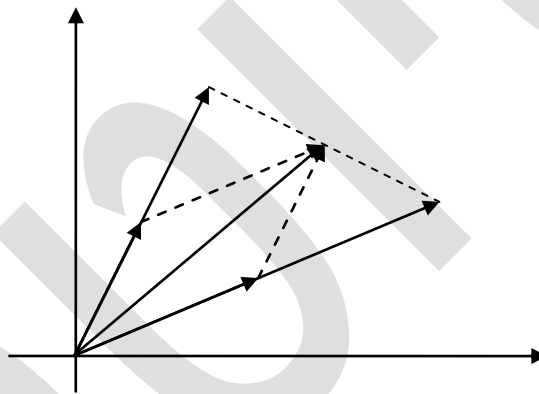
הוכחה: יש להראות שלכל $P_0, P'_0 \in \mathbb{A}$ $P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0) = P'_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P'_0)$ ואכן:

$$\begin{aligned}P'_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P'_0) &= (P_0 + (P'_0 - P_0)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - (P_0 + (P'_0 - P_0))) \\&= (P_0 + (P'_0 - P_0)) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_0 - P'_0) \right) \\&= (P_0 + (P'_0 - P_0)) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot (P_0 - P'_0) \right) \\&= (P_0 + (P'_0 - P_0)) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0) + (P_0 - P'_0) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (P_0 + (P'_0 - P_0)) + \left((P_0 - P'_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0) \right) \\
&= P_0 + \left((P'_0 - P_0) + \left((P_0 - P'_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0) \right) \right) \\
&= P_0 + \left(((P'_0 - P_0) + (P_0 - P'_0)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0) \right) \\
&= P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0)
\end{aligned}$$

☺

דוגמה: נסתכל ב- $\mathbb{R}^2$ כמרחב אפיני ותהינה $P, Q \in \mathbb{R}^2$. אז הנקודה $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ מוגדרת היטב והיא למעשה הנקודה שנמצאת בדיוק באמצע בין P ו- Q :



משפט: תהי פונקציה $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ בין שני מרחבים אפיניים. אז f אפינית אם לכל $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$ ולכל $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ מתקיים $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(P_i)$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נבחר $P_0 \in \mathbb{A}_1$ אז לפי ההגדרה

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right) &= f\left(P_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0)\right) \\
&= f(P_0) + Df\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P_0)\right) \\
&= f(P_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i Df(P_i - P_0) \\
&= f(P_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f(P_i) - f(P_0))
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(P_i)$$

($\Rightarrow$) תהי $P \in \mathbb{A}_1$ ויהי $v \in \mathbb{V}$. נגדיר $Df(v) = f(P+v) - f(P)$. צריך להראות ש- Df לינארית.
יהיו $v, w \in \mathbb{V}$ ו- $a, b \in \mathbb{F}$. נסמן $u = 0 \in \mathbb{V}$ ו- $c = 1 - a - b \in \mathbb{F}$. אז לפי ההגדרה מתקיים:

$$\begin{aligned} Df(av + bw) &= Df(av + bw + cu) \\ &= f(P + av + bw + cu) - f(P) \\ &= \left(f\left(P + a((P+v)-P) + b((P+w)-P) + c((P+u)-P)\right) \right) - f(P) \\ &= \left(f(P) + a(f(P+v) - f(P)) + b(f(P+w) - f(P)) \right. \\ &\quad \left. + c(f(P+u) - f(P)) \right) - f(P) \\ &= a(f(P+v) - f(P)) + b(f(P+w) - f(P)) + c(f(P+u) - f(P)) \\ &= a(f(P+v) - f(P)) + b(f(P+w) - f(P)) + c(f(P) - f(P)) \\ &= a(f(P+v) - f(P)) + b(f(P+w) - f(P)) + c \cdot 0 \\ &= a(f(P+v) - f(P)) + b(f(P+w) - f(P)) \\ &= a \cdot Df(v) + b \cdot Df(w) \end{aligned}$$

הראנו ש- Df לינארית ולכן f אפינית.

☺

משפט: יהיו $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ מרחבים אפיניים לא ריקים ותהי פונקציה $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. f אפינית
2. לכל $P \in \mathbb{A}$ $f: \mathbb{A}_P \rightarrow \mathbb{A}'_{f(P)}$ לינארית
3. קיים $P \in \mathbb{A}$ כך ש- $f: \mathbb{A}_P \rightarrow \mathbb{A}'_{f(P)}$ לינארית

הוכחה:

($1 \Leftarrow 2$) תהי $P \in \mathbb{A}$ ויהיו $x, y \in \mathbb{A}_P$ ו- $c \in \mathbb{F}$. אז לפי הגדרת הפעולות ב- $\mathbb{A}_P$ מתקיים:

$$\begin{aligned} f\left(x \underset{P}{+} y\right) &= f(P + (x - P) + (y - P)) \\ &= f(P) + f(x) - f(P) + f(y) - f(P) \\ &= f(x) \underset{f(P)}{+} f(y) \end{aligned}$$

ובאופן דומה:

$$\begin{aligned} f\left(c \underset{P}{\cdot} x\right) &= f(P + c(x - P)) \\ &= f(P + c \cdot x - c \cdot P) \\ &= f(P) + cf(x) - xf(P) \\ &= c \underset{f(P)}{\cdot} f(x) \end{aligned}$$

($3 \Leftarrow 2$) ברור כי $\mathbb{A} \neq \emptyset$.

($1 \leq 3$) קיים $P \in \mathbb{A}$ כך ש- $f: \mathbb{A}_P \rightarrow \mathbb{A}'_{f(P)}$ לינארית. נראה ש- f שומרת על צירופים אפיניים. נניח ש- $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. אז

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n P_i \lambda_i\right) &= f\left(P + \sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - P)\right) \\ &= f\left(\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n\right) \\ &= \lambda_1 \cdot_{f(P)} f(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot_{f(P)} f(x_n) \\ &= f(P) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - f(P)) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(P_i) \end{aligned}$$

כלומר, f שומרת על צירופים אפיניים ולכן אפינית.

😊

קואורדינטות אפיניות

יהי $(\mathbb{A}^n, \mathbb{V})$ מרחב אפיני מממד סופי n^1 . מערכת קואורדינטות ב- $\mathbb{A}^n$ נתונה ע"י זוג $(P_0, \mathcal{B})$ כאשר $P_0 \in \mathbb{A}^n$ ו- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ בסיס סדור של $\mathbb{V}$. תהי $P \in \mathbb{A}^n$. קיים $v \in \mathbb{V}$ יחיד כך ש- $P = P_0 + v$. כאשר

נסמן ב- $\mathbb{F}^n$ את וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס $\mathcal{B}$. אז

$$v = \sum_{i=1}^n b_i x^i = (b_1, \dots, b_n) \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \mathcal{B}[v]_{\mathcal{B}}$$

כלומר, $P = P_0 + v = P_0 + \sum_{i=1}^n b_i x^i$. נסמן במקרה זה $x(P) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$. ע"י זיהוי זה קיבלנו

למעשה ש- $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{F}^n$.

על מערכת הקואורדינטות $(P_0, \mathcal{B})$ ניתן להסתכל כעל $n+1$ נקודות $(P_0, (P_1, \dots, P_n))$ ב- $\mathbb{A}^n$ כך ש- $(\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n})$ בסיס של $\mathbb{V}$.

נתבונן בנקודות $P_i = P_0 + b_i$. כמובן $\overrightarrow{P_0 P_i} = b_i$ ולכן $(\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n})$ בסיס של $\mathbb{V}$. לכל $P \in \mathbb{A}^n$ מתקיים $P = P_0 + \sum_{i=1}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ כאשר $x^0 = 1 - \sum_{i=1}^n x^i$. אז צירוף אפיני של $(P_0, P_1, \dots, P_n)$. למעשה, צירוף אפיני זה הוא יחיד. נקראות בסיס בריצנטרי (או

בסיס אפיני או מערכת ייחוס) של $\mathbb{A}^n$. לפעמים נסמן $x(P) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$ ולפעמים $x(P) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$.

¹ הסימון $\mathbb{A}^n$ מדגיש שהמרחב הוא מממד n ולא מסמן מכפלה קרטזית של n מרחבים!

משפט: $(P_0, (P_1, \dots, P_n))$ היא מערכת קואורדינטות של $\mathbb{A}^n$ אם ורק אם כל $P \in \mathbb{A}^n$ ניתנת להצגה יחידה $P = \sum_{i=0}^n x^i P_i$ כאשר $x^0, \dots, x^n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\sum_{i=0}^n x^i = 1$.

הוכחה: נשים שכשואמרים ש- $(P_0, (P_1, \dots, P_n))$ היא מערכת קואורדינטות של $\mathbb{A}^n$ הכוונה היא למעשה ש- $(P_0, (\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}))$ מערכת קואורדינטות.

($\Leftarrow$) נניח ש- $(P_0, (\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}))$ מערכת קואורדינטות. אז $P_0 \in \mathbb{A}^n$ ו- $(\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n})$ בסיס של $\mathbb{V}$. תהי $P \in \mathbb{A}^n$. אז קיים וקטור יחיד $v \in \mathbb{V}$ כך ש- $P = P_0 + v$. לוקטור זה יש הצגה יחידה ו- $\sum_{i=0}^n x^i = 1$ נקבל $x^0 = 1 - \sum_{i=1}^n x^i$ אם נסמן $v = \sum_{i=1}^n x^i \overrightarrow{P_0 P_i} = \sum_{i=1}^n x^i (P_i - P_0)$

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \sum_{i=1}^n x^i (P_i - P_0) \\ &= P_0 + \left(1 - \sum_{i=1}^n x^i\right) (P_0 - P_0) + \sum_{i=1}^n x^i (P_i - P_0) \\ &= P_0 + \sum_{i=0}^n x^i (P_i - P_0) \\ &= \sum_{i=0}^n x^i P_i \end{aligned}$$

ברור שהצגה זו יחידה כי v יחיד וההצגה שלו יחידה.

($\Rightarrow$) צריך להראות ש- $(\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n})$ בסיס של $\mathbb{V}$. מאחר שיש כאן n וקטורים מספיק להראות שהם בת"ל. נניח ש- $\sum_{i=1}^n x^i (P_i - P_0) = 0$. אז מתקיים $P_0 + \sum_{i=1}^n x^i (P_i - P_0) = P_0$. נסמן $x^0 = 1 - \sum_{i=1}^n x^i$ ואז $\sum_{i=0}^n x^i = 1$. לכן

$$P_0 = P_0 + \sum_{i=1}^n x^i (P_i - P_0) = P_0 + \sum_{i=0}^n x^i (P_i - P_0) = \sum_{i=0}^n x^i P_i$$

אבל גם $P_0 = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + \dots + 0 \cdot P_n$ והרי ההצגה היא יחידה. לכן $x^1 = \dots = x^n = 0$ וסיימנו.

☺

משפט: אם $(P_0, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{A}_1^n$ מערכת ייחוס ב- $\mathbb{A}_1^n$ ו- $Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{A}_2$ אז קיימת העתקה אפינית יחידה $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ כך ש- $f(P_i) = Q_i$ לכל $0 \leq i \leq n$.

הוכחה: תהי $P \in \mathbb{A}_1$. לפי המשפט הקודם קיימת הצגה יחידה $P = \sum_{i=0}^n x^i P_i$ כאשר $x^0, \dots, x^n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\sum_{i=0}^n x^i = 1$. נגדיר $f(P) = \sum_{i=0}^n x^i Q_i$. ההגדרה טובה משום שההצגה של P כצירוף אפיני היא יחידה ואילו $f(P)$ מוגדרת כצירוף אפיני ב- $\mathbb{A}_2$. ברור ש- $f(P_i) = Q_i$ לכל $0 \leq i \leq n$ שהרי לכל i כזה מתקיים $P_i = 1 \cdot P_i + \sum_{j \neq i} 0 \cdot P_j$ ולכן לפי ההגדרה $f(P_i) = 1 \cdot Q_i + \sum_{j \neq i} 0 \cdot Q_j = Q_i$. נראה שההעתקה אפינית: נניח ש- $P^j = \sum_{i=0}^n x_j^i P_i$ עבור $1 \leq j \leq m$ ונניח ש- $P = \sum_{j=1}^m c_j P^j$ כאשר $\sum_{j=0}^m c_j = 1$ אז מתקיים:

$$\begin{aligned} f(P) &= f\left(\sum_{j=1}^m c_j P^j\right) = f\left(\sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=0}^n x_j^i P_i\right) \\ &= f\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^n c_j x_j^i P_i\right) = f\left(\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^m c_j x_j^i\right) P_i\right) \end{aligned}$$

נטען ש- $\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m c_j x_j^i = 1$ ואכן:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m c_j x_j^i = \sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=0}^n x_j^i = \sum_{j=1}^m c_j \cdot 1 = \sum_{j=1}^m c_j = 1$$

לכן $\sum_{i=0}^n (\sum_{j=1}^m c_j x_j^i) P_i$ צירוף אפיני ולכן לפי הגדרת f מתקיים

$$\begin{aligned} f(P) &= f\left(\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^m c_j x_j^i\right) P_i\right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^m c_j x_j^i\right) Q_i \\ &= \sum_{j=1}^m c_j \left(\sum_{i=0}^n x_j^i Q_i\right) = \sum_{j=1}^m c_j f(P^j) \end{aligned}$$

קיבלנו ש- f שומרת על צירופים אפיניים ולכן אפינית.

נטר להוכיח יחידות. אבל זה ברור מכך ש- f אפינית ולכן שומרת על צירופים אפיניים ומכך שההצגה של כל נקודה כצירוף אפיני של מערכת הייחוס היא יחידה.

☺

הצגה מטריציונית של העתקות אפיניות

תהי $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ העתקה אפינית. יהיו $(P_0, B), (Q_0, C)$ מערכות קואורדינטות של $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ בהתאמה. לכל $P \in \mathbb{A}_1$ מתקיים $f(P) = f(P_0) + Df(P - P_0) = Q_0 + (f(P_0) - Q_0) + Df(P - P_0)$.

נניח ש- $M = [Df]_B^C$. נסמן $v = P - P_0$. נניח ש- $[v]_B = x = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$. אז $[Df(v)]_C = Mx$. ונסמן

$$[f(P)]_C = y = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \text{ ו- } [f(P_0) - Q_0]_C = y_0 = \begin{bmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^n \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

אפשר להשתמש במטריצה אחת בלבד כדי לייצג את ההעתקה באופן הבא:

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

דוגמה: נתבון ב- $\mathbb{R}^2$ ונתבון בהעתקה האפינית

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 6y - 1 \\ -3x + y + 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את ההעתקה Df :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2x + 6y - 1 \\ -3x + y + 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x' + 6y' - 1 \\ -3x' + y' + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (x - x') + 6 \cdot (y - y') \\ -3 \cdot (x - x') + 1 \cdot (y - y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

אז Df היא $v \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} v$ (והיא כמובן לינארית אז f אכן אפינית).

נתבונן במערכות הקואורדינטות $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ עבור המקור ו-

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ עבור התמונה. מתקיים

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + Df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + Df\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נשים לב שכאן עוד לא היה שימוש בבסיסים של המרחבים הווקטוריים. כדי למצוא את הייצוג המטריצוני של ההעתקה יש צורך בכך. ראשית, לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ ואילו

$$M = [Df]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \text{ צריך למצוא את } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\left[Df\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[Df\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{לכן } M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ ומכאן ש-} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[Df\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)]_c = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

לבסוף $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}_c = \left[f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_c$. עכשיו יש לנו כל המידע כדי לכתוב את הייצוג המטריצוני של ההעתקה:

$$\left[f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right]_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{או ע"י מטריצה אחת} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

נבדוק את עצמנו: למשל, $f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 37 \\ -5 \end{pmatrix}$. בקואורדינטות מתקיים $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ ו-

$$\begin{bmatrix} 37 \\ -5 \end{bmatrix}_c - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} \\ \frac{43}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

בעזרת החישוב שלנו מתקבל:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{2} + \frac{35}{2} - 1 \\ \frac{20}{2} + \frac{25}{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} \\ \frac{43}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

יריעות לינאריות

הגדרה: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ מרחב אפיני. תת-קבוצה $L \subseteq \mathbb{A}$ נקראת **יריעה לינארית (או תת-מרחב אפיני)** אם $L = \emptyset$ או $L = \{Q - P : P, Q \in L\}$ תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{V}$ ולכל $w \in W$ מתקיים $t_w(L) = \{P + w : P \in L\} \subseteq L$. במקרה זה מסמנים $L \subseteq \mathbb{A}$ ו- W נקרא **מרחב הכיוונים** של L ונסמנו $W(L)$. **הממד** של יריעה לינארית הוא $\dim_{\mathbb{F}} L = \dim_{\mathbb{F}} W(L)$

טענה: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ מרחב אפיני. תהי תת-קבוצה $L \subseteq \mathbb{A}$ כך ש- $W = L - L$ תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{V}$. אז L יריעה לינארית אם $L + W = L$.

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ נניח ש- $L \subseteq \mathbb{A}$. אז לכל $w \in W$, $L + w \subseteq L$. ולכן $L + W \subseteq L$. מאחר ש- $0 \in W$ ברור ש- $L \subseteq L + W$ ומכאן השוויון.

$(\Rightarrow)$ ברור שהרי אם יש שוויון אז בפרט $L + W \subseteq L$, כלומר לכל $w \in W$, $L + w \subseteq L$.



טענה: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ מרחב אפיני לא ריק ותהי $L \leq \mathbb{A}$ יריעה לינארית. נסמן $W = L - L$. אזי (L, W) מרחב אפיני.

הוכחה: L יורשת מ- $\mathbb{A}$ את פונקציית ההזזה. לכל $P \in L$ ולכל $v \in W$ בפרט $P \in \mathbb{A}$ ו- $v \in \mathbb{V}$ ולכן מוגדרת ההזזה $P + v$. מאחר ש- $L + W = L$ נובע ש- $P + v \in L$. בירושה מ- $\mathbb{A}$ ברור שמתקיים לכל $P \in L$ ולכל $v, w \in W$ $(P + v) + w = P + (v + w)$ וכן $P + 0_W = P$. לכל $P, Q \in L$ קיים וקטור יחיד $v \in \mathbb{V}$ כך ש- $P + v = Q$. אבל $P, Q \in L$ ולכן לפי הגדרת W $v = Q - P \in W$.



טענה: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ מרחב אפיני לא ריק ותהי $L \leq \mathbb{A}$ יריעה לינארית. נסמן $W = L - L$. אזי לכל $P \in L$ $P + W = L$.

הוכחה: מאחר ש- $L + W = L$ ברור ש- $P + W \subseteq L$. מצד שני, מאחר ש- (L, W) מרחב אפיני, אם $Q \in L$ אז קיים $w \in W$ כך ש- $P + w = Q$ ולכן $P + W \supseteq L$.



טענה: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ מרחב אפיני לא ריק ותהי $P \in \mathbb{A}$. אם $W \leq \mathbb{V}$ תת-מרחב וקטורי אז $L = P + W$ יריעה לינארית ב- $\mathbb{A}$.

הוכחה: צריך להראות ש- $L - L \subseteq W$. ואכן, $L - L = (P + W) - (P + W) = W - W = W \subseteq W$. כשר השוויון האחרון נכון משום ש- W מרחב וקטורי ולכן סגור לחיסור. נותר להראות ש- $L + W \subseteq L$. אבל זה ברור כי $L + W = (P + W) + W = P + (W + W) = P + W = L$.



מסקנה: יריעה לינארית לא ריקה במרחב אפיני היא מהצורה $P + W$ כאשר P נקודה במרחב האפיני ו- W תת מרחב של מרחב הכיוונים.

טענה: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ מרחב אפיני לא ריק ותהי $L \leq \mathbb{A}$ יריעה לינארית. יהי $v \in \mathbb{V}$. אז $L + v = L$ אם ורק אם $v \in W(L)$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם $L + v = L$ אז לכל $P \in L$ קיימת $Q \in L$ כך ש- $P + v = Q$. לכן $v \in L - L = W(L)$.

($\Rightarrow$) ברור כי $L + W = L$ לפי הגדרת יריעה לינארית.



משפט: יהי $(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ מרחב אפיני ויהי $\{(L_i, W_i)\}_{i \in I}$ אוסף יריעות לינאריות. אז $\bigcap_{i \in I} L_i = \emptyset$ או $\bigcap_{i \in I} L_i$ יריעה לינארית עם מרחב כיוונים $\bigcap_{i \in I} W_i$.

הוכחה: נניח ש- $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$. אז קיימת $P \in \bigcap_{i \in I} L_i$ ולכל $i \in I$ מתקיים $L_i = P + W_i$. אז $\bigcap_{i \in I} L_i = \bigcap_{i \in I} (P + W_i) = P + \bigcap_{i \in I} W_i$. יריעה עם מרחב כיוונים $\bigcap_{i \in I} W_i$.



משפט: תהי $L \subseteq \mathbb{A}$ קבוצה חלקית לא ריקה של מרחב אפני $\mathbb{A}$. נסמן $t^P: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A}$ ו- $v_P: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ $Q \mapsto Q - P$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. L יריעה לינארית ב- $\mathbb{A}$.
2. לכל $P \in L$ $L \leq \mathbb{A}_P$ תת מרחב וקטורי.²
3. קיימת $P \in L$ כך ש- $L \leq \mathbb{A}_P$.
4. לכל $P \in L$ $v_P(L) \leq \mathbb{V}$.
5. קיימת $P \in L$ כך ש- $v_P(L) \leq \mathbb{V}$.
6. לכל $P \in L$ קיים תת-מרחב וקטורי $W \leq \mathbb{V}$ כך ש- $t^P(W) = L$.
7. קיימת $P \in L$ וקיים תת-מרחב וקטורי $W \leq \mathbb{V}$ כך ש- $t^P(W) = L$.

הוכחה:

(1 $\Leftarrow$ 2) יהי W מרחב הכיוונים של L . אז לכל $P \in L$ $P + W = L$. הפעולות על L מוגדרות באופן הבא: לכל $x, y \in L$ ולכל $k \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} x \underset{P}{+} y &= P + ((x - P) + (y - P)) \\ k \underset{P}{\cdot} x &= P + k(x - P) \end{aligned}$$

$x - P, y - P \in W$ ולכן $x \underset{P}{+} y, k \underset{P}{\cdot} x \in L$. לכן L סגורה לפעולות. כמעט כל התכונות נובעות מירושה מכך ש- $\mathbb{A}_P$ מרחב וקטורי. צריך לרק להראות קיום איבר נגדי ואיבר נטרלי. ואכן, $0_{\mathbb{A}_P} = P \in L$ ומהסגירות של L לכפל בסקלר נובע שלכל $x \in L$ גם $-x = (-1) \cdot x \in L$.

(2 $\Leftarrow$ 4) תהי $P \in L$. אז $L \leq \mathbb{A}_P$ תת מרחב וקטורי. לפי ההגדרה $v_P(L) = L - P$. ולכן $0_{\mathbb{V}} = P - P \in v_P(L)$. נותר להראות ש- $v_P(L)$ סגור לחיבור ולכפל בסקלר. נניח שנתונים וקטורים $x - P, y - P \in v_P(L)$ ו- $k \in \mathbb{F}$. אז לפי ההגדרה:

$$(x - P) + (y - P) = (P + (x - P) + (y - P)) - P = x \underset{P}{+} y - P$$

אבל בגלל ש- L סגורה לחיבור נובע ש- $x \underset{P}{+} y \in L$ ולכן $(x - P) + (y - P) \in L - P$. באופן דומה,

$$k \cdot (x - P) = (P + k \cdot (x - P)) - P = k \underset{P}{\cdot} x - P$$

ומאחר ש- L סגורה לכפל בסקלר נובע ש- $k \underset{P}{\cdot} x \in L$ ולכן $k \cdot (x - P) \in L - P$.

(4 $\Leftarrow$ 6) תהי $P \in L$. אז $W = v_P(L) = L - P$ תת מרחב של $\mathbb{V}$. כמובן מתקיים

$$t^P(W) = P + W = P + (L - P) = L$$

(2 $\Leftarrow$ 3) ברור כי L אינה ריקה.

(4 $\Leftarrow$ 5) ברור כי L אינה ריקה.

(6 $\Leftarrow$ 7) ברור כי L אינה ריקה.

² L תת קבוצה של $\mathbb{A}_P$ ולכן היא יורשת פעולות של חיבור וכפל בסקלר. הטענה היא ש- L עם פעולות אלה היא מרחב וקטורי.

(3) נניח $P \in L$ כך ש- $L \leq \mathbb{A}_P$ תת מרחב. אזי נטען ש- $W = L - L$ תת מרחב של $\mathbb{V}$. ברור ש- $0_{\mathbb{V}} \in W$ כי $0_{\mathbb{V}} = P - P \in L - L$ אם $x - y, z - w \in W$

$$(x - y) + (z - w) = \left(x +_P z\right) - \left(y +_P w\right) \in L - L$$

באופן דומה, אם $k \in \mathbb{F}$ אז $k(x - y) = k \cdot_P x - k \cdot_P y \in L - L$

נותר להראות ש- $P + W = L$. ואכן, לכל $Q, R \in W = L - L$ מתקיים

$$\begin{aligned} P + (Q - R) &= P + (Q - P) + (P - R) \\ &= P + (Q - P) - (R - P) \\ &= Q - R \in L \end{aligned}$$

כאשר ההכלה האחרונה נכונה משום ש- $Q, R \in L$ ו- L תת מרחב ולכן סגורה לחיסור.

מצד שני, אם $Q \in L$ אז קיים $v \in \mathbb{V}$ כך ש- $Q = P + v$. לכן $v = Q - P \in L - L = W$ וסיימנו.

(5) נניח $P \in L$ כך ש- $\mathbb{V} \leq L = P + W$ תת מרחב. אז מתקיים $P + W = L$, כלומר ליריעה לינארית.

(7) נניח $P \in L$ ו- $W \leq L$ כך ש- $L = t^P(W)$. זאת בדיוק ההגדרה של יריעה לינארית.

☺

משפט: תהי $L \subseteq \mathbb{A}$ קבוצה חלקית לא ריקה של מרחב אפיני $\mathbb{A}$. אז ליריעה לינארית אמ"מ L סגורה תחת צירופים אפיניים של נקודות ב- L .

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם ליריעה לא ריקה אז יש $P \in L$ ויש $W \leq \mathbb{V}$ כך ש- $L = P + W$. יהיו $P_1, \dots, P_n \in L$ ו- $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1$. אז מתקיים $\sum_{i=1}^n \lambda^i P_i = P + \sum_{i=1}^n \lambda^i (P_i - P)$. אבל לכל $1 \leq i \leq n$ $P_i - P \in W$ ולכן גם $\lambda^i (P_i - P) \in W$ ומכאן שמתקיים $\sum_{i=1}^n \lambda^i P_i \in P + W = L$.

($\Rightarrow$) תהי $P \in L$. נתבונן ב- $W = L - P$. נראה ש- $W \leq \mathbb{V}$. נניח ש- $w, v \in W$. אז קיימים $Q, R \in L$ כך ש- $v = Q - P, w = R - P$ ואז $v + w = (Q - P) + (R - P) = (Q + R) - 2P$. אבל $Q + R \in L$ ולכן $v + w \in L - P = W$. באופן דומה, אם נתונים $v \in W$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$ אז

$$\lambda v = \lambda(Q - P) = \lambda(Q - P) + (P - P) = (\lambda Q - \lambda P + P) - P \in L - P = W$$

לכן W תת-מרחב. מההגדרה ברור ש- $L = P + W$ וסיימנו.

☺

מסקנה: תהי $S \subseteq \mathbb{A}$ קבוצה חלקית לא ריקה של מרחב אפיני. אזי קבוצת כל הצירופים האפיניים של איבריה היא יריעה לינארית.

הוכחה: לפי ההגדרה, קבוצת כל הצירופים האפיניים של איברי S סגורה לצירופים אפיניים, ולכן זו יריעה לינארית.



הגדרה: תהי $S \subseteq \mathbb{A}$ קבוצה חלקית של מרחב אפיני. נסמן ב- $\langle S \rangle$ את היריעה הלינארית המינימלית (מבחינת הכלה) שמכילה את S . $\langle S \rangle$ נקראת **היריעה הנוצרת** ע"י S . נסמן ב- $\bar{S}$ את קבוצת כל הצירופים האפיניים של איברי S .

הגדרה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני עם $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{A} < \infty$. תהיינה $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}$. נאמר שהנקודות בלתי תלויות אפינית אם $\dim_{\mathbb{F}} \langle P_0, \dots, P_n \rangle = n$.

טענה: תהי $S \subseteq \mathbb{A}$ קבוצה חלקית של מרחב אפיני. אזי $\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq L \subseteq \mathbb{A}} L$.

הוכחה: ראינו שחיתוך של יריעות לינאריות הוא יריעה לינארית. לכן $\bigcap_{S \subseteq L \subseteq \mathbb{A}} L$ יריעה לינארית. ברור גם מההגדרה שלה שהיא מכילה את S . ברור גם שהיא מינימלית, כי אילו B הייתה מינימלית שמכילה את S ואינה $\bigcap_{S \subseteq L \subseteq \mathbb{A}} L$ אז B הייתה חלק מהחיתוך ו- $B \subsetneq \bigcap_{S \subseteq L \subseteq \mathbb{A}} L$ בסתירה למינימליות של B .



למה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני. אם $B \subseteq C \subseteq \mathbb{A}$ אז $\bar{B} \subseteq \bar{C}$.

הוכחה: אם $P = \sum_{i=1}^n \lambda^i P_i$ צירוף אפיני של איברי B אז בפרט $P_1, \dots, P_n$ נקודות ב- C ולכן זה גם צירוף אפוני של איברי C .



משפט: תהי $S \subseteq \mathbb{A}$ קבוצה חלקית של מרחב אפיני. אז $\langle S \rangle$ היא קבוצת כל הצירופים האפיניים של איברי S .

הוכחה: אם $S = \emptyset$ אז $\langle S \rangle = \emptyset$ וגם קבוצת הצירופים האפיניים של S ריקה. אחרת, נראה הכלה בשני הכיוונים:

($\subseteq$) ברור ש- $S \subseteq \bar{S} \subseteq \mathbb{A}$. אבל $\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq L \subseteq \mathbb{A}} L$ ולכן $\bar{S}$ הוא אחד מהאיברים בחיתוך. לכן $\bar{S} \subseteq \langle S \rangle$.

($\supseteq$) לפי ההגדרה $\langle S \rangle \subseteq S$ ולכן לפי הלמה $\bar{\langle S \rangle} \subseteq \bar{S}$. אבל $\langle S \rangle$ יריעה לינארית ולכן סגורה לצירופים אפיניים ומכאן ש- $\bar{\langle S \rangle} = \langle S \rangle$. לכן $\bar{S} \subseteq \langle S \rangle$.



הגדרה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהי $L \leq \mathbb{A}$ לא ריקה. אז $L = P + W$ עבור $P \in L$ ו- $W \leq \mathbb{A}$. נאמר שהממד של L הוא $\dim_{\mathbb{F}} L = \dim_{\mathbb{F}} W$. יריעה לינארית מממד 0 נקראת **נקודה**. יריעה לינארית מממד 1 נקראת **ישר**. יריעה לינארית מממד 2 נקראת **מישור**.

הגדרה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהיינה $L_1, L_2 \leq \mathbb{A}$ יריעות לינאריות. אם $W(L_1) = W(L_2)$ נאמר שהיריעות **מקבילות** ונסמן $L_1 \parallel L_2$.

טענה: מקבילות היא יחס שקילות

הוכחה: זה ברור מכך ששיון של מרחבים וקטוריים הוא יחס שקילות.



משפט: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהיינה $L_1, L_2 \leq \mathbb{A}$ יריעות לינאריות. אזי $L_1 \parallel L_2$ אם ורק אם קיים $v \in \mathbb{A}$ כך ש- $L_2 = t_v(L_1)$. יתר על כן, מתקיים $t_v(L_1) = t_w(L_1)$ אם ורק אם $v - w \in W(L_1)$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם $L_1 \parallel L_2$ אז $W(L_1) = W(L_2)$. יהיו $P_1 \in L_1, P_2 \in L_2$ כך ש- $L_1 = P_1 + W, L_2 = P_2 + W$. אז $L_2 = P_2 + (L_1 - P_1) = (P_2 - P_1) + L_1$ נסמן $v = P_2 - P_1$ ואז $L_2 = t_v(L_1)$.

($\Rightarrow$) צריך להראות שלשתי היריעות אותו מרחב כיוונים. ואכן,

$$\begin{aligned} W(L_2) &= L_2 - L_2 = t_v(L_1) - t_v(L_1) = \{(Q + v) - (P + v) : P, Q \in L_2\} \\ &= \{Q - P : P, Q \in L_1\} = L_1 - L_1 = W(L_1) \end{aligned}$$

יתר על כן,

$$\begin{aligned} t_v(L_1) &= t_w(L_1) \Leftrightarrow L_1 + v = L_1 + w \\ &\Leftrightarrow L_1 + (v - w) = L_1 \\ &\Leftrightarrow v - w \in W(L_1) \end{aligned}$$

☺

משפט: יהי (A, V) מרחב אפיני לא ריק ותהי $L \subseteq A$ קבוצה חלקית. אז $L \leq A$ אם ורק אם לכל $P, Q \in L$ $\langle P, Q \rangle = \{sP + tQ : s + t = 1\} \subseteq L$.

הערה: לכל שתי נקודות שונות $P, Q \in A$, $\langle P, Q \rangle$ הוא הישר שעובר דרכן.

הוכחה:

($\Leftarrow$) יריעה לינארית סגורה לצירופים אפיניים ומכאן הטענה.

($\Rightarrow$) נוכיח באינדוקציה שלמה שאם צירוף אפיני של כל שתי נקודות מ- L הוא ב- L אז צירוף אפיני של כל מספר של נקודות הוא ב- L .

בתור בסיס אינדוקציה נוכיח עבור $n \in \{1, 2, 3\}$ נקודות. ברור שצירוף אפיני של נקודה אחת מ- L הוא אותה נקודה והוא ב- L . לפי ההנחה צירוף אפיני של כל שתי נקודות הוא ב- L . עבור $n = 3$, תהיינה $P, Q, R \in L$ ויהיו $r, s, t \in \mathbb{F}$ כך ש- $r + s + t = 1$. מתקיים $t = 1 - r - s$. נתבונן בנקודות $M = 2rP + (1 - 2r)R$ ו- $N = 2sQ + (1 - 2s)R$. שתיהן ב- L ע"פ הנתון. וכן,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}M &= sQ + \frac{1 - 2s}{2}R + rP + \frac{1 - 2r}{2}R \\ &= rP + sQ + \frac{2 - 2s - 2r}{2}R \\ &= rP + sQ + (1 - s - r)R \\ &= rP + sQ + tR \end{aligned}$$

אבל $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}M$ צירוף אפיני של שתי נקודות מ- L ולכן ב- L . ומהשוויון נקבל ש- $rP + sQ + tR \in L$. כדורש.

נניח כעת שהטענה נכונה לכל $k < n$ כאשר $4 \leq n$ ונוכיח עבור n . נרשום $1 = (\lambda^1 + \dots + \lambda^{n-2}) + (\lambda^{n-1} + \lambda^n)$. נטען שאפשר להניח ש- $\lambda^1 + \dots + \lambda^{n-2} \neq 0$ וגם $\lambda^{n-1} + \lambda^n \neq 0$. אם $\lambda^1 + \dots + \lambda^{n-2} = 0$ אז $\lambda^{n-1} + \lambda^n = 1$ ולכן $\lambda^{n-1}P_{n-1} + \lambda^n P_n = P \in L$ וכן $\lambda^{n-1}P_{n-1} + \lambda^n P_n = P \in L$ וכן $\lambda^{n-1}P_{n-1} + \lambda^n P_n = P \in L$. לכן $\sum_{i=1}^n \lambda^i P_i = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda^i P_i + 1 \cdot P$ באופן דומה, אם $\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$ אז $\lambda^1 + \dots + \lambda^{n-2} = 1$ ולכן מהנחת האינדוקציה מבע ש-

משפט: תהיינה $f_1, \dots, f_r: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}$ העתקות אפיניות. אזי $\{P \in \mathbb{A}: f_1(P) = \dots = f_r(P) = 0\} \leq \mathbb{A}$ יתר על כן, אם $\mathbb{A}$ מממד סופי אז כל תת יריעה ניתנת להצגה בצורה זו.

הוכחה: נשים לב שמתקיים $\{P \in \mathbb{A}: f_1(P) = \dots = f_r(P) = 0\} = f_1^{-1}(\{0\}) \cap \dots \cap f_r^{-1}(\{0\})$ זה לפי המסקנה הקודמת זהו חיתוך של יריעות לינאריות ב- $\mathbb{A}$ ולכן יריעה לינארית ב- $\mathbb{A}$.

כעת נניח $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{A} = n < \infty$. אם $L = \emptyset$ אז ההעתקה הקבועה $f \equiv 1$ היא אפינית ומתקיים $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset = L$. אם $L \neq \emptyset$ אז קיימת $P \in L$ וקיים $W \leq \mathbb{V}$ כך ש- $L = P + W$. קיימות העתקות לינאריות $g_1, \dots, g_r: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ כך ש- $W = \{v \in \mathbb{V}: g_1(v) = \dots = g_r(v) = 0\}$. לפי משפט קודם, קיימות העתקות אפיניות $f_1, \dots, f_r: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}$ כך ש- $f_i(P) = 0$ ו- $Df_i = g_i$ לכל $1 \leq i \leq r$. נטען ש- $L = P + W = \{Q \in \mathbb{A}: f_1(Q) = \dots = f_r(Q) = 0\}$. ואכן, נניח ש- $P + w \in P + W$. אז לכל $1 \leq i \leq r$ מתקיים $f_i(P + w) = f_i(P) + Df_i(w) = f_i(P) + g_i(w) = 0 + 0 = 0$. מצד שני, נניח $Q \in \mathbb{A}$ כך ש- $f_1(Q) = \dots = f_r(Q) = 0$. נרצה להראות שקיים $w \in W$ כך ש- $Q = P + w$. נכון אמ"מ $w = Q - P$ וזה אמ"מ $g_i(Q - P) = 0$ לכל $1 \leq i \leq r$. ואכן,

$$g_i(Q - P) = Df_i(Q - P) = f_i(Q) - f_i(P) = 0 - 0 = 0$$

😊

קונפיגורציה של יריעות

למה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהיינה $L_1, L_2 \leq \mathbb{A}$ יריעות לינאריות לא ריקות.

- א. אם $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ אזי $\langle P_2 - P_1 \rangle \oplus (W(L_1) + W(L_2)) = W(\langle L_1, L_2 \rangle)$ עבור $P_1 \in L_1$ ו- $P_2 \in L_2$.
- ב. אם $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ אזי $W(\langle L_1, L_2 \rangle) = W(L_1) + W(L_2)$.

הוכחה:

- א. נניח $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. אז $P_0 \in L_1 \cap L_2$ קיימת. אז $L_1 = P_0 + W(L_1)$ ו- $L_2 = P_0 + W(L_2)$. נטען ש- $\langle L_1, L_2 \rangle = P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$. נראה הכלה בשני הכיוונים:
 ברור ש- $\langle L_1, L_2 \rangle \subseteq P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$ ולכן, מאחר ש- $P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$ סגורה לצירופים אפיניים נובע ש- $\langle L_1, L_2 \rangle \subseteq P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$.
 נניח ש- $Q = P_0 + (P_0 + v_1) + v_2 = P_0 + (v_1 + v_2) \in P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$. אבל $v_1 = P - R$ עבור $P, R \in W(L_2)$. לכן $P_0 + (v_1 + v_2) = P_0 + (P - R) + v_2 = (P_0 + P) - R + v_2$. אבל $P_0 + P \in L_1$ ולכן $Q \in L_1$.
 נניח ש- $Q = P_0 + (P_0 + v_1) + v_2 = P_0 + (v_1 + v_2) \in P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$. אבל $v_1 = P - R$ עבור $P, R \in W(L_2)$. לכן $P_0 + (v_1 + v_2) = P_0 + (P - R) + v_2 = (P_0 + P) - R + v_2$. אבל $P_0 + P \in L_1$ ולכן $Q \in L_1$.
 נניח ש- $Q = P_0 + (P_0 + v_1) + v_2 = P_0 + (v_1 + v_2) \in P_0 + (W(L_1) + W(L_2))$. אבל $v_1 = P - R$ עבור $P, R \in W(L_2)$. לכן $P_0 + (v_1 + v_2) = P_0 + (P - R) + v_2 = (P_0 + P) - R + v_2$. אבל $P_0 + P \in L_1$ ולכן $Q \in L_1$.

😊

טענה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני מממד סופי ותהיינה $L_1, L_2 \leq \mathbb{A}$ יריעות לינאריות לא ריקות.

- א. אם $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ אז $\dim_{\mathbb{F}} \langle L_1, L_2 \rangle = \dim_{\mathbb{F}} L_1 + \dim_{\mathbb{F}} L_2 - \dim_{\mathbb{F}} (W(L_1) \cap W(L_2)) + 1$.
- ב. אם $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ אז $\dim_{\mathbb{F}} \langle L_1, L_2 \rangle = \dim_{\mathbb{F}} L_1 + \dim_{\mathbb{F}} L_2 - \dim_{\mathbb{F}} (W(L_1) \cap W(L_2))$.

הוכחה:

- א. לפי הלמה מתקיים $\langle L_1, L_2 \rangle = (W(L_1) + W(L_2)) \oplus \langle P_2 - P_1 \rangle$ ולכן $\dim_{\mathbb{F}} \langle L_1, L_2 \rangle = \dim_{\mathbb{F}} (W(L_1) + W(L_2)) + 1$.

$$= \dim_{\mathbb{F}} W(L_1) + \dim_{\mathbb{F}} W(L_2) - \dim_{\mathbb{F}} (W(L_1) \cap W(L_2)) + 1$$

זוה נותן לנו את הדרוש.

ב. לפי הלמה מתקיים $W(\langle L_1, L_2 \rangle) = W(L_1) + W(L_2)$. לפי משפט הממדים מאלגברה לינארית מתקיים:

$$\dim_{\mathbb{F}} (W(L_1) + W(L_2)) = \dim_{\mathbb{F}} W(L_1) + \dim_{\mathbb{F}} W(L_2) - \dim_{\mathbb{F}} (W(L_1) \cap W(L_2))$$

ולכן, ע"פ הגדרת ממד של יריעה לינארית מתקיים הדרוש.



היחס הפשוט

הגדרה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהיינה $A, B, C \in \mathbb{A}$ כך ש- $A \neq B$, $B \neq C$ ו- $C \in \langle A, B \rangle$. אזי קיים $1 \neq t \in \mathbb{F}$ יחיד כך ש- $C = A + t(B - A) = tB + (1 - t)A$. היחס הפשוט של A, B, C בסדר הזה (!) הוא $[A, B, C] = \frac{t}{1-t}$.

דוגמה: יהי $\mathbb{A}$ מרחב אפיני ותהיינה $A, B, C \in \mathbb{A}$ שונות כולן כך ש- $C \in \langle A, B \rangle$. בניח שמתקיים $[A, B, C] = k$. נמצא את היחס הפשוט עבור כל התמורות האפשריות של הנקודות.

נסמן $k = \frac{t}{1-t}$. נשים לב שבתנאים הנ"ל $t \neq 0$ שהרי $C \neq A$.

אם $C = tB + (1 - t)A$ אז $C = (1 - t)A + tB$ ולכן $[B, A, C] = \frac{1}{k}$.

כמו כן $B = \frac{1}{t}C + \frac{t-1}{t}A = \frac{t-1}{t}A + \frac{1}{t}B$. לכן לפי ההגדרה:

$$[A, C, B] = \frac{1}{t} \bigg/ \frac{t-1}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{t-1} = \frac{1}{t-1}$$

$$[B, A, C] = \frac{t-1}{t} \bigg/ \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} \cdot t = 1 - t = \frac{1}{[A, C, B]}$$

מתקיים $A = \frac{1}{1-t}C - \frac{t}{1-t}B = -\frac{t}{1-t}B + \frac{1}{1-t}C$ ולכן

$$[B, C, A] = -\frac{1}{1-t} \bigg/ \frac{t}{1-t} = -\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1-t}{t} = -\frac{1}{t}$$

$$[C, B, A] = -\frac{t}{1-t} \bigg/ \frac{1}{1-t} = -\frac{t}{1-t} \cdot (1-t) = -t = \frac{1}{[B, C, A]}$$

טענה: תהי $f: \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ העתקה אפינית. אזי שומרת על היחס הפשוט.

הוכחה: זה ברור מכך ש- f שומרת על צירופים אפיניים. שהרי, אם $A = tB + (1 - t)C$ אז $f(A) = tf(B) + (1 - t)f(C)$ ולכן $[A, B, C] = [f(A), f(B), f(C)]$.



שלושה משפטים בגיאומטריה של המישור

הגדרה: יהי $\mathcal{D}$ ישר במישור אפיני $\mathbb{A}$ ויהי $D \leq \mathbb{V}$ ישר כך ש- $W(\mathcal{D}) \neq D$. ההעתקה $\pi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ כך ש- $P' = \pi(P) \in D$ ו- $\overrightarrow{PP'} \in W(\mathcal{D})$ נקראת **הטלה על $\mathcal{D}$ בכיוון D** .

הערה: ההעתקה הזאת מוגדרת היטב והיא יחידה משום שיש ישר יחיד שעובר דרך P וכיוונו D ומאחר שהישר אינו מקביל ל- D יש לו נקודת חיתוך יחידה עם D וזוהי הנקודה $\pi(P)$.

טענה: יהי $\mathcal{D}$ ישר במישור אפיני $\mathbb{A}$ ויהי $D \leq \mathbb{V}$ ישר כך ש- $W(\mathcal{D}) \neq D$. אז ההטלה על $\mathcal{D}$ בכיוון של D היא העתקה אפינית.

הוכחה: נבנה את ההטלה באופן מפורש. נניח ש- $W(\mathcal{D}) = \text{span}\{v_1\}$ ו- $D = \text{span}\{v_2\}$. מאחר ש- $W(\mathcal{D}) \neq D$ נובע ש- $\{v_1, v_2\}$ בסיס של $\mathbb{A}$. נבחר מערכת קואורדינטות $(P_0, \{v_1, v_2\})$ כאשר $P_0 \in D$. תהי $P \in \mathbb{A}$ אז ניתן לכתוב $P = P_0 + x^1 v_1 + x^2 v_2$ והצגה זו יחידה. נגדיר $\pi(P) = P_0 + x^1 v_1$. נראה שזו ההטלה המבוקשת. ראשית, מתקיים $\pi(P) \in D$ משום ש- $P_0 \in D$ ו- $x^1 v_1 \in W(\mathcal{D})$. כמו כן, $\pi(P) - P = (P_0 + x^1 v_1) - (P_0 + x^1 v_1 + x^2 v_2) = -x^2 v_2 \in D$.

נותר להראות שההעתקה אפינית. ואכן, יהי $w = c^1 v_1 + c^2 v_2$. אזי

$$\begin{aligned}\pi(P + w) - \pi(P) &= \pi(P_0 + (x^1 + c^1)v_1 + (x^2 + c^2)v_2) - \pi(P_0 + x^1 v_1 + x^2 v_2) \\ &= (P_0 + (x^1 + c^1)v_1) + (P_0 + x^1 v_1) \\ &= c^1 v_1\end{aligned}$$

וזאת העתקה לינארית – ההטלה על $W(\mathcal{D})$ ב- $\mathbb{V}$.

☺

משפט Thales: יהיו d, d', d'' שלושה ישרים שונים ומקבילים במרחב אפיני. יהיו $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ שני ישרים שאינם מקבילים ל- d . נסמן $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$ ו- $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. אזי מתקיים השוויון:

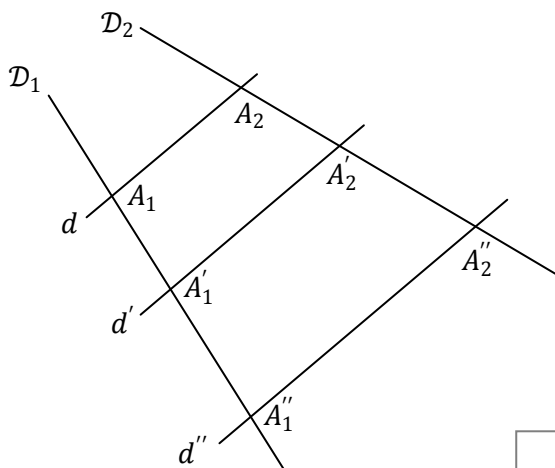
$$\frac{\overrightarrow{A_1 A'_1}}{\overrightarrow{A_1 A''_1}} = \frac{\overrightarrow{A_2 A'_2}}{\overrightarrow{A_2 A''_2}}$$

הערה: אם A, B, C, D ארבע נקודות קולינאריות כך ש- $C \neq D$ קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ יחיד כך ש- $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$ ומגדירים $\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$, כך שהיחסים שבניסוח המשפט מוגדרים היטב.

הוכחה: נסמן ב- π את ההטלה על $\mathcal{D}_2$ בכיוון של d ותהי $p = D\pi$.

$$\begin{aligned}\pi(A_1) &= A_2, \pi(A'_1) = A'_2, \pi(A''_1) = A''_2 \\ \text{אז } \overrightarrow{A_1 A'_1} &= \lambda \overrightarrow{A_1 A''_1} \text{ אז } \overrightarrow{A_2 A'_2} = \lambda \overrightarrow{A_2 A''_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_2 A'_2} &= A'_2 - A_2 \\ &= \pi(A'_1) - \pi(A_1) \\ &= p(\overrightarrow{A_1 A'_1}) \\ &= p(\lambda \overrightarrow{A_1 A''_1}) \\ &= \lambda \cdot p(\overrightarrow{A_1 A''_1})\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \lambda(\pi(A'_1) - \pi(A_1)) \\
&= \lambda(A'_2 - A_2) \\
&= \lambda \overrightarrow{A_2 A'_2}
\end{aligned}$$

☺

הגדרה: יהי A מרחב אפיני. יהיו $O \in A$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$. תהי $g: V \rightarrow V$ המוגדרת ע"י $g(v) = \lambda v$. אז העתקה לינארית ולכן קיימת העתקה אפינית יחידה $f: A \rightarrow A$ כך ש- $f(O) = O$ ו- $Df(v) = g(v)$. העתקה אפינית זו נקראת **הרחבה לינארית (dilation)** עם מרכז O ויחס λ וסומנת ע"י $h(O, \lambda)$.

טענה: הרכבה של הרחבות לינאריות עם אותו המרכז היא הרחבה לינארית אם אותו מרכז.

הוכחה: נסמן $f = h(O, \lambda)$ ו- $g = h(O, \nu)$. ראינו שהרכבה של העתקות אפיניות היא העתקה אפינית ומתקיים $D(f \circ g) = Df \circ Dg$. לכן $D(f \circ g)(w) = Df(Dg(w)) = Df(\nu w) = \lambda \nu w$. בחרו ש- $(f \circ g)(O) = O$. לכן $f \circ g = h(O, \lambda \nu)$.

☺

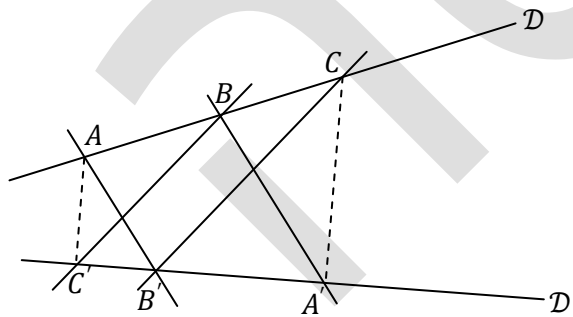
טענה: הרחבות לינאריות עם אותו מרכז מתחלפות.

הוכחה: בהוכחה של הטענה הקודמת ראינו שאם (O, λ) ו- $g = h(O, \nu)$ אז $f \circ g = h(O, \lambda \nu)$ ומכאן כבר ברורה הטענה, שכן $f \circ g = h(O, \lambda \nu) = h(O, \nu \lambda) = g \circ f$.

☺

משפט Pappus: תהיינה A, B, C שלוש נקודות על ישר D ו- A', B', C' שלוש נקודות על ישר D' אשר שונה מ- D . אם $\langle A, B' \rangle \parallel \langle B, A' \rangle$ ו- $\langle A, C' \rangle \parallel \langle C, A' \rangle$ אז $\langle B, C' \rangle \parallel \langle C, B' \rangle$.

הוכחה:



נחלק את ההוכחה לשני מקרים. אם $D' \nparallel D$ תהי O נקודת החיתוך שלהם. תהי φ ההרחבה הלינארית עם מרכז O שמעתיקה את A ל- B ותהי ψ ההרחבה הלינארית עם מרכז O שמעתיקה את B ל- C . אז φ מעתיקה את B' ל- A' , שהרי לפי משפט Thales מתקיים $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OA'}}$ ולכן אם

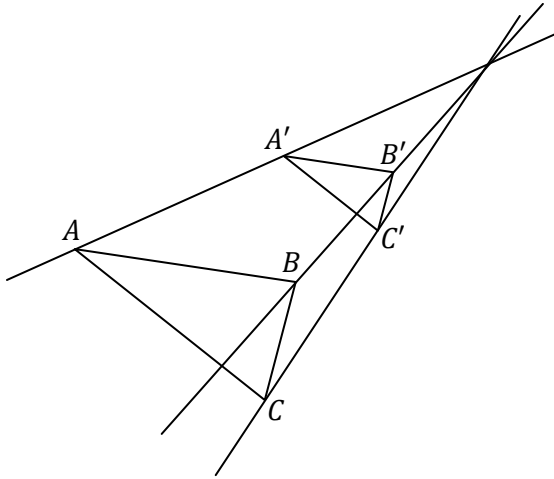
מתקיים $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA}$ אז גם $\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OB'}$. באותו אופן, ψ מעתיקה את C' ל- B' . לכן $\psi \circ \varphi$ מעתיקה את A ל- C' ואילו $\varphi \circ \psi$ מעתיקה את C' ל- A' . אבל ל- φ ול- ψ אותו מרכז ולכן הן מתחלפות. לכן מצאנו הרחבה לינארית שמעתיקה את A ל- C' ואת C' ל- A' . נניח ש- $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA'}$ ו- $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OC'}$. יהי d הישר העובר ב- A ומקביל ל- $\langle C, A' \rangle$. תהי P נקודת החיתוך של d ו- D' . אם נראה ש- $P = C'$ נקבל ש- $d = \langle A, C' \rangle$ ונקבל את הדרוש. ואכן, מתקיים $\overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC}} \overrightarrow{OA}$ לפי משפט Thales מתקיים $\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OC'}} = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OP}}$ ולכן $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC'}} \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP}$ ולכן $P = C'$ וסיימנו.

אם $D' \parallel D$ אותה ההוכחה עובדת עם החלפת ההרחבות בהזזות המתאימות.



משפט Desargues: יהיו $ABC, A'B'C'$ שני משולשים ללא קודקודים משותפים כך שהצלעות המתאימות שלהם מקבילות. אז הישרים $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle, \langle C, C' \rangle$ מקבילים או נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה:



אם $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle$ נחתכים ב- O אז לפי משפט Thales ההרחבה הלינארית φ שמרכזת O שמעתיקה את A ל- A' מעתיקה את B ל- B' . יהי λ היחס של ההרחבה. נסמן $C'' = \varphi(C)$. אם נראה ש- $C'' = C'$ נקבל ש- O, C, C'' קולינאריות ולכן $\langle C, C' \rangle$ עובר ב- O . מתקיים $\vec{OC''} = \lambda \vec{OA'}$ אבל גם $\vec{OA'} = \lambda \vec{OA}$ ולכן $\vec{OC''} = \lambda \vec{OA}$. לכן $\langle A, C'' \rangle \parallel \langle A', C' \rangle$. נמצאת על הישר המקביל ל- $\langle A, C' \rangle$ העובר דרך A' , כלומר על $\langle A, C' \rangle$. אבל היא גם נמצאת עם הישר המקביל ל- $\langle B, C' \rangle$ העובר דרך B' , כלומר על $\langle B', C' \rangle$. לכן $C'' = C'$ וסיימנו.

אם $\langle A, A' \rangle \parallel \langle B, B' \rangle$ אותה הוכחה עובדת בשימוש בהזזות במקום בהרחבות.



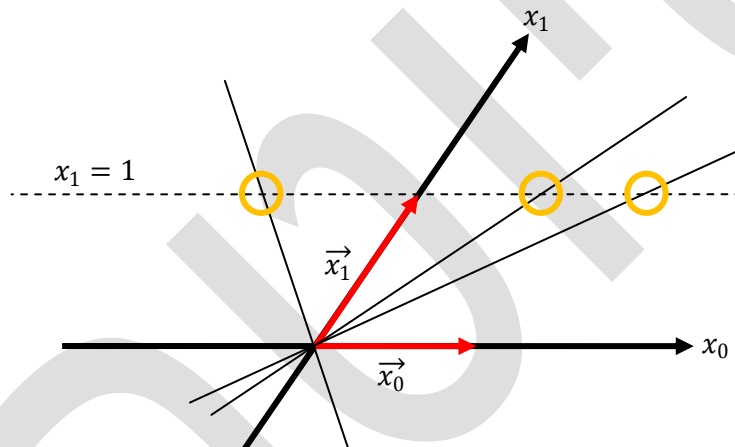
גיאומטריה פרויקטיבית

מרחבים פרויקטיביים

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי לא טריוויאלי מעל שדה F . יהיו $w, v \in V$. נאמר ש- $w \sim v$ אם קיים $0 \neq \lambda \in F$ כך ש- $w = \lambda v$. ברור שזה יחס שקילות. נסמן ב- $\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim$ את אוסף מחלקות השקילות של $\sim$. אוסף זה נקרא **המרחב הפרויקטיבי** של V . **ההטלה הטבעית** היא הפונקציה $p: V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ $v \mapsto [v]$. נגדיר את **הממד** של $\mathbb{P}(V)$ להיות $\dim_F \mathbb{P}(V) = \dim_F V - 1$.⁴ מרחב פרויקטיבי מממד 2 נקרא **מישור פרויקטיבי** ומרחב פרויקטיבי מממד 1 נקרא **ישר פרויקטיבי**.

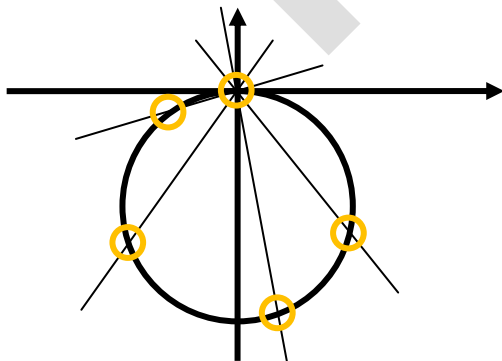
דוגמה: ננסה להבין איך נראה הישר הפרויקטיבי של $\mathbb{R}^2$. ניקח $F = \mathbb{R}$ ונתבונן ב- $V = \mathbb{F}^2$. נסמן $\mathbb{P}(\mathbb{F}^2) = \mathbb{P}^1(F)$. נבדוק שלוש נקודות מבט.

1. יהי $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1\}$ בסיס של $\mathbb{F}^2$. נסמן ב- (x_0, x_1) את מערכת הצירים המתאימה לבסיס הנ"ל. כל ישר שאינו בכיוון של x_0 חותך את הישר $x_1 = 1$ בנקודה אחת בדיוק.



לכן קיימת העתקה חח"ע ועל בין הישר $x_1 = 1$ לבין $\mathbb{P}^1(F) \setminus \{[\vec{x}_0]\}$. נסיף ל- $\mathbb{P}^1(F)$ נקודה מלאכותית שננסמנה ∞ . אז $\mathbb{P}^1(F) \cong \mathbb{F} \cup \{\infty\}$.

2. כל ישר שעובר בראשית חותך את מעגל היחידה בשתי נקודות בדיוק. נתבונן בחצי העליון של מעגל היחידה. שם לכל ישר שעובר בראשית יש נקודת חיתוך יחידה פרט לציר ה- x . לכן נרצה לזהות את הנקודה $(-1, 0)$ עם $(1, 0)$. לאחר הזיהוי נקבל את מעגל היחידה. כלומר, $\mathbb{P}^1(F) \cong S^1$.



3. נתבונן בהטלה הגיאודזית. כל ישר שעובר בראשית חותך את המעגל שבציור בנקודה אחת ויחידה. גם הישר שנקבע ע"י ציר ה- x חותך את המעגל בקוטב הצפוני שלו. מנקודת מבט זו רואים באופן ישיר ש- $\mathbb{P}^1(F) \cong S^1$.

⁴ אם $V = \{0\}$ אז $\dim_F V = 0$ ואז $\dim_F \mathbb{P}(V) = \dim_F \emptyset = -1$.

תת-מרחבים פרויקטיביים

הגדרה: יהי $\mathbb{V}$ מרחב וקטורי ויהי $W \leq \mathbb{V}$ תת-מרחב. אזי $W \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{V} \setminus \{0\}$. נסמן ב- $\mathbb{P}(W)$ את התמונה של $W \setminus \{0\}$ תחת ההטלה הטבעית. במקרה זה נאמר ש- $\mathbb{P}(W)$ **תת-מרחב פרויקטיבי** של $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ ונסמן $\mathbb{P}(W) \leq \mathbb{P}(\mathbb{V})$. אם W על-מישור⁵ $\mathbb{P}(W)$ נקרא **על-מישור פרויקטיבי**.

טענה: חיתוך של תת-מרחבים פרויקטיביים הוא תת-מרחב פרויקטיבי.

הוכחה: יהי $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ מרחב פרויקטיבי ויהי $\{\mathbb{P}(W_i)\}_{i \in I}$ אוסף תת-מרחבים פרויקטיביים שלו. נטען ש- $\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} W_i)$ ונקבל את הדרוש, שהרי $\bigcap_{i \in I} W_i \leq \mathbb{V}$ תת מרחב וקטורי. ואכן,

$$\begin{aligned} [v] \in \bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) &\Leftrightarrow \forall i \in I [v] \in \mathbb{P}(W_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I v \in W_i \\ &\Leftrightarrow v \in \bigcap_{i \in I} W_i \\ &\Leftrightarrow [v] \in \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right) \end{aligned}$$

😊

הגדרה: תהי $S \subseteq \mathbb{P}$ קבוצה חלקית של מרחב פרויקטיבי. נסמן ב- $\bar{S}$ את התת-מרחב הפרויקטיבי המינימלי (מבחינת הכלה) שמכיל את S . ננקרא **המרחב הפרויקטיבי הנוצר** ע"י S .

טענה: תהי $S \subseteq \mathbb{P}$ קבוצה חלקית של מרחב פרויקטיבי. אזי $\bar{S} = \bigcap_{S \subseteq L \leq \mathbb{P}} L$.

הוכחה: ראינו שחיתוך של תת מרחבים פרויקטיביים הוא תת מרחב פרויקטיבי. לכן $\bigcap_{S \subseteq L \leq \mathbb{P}} L$ תת-מרחב פרויקטיבי. ברור גם מההגדרה שלו שהוא מכיל את S . ברור גם שהוא מינימלי, כי אילו B היה מינימלי שמכיל את S ואינו $\bigcap_{S \subseteq L \leq \mathbb{P}} L$ אז B היה חלק מהחיתוך ו- $\bigcap_{S \subseteq L \leq \mathbb{P}} L \subsetneq B$ בסתירה למינימליות של B .

😊

למה: יהי $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ מרחב פרויקטיבי ותהינה $A \subseteq B \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{V})$ תת קבוצות. אזי $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

הוכחה: $\bar{A} = \bigcap_{A \subseteq L \leq \mathbb{P}} L$. אם $m \in \bar{A}$ אז $m \in L$ לכל L כזה $A \subseteq L \leq \mathbb{P}$. אבל $A \subseteq B$ ולכן אם $B \subseteq L \leq \mathbb{P}$ אז $A \subseteq L$ ולכן $m \in L$. לכן $m \in \bigcap_{B \subseteq L \leq \mathbb{P}} L$, כלומר $m \in \bar{B}$.

😊

טענה: יהי $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ מרחב פרויקטיבי ותהי $M \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{V})$ תת קבוצה. אזי $\bar{M} = \mathbb{P}(\langle p^{-1}(M) \rangle)$ כאשר p ההטלה הטבעית.

הוכחה: נוכיח הכלה בשני הכיוונים.

$(\subseteq)$ $M \subseteq \mathbb{P}(\langle p^{-1}(M) \rangle)$ כי אם ניקח $[v] \in M$ אז מתקיים $\langle p^{-1}(M) \rangle \subseteq p^{-1}(M) \subseteq \mathbb{V}$ ולכן $[v] \in \mathbb{P}(\langle p^{-1}(M) \rangle)$. ונעת לפי הלמה $\mathbb{P}(\langle p^{-1}(M) \rangle) = \overline{\mathbb{P}(\langle p^{-1}(M) \rangle)} = \bar{M}$.

⁵ כלומר, $\dim_{\mathbb{F}} W = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{V} - 1$

(ב)

😊

מסקנה: יהיו $S_1, S_2 \leq \mathbb{P}$ תת מרחבים של מרחב פרויקטיבי. נניח ש- $S_1 = \mathbb{P}(W)$ ו- $S_2 = \mathbb{P}(U)$. אזי $\overline{S_1 \cup S_2} = \mathbb{P}(W + U)$.

הוכחה: זה ברור כי $\langle W, U \rangle = W + U$.

😊

משפט: יהיו $S_1, S_2 \leq \mathbb{P}$ תת מרחבים של מרחב פרויקטיבי. אזי

$$\dim_{\mathbb{F}} \overline{S_1 \cup S_2} + \dim_{\mathbb{F}}(S_1 \cap S_2) = \dim_{\mathbb{F}} S_1 + \dim_{\mathbb{F}} S_2$$

הוכחה: נסמן $S_1 = \mathbb{P}(W)$ ו- $S_2 = \mathbb{P}(U)$. אז לפי הטענות הקודמות מתקיים

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \overline{S_1 \cup S_2} + \dim_{\mathbb{F}}(S_1 \cap S_2) &= (\dim_{\mathbb{F}}(W + U) - 1) + (\dim_{\mathbb{F}}(W \cap U) - 1) \\ &= (\dim_{\mathbb{F}} W + \dim_{\mathbb{F}} U - \dim_{\mathbb{F}}(W \cap U) - 1) \\ &\quad + (\dim_{\mathbb{F}}(W \cap U) - 1) \\ &= (\dim_{\mathbb{F}} W - 1) + (\dim_{\mathbb{F}} U - 1) \\ &= \dim_{\mathbb{F}} S_1 + \dim_{\mathbb{F}} S_2 \end{aligned}$$

😊

טענה: יהיו $S_1, S_2 \leq \mathbb{P}$ תת מרחבים של מרחב פרויקטיבי. אם $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} \leq \dim_{\mathbb{F}} S_1 + \dim_{\mathbb{F}} S_2$ אז $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

הוכחה: נסמן $S_1 = \mathbb{P}(W)$ ו- $S_2 = \mathbb{P}(U)$. אז

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}}(S_1 \cap S_2) &= \dim_{\mathbb{F}} S_1 + \dim_{\mathbb{F}} S_2 - \dim_{\mathbb{F}} \overline{S_1 \cup S_2} \\ &\geq \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} - \dim_{\mathbb{F}} \overline{S_1 \cup S_2} \\ &= \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} - (\dim_{\mathbb{F}}(W + U) - 1) \\ &\geq \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} - (\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

בפרט, $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

😊

טענה: יהי $H \leq \mathbb{P}$ על-מישור פרויקטיבי. ותהי $P \notin H$. אז לכל ישר פרויקטיבי $L \leq \mathbb{P}$ שעובר ב- P , חותך את H בנקודה אחת בדיוק.

הוכחה: נניח ש- $H = \mathbb{P}(W)$ כאשר W על-מישור ו- $P = [v]$. אם $P \notin H$ פירושו $\text{span}\{v\} \not\subseteq W$ ולכן $\mathbb{V} = W \oplus \text{span}\{v\}$. כעת לפי הטענה הקודמת מתקיים

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}}(H \cap L) &= \dim_{\mathbb{F}} H + \dim_{\mathbb{F}} L - \dim_{\mathbb{F}} \overline{H \cup L} \\ &= \dim_{\mathbb{F}} H + \dim_{\mathbb{F}} L - \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} \\ &= (\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} - 1) + 1 - \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{P} \\ &= 0 \end{aligned}$$

מכאן ש- $H \cap L$ היא נקודה בודדת.

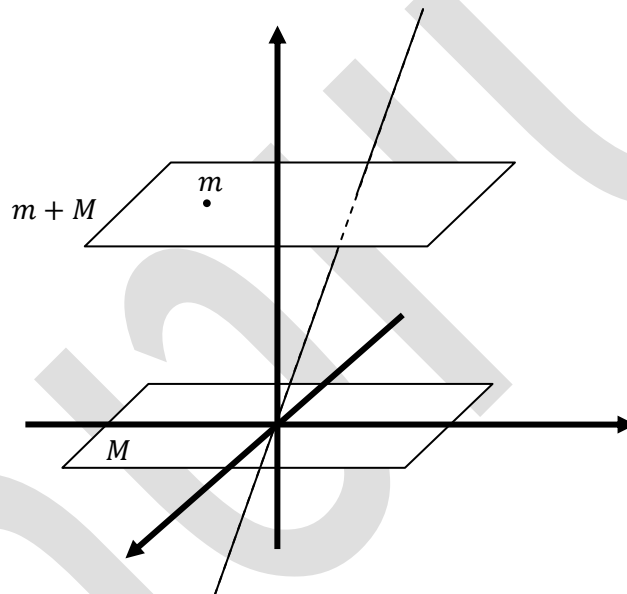


משפט: יהי V מרחב וקטורי ויהי $M \leq V$ על מישור. אזי:

1. $A_M = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(M)$ מרחב אפיני עם מרחב כיוונים M .
2. אם $(A_M, M, +)$ ו- $(A_M, M, +')$ שני מרחבים אפיניים כאלה (כפי שנגדיר בהוכחה) אז הם איזומורפיים.
3. אם $A \leq A_M$ יריעה לינארית ו- $\bar{A} \leq \mathbb{P}(V)$ אז $\bar{A} \setminus A \leq \mathbb{P}(M)$ ו- $\dim_{\mathbb{F}} A = \dim_{\mathbb{F}} \bar{A}$ ו- $\dim_{\mathbb{F}}(\bar{A} \setminus A) = \dim_{\mathbb{F}} A - 1$.

הוכחה:

צריך להגדיר פעולת חיבור על A_M שתקיים את תכונות המרחב האפיני. מאחר ש- M על מישור $M \neq V$ וקיימת $0 \neq m \in V \setminus M$. נתבונן ב- $m + M$. כקבוצת יש איזומורפיזם $A_M \cong m + M$, שהרי A_M היא קבוצת הישרים שעוברים דרך הראשית אבל לא ב- M וכנראה, הם חותכים את $m + M$ בנקודה אחת בדיוק.



על $m + M$ מוגדר מבנה טבעי של מרחב אפיני עם מרחב כיוונים M : לכל $m + w \in m + M$ ולכל $v \in M$ נגדיר $(m + w) + v = m + (w + v) \in m + M$. ברור שהגדרה זו מקיימת את כל התכונות הדרושות ובגלל האיזומורפיזם $A_M \cong m + M$ היא משרה מבנה של מרחב אפיני גם על A_M .

נראה שכל שני מרחבים אפיניים כאלה הם איזומורפיים. מספיק להראות איזומורפיזם בין $m + M$ לבין $m' + M$ לכל $m, m' \in V$.

העתקות פרויקטיביות

הגדרה: יהיו V, V' שני מרחבים וקטוריים מעל שדה F ותהי $f: V \rightarrow V'$ לינארית. הפרויקטיביזציה של f היא ההעתקה $P(f): \mathbb{P}(V) \setminus \ker f \rightarrow \mathbb{P}(V')$ $[v] \mapsto [f(v)]$. העתקה זו נקראת **העתקה פרויקטיבית**.

⁶ נשים לב שזוהי פונקציה חלקית. אבל אם f איזומורפיזם אז $\ker f = \{0\}$ ואז הפרויקטיביזציה מלאה.

נאמר ש- $P(f)$ איזומורפיזם של מרחבים פרויקטיביים אם f איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.
העתקה פרויקטיבית מישר פרויקטיבי לישר פרויקטיבי נקראת הומוגרפיה.

בסיסים פרויקטיביים

הגדרה: יהי $(e_1, \dots, e_{n+1})$ בסיס של מרחב וקטורי V . לוקטורים של V יש קואורדינטות $(x_1, \dots, x_{n+1})$ לפי בסיס זה. נקודה ב- $M \in \mathbb{P}(V)$ ניתן לתאר ע"י קואורדינטות של וקטור שיוצר את $p^{-1}(M)$ כאשר p ההטלה הטבעית. קואורדינטות $(x_1, \dots, x_{n+1})$ ו- $(x'_1, \dots, x'_{n+1})$ מייצגות את אותה נקודה $M \in \mathbb{P}(V)$ אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ $\lambda \neq 0$ כך ש- $(x'_1, \dots, x'_{n+1}) = \lambda(x_1, \dots, x_{n+1})$. מחלקת השקילות של $(x_1, \dots, x_{n+1})$ נקראת **קואורדינטות הומוגניות** ומסמנים אותה ב- $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ או ב- $(x_1 : \dots : x_{n+1})$.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מממד $n+1$. אוסף סדור $(P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ עבור $P_i \in \mathbb{P}(V)$ לכל $0 \leq i \leq n+1$ ייקרא **בסיס פרויקטיבי** (או **מערכת ייחוס פרויקטיבית**) של $\mathbb{P}(V)$ אם קיים בסיס $B = (b_0, \dots, b_n)$ של V כך ש- $p(b_i) = P_i$ לכל $0 \leq i \leq n$ וכן $p(\sum_{i=0}^n b_i) = P_{n+1}$ כאשר p ההטלה הטבעית.

למה: יהי $(P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ בסיס פרויקטיבי של $\mathbb{P}(V)$ ויהיו $B = (b_0, \dots, b_n)$, $B' = (b'_0, \dots, b'_n)$ בסיסים של V כך ש- $p(b_i) = P_i = p(b'_i)$ לכל $0 \leq i \leq n$ וכן $p(\sum_{i=0}^n b_i) = P_{n+1} = p(\sum_{i=0}^n b'_i)$. אזי קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ $\lambda \neq 0$ כך ש- $B = \lambda B'$.

הוכחה: לכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים $[b_i] = p(b_i) = P_i = p(b'_i) = [b'_i]$ ולכן קיימים $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}^*$ כך ש- $b_i = \lambda_i b'_i$. אבל נתון גם ש- $[\sum_{i=0}^n b_i] = p(\sum_{i=0}^n b_i) = P_{n+1} = p(\sum_{i=0}^n b'_i) = [\sum_{i=0}^n b'_i]$. כלומר, קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ $\lambda \neq 0$ כך ש- $\sum_{i=0}^n \lambda_i b'_i = \sum_{i=0}^n b_i = \lambda \sum_{i=0}^n b'_i = \sum_{i=0}^n \lambda \cdot b'_i$. אבל בסיס B' ולכן $\lambda_i = \lambda$ לכל $0 \leq i \leq n$ וזה מה שרצינו.

☺

למה: יהיו $\mathbb{P}(V_1), \mathbb{P}(V_2)$ שווי ממד עם בסיסים פרויקטיביים $(P_0^1, \dots, P_{n+1}^1), (P_0^2, \dots, P_{n+1}^2)$ בהתאמה. אזי קיים איזומורפיזם פרויקטיבי יחיד $P(f): \mathbb{P}(V_1) \rightarrow \mathbb{P}(V_2)$ כך ש- $P(f)(P_i^1) = P_i^2$ לכל $0 \leq i \leq n+1$.

הוכחה: יהיו $B_1 = (b_i^1)_{i=0}^n, B_2 = (b_i^2)_{i=0}^n$ הבסיסים של V_1, V_2 מהגדרת הבסיס הפרויקטיבי. קיימת העתקה לינארית יחידה $f: V_1 \rightarrow V_2$ כך ש- $f(b_i^1) = b_i^2$ לכל $0 \leq i \leq n$. העתקה זו היא איזומורפיזם מאחר שהיא מעבירה בסיס לבסיס. לכן $P(f): \mathbb{P}(V_1) \rightarrow \mathbb{P}(V_2)$ איזומורפיזם פרויקטיבי. לכל $0 \leq i \leq n$ ו- $j \in \{1, 2\}$ מתקיים $p(b_i^j) = [b_i^j] = P_i^j$. לכן, לכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים $p(b_i^1) = [b_i^1] = P_i^1$, וכן, $P(f)(P_i^1) = [f(b_i^1)] = [b_i^2] = P_i^2$.

$$\begin{aligned} P(f)(P_{n+1}^1) &= P(f)\left(p\left(\sum_{i=0}^n b_i^1\right)\right) = \left[f\left(\sum_{i=0}^n b_i^1\right)\right] \\ &= \left[\sum_{i=0}^n f(b_i^1)\right] = \left[\sum_{i=0}^n b_i^2\right] = p\left(\sum_{i=0}^n b_i^2\right) = P_{n+1}^2 \end{aligned}$$

סה"כ $P(f)(P_i^1) = P_i^2$ לכל $0 \leq i \leq n+1$.

☺

היחס הכפול

הגדרה: יהי $\mathcal{D}$ ישר פרויקטיבי. שלוש נקודות שונות a, b, c על הישר מהוות בסיס פרויקטיבי ולכן קיימת העתקה פרויקטיבית יחידה מהישר ל- $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ שמעתיקה את a ל- ∞ , את b ל-0 ואת c ל-1. אם d נקודה ב- $\mathcal{D}$, התמונה שלה תחת ההעתקה הפרויקטיבית הזאת היא ב- $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ והיא נקראת **היחס הכפול** של a, b, c, d (בסדר זה!) ומסומנת $[a, b, c, d]$.

משפט: תהיינה a_1, a_2, a_3, a_4 ארבע נקודות בישר פרויקטיבי $\mathcal{D}$ כך ששלוש הראשונות שונות אחת מהשנייה, ותהיינה b_1, b_2, b_3, b_4 ארבעה נקודות בישר פרויקטיבי $\mathcal{D}'$ שמקיימות את אותן הנחות. אזי קיימת הומוגרפיה $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ כך ש- $f(a_i) = b_i$ ל- $1 \leq i \leq 4$ אם ומתקיים השוויון $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [b_1, b_2, b_3, b_4]$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח שקיימת הומוגרפיה כנ"ל. תהי $g': \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ ההומוגרפיה היחידה שמעתיקה את b_1 ל- ∞ , את b_2 ל-0 ואת b_3 ל-1. אז לפי ההגדרה $[b_1, b_2, b_3, b_4] = g'(b_4)$. אבל $g' \circ f$ הומוגרפיה ומתקיים $g'(f(a_1)) = g'(b_1) = \infty$, $g'(f(a_2)) = g'(b_2) = 0$, $g'(f(a_3)) = g'(b_3) = 1$ ולכן מתקיים לפי ההגדרה $[a_1, a_2, a_3, a_4] = g'(f(a_4)) = g'(b_4) = [b_1, b_2, b_3, b_4]$.

($\Rightarrow$) יש הומוגרפיה יחידה $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ כך ש- $f(a_i) = b_i$ ל- $1 \leq i \leq 3$. אבל לפי החלק הקודם במקרה זה מתקיים $f(a_4) = b_4$.

😊

משפט: תהיינה a, b, c, d ארבע נקודות על ישר אפיני כאשר שלוש הראשונות שונות אחת מהשנייה. אזי $[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} \cdot \frac{c-b}{c-a}$.

הוכחה: ההומוגרפיה היחידה שמעתיקה את a ל- ∞ , את b ל-0 ואת c ל-1 היא

$$z \mapsto \frac{z-b}{z-a} \cdot \frac{c-b}{c-a}$$

לכן הנוסחה נותנת את הדרוש.

😊

דואליות במרחבים פרויקטיביים

יהי $W \leq V$ תת מרחב וקטורי ונתבונן במאפס $W^0 = \{\varphi \in V^*: \forall w \in W \varphi(w) = 0\}$. זהו תת מרחב וקטורי של המרחב הדואלי $\text{hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$ ומתקיים $\dim_{\mathbb{F}} W^0 = \dim_{\mathbb{F}} V - \dim_{\mathbb{F}} W$. ידוע ש- $\dim_{\mathbb{F}} V^* = \dim_{\mathbb{F}} V$. לכן למשל, אם V הוא מרחב תלת-ממדי אז ישר ב- W מגדיר מישור ב- W^0 ומישור ב- W מגדיר ישר ב- W^0 . נסמן $\mathbb{P}^*(V) = \mathbb{P}(V^*)$. היחס הדואלי יכול להיות יעיל מאוד. נסכם בטבלה את הממצאים:

$P(V)$	V	V^*	$\mathbb{P}(V^*)$
$a \in \mathbb{P}$ point	$a \subseteq V$ line	$a^0 \subseteq V^*$ plane	$\mathbb{P}(a^0) \subseteq \mathbb{P}^*$ projective line

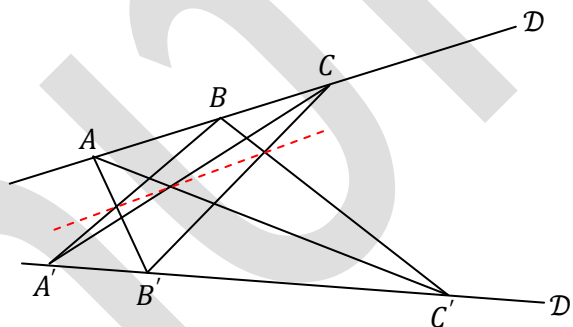
$D = \mathbb{P}(d) \subseteq \mathbb{P}$ projective line	$d \subseteq \mathbb{V}$ plane	$d^0 \subseteq \mathbb{V}^*$ line	$d^0 \in \mathbb{P}^*$ point
---	--------------------------------	-----------------------------------	------------------------------

ברור שאם $W \leq U$ אז $U^0 \leq W^0$. זה נותן לנו את יחסי הכילה הבאים:

$\mathbb{P}^*$ ישר ב- A	$\mathbb{P}$ נקודה ב- a
$\mathbb{P}^*$ נקודה ב- d	$\mathbb{P}$ ישר ב- D
$d \in A$	$a \in D$
שלושה ישרים ב- $\mathbb{P}^*$ שנחתכים בנקודה אחת	שלוש נקודות קולינאריות ב- $\mathbb{P}$
נקודה $A \cap B$	ישר ab

משפטים בגיאומטריה של המישור – גרסה פרויקטיבית

משפט Pappus: יהיו $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ שני ישרים במישור פרויקטיבי. תהיינה A, B, C שלוש נקודות כל $\mathcal{D}$ ו- A', B', C' שלוש נקודות על $\mathcal{D}'$. תהיינה α, β, γ נקודות החיתוך של הישרים $C'A, C'B$ ו- $A'C, A'B$ ו- $B'A, B'C$ אדי α, β, γ קולינאריות.



הוכחה:

משפט Desargues:

הוכחה:

גיאומטריה אוקלידית

מרחבים אוקלידיים

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. **מכפלה סקלרית** היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיימות

התכונות הבאות: לכל $v, w, u \in V$ ולכל $k \in \mathbb{R}$

1. **סימטריות:** $v \cdot w = w \cdot v$

2. **ביליניאריות:**

• $(v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u$

• $(kv) \cdot w = k(v \cdot w)$

• $v \cdot (w + u) = v \cdot w + v \cdot u$

• $v \cdot (kw) = k(v \cdot w)$

3. **חיוביות:** $v \cdot v \geq 0$ ו- $v \cdot v = 0$ אם ורק אם $v = 0$

V נקרא במקרה זה **מרחב מכפלה סקלרית** (או **מרחב וקטורי אוקלידי**).

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. **נורמה** היא פונקציה $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת את התכונות הבאות: לכל $x, y \in V$ ולכל $c \in \mathbb{R}$

1. **חיוביות:** $\|x\| \geq 0$ ו- $\|x\| = 0$ אם ורק אם $x = 0$

2. **הומוגניות:** $\|cx\| = |c|\|x\|$

3. **אי שוויון המשולש:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ושוויון אם $x = ty$ עבור $t > 0$ או להפך.

V נקרא במקרה זה **מרחב וקטורי נורמי**.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. **מטריקה** היא פונקציה $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ שמקיימת את התכונות הבאות: לכל $x, y, z \in V$

1. **חיוביות:** $d(x, y) \geq 0$ ו- $d(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$

2. **סימטריות:** $d(x, y) = d(y, x)$

3. **אי שוויון המשולש:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ושוויון אם x, y, z קולינאריות ו- y בין x ל- z .

V נקרא במקרה זה **מרחב וקטורי מטרי**.

דוגמה: יהי V מרחב מכפלה סקלרית. אזי אפשר להגדיר עליו נורמה ומטריקה באופן הבא:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

קל לראות שהגדרות אלה מקיימות את התכונות הדרושות.

משפט (אי-שוויון קושי-שוורץ): יהי V מרחב מכפלה סקלרית. אזי לכל $v, w \in V$ מתקיים

$$|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$$

הגדרה: מאי שוויון קושי-שוורץ נובע שבמרחב מכפלה סקלרית $-1 \leq \frac{|v \cdot w|}{\|v\| \|w\|} \leq 1$. לכן ניתן להגדיר את הזווית הלא מכוונת שבין x ל- y ע"י $\alpha(x, y) = \arccos \frac{|v \cdot w|}{\|v\| \|w\|}$.

הגדרה: יהי V מרחב מכפלה סקלרית. נאמר ש- $v, w \in V$ מאונכים ונסמן $v \perp w$ אם $v \cdot w = 0$. קבוצת וקטורים $\{v_i\}_{i \in I}$ תיקרא **אורתוגונלית** אם $v_i \cdot v_j = 0$ לכל $i \neq j$ והיא תיקרא **אורתונורמלית** אם $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ לכל $i, j \in I$.

משפט (משפט הקוסינוסים): יהי V מרחב מכפלה סקלרית ויהיו $x, y \in V$. אזי:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y$$

הוכחה: נשמש בתכונות של הנורמה:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= (x - y) \cdot (x - y) \\ &= x \cdot (x - y) - y \cdot (x - y) \\ &= x \cdot x - x \cdot y - y \cdot x + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2 \end{aligned}$$

😊

מסקנה (משפט פיתגורס): יהי V מרחב מכפלה סקלרית ויהיו $x, y \in V$. אזי $x \perp y$ אם ורק אם

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

הוכחה: ראשית, נשים לב ש- $x \perp y$ אם ורק אם $x \cdot y = 0$, שהרי

$$\begin{aligned} \|x + y\| = \|y - x\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|y - x\|^2 \\ &\Leftrightarrow (x + y) \cdot (x + y) = (y - x) \cdot (y - x) \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2 \\ &\Leftrightarrow 2x \cdot y = -2x \cdot y \\ &\Leftrightarrow x \cdot y = 0 \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) אם $x \perp y$ אז לפי בעזרת משפט הקוסינוסים נקבל

$$\|x + y\|^2 = \|y - x\|^2 = \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

($\Rightarrow$) נניח ש- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. אז לפי משפט הקוסינוסים מתקיים

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y = \|x + y\|^2 - 2x \cdot y$$

לכן $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y$. לכן $2x \cdot y = 0$ ולכן $x \cdot y = 0$.

😊

הגדרה: מרחב אפיני (A, V) ייקרא **מרחב אפיני אוקלידי** אם V מרחב אוקלידי.

נאנחנו נעסוק בפרק זה בעיקר במרחבים $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ עם המבנה האפיני הקנוני.

הצגה של יריעות במרחב אוקלידי

הצגה פרמטרית

יריעה ב- $\mathbb{R}^3$ היא ישריה. לכן כל ישר שכיוונו v ועובר בנקודה P_0 ניתן להציג באופן הבא:

$$l: P = P_0 + tv$$

וכל מישור שנפרש ע"י v, w ועובר דרך הנקודה P_0 ניתן להציג ע"י

$$\pi: P = P_0 + tv + sw$$

הצגה סתומה

לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ נקודה במישור $\pi: P = P_0 + tv + sw$ אז מתקיים

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

כלומר מתקיימות המשוואות

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y &= y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z &= z_0 + tv_3 + sw_3 \end{aligned}$$

מהשתיים הראשונות אפשר לחלץ את t, s כתלות ב- x, y, z והצבה במשוואה השלישית נותנת את ההצגה הסתומה של המישור.

דבר דומה עושים גם בהצגה סתומה של ישרים.

דוגמה: נמצא משוואה של מישור הניצב למישור $\pi: 2x + 2y + z = 0$ ומכיל את הישר שנתון ע"י המשוואות $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$.

ראשית, נעבור להצגות פרמטריות כדי שנוכל לדעת את הכיוונים.

הנקודות $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ נמצאות במישור ולכן הוא נפרש ע"י $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, לכן ההצגה הפרמטרית שלו היא

$$\pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

הנקודות $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ נמצאות על הישר ולכן ההצגה הפרמטרית שלו היא

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

משוואה כללית של מישור שמכיל את l היא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. אם נמצא שמאונך למישור π נקבל את הדרוש. אז נפתור את המשוואות

$$a - 2c = 0$$

$$b - 2c = 0$$

למשל, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ פיתרון. לכן המישור המבוקש הוא $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. נמצא את ההצגה הסתומה שלו. מתקיים:

$$x = 1 + 2t + 2s$$

$$y = 2 + 3t + 2s$$

$$z = 4t + s$$

מشتי המשוואות הראשונות נקבל $t = -1 - x + y$, $s = \frac{1}{2}(1 + 3x - 2y)$. נציב במשוואה השלישית ונקבל $z = 4(-1 - x + y) + \frac{1}{2}(1 + 3x - 2y) = \frac{1}{2}(-7 - 5x + 6y)$. הסתומה של המישור המבוקש היא $5x - 6y + 2z + 7 = 0$.

מרחקים בין עצמים במרחבים איקלידיים

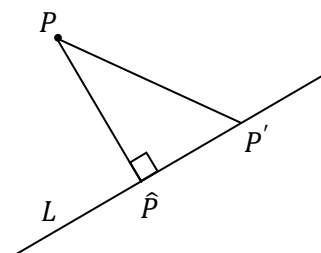
הגדרה: יהי $\mathbb{V}$ מרחב מכפלה סקלרית ותהינה $A, B \subseteq \mathbb{V}$ שתי קבוצות חלקיות לא ריקות. המרחק בין הקבוצות מוגדר ע"י $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$. בפרט אם $B = \{b\}$ נקודה בודדת אז $d(A, b) = \inf_{a \in A} d(a, b)$.

הערה: המרחק מוגדר היטב משום שבגלל חיוביות המטריקה המרחק בין כל הנקודות תמיד חסום מלמטה. מאחר שהקבוצות לא ריקות קיים החסם התחתון. כמובן, המקרה המעניין מבחינתנו הוא כאשר החסם התחתון מתקבל.

מרחק בין נקודה ליריעה

משפט: המרחק בין נקודה לישר מתקבל בנקודה שהיא ההטלה האורתוגונלית של הנקודה על היריעה.

הוכחה: זוהי תוצאה ישירה של משפט פיתגורס.



תהי $\hat{P}$ ההטלה האורתוגונלית של P על L . פירוש הדבר ש- $L \perp P\hat{P}$. צריך להראות שלכל $P' \in L$ מתקיים $\|P\hat{P}\| \leq \|PP'\|$. ואכן,

$$\|PP'\|^2 = \|\hat{P}P'\|^2 + \|P\hat{P}\|^2 \geq \|P\hat{P}\|^2$$

ולכן $\|P\hat{P}\| \leq \|PP'\|$.



דוגמה: נמצא את המרחק בין הנקודה $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ לישר $l: 4x - 3y + 7 = 0$. ראשית, נמצא את

הכיוון של הישר. הנקודות $\begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ נמצאות על הישר. לכן כיוון $\begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ או לחילופין $\begin{pmatrix} 21 \\ 28 \end{pmatrix}$ (כפל בסקלר אינו משנה את הכיוון). כעת עלינו למצוא נקודה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ על הישר כך ש-

$$\begin{bmatrix} 1-x \\ 4-y \end{bmatrix} = P - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \end{bmatrix}$$

זוהי ההטלה האורתוגונלית של הנקודה על הישר.

לכן מתקלת מערכת משוואות:

$$4x - 3y + 7 = 0$$

$$21(1-x) + 28(4-y) = -21x - 28y + 133 = 0$$

אפשר לראות שהפיתרון הוא $\begin{pmatrix} 29/25 \\ 25/97 \end{pmatrix}$ ולכן המרחק הוא

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 29/25 \\ 25/97 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -4/25 \\ 3/25 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{5}$$

מרחק בין ישר ליריעה

משפט: בהינתן שני ישרים מצטלבים קיים מישור יחיד אשר מכיל את האחד ומקביל לשני והמרחק בין הישרים הוא המרחק בין הישר הראשון למישור הנ"ל.

דוגמה: נמצא את המרחק בין שני הישרים

$$l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

המרחב שמכיל את l_2 ומקביל ל- l_1 הוא $\pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. המרחק בין מישור זה

לישר l_1 הוא כמו המרחק בין נקודה כלשהי ב- l_1 לבין המישור. אז נמצא את המרחק של $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מ- π .

אנחנו מחפשים נקודה $\begin{pmatrix} 1+t+s \\ s \\ -t+s \end{pmatrix}$ במישור כך ש- $\begin{pmatrix} 1+t+s \\ s \\ -t+s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ וכך ש-
 $\begin{pmatrix} 1+t+s \\ s \\ -t+s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. כלומר, יש לפתור את המשוואות הבאות:

$$(1+t+s) - (-t+s) = 2t+1 = 0$$

$$(1+t+s) + s + (-t+s) = 3s+1 = 0$$

הפיתרון הוא כמובן $t = -\frac{1}{2}, s = -\frac{1}{3}$ ולכן הנקודה היא $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ והמרחק הוא $\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

מרחק בין מישורים

כמובן, ב- $\mathbb{R}^3$ שני מישורים הן נחתכים או מקבילים. אם הם נחתכים המרחק ביניהם מתאפס ואם הם מקבילים מספיק למצוא מרחק של נקודה כלשהי על המישור הראשון מהמישור השני ואת זה אנחנו כעבר יודעים לעשות.

איזומטריות לינאריות

הגדרה: יהיו $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ שני מרחבים אפיניים איקלידיים. פונקציה $f: \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$ תיקרא **איזומטריה לינארית** אם היא העתקה אפינית ו- Df העתקה אורתוגונלית של מרחבים וקטוריים.

משפט: כל איזומטריה לינארית במישור $\mathbb{R}^2$ היא אחת מהבאות:

- הזזה
- סיבוב (ביחס לנקודה כלשהי)
- שיקוף (ביחס לישר כלשהו)
- החלקה (שיקוף והזזה בכיוון הווקטור המאונך לישר השיקוף)

מיון שניוניות

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . **תבנית ריבועית** ב- V היא פונקציה $q: V \rightarrow F$ כך שיש תבנית ביליניארית סימטרית $\phi: V \times V \rightarrow F$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $q(v) = \phi(v, v)$.

דוגמה: נתבון ב- $V = \mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$. אז הפונקציה $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ היא תבנית ריבועית והתבנית הביליניארית המתאימה לה היא המכפלה הסקלרית $\phi(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . **פונקציה ריבועית** ב- V היא פונקציה $Q: V \rightarrow F$ כך ש- $Q(v) = q(v) + \phi(v, v) + c$ כאשר q תבנית ריבועית ב- V , ϕ פונקציונל לינארי ו- $c \in F$ קבוע.

הגדרה: יהי A מרחב אפיו. **פונקציה ריבועית** ב- A היא פונקציה $Q: A \rightarrow F$ כך שקיימת נקודה $P \in A$ כך ש- $G: A_P \rightarrow F$ היא פונקציה ריבועית ב- A_P .

טענה: ההגדרה של פונקציה ריבועית במרחב אפיו אינה תלוי בנקודה P .

הוכחה: יהי A מרחב אפיו ותהי $Q: A \rightarrow F$ פונקציה ריבועית. אז קיימת $P \in A$ כך ש- $G: A_P \rightarrow F$ היא פונקציה ריבועית ב- A_P . תהי $P' \in A$ ונראה שגם $G': A_{P'} \rightarrow F$ פונקציה ריבועית ב- $A_{P'}$. נניח ש- $G(v) = \phi(v, v) + \varphi(v) + c$ כאשר q תבנית ביליניארית סימטרית ב- A_P , ϕ פונקציונל לינארי ו- $c \in F$ קבוע. נגדיר:

$$\begin{aligned}\phi' &: A_{P'} \times A_{P'} \rightarrow F \\ (R, S) &\mapsto \phi(R + (P' - P), S + (P' - P)) \\ \varphi' &: A_{P'} \rightarrow F \\ R &\mapsto \varphi(R + (P' - P)) \\ c' &= c\end{aligned}$$

הגדרה: שניוניות היא קבוצת האפסים של פונקציה ריבועית $Q: A^2 \rightarrow F$. שניוניות ממונת היא שניונית ריקה, בעלת נקודה אחת, ישר או שני ישרים.

דוגמה: נתבון ב- $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. באופן כללי ניתן לכתוב

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

כאשר $ax^2 + 2bxy + cy^2$ החלק הריבועי, $2dx + 2ey$ החלק הריבועי ו- f קבוע.

נוח לכתוב זאת בכתיב מטריצוני באופן הבא:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f$$

נעבור לקואורדינטות חדשות: $x \mapsto x + y, y \mapsto y + v$ ונקבל:

$$\begin{aligned}Q(x + u, y + v) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ &\quad + 2(d + au + bv)x + 2(e + bu + cv)y \\ &\quad + au^2 + 2buu + cv^2 + 2(du + ev) + f\end{aligned}$$

אם קיים פיתרון למערכת המשוואות $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ -e \end{bmatrix}$ ונעבור לעבוד בקואורדינטות המוזזות $x \mapsto x + u, y \mapsto y + v$ נקבל מערכת מהצורה $Q(x + u, y + v) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + f'$ כאשר $f' = au^2 + 2buv + cv^2 + 2(du + ev) + f$ וזהו פשוט יותר לפיתרון והאפסים של $Q(x, y)$ ושל $Q(x + u, y + v)$ הם שקולים עד כדי הזזה.

הגדרה: נתבונן בפונקציה הריבועית על $\mathbb{F}^2$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה סדור:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f$$

אם למשוואה $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ -e \end{bmatrix}$ קיים פיתרון נאמר של- $\{Q(x, y) = 0\}$ יש מרכז.

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור ויהי $a, b \in \mathbb{F}$ כך ש- $0 < a, b$. נגדיר את הקבוצות הבאות ב- $\mathbb{F}^2$:

- **אליפסה:** $\{(x, y): ax^2 + by^2 - 1 = 0\}$
- **היפרבולה:** $\{(x, y): ax^2 - by^2 - 1 = 0\}$
- **פרבולה:** $\{(x, y): ax^2 - y = 0\}$

משפט: תהי $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ריבועית. אז קיימת מערכת קואורדינטות אורתונורמלית ל- $\mathbb{R}^2$ כך שהשניונית של Q , אם לא מנונת, אז אליפסה, היפרבולה או פרבולה.

הוכחה: נסמן $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. אפשר לכתוב $Q(X) = X^t A X + 2BX + f$ כאשר $B \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ ו- $A \in M_2(\mathbb{R})$.

כמו כן, A זו סימטרית ולכן ניתן ללכסן אותה ע"י מטריצה אורתוגונלית U , כלומר $U^t A U = D$ כאשר D אלכסונית ועל האלכסון שלה הערכים העצמיים של A . נסמן $X' = U^{-1}X$. זהו למעשה מעבר לקואורדינטות אורתונורמליות חדשות. אז $X = UX'$. נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{aligned} Q(X) &= Q(UX') \\ &= (UX')^t A (UX') + 2B(UX') + f \\ &= (X')^t (U^t A U) X' + 2(BU)X' + f \\ &= (X')^t D X' + 2(BU)X' + f \end{aligned}$$

בגלל ש- D אלכסונית ניתן לכתוב $Q(x, y) = a(x')^2 + c(y')^2 + 2dx' + 2ey' + f$. נחקור את האפסים של $Q'(x, y) = ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f$. האפסים של Q ושל Q' שקולים עד כדי מעבר לקואורדינטות אורתונורמליות חדשות.

אם $a = 0 = c$ אז $\{2dx + 2ey + f = 0\}$ ישר. אם אחד מ- d, e הוא אפס אז זו נקודה ואם שניהם אפס וגם $f = 0$ אז זה כל המישור ואחרת זו הקבוצה הריקה. בכל מקרה זה מצב מנוון.

אם למשל $c = 0$ ו- $a \neq 0$ אז אנחנו מתבוננים ב- $\{ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$. אם $e = 0$ אז אנחנו במצב מנוון משום שהקבוצה היא או ריקה, או ישר או שני ישרים כתלות בפיתרון המשוואה $ax^2 + 2dx + f = 0$. אם $e \neq 0$ אז זו פרבולה. המקרה ש- $a = 0$ ו- $c \neq 0$ סימטרי.

אם $a \neq 0$ וגם $c \neq 0$ נעשה השמה לריבוע ונקבל:

$$Q'(x, y) = a \left(x + \frac{d}{a} \right)^2 + c \left(y + \frac{e}{c} \right)^2 + f' = 0$$

ניתוח דומה של כל האפשרויות של a, c, f' מראה את הדרוש.



דוגמה: נביא את השניונית $Q(x, y) = 52x^2 + 73y^2 + 72xy + 120x + 160y + 75 = 0$ לצורה נורמלית.

$$A = \begin{bmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{bmatrix}$$

ידוע שהפולינום האופייני של מטריצה דו-ממדית הוא $p_M(x) = x^2 - (\text{tr} M)x + \det M$ לכן

$$p_A(x) = x^2 - 125x + 2500 = (x - 100)(x - 25)$$

לכן הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 100, \lambda_2 = 25$.

נמצא את הווקטורים העצמיים:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 & 36 \\ 36 & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 36 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

מתקיים $\|v_1\| = \|v_2\| = 5$ ולכן המטריצה שמלכסנת את A היא $U = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ומתקיים

$$\begin{aligned} Q' \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= [x \ y] \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 52 & 36 \\ 36 & 73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2[60 \ 80] \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 75 \\ &= [x \ y] \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [200 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 75 \\ &= 100x^2 + 25y^2 + 200x + 75 \end{aligned}$$

לכן $Q'(x, y) = 0$ אם $4(x+1)^2 + y^2 - 1 = 4x^2 + y^2 + 8x + 3 = 0$ זוהי אליפסה שמרכזה

ב- $(-1, 0)$. אז המרכז של האליפסה המקורית הוא $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

