ג'אומטריה ליניארית

ב) יהי $A = \mathbb{R}^3$ עם הבסיס הקנוני. תהא $P = \begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$
ויהי M המישור הנתון ע"י המשוואה $X - 2Z = 0$.

ומשהדלה $\pi : X + 0\cdot y - 2\cdot z = 0$

כפעולה מקדימה לפתרון התרגיל נמצא הצגה פרמטרית
של המישור: הנקודות $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
נמצאות ב-π לכן הצגה פרמטרית שלו הינו

$$\pi : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

א) נמצא את ההיטל האורתוגונלי של P על M.
ההיטל הינו הנקודה $\hat{P} \in M$ שמקיימת $\overrightarrow{P\hat{P}} \perp M$
נסמן $\hat{P} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ אז $\overrightarrow{P\hat{P}} = \hat{P} - P = \begin{bmatrix}x-0\\y-3\\z-5\end{bmatrix}$

מאחר ש- $\hat{P} \in M$ מתקיים.

$$x + 0\cdot y - 2\cdot z = 0$$

מאחר ש- $\overrightarrow{P\hat{P}} \perp M$ מתקיים $\overrightarrow{P\hat{P}} \perp \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$!
$\overrightarrow{P\hat{P}} \perp \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. $\Leftarrow$

$$0 = \left\langle \begin{bmatrix}x\\y-3\\z-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle = 2x + z - 5$$

$$0 = \left\langle \begin{bmatrix}x\\y-3\\z-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle = y - 3$$

קיבלנו מע' משוואות:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2x + z = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$y = 3 \Leftarrow$$

$$x = 2z$$

$$2x + z = 4z + z = 5$$

$$x = 2 \Leftarrow$$

$$y = 3$$

$$z = 1$$

$\Leftarrow$ $\hat{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓ היא ההטלה האורתוגונלית של P על M.

ב) נחשב את המרחק d בין P ו- M.
לפי מה שאנו מכירים מרחק זה הוא $\|\vec{P\hat{P}}\|$.

$$\Rightarrow \quad d = \|\vec{P\hat{P}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \quad ✓$$

$$= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

ג) נמצא הצגה פרמטרית של ישר שעובר דרך P וניצב
ל- M.
הצגה כללית של ישר שעובר דרך P הוא

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

אנחנו צריכים למצוא את וקטור הכיוון $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ שיהיה
מאונך למישור. טומר

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b = 0$$

$$c = -2a \quad ✓$$

אז ניקח למשל $a = 1$ ו- $c = -2$. אז $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

① יהי $A=\mathbb{R}^4$ עם הבסיס הקנוני. תהי M היריעה שנתונה ע"י מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^4 = 0 \\ -x^1 + 2x^2 - x^3 + 4x^4 = 1 \end{cases}$$

(א) נמצא קבוצת יוצרים בלתי תלויה עבור M.

M היא אוסף הפתרונות של מע' המשוואות. אוסף זה הינו יריעה כאשר $M = P_0 + W$

P פתרון כלשהו של המערכת ו- W מרחב הפתרונות של מע' המשוואות ההומוגניות המתאימה.

אם נמצא P_0 כזאת ובסיס $\{w_1,\dots,w_n\}$ של W נקבל שקבוצת יוצרים בלתי תלויה של M היא הקבוצה $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$

כאשר $P_i = P_0 + w_i$ לכל $1\le i\le n$.

מאיפה?

קל לראות שהנקודה $P_0 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ היא פתרון של המערכת (הצבה פשוטה מראה זאת).

נותר למצוא את W. נציג את המע' כמטריצה ונשתמש בתהליך גאוס כדי לדרג אותה

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1+R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$x^1 - x^3 + 6x^4 = 0$$
$$x^2 - x^3 + 5x^4 = 0$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \begin{pmatrix} s-6t \\ s-5t \\ s \\ t \end{pmatrix} : s,t\in\mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -6\\-5\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \right)$$

⇐ קבוצת יוצרים בלתי תלויה עבור M היא
ומשו

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_0}, \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P_0+W_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_0+W_2} \right\}$$

✓

M הינו ממדמ 2 כי W ממדמ 2 ואז
קבוצת היוצרים כוללת שלוש נקודות

ה) נמצא הצגה פרמטרית לישרה המקבילה ל- M
ועוברת דרך הנקודה

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מסעיף הקודם מצאנו את מרחב הכיוונים של M

$$W(M) = \text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

לכן ישרה שמקבילה ל-M יש אותו מרחב כיוונים.
לכן הצגה פרמטרית לישרה המקבילה ל-M
ועוברת דרך P הנתונה היא

$$L: \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = P + t\begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓

ו) נמצא את ההיטל של P על המישור עם
משוואות

$$\begin{cases} x^3 = 0 \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

בכיוון המקביל ל- M.

היטל זה הוא למעשה נקודת החיתוך של L עם המישור

הנתון.

נסמן את ההיטל כ- $\hat{P} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$ ההיטל ממישור

הנתון לכן $x^3 = x^4 = 0$. נותר למצוא את x^1, x^2.

צריך ש- $\overrightarrow{P\hat{P}}$ יהיה מקביל ל- M (במובן התחש, שהרי $P\hat{P}$ ישר ו- M מישור...)

$\hat{P}$ גם על המישור L לכן יש t, s כך ש-

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x^1 &= 1 - 6t + s \\ x^2 &= 1 - 5t + s \\ 0 &= 1 + s \\ 0 &= t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = 0,\ s = -1$$

$$\Rightarrow x^1 = 1 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1 - 1 = 0$$

⇐ ההיטל של P על המישור הנתון הוא

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אך $\overrightarrow{P\hat{P}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ מקביל (במובן התחש) ל-M.

חלק III

(7) תהי $f: A_1 \to A_2$ העתקה בין שני מרחבים אפיניים מעל אותו שדה F. (נניח שאינם ריקים!)

נוכיח ש- f אפינית אמ"מ לכל $P_0,\dots,P_n \in A_1$ ולכל $\lambda_0,\dots,\lambda_n \in F$ רק ש- $\lambda_0+\dots+\lambda_n=1$ מתקיים

$$f(\lambda_0 P_0+\dots+\lambda_n P_n)=\lambda_0 f(P_0)+\dots+\lambda_n f(P_n)$$

($\Leftarrow$) יהיו $P_0,\dots,P_n$, $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ כנ"ל. אז:

$$f\Big(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P_i\Big) \underset{\text{הגדרה}}{=} f\Big(P_0+\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(P_i-P_0)\Big) =$$

$$\underset{f\ \text{אפינית}}{=} f(P_0)+Df\Big(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(P_i-P_0)\Big) =$$

$$\underset{Df\ \text{ליניארית}}{=} f(P_0)+\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\, Df(P_i-P_0) =$$

$$\underset{f\ \text{אפינית}}{=} f(P_0)+\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\big[f(P_i)-f(P_0)\big] =$$

$$\underset{\text{הגדרה}}{=} \sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(P_i) \quad ✓$$

($\Rightarrow$) תהי $P_0 \in A_1$ (כאן משתמשים בכך שהם לא ריקים) ונגדיר פונקציה $Df: V_1 \to V_2$ ע"י

$$Df(v) = f(P_0+v) - f(P_0)$$

צ"ל אי תלות ב- P_0 !!!

-2

נראה ש- Df ליניארית ונקבל את הדרוש.

יהיו $v,w \in V_1$, $a,b \in F$ ונסמן $u=\vec{0}$ $c=1-a-b$.

אז מתקיים:

$$Df(av+bw) = Df(av+bw+cu) =$$

$$\underset{\text{הגדרה}}{=} f(P_0+av+bw+cu) - f(P_0)$$

נשים לב ש- $P_0+av+bw+cu$ הוא למעשה

צירוף אפיני של 3 נקודות P_1, P_2, P_3

שמקיימות

-1-

$$\left.\begin{aligned} v &= P_1 - P_0 \\ w &= P_2 - P_0 \end{aligned}\right\}$$ מדוע זה אפשרי?

$$u = P_3 - P_0$$ (ולמעשה $P_3 = P_0$!)

$$\Rightarrow Df(av+bw) = f(aP_1 + bP_2 + cP_3) - f(P_0)$$

$$\underset{\text{f שומרת צירופים אפיניים}}{=} \big(af(P_1) + bf(P_2) + cf(P_3)\big) - f(P_0) =$$

$$\underset{\text{הגדרה}}{=} \Big(f(P_0) + a[f(P_1) - f(P_0)] + b[f(P_2) - f(P_0)] + c[f(P_3) - f(P_0)]\Big) - f(P_0) =$$

$$= a[f(P_1) - f(P_0)] + b[f(P_2) - f(P_0)] + c[f(P_3) - f(P_0)] =$$

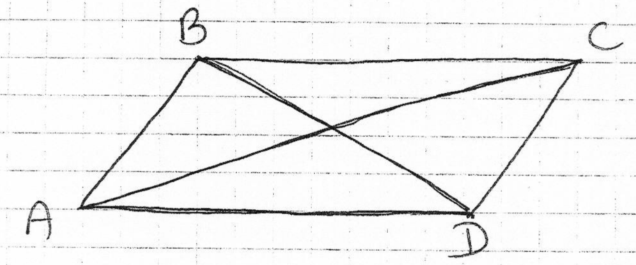
$$\underset{P_3 = P_0}{=} a[f(P_1) - f(P_0)] + b[f(P_2) - f(P_0)] =$$

$$\underset{\text{הגדרת } v, w}{=} a[f(P_0 + v) - f(P_0)] + b[f(P_0 + w) - f(P_0)] =$$

$$\underset{\text{הגדרה}}{=} a\,Df(v) + b\,Df(w)$$

כלומר הראנו ש- Df ליניארית ולכן f אפינית!

4) נוכיח שהאלכסונים של מקבילית לא מנוונת נחתכים בנקודה שהיא נקודת האמצע של שני האלכסונים.



ABCD מקבילית. כלומר

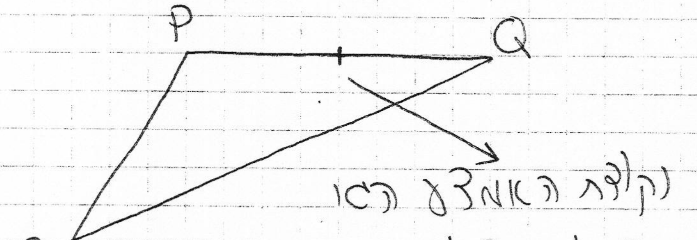
$$\vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AD}+\vec{DC}$$

$$\boxed{\vec{AB} = \vec{DC}}$$ (ונשתמש רק בשוויון זה)

$$\vec{AD} = \vec{BC}$$

אנחנו רוצים להראות שנקודת האמצע של BD היא נקודת האמצע של AC.

ראינו בכיתה שבאופן כללי מתקיים הקשר הבא:



$$\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q$$

אז אנחנו רוצים להראות ש-

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D = \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C$$

לפי ההגדרה של חיבור אפיני מתקיים

$$\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D = A+\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD} =$$

$$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C = D+\frac{1}{2}\vec{DA}+\frac{1}{2}\vec{DC}$$

כדי להראות ש- $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C$

מספיק להראות שההפרש הינו $\vec{0}$. ואכן:

$$\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D\right)-\left(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C\right)=$$

$$=\left(A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)-\left(D+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)=$$

$$=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=$$

$$=\cancel{\overrightarrow{DA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}}-\cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=0$$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

כי זו מקבילית

נסמן $P=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D$ נקודת האמצע של BD

$Q=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C$ נקודת האמצע של AC

קיבלנו ש- $P-Q=\vec{0}$, כלומר $P=Q+\vec{0}$

אבל לפי ההגדרה של מרחב אפיני מתקיים

$Q+\vec{0}=Q \Rightarrow P=Q$,

כלומר האלכסונים של המקבילית $ABCD$ נחתכים בנקודה שהיא נקודת האמצע של שני האלכסונים.

⑥ יהי $\mathbb{P}(L)$ ישר פרויקטיבי מעל שדה F. יהיו $P, Q, R \in \mathbb{P}(L)$ שלוש נקודות שונות ונניח ש-

$$P = p(u) \quad Q = p(v) \quad R = p(u+v)$$

כאשר p ההטלה הטבעית! (u,v) בסיס סדור של L.
נראה שלכל $X \in \mathbb{P}(L)$ ולכל $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}(F^2)$ מתקיים
$X = p(\lambda u + \mu v)$ אמ"מ $[P, Q, R, X] = [\lambda : \mu]$.

<u>תזכורת</u>: קיימת העתקה פרויקטיבית יחידה שמעבירה 3 נקודות שונות A, B, C ל- $\infty, 0, 1 \in F\cup\{\infty\} \cong \mathbb{P}(F^2)$ המתאימה. $[A, B, C, D]$ הוא התמונה של D תחת העתקה זו. העתקה זו היא איזומורפיזם וההעתקה הלינארית המתאימה לה היא איזומורפיזם.
כעת נוכיח את הדרוש.

($\Leftarrow$) נניח ש- $p(x) = X = p(\lambda u + \mu v)$.
תהי $g = P(f)$ ההעתקה הפרויקטיבית כך ש- $g(P) = \infty$ $g(Q) = 0$ $g(R) = 1$
העתקה פרויקטיבית היא העתקה $P(f) : \mathbb{P}_1 \setminus \ker f \to \mathbb{P}_2$
$[v] \longmapsto [f(v)]$
כאשר $f : V_1 \to V_2$ לינארית. במקרה שלנו, $V_1 = L$, $V_2 = F^2$.
נבדוק מהי התמונה של X תחת g.

$$g(X) = g([x]) = g([\lambda u + \mu v]) =$$

$$= [f(\lambda u + \mu v)] = [\lambda f(u) + \mu f(v)] = [\lambda : \mu]$$

f איזומורפיזם; (u,v) בסיס $\Leftarrow$ $(f(u), f(v))$ בסיס של F^2 ומכאן השוויון (כלומר כי פשוט ההגדרה של קואורדינטות הומוגניות).

($\Rightarrow$) נניח ש- $[P, Q, R, X] = [\lambda : \mu]$. ותהי g כמו קודם. אז נתון ש- $g(X) = [\lambda : \mu]$. כלומר

$$g(X) = [\lambda f(u) + \mu f(v)] =$$

הגדרה של קואורדינטות הומוגניות

$$= [f(\lambda u + \mu v)] =$$

f לינארית

$$= g([\lambda u + \mu v])$$

הגדרת g

אבל g איזומורפיזם ובפרט חח"ע.

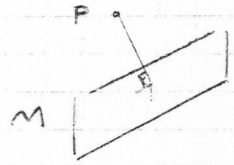
$\Leftarrow$ $p(\lambda u+\mu v) = [\lambda u + \mu v] = X$.

סוף

2. (א) הכיוון הניצב ל-M הוא $[1,0,-2]^t$ *

נמצא את נקודת החיתוך של ישר בכיוון זה מנק' P

עם M:



$$P + t\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}t\\3\\5-2t\end{pmatrix}$$

כדי שזה יהיה על M: $t-2(5-2t)=0$

$$t-10+4t=0$$

$$5t=10$$

$$t=2$$

כלומר, ההיטל האורתוגונלי הוא: $Q=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

(ב) המרחק בין P ל-M הוא המרחק בין P ל-Q

$$d(P,Q)=\sqrt{(0-2)^2+(3-3)^2+(5-1)^2}$$

$$=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$$

(ג) ההצגה הפרמטרית היא כפי שראינו ב-(א):

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}}_{\text{נקודה + כיוון}}=\underbrace{\begin{pmatrix}t\\3\\5-2t\end{pmatrix}}_{\text{נקודה עם פרמטר}}$$

אפשר לומר:

$$\begin{cases} y=3 \\ 2x+z=5 \end{cases}$$

הצגה אחרת

*נראה שהכיוון הנ"ל ניצב ל-M.

$(0,0,0)\in M$ $(2,0,1),(2,1,1)\in M$

$\ell: (0,0,0)+t(2,0,1)\subseteq M$

$\ell': (0,0,0)+s(2,1,1)\subseteq M$

נשים לב שהישרים אכן שונים כלומר הנק' אינן קולינאריות.

$$[2,0,1]\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}=0=[2,1,1]\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$$

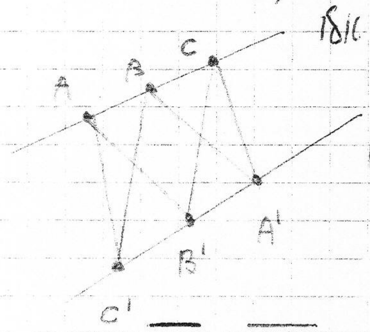
הכיוון המדובר ניצב לשני כיוונים שונים במישור לכן

ננסח קודם את משפט פאפוס עצמו!

5 (א) יהיו L ו- L' שני ישרים ב- P^2

$A,B,C\in L$ $\quad$ $A',B',C'\in L'$

והישרים אינם נחתכים באחת מנקודות אלו



(נסמן ב- $\overline{PQ}$ את הישר דרך הנקודות P ו- Q ונסמן ב- $\cap$ את נק' החיתוך של הישרים ℓ ו- ℓ'.)

אז- $\overline{AB'}\cap\overline{A'B}$, $\overline{AC'}\cap\overline{A'C}$, $\overline{BC'}\cap\overline{B'C}$ קולינאריות.

עכשיו הדואלי!

יהיו A ו- B שתי נקודות ב- P^2

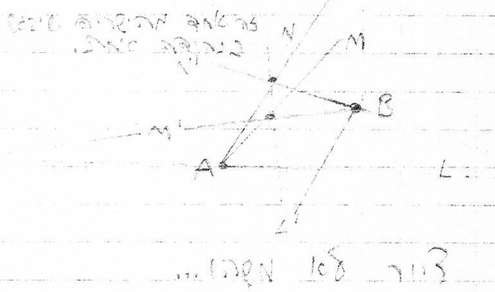
$A\in L,M,N$ ישרים $\quad$ $B\in L',M',N'$ ישרים

ואף אחד מן הישרים הנ"ל אינו הישר $\overline{AB}$

אז הישרים ~~[illegible]~~ , $\overline{M\cap L'\ \ M'\cap L}$, $\underbrace{\underset{\text{נקודה}}{M\cap L'}\ \ \underset{\text{נקודה}}{M'\cap L}}_{\text{ישר הנקבע ע"י 2 נקודות}}$,

$\overline{M\cap N'\ \ M'\cap N}$

נפגשים בנקודה אחת.



ציור עוד משהו...

(ב) משפט פאפוס האפיני:

אם L , L' שני ישרים ב- A^2

$A,B,C\in L$ $\quad$ $A',B',C'\in L'$ והישרים

אינם נחתכים בנקודות אלו

ובנוסף $\overline{AB'}\parallel\overline{A'B}$, $\overline{AC'}\parallel\overline{A'C}$ אז $\overline{BC'}\parallel\overline{B'C}$.

במישור הפרויקטיבי יהיו שני ישרים L , L' ושש נקודות

$A,B,C\in L$ $\quad$ $A',B',C'\in L'$ כך שהישרים אינם

נחתכים בנקודות אלו. הישרים
$\overline{A'C}$ ו- $\overline{AC'}$ נחתכים בנקודה וכך גם
$\overline{A'B}$ ו- $\overline{AB'}$. נסמן את הנקודות P ו- Q
בהתאמה. קיימת התאמה בין P^2 ל-
$P^1 \cup A^2$. בעצם קיים מודל פרוייקטיבי שמתקבל
מהוספת "ישר אינסוף" למישור האפיני כך שכל
אלומה של ישרים מקבילים נפגשים כולם באותה
הנקודות על הישר.
דרך הנק' P ו- Q עובר
ישר יחיד l וניתן להניח שזה ישר
האינסוף במודל כלומר במרחב האפיני
שני זוגות הישרים מקבילים. לפי משפט
פאפוס האפיני גם הזוג השלישי $\overline{B'C}$, $\overline{BC'}$
מקביל כלומר נפגש בנקודת אינסוף (נשים
לב שלא השפענו על התנאי שהישרים אינם
נחתכים באחת מ-6 הנק' שנשמר תחת המעבר)
כלומר כל נקודות החיתוך הן על ישר
האינסוף ולכן על ישר פרוייקטיבי אחד!

(אפילו הקיבוע ברור הוא לא בטוח אם לזה הייתה
הכוונה בשאלה...)

* בעצם, ~~משמש~~ הישר $\overline{PQ}$ עובר ל- P^1 בהתאמה
$A^2 \cup P^1 \approx P^2$ שמייצג את ישר האינסוף. ישרים
שנחתכים במישור האפיני קובעים נקודה ב- A^2
וישרים שמקבילים במישור האפיני קובעים נקודה
ב- P^1 כך שב- P^2 כל שני ישרים נחתכים.
עם הענין הינו שבמישור הפרוייקטיבי "ישר האינסוף" הוא
הוא ישר ככל הישרים

מדוע המעבר לא משפיע על התנאי?

כי אם שני ישרים נחתכים בנקודה פרוייקטיבית אז תחת המעבר הם יחתכו באותו נקודה אפינית או יקבלו את זו עברה לנקודת אינסוף.

הדבר השני והחשוב -
אם הם יחתכו בנק' אחרי המעבר הם בהכרח נחתכו לפני המעבר (יתכן תיאורטית שהם יקבלו לאחר המעבר לטיפנ וזה נספר).

7. נניח ש-f אפינית. $f(P+v) = f(P) + Df(v)$

כש $Df: V \longrightarrow V$ ל"ל

יהיו $P_0, \dots, P_n \in A_1$ $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in F$

$\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i\right) = f\left(P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - P_0)\right) =$$

$$= f(P_0) + Df\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - P_0)\right) =$$

$$= f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Df(P_i - P_0) =$$

$$= f(P_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \big(f(P_i) - f(P_0)\big) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(P_i)$$

כעת נניח ש-f שומרת על צירופים ~~[illegible]~~ אפיניים (כלומר התנאי השני שמופיע בשאלה) ~~[illegible]~~ ונראה שהיא אפינית.

* תהי $P_0 \in A_1$ ~~[illegible]~~

ונגדיר $\varphi : V \longrightarrow V$ ע"י $\varphi(v) = f(P_0 + v) - f(P_0)$.

נראה ש-φ לינארית - יהיו $v, w \in V$ $\alpha, \beta \in F$

נסמן $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. ~~[illegible]~~ ונסמן $P_1 = P_0 + v ; P_2 = P_0 + w$

$\varphi(\alpha v + \beta w) =$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$= f(P_0 + \alpha v + \beta w) - f(P_0) =$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$= f\big(P_0 + \alpha(P_1 - P_0) + \beta(P_2 - P_0)\big) - f(P_0) =$$

$$= f(\gamma P_0 + \alpha P_1 + \beta P_2) - f(P_0) =$$

$$= \gamma f(P_0) + \alpha f(P_1) + \beta f(P_2) - f(P_0)$$

$$= f(P_0) + \gamma\big(f(P_0) - f(P_0)\big) + \alpha\big(f(P_1) - f(P_0)\big)$$

$$+ \beta\big(f(P_2) - f(P_0)\big) - f(P_0) =$$

$$= \alpha\left(f(P_1) - f(P_0)\right) + \beta\left(f(P_2) - f(P_0)\right)$$
$$= \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w)$$

לכן φ לינארית (וכפי שראינו אינה תלויה בבחירת P_0). מכאן שלכל $p \in A$, $v \in V$

$$f(p+v) = f(p) + \varphi(v)$$

כלומר f אפינית.

* בהנחה ש- $A \neq \emptyset$ אחרת ברור מה היא ההעתקה (כאשר גם $A_2 = \emptyset$ והיא אפינית כפי שהגדרנו באופן ריק כי לכל $p \in A$, ולכל $v \in V$

$$f(p+v) = f(p) + \varphi(v)$$

לכל $\varphi: V \to V$ לינארית שנבחר (אבל זה מקרה לא כל-כך מעניין).

ב) .3

$$Q(x,y) = 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10x + 20y + 24$$

$$= [x \;\; y]\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-10 \;\; 20]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 24$$

נמצא וקטורים עצמיים ל-A:

$$f_A(\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2}$$

$$\lambda_1 = 10 \qquad \lambda_2 = 5$$

$$(A - \lambda_1 Id)v_1 = 0 \qquad (A - \lambda_2 Id)v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{matrix}$$

$v_1 = [2 \;\; 1]^t$ נבחר

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{matrix}$$

$v_2 = [1 \;\; -2]^t$ נבחר

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{5}$$

נמצא מטריצה אורתוגונלית U שמלכסנת את A:

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = U\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ ~~[illegible]~~ החלפת משתנה-

$$U^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$Q'(x', y') = Q(x, y) =$$

$$\cancel{[\ \ ]\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&2\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}+[\ \ ]}$$

$$=\frac{1}{5}[x' \quad y']\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&2\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt5}[-10 \quad 20]\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+24=$$

$$=\frac{1}{5}[x' \quad y']\begin{bmatrix}10&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt5}[-10 \quad 20]\begin{bmatrix}2x'+y'\\x'-2y'\end{bmatrix}+24=$$

-1

$$=\frac{1}{5}(10x'^2+5y'^2)+\frac{1}{\sqrt5}(-20x'-10y'+20x'-40y')+24=$$

$$=2x'^2+y'^2+\frac{1}{\sqrt5}\cdot(-50y')+24$$

$$=2x'^2+(y'-5\sqrt5)^2+24-125$$

$$=2x'^2+(y'-5\sqrt5)^2-101$$

המעבר מ- $[x \quad y]$ ל- $[x' \quad y']$ הוא טרנס' קשיחה (אורתוגונלית) לכן קיבלנו את האליפסה:

$$\frac{2}{101}x^2+\frac{1}{101}(y-5\sqrt5)^2-1=0$$

עפ כפ' טרנס' אורתוגונלית.

מאיפה מוכרח אורתוגונלית?

א) המרכז של האליפסה לאחר הטרנס' הוא $(0, 5\sqrt5)$ כלומר המרכז המקורי הוא:

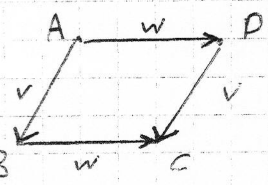
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}0\\5\sqrt5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\sqrt5\end{bmatrix}$$

-1 U הפוך שכחו!!

$$=\begin{bmatrix}5\sqrt5\\-10\sqrt5\end{bmatrix}$$

4. $A, B, C, D \in \mathbb{A}$ נקודות של מקבילית

במרחב אפיני $\mathbb{A}$ כלומר:



$$AB = DC = v$$

$$AD = BC = w$$

האלכסון בין A ל-C הוא: $A + t(C-A)$ $t \in [0,1]$

" B ל-D ": $B + s(D-B)$ $s \in [0,1]$

נמצא את נקודת המפגש שלהם:

$$A + t(C-A) = A + tAC = B + sBD = B + s(D-B)$$

$$AC = AB + BC \qquad BD = BC + CD = $$
$$= BC - DC = BC - AB$$

$C - A = B - A + C - B$ כי

$A + (B-A) + (C-B)$ כי

$= B + (C-B) = B$

$$A + t(AB + BC) = B + s(BC - AB)$$

$$A + t(v+w) = B + s(w-v) = (A+v) + s(w-v)$$

$$A + tv + tw = A + sw + (1-s)v$$

$$\Longleftrightarrow \quad tv + tw = sw + (1-s)v$$

$$\Leftrightarrow (1-s-t)v + (s-t)w = 0$$

הנחנו שהמקבילית לא מנוונת כלומר הוקטורים בת"ל (באופן שקול - לא כל הנקודות על ישר אחד שלא שקול לכך ש- $v = c \cdot w$ עבור $c \in F$)

לכן נובע:

$$\begin{cases} 1 - s - t = 0 \\ s - t = 0 \end{cases}$$

והפתרון הוא $s = t = \frac{1}{2}$*. כלומר -

אמצע הקטע AC אמצע הקטע BD

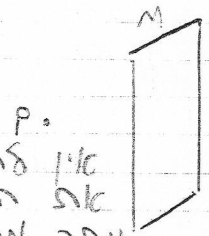
$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = A + \frac{1}{2}AC = B + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D$$

כלומר אמצעי האלכסונים הם אותה הנקודה.

* בהנחה ש- $\operatorname{char} F \neq 2$ אחרת הם לא נפגשים בכלל.

טיוטה

2. א) ניקח שלוש נק' שאינן קולינאריות על M כדי לקבל הצגה פרמטרית-



אין לקחת את הציור יותר מדי ברצינות (להמחשה בלבד, כמו שאומרים)

$$(0,0,0) \in M$$

$$\Downarrow$$

$$l = (0,0,0) + t(2-0,\ 1-0,\ 0-0) \subseteq M$$

$$(2,1,1) \in M$$

$$(2,1,1) \notin l$$

$$l' = (0,0,0) + s(2-0,\ 1-0,\ 1-0) \subseteq M$$

$$M = (0,0,0) + t(2,1,0) + s(2,1,1)$$

$$M = (2(t+s),\ t+s,\ s)$$

נראה שהכיוון $(1,0,-2)$ ניצב למישור M

בשם הדידקטיקה נסמן מעתה כיוונים ב-$[x,y,z]$ ונקודות ב-(x,y,z).

הכיוון של l - $[2,1,0]$