①

31.10.05

הסתברות

המרצה: רז קופרמן raz@math.huji.ac.il

מתמטיקה 303 ס'ל 6584159

הסתברות - התוליה התלשה!

תורות מתמטית מגיעות עם: - תוקים / אקסיומות

- אינטואיציה / משמעות

- יישומים

אחת הסיבות שבהסתברות יש קושי היא ששלוש השרבות האלה מתחלות להתערבב ולא ברור אפה אחד מתחול והשני נגמר.

הוא היה אומר לשכות מהאינטואיציה, אבל אי אפשר. וגם לא צריך. היא עוזרת לנו וזה כל! (כן בטח...)

נטל קוביה בשלת 6 פאות (היא הוגנת וכל החרא הזה).

מה הסיכוי שהיא תיפול על אחת מהפאות? $\frac{1}{6}$.

איך אנחנו יודעים את זה? מראש אנחנו לא יודעים את התוצאה. אבל אם נטל את הקוביה n פעמים ונגדיר k_n - מספר הפעמים שיצא "4" ב- n הטלות (קבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \frac{1}{6}$$

אבל זאת רק אינטואיציה. אי אפשר לעבוד עם זה בתור אקסיומה.

מושג ההסתברות הוא ממש עתיק. ומשחקי מזל תפסו חלק נרבד מהמתמטיקה הישימושית העתיקה. חלק מהדברים שנלמד בקורס הולכים פי אחורה בזמן, בעיקר לברנולי. אבל אז לא הייתה תורה מתמטית הסתברותית. זה הכל היה מבוסס בעיקר על אינטואיציה.

קולמוגורוב (רוסים כבוד!) פיתח את התורה ההסתברותית כתורה מתמטית.

31.10.05

המשמעות האינטואיטיבית של הסתברות תמיד קשורה בניסוי שהתוצאה שלו לא ודאית. הבעיה פה היא שניסוי זה לא משהו מתמטי. אז הדבר הראשון שאנחנו צריכים הוא מודל מתמטי לניסוי ולתוצאות שלו - רדי שנוכל לכמת את זה.

ניסוי מאופיין ע"י אוסף כל התוצאות האפשריות שלו, כלומר קבוצה. הקבוצה הזאת היא הדבר הכי בסיסי בהסתברות היא נקראת מרחב המדגם. בד"כ נסמן אותה ע"י Ω.

דוגמאות

① הטלת מטבע. - זה ברמה הסבורית. ברמה המתמטית הניסוי הזה הוא בעל שתי תוצאות אפשריות שנירן לקרוא להן בכל שם שנבחר. אז $\Omega = \{H, T\}$. קיימת גם הסתברות כל שהי שהמטבע תיפול בצורה עומדת ולא תלביע לא לכאן ולא לכאן. אם אנחנו רוצים שהמודל המתמטי שלנו יציג את האופציה הזאת צריך להוסיף אותה למרחב המדגם. ברגע שבחרנו מרחב מדגם בענו את כל תוצאות הניסוי האפשריות ואין מלבדן.

② הטלת מטבע ב פעמים. מה מרחב המדגם? אנחנו צריכים לשאול את עצמנו על מה הסתכלנו: מרחב המדגם צריך להיות בנוי מאיברים שמראים שלוש תוצאות - כל אחת ראש או זנב.

ופורמלית $\Omega = \{(a,b,c) : a,b,c \in \{H,T\}\}$ או

$\Omega = \{H,T\} \times \{H,T\} \times \{H,T\}$ או

$\Omega = \{H,T\}^3$

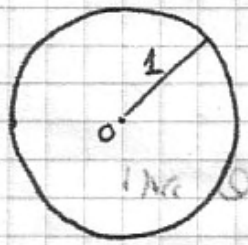
כמובן אפשר גם לפרט ממש את כל התוצאות אבל זה די מעייף. אבל יכול להיות שמה שמעניין אותנו הוא לא הרצף אלא מה יצא לנו יותר - H או T. ואז מרחב המדגם שמעניין אותנו הוא $\Omega = \{H,T\}$. אבל אז אין שום משמעות לשאלה - מה קיבלנו בהטלה הראשונה? זה לא בא ליד ביטוי במרחב המדגם שלנו.

3) הטלת שתי קוביות שונות (כלומר אפשר להפריד ביניהן).
אז כמו קודם מרחב המדגם שלנו הוא אוסף של זוגות
$\Omega = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$ או
$\Omega = \{1,\dots,6\}^2$

4) הטלת שתי קוביות זהות (כלומר אי אפשר להבדיל ביניהן).
ראן אנחנו דרירים להתייחס לספירות כפולות ולהימנע מהן.
$\Omega = \{(i,j) : 1 \le i \le j \le 6\}$
סידרנו את התוצאות לפי הסדר ורק נמנענו מספירה כפולה.
נשים ♡ שלה מרחב מדגם שונה מאוד מהמרחב בדוגמה (4).
מספר האיברים בהם שונה!

5) משך חיי של פיל (בשנים) - $\Omega = \mathbb{R}^+$ או $\Omega = [0,200]$.
זאת כבר יותר שאלה פילוסופית ואם תשאלו אותי סתם
התחכמות.

6) זורקים חיצים על עיגול היחידה.



מרחב המדגם תלוי במה שמעניין אותנו.
למשל $\Omega = \{(r,\theta) : 0 \le r,\ \theta \in [0,2\pi)\}$
$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ \theta \in [0,2\pi)\} \cup \{0,1\}$
מסמל אם פגענו בעיגול או לא.

7) הטלת מטבע ∞ פעמים. $\Omega = \{a_1 a_2 \dots : a_j \in \{H,T\}\} = \{H,T\}^{\aleph_0}$
אפשר גם לרתוב $\Omega = [0,1]$ אם נתייחס לתוצאה כשבר
בינארי $0.01101001\dots$ - ולכל הטלה מתאים מקום בשבר.

ב-1827 בוטניסט בשם Robert Brown הסתכל על תלקיקים
מתחת למיקרוסקופ. למסלול התלקיק קראו תורת בראון.
מה מרחב המדגם שמתאר את המסלול האפשרי?

$$\Omega = C([0,1];\mathbb{R}^3)$$

אוסף הפונקציות הרציפות — במשק שניה אחת — במרחב $\mathbb{R}^3$

הפוגה לעניינים טכניים:

מתרגלת: קלוד פיגיה

תרגולים - נגיש והם "בדקו" אבל אין בקרה.

אבלא עושים תרגולים - בעיה שלנו!

ספרים - Sheldon Ross, First Course in Probability

נסטה ממנו גם בתכנים וגם בסימונים

Text Book טוב במובן ההיסטורי של המילה - של Feller

שלות קבלה - מי שרוצה להיפגש שישלח אי-מייל

מובטחת פגישה תוך יומיים.

דרישות קדם - מעט מאוד: מה שחשוב אינפי 1 וקומבינטוריקה

התרגול הראשון "ועד לרינון קומבינטוריקה

מבחן - יש הוראה לכל המורים למתמטיקה לעשות מבחנים קשים.

אנקדוטה - הוא רוחב מבחן והוא נראה די קל.

בבוקר הבחינה הוא מתליט שהוא ממש קל.

ואז $2/3$ נרשלים.

ומה שהוא רוצה לחדיד - שורה תחתונה: המבחן יהיה

ממש קשה - אז ללמוד היטב.

המשך דוגמאות:

(8) מטלים מטבע. לפי התוצאה או שהתלמיד הולך למבחן ועובר

או נרשל או שהוא ממשיך לישון ומודדים את זמן השינה בשעות.

$\Omega = \mathbb{R}^+ \cup \{F, P\}$ או שאפשר לפרט יותר

$\Omega = \{H\} \times \{F, P\} \cup \{T\} \times \mathbb{R}^+$

לסיכום:

מרחב מדגם = קבוצה.

כל נקודה ב- Ω ממופית באופן חח"ע לתוצאת הניסוי

③

כל שאלה: בהסתברות תמיד דרוכה להתחיל בהגדרה מדוייקת
של מרחב המדגם. אחרת - אין על מה לדבר!

ניסוי

מטילים קוביה. מה מרחב המדגם? $\Omega = \{1, \dots, 6\}$
נניח שמה שמעניין אותנו הוא האם התוצאה זוגית או לא.
התוצאה זוגית הוא איפיון של התוצאה. לכל נקודה ממרחב
המדגם ניתן לקבוע אם האמירה שהתוצאה זוגית נכונה
או לא. עבור $\{2,4,6\}$ התוצאה זוגית.
"התוצאה זוגית" היא תת קבוצה של Ω - אוסף הנקודות
שעבורן האמירה הזאת נכונה. $\{2,4,6\} \subset \{1, \dots, 6\}$.
לתת קבוצה של מרחב המדגם קוראים מאורע. מאורע זה תכונה
של התוצאה ולכל נקודה במרחב המדגם ברור אם התכונה
הזאת מתקיימת או לא - זה ברמה האינטואיטיבית. מבחינה
מתמטית מאורע זה תת-קבוצה של מרחב המדגם. מאחר
שזיהינו מאורע כאובייקט מתמטי תת קבוצה ניתן לעשות עליו
את כל הפעולות שאנחנו יודעים לעשות על תתי קבוצות.
אוסף כל המאורעות = כל תת הקבוצות של Ω. מסמנים
אותו ע"י 2^{Ω} או $\mathcal{P}(\Omega)$. בקורס הזה אנחנו לא נדבר בד"כ
על כל תתי-הקבוצות. את זה עושים בתורת המידה בשנה ג.
אז אנחנו לא נסתכל אף פעם על כל אוסף המאורעות, אבל:

כאשר מגדירים קבוצת מאורעות דורשים:

① אם $A \subseteq \Omega$ מאורע אז גם A^c מאורע.

② אם $A, B \subseteq \Omega$ מאורעות אז גם $A \cup B$ מאורע

③ Ω מאורע

אוסף $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ של תתי קבוצות של Ω המקיים את
התכונות לעיל נקרא אלגברה של תת קבוצות

הגדרה: תהי $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ משפחה של תת-קבוצות של Ω. נאמר ש-$\mathcal{F}$ היא אלגברה של מאורעות אם:

א. $\emptyset \in \mathcal{F}$

ב. אם $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ אז $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

ג. אם $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ אז $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

הוכחה:

א. $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{F}$

ב. הוכחה באינדוקציה. כמו קודם.

ג. לפי חוק דה-מורגן $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c$ מסה"כ ☺

הערה: $\mathcal{F}$ נקראת גם "שדה של קבוצות". שם נוסף הוא σ-אלגברה.

דוגמה: תהי Ω קבוצה כלשהי. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ נקראת האלגברה הטריוויאלית. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ נקראת האלגברה הבדידה.

דוגמה: תהי Ω קבוצה כלשהי. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ או } A^c \text{ בת-מנייה}\}$ נקראת האלגברה של הקבוצות המנייות או הקו-מנייות.

הגדרה: תהי $\mathcal{F}$ אלגברה של מאורעות על Ω. פונקציה $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ נקראת **פונקציית הסתברות** אם:

א. $P(\Omega) = 1$

ב. אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרים בזוגות, כלומר $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$, אז $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

הגדרה: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ נקרא **מרחב הסתברות** אם Ω קבוצה כלשהי, $\mathcal{F}$ אלגברה של מאורעות על Ω, ו-P פונקציית הסתברות על $\mathcal{F}$.

דוגמה: תהי Ω קבוצה כלשהי. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ נקראת ההסתברות הקלאסית.

דוגמה: תהי Ω קבוצה כלשהי. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ נקראת ההסתברות הבדידה.

דוגמה: תהי Ω קבוצה כלשהי. $\mathcal{F}$ האלגברה של הקבוצות המנייות או הקו-מנייות. $P(A) = 0$ אם A מנייה, $P(A) = 1$ אם A קו-מנייה.

משפט שאנו נוכיח בהמשך הוא שכל הסתברות ה"טבעית" מהסוג הזה היא אכן הסתברות במובן שנתנו להגדרה. אולם הוא נותן את הבסיס לתכונות ההסתברות שאפשר להניח את קיומן ולהגדיר את ההסתברות כפונקציה שמקיימת את התכונות הללו. היתרון בגישה זו הוא שהיא מאפשרת לנו להתמודד עם מגוון רחב יותר של בעיות, שבהן לא ברור מהי ההסתברות הנכונה לקבוע עבור מאורעות מסוימים.

הגדרה (לא מדויקת) יהי Ω מרחב מדגם. מערכת $\mathcal{F}$ של תת-קבוצות של Ω נקראת **σ-אלגברה** (או σ-שדה) של מאורעות אם:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (סגירות תחת איחוד בן מניה).
3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (סגירות תחת השלמה).

הגדרה: אם $\mathcal{F}$ אלגברה של מאורעות נקרא $\mathcal{F}$ **מחלקת** אם $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ לכל $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרים זה לזה.

משפט (לא מדויק) אם $\mathcal{F}$ מחלקת אז $\mathcal{F}$ סגורה תחת איחוד בן מניה.

הגדרה (לא מדויקת) יהי Ω מרחב מדגם. **מדידה** של Ω היא מערכת $\mathcal{F}$ של תת-קבוצות של Ω המקיימת את התכונות הבאות:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- יהיו $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ (סגירות תחת איחוד).
- יהי $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ (סגירות תחת השלמה).

מאורעות – $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ בדיוק מקיים את ההכלות הנ"ל: אם שאנחנו מדברים על הסתברות) ולכן בפ"ב מקיימים את הבקשה של $\mathcal{F}$ שהיא מחלקת. הדבר נובע מכך שקבוצת המאורעות היא קבוצת תת-הקבוצות. היינו יכולים להניח שקבוצת המאורעות היא קבוצת כל תת-הקבוצות האפשריות. אולם הוא את הבקשה של $\mathcal{F}$ וכך אנחנו נוכל להגדיר את ההסתברות הנ"ל, $\mathcal{F}$ אולי היא המשפחה – אלה ש

דוגמאות (לא מדויק עדיין)

1. הקבוצה $\{\Omega, \emptyset\}$ היא אלגברה של Ω. נקראת **האלגברה הטריוויאלית**.
2. יהי Ω מרחב מדגם. קבוצת החזקה $\mathcal{P}(\Omega)$ היא אלגברה של Ω. נקראת **האלגברה המלאה**.
3. יהי Ω מרחב מדגם. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ או } A^c \text{ בן מניה}\}$ היא אלגברה של Ω.
4. יהי Ω מרחב מדגם. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ או } A^c \text{ סופית}\}$ היא אלגברה של Ω.
5. יהי Ω מרחב מדגם. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ בן מניה}\}$ אינה אלגברה של Ω (אם Ω אינסופית).
6. יהי Ω מרחב מדגם. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ סופית}\}$ אינה אלגברה של Ω (אם Ω אינסופית).
7. יהי Ω מרחב מדגם. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ או } A^c \text{ סופי}\}$ אינה אלגברה של Ω (אם Ω אינסופית).

משפט אלגברה סופית היא σ-אלגברה.

הוכחה: יהי Ω מרחב מדגם ו-$\mathcal{F}$ אלגברה סופית של Ω. נוכיח ש-$\mathcal{F}$ מחלקת. יהיו $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרים זה לזה. נניח בשלילה ש-$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \notin \mathcal{F}$. אז $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c \in \mathcal{F}$. נסמן $B = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c$. נשים לב ש-$B \subseteq A_i^c$ לכל i. נגדיר $C_i = A_i \setminus B$. אז $C_i \in \mathcal{F}$ לכל i ו-$C_i \subseteq A_i$. נשים לב ש-$C_i \cap C_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$. נגדיר $C_0 = B$. אז $C_0, C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{F}$ זרים זה לזה ו-$\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i = \Omega$. נשים לב ש-$\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i = \Omega$ ו-$C_0 = B \in \mathcal{F}$. נשים לב ש-$C_i \in \mathcal{F}$ לכל $i \geq 1$. נשים לב ש-$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \Omega \setminus B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. נשים לב ש-$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$. נשים לב ש-$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. נשים לב ש-$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \cup B

③ $\{\Omega, \emptyset\}$ היא σ-אלגברה של מאורעות.

④ נניח $\Omega \subset A$. אזי $\{A, A', \Omega, \emptyset\}$ היא σ-אלגברה של מאורעות.

⑤ **ניסוי:** הטלת מטבע 3 פעמים.

מאורע: יהא H המקרה שבו. אזי באופן כללי $\Omega = \{T, H\}^3$

לכן מספר המאורעות שאותן אנו יכולים לדון הוא: $|\mathcal{F}| = 2^{|\Omega|}$

$$A = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,T), (THT)\}$$

יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד ו- σ-אלגברה של מאורעות. נסתכל כעת על

סכום אינסופי של מאורעות $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n)$.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \exists \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$$

(כאשר $\omega \in A_n$ היא עיי"ב שייכת לאחד מה-A_n) — סכום זה יקרה

* כל מי שיש לו שאלה שישאל ויכבד שקט כיתה שלו הבינה.

אחת השיטות לכבד - אין שאלות טפשיות, יש תלמידים טפשים ששואלים שאלות ...

מאותו אופן אפשר להגדיר את החיתוך:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\} = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}\ \omega \in A_n\}$$

ומה אם אנחנו רוצים לבדוק $n-1$ ולא $n-1$?

$$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k\ \omega \in A_n\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ עבור אינסוף } n\text{-ים}\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \ i.o\} \equiv \limsup_{n\to\infty} A_n$$

↙ infinitely often

מאותו אופן אפשר לדון ב

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \ \forall n \geq k\}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N} \ \omega \in A_n, \ n \geq k\} :$$

$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ eventually}\} \equiv \liminf_{n\to\infty} A_n$$

טענה: (כלי די מדהים מהדיבדה) $\limsup_{n\to\infty} A_n \supseteq \liminf_{n\to\infty} A_n$

הוכחה שנראית כמו A_n רגיל. (אבינו שם מספר אינסופי של פעמים.

הגדרה: אם $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ (כאשר שסדרה (A_n) יש גבול) ונסמן אותו ($\lim_{n\to\infty} A_n$ אפשרי) נקרא לו

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

זה מושלים שם הקשה לחשוב אבן אותנו לתאר עליהם את הבעיה.

דוגמה: $\Omega = \{0,1\}$ ונגדיר $A_n = \begin{cases} \{1\} & n \text{ אי-זוגי} \\ \{0\} & n \text{ זוגי} \end{cases}$

$$\limsup_n A_n = \Omega \quad \Leftarrow \quad \liminf_n A_n = \emptyset$$

מהגדרת אינסוף פעמים.
כי אם 0 או 1 יש $\{1\}$ או $\{0\}$

כי לא קיים מספיק

הגדרה: סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ תיקרא עולה אם $\ldots \supseteq A_3 \supseteq A_2 \supseteq A_1$

תיקרא יורדת אם אם $\ldots \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$

טענה: סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ עולה אז $\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ו- $\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ אם היא יורדת.

הוכחה: נניח שהסדרה עולה ונסמן $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. לכן

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\ldots \cap A_{k+2} \cap A_{k+1} \cap A_k] = \bigcup_{k=1}^{\infty} [\ldots \cap A_k \cap \ldots \cap A_2 \cap A_1] =$$

כי הסדרה עולה אז זה שווה

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \liminf_n A_n$$

אז מלמעלה זה שווה
כי הסדרה עולה

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\Rightarrow \limsup A_n = \liminf A_n$$

$\Rightarrow$ קל ✓ $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ משפט ⑪

תרגיל: מצאו את אותו הדבר אם סדרה יורדת.

והנה הגענו לחלק בקורס שבו אנחנו לומדים על הסתברות...

הגדרה: יהא $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד (מרחב מדגם + σ-אלגברה של מאורעות).

הסתברות היא פונקציה $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות:

(1) לכל $A \in \mathcal{F}$ $0 \le P(A) \le 1$

(2) אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות כרים (לכל $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$) אז

$$P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(3) $P(\Omega) = 1$

* מאורע מייצג קבוצה של תוצאות אפשריות. לומר שמאורע התרחש זה שה-ש שיצא נמצא בתוך המאורע הזה.

טענה:

1 לכל $A \in \mathcal{F}$ $P(A^c) = 1 - P(A)$

2 $P(\emptyset) = 0$

3 אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \le P(B)$

הוכחה:

1 לכל A $\Omega = A \dot{\cup} A^c$. אבל לפי הגדרה $P(\Omega) = 1$. ומצד שני

$P(\Omega) = P(A) + P(A^c) \Leftarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

יש פה בעיתיות מסויימת. ההגדרה דיברה על איחוד בן-מניה. מנין לנו שזה נכון גם עבור סדרה סופית?

אז נעשה $\times$ על הכל ונעשה את הכל במסודר, ומחדש...

טענה:

1 $P(\emptyset) = 0$

2 לכל סדרה $A_1, \dots, A_n$ של מאורעות כרים בזוגות $P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

3 $P(A^c) = 1 - P(A)$

4 $A \subseteq B \Leftarrow P(A) \le P(B)$

הוכחה:

1 נתבונן בסדרה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $A_1 = \Omega$ ו- $A_i = \emptyset$ לכל $i \geq 2$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \Rightarrow P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

2 מתקבל ע"י השארת הסדרה הסופית עם הקבוצות הריקות.

3 $\Omega = A \cup A^c \Rightarrow$ לפי (2) $1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

4 $\Omega = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$

כי $P(A)$ לכל A היא או שלילית, בפרט ל- $B \setminus A$.

משל (11)

דוגמא נוספת:

1 המרחב המדגם $\Omega = \{H, T\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

A	$\emptyset$	$\{H,T\}$	$\{H\}$	$\{T\}$
$P(A)$	0	1	$1/2$	$1/2$

אפשר לראות ש- P שהגדרנו מקיימת את הדרישות...

2 המרחב הקודם $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ ו- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.

ה"נ יכולים להתעלם את כל תת הקבוצות, אבל לא ימזיק לנו הכלות יתר.

אם נבחר את ההסתברות של כל יתקיים גם שהשתמש באשכים כדי לגלות את ההסתברות של מאורעות אחרים שהם איחוד כלשהו של יחידונים.

נקבע שלכל $1 \leq i \leq 6$ $P(\{i\}) = 1/6$. את האקסיומות של P תבדיק את ההסתברות של כל מאורע ב- $\mathcal{F}$.

טענה: לכל $A, B \in \mathcal{F}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

נראה את האינטואיציה בדיאגרמת ון:

את ההיתוך בסך הכל ספרנו פעמיים את כדי לתקן עלינו אותו.

הוכחה:

$$A \cup B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

אבל $B = (B \setminus A) \dot{\cup} (B \cap A) \Leftarrow P(B) = P(B \setminus A) + P(B \cap A)$

נציב ונקבל $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

מש"ל ☺

רשמקבלים שאלה בצאת ברור שצריך להסתמך על התכונות של

הנוקצית ההסתברות כי אין לנו מידע על שום דבר אחר.

אחר מאוד מגלים שאדטיביות לה הדבר היחיד שמשתלם בחיים.

ق) لم ۸۸. ۵۶
حل تمرینات

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال مناسبی برای آزمایش داده شده تعریف کنید.

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$ که w_i ها برآیندهای ممکن آزمایش هستند و $P(\{w_i\}) = p_i$ به نحوی که $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ باشد. فرض کنید A یک پیشامد دلخواه باشد. $P(A) = \sum_{w_i \in A} p_i$ را احتمال A می‌نامیم.

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ و $A \in \mathcal{F}$ ، $\forall A \subseteq \Omega$ که $A = \{w_i : w_i \in A\} = \bigcup_{w_i \in A} \{w_i\}$

احتمال هر پیشامد از جمع احتمال تک عضوی‌های آن پیشامد به دست می‌آید.

ب) اثبات

آزمایش تصادفی مورد نظر را در نظر بگیرید. فضای نمونه‌ای Ω و پیشامدهای A, B, C را در نظر بگیرید.

$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$

(inclusion-exclusion) فرمول شمول و عدم شمول

آزمایش تصادفی مورد نظر را در نظر بگیرید. فضای نمونه Ω و پیشامدهای A, B, C را در نظر بگیرید.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ثابت کنید

؟ آزمایش و فضای نمونه‌ای آن را مشخص کنید

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ ثابت کنید

حل: آزمایش: یک تاس را پرتاب می‌کنیم.

$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

فضاء العينة $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$ يحتوي على عدد منته من العناصر.
الحادث A هو مجموعة جزئية من Ω أي $A\subseteq\Omega$.
إذا كان $P(\omega_i)=p$ لكل $i=1,2,\dots,n$ فإن $P(\Omega)=1$ و $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$.

مثال: ألقيت قطعة نقود متزنة مرتين. أوجد فضاء العينة واحتمال الحصول على صورة واحدة على الأقل.

الحل: $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$، $|\Omega|=4$.
$A=\{HT,TH,TT\}$، $|A|=3$.
$P(A)=\frac{3}{4}$.

مثال: صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و3 كرات زرقاء. سحبت كرتان معاً عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون.

الحل: $|\Omega|=\binom{8}{2}=28$.
A: الكرتان حمراوان، $|A|=\binom{5}{2}=10$.
B: الكرتان زرقاوان، $|B|=\binom{3}{2}=3$.
$P(A\cup B)=\frac{10+3}{28}=\frac{13}{28}$.

مثال: ألقيت قطعة نقود متزنة ثلاث مرات. أوجد احتمال الحصول على صورتين على الأقل.

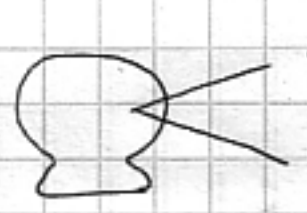
الحل: $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$، $|\Omega|=8$.
$A=\{HHH,HHT,HTH,THH\}$، $|A|=4$.
$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

مثال: صندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و6 كرات بيضاء. سحبت كرتان معاً عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون.

الحل: $|\Omega|=\binom{10}{2}=45$.
A: الكرتان حمراوان، $|A|=\binom{4}{2}=6$.
B: الكرتان بيضاوان، $|B|=\binom{6}{2}=15$.
$P(A\cup B)=\frac{6+15}{45}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}$.

مثال: ألقيت قطعة نقود متزنة مرتين. أوجد احتمال الحصول على صورة واحدة على الأقل.

الحل: $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$، $|\Omega|=4$.
$A=\{HT,TH,TT\}$، $|A|=3$.
$P(A)=\frac{3}{4}$.



6 ভাগে ভাগ

5 ভাগে ভাগ

ভাগ

ভাগ

$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36}$.

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$. $|A| = 6$

$A =$ ভাগ ফলাফল এবং তার ভাগ ফলাফল হয় এবং ফলাফল সমান:

সাধারণ সম্ভাব্যতা ভাগ ফলাফল এবং ফলাফল.

ভাগ ফলাফল এবং ভাগ ফলাফল হয় এবং ফলাফল সমান হবে.

ভাগ ফলাফল এবং ভাগ ফলাফল এবং ভাগ ফলাফল এবং ফলাফল

ভাগ ফলাফল এবং ফলাফল $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$ সহায়

ভাগ ফলাফল এবং ফলাফল. সব ভাগ ফলাফল এবং ফলাফল হয় এবং ফলাফল

ভাগ

דוגמה 8) מהמשפחות שיש להן בדיוק 3 ילדים נבחרת משפחה אקראית

נסמן $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,\dots,9\}, i \neq j\}$ ומתקיים $|\Omega| = 9 \cdot 10 = 90$

נסמן $A = \{(i,j) \in \Omega : i \in \{1,\dots,5\}, j \in \{1,\dots,9\}\}$

מה מספר המשפחות שאין להן בנים? $|A| = 5 \cdot 9 + 9 \cdot 5$

- כי יש 5 בנות ו-9 שתויים.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{90}{110} = \frac{9}{11}$$

הערה: נשים ♡ שלה מאוד שונה מהדוגמאות הקודמות, למשל אין אופציות שוות. אבל אנחנו יכולים לבנות מודל שבו אנחנו מניחים שכל אחת מהאופציות שוות.

שאלה

מהי ההסתברות לפחות בן + בת שתהיה?



נניח ההיפוך אומר שאם נתייחס לכל הבנות בעלות בת (כולל בת עצמה) אז לכל אחת יש הסתברות שווה להיבחר.

כלומר, נמספר את הבנות ב-1 עד 5 ולכל אחת 1- 9 שתויים. אחת הדוגמאות שלנו תהיה:

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,\dots,5\}, i \neq j\}$$

מה הדוגמאות שמתאימות לנו?

$$A = \{(i,j) \in \Omega : (i,j) \in \{1,\dots,5\} \times \{1,\dots,9\} \cup \{1,\dots,9\} \times \{1,\dots,5\}\}$$

מה מספר הבנים של הדוגמאות? $|\Omega| = 10 \cdot 11$

- כי לכל הבחירות יש 11 אופציות, למעט 10 אופציות

מה מספר הדוגמאות שמתאימות לנו? $|A| = 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5$

- כי יש 5 בנות ו-6 שתויים.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}$$

תרגיל

מחלקים לרמה של 52 קלפים בין 4 שחקנים. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את כל התלתנים ♣?

באופן טבעי מרחב המדגם Ω יהיה כל החלוקות של 52 קלפים (שונים) ל-4 קבוצות בגודל 13 ואז

$$|\Omega| = \frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$$

למה? יש $52!$ דרכים לסדר את הקלפים - וכל דרך רצאת נחלק ל-4 קבוצות, אבל הסדר הפנימי לא משנה לנו ולכן מחלקים ב-$13!$ - כי זה מספר הסידורים הפנימיים. (בגלל 5 פיסוקים 6)

מה המאורע שלנו?

A = אחד השחקנים קיבל 13 תלתנים

A_i = השחקן ה-i קיבל 13 תלתנים

$$A = \bigcup_{1}^{4} A_i$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) = 4 \cdot P(A_1) = 4 \cdot \frac{|A_1|}{|\Omega|} =$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{39!}{(13!)^3}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{4}{\binom{52}{13}} \approx 6.3 \times 10^{-12}$$

זה כאילו שהוצאנו את כל התלתנים מהחפיסה כי הם כולם אצל שחקן אחד ואותנו מדקים איך אפשר לחלק את שאר הקלפים בין שאר השחקנים.

Happy Birthday

n אנשים "אקראיים" - מהי ההסתברות שלפחות שניים

נולדו באותו יום בשנה?

$$|\Omega| = 365^n \Leftarrow \Omega = \{1, \dots, 365\}^n$$

נניח (בלי לקחת בחשבון שאולי אנשים חרמנים יותר בתקופות

מסוימות של השנה) שהמרחב שווה הסתברות.

A = לפחות שניים חולקים יום הולדת.

אבל אין לכל הרוחות נחשב את זה ??? כאן יהיה לנו הרבה יותר

קל להסתכל על המאורע המשלים:

A^c = אין שניים עם אותו יום הולדת

$$|A^c| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)$$

$$\Rightarrow P(A^c) = 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

הבה נראה קלת סדרי גודל:

$P(A^c) < \frac{1}{2}$ $\quad n = 23$

$P(A^c) < 3/100$ $\quad n = 50$

$P(A^c) < 3 \cdot 10^{-7}$ $\quad n = 100$

זה נקרא פרדוקס. ימי ההולדת. כמובן אין פה שום פרדוקס. זאת

תוצאה של חישוב הסתברותי מדויק. ובכל זאת, זאת תוצאה

מפתיעה למדי...

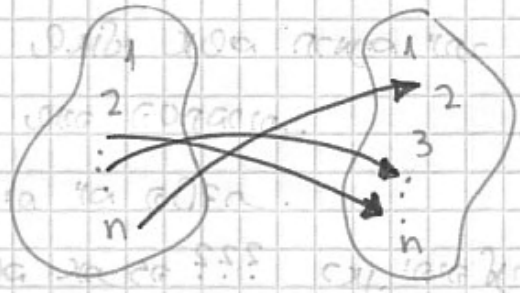
בעיית המזכירה המבולבלת

מזכירה הכינה n מעטפות לשליחה אבל ברגע הקריטי של הכנסת המכתבים למעטפות היא התבלבלה והכניסה מכתבים למעטפות באופן אקראי.

מה הסתברות שאף מכתב לא הגיע ליעדו המתורכן?

באופן טבעי

$\Omega = \{$ כל הפרמוטציות על $\{1,\dots,n\}\}$



וכמובן $|\Omega| = n!$

אם המזכירה מספיק שיכורה, אזי המרחב שלנו שווה הסתברות...

כל שני בלבולים סבירים באותה מידה.

A = אף מכתב לא הגיע ליעדו $A=\{\omega\in\Omega : \omega(i)\neq i \ \forall i\}$

זה כמו הבעיה הקודמת. מסתכלים על זה וזה קשה!

וגם פה יותר קל להסתכל על המשלים:

A^c = לפחות מרחב אחד הגיע ליעדו $A^c=\{\omega\in\Omega : \exists i, \omega(i)=i\}$

אבל גם את זה לא ממש קל לחשב. נפשט עוד קצת

נסמן B_i = המרחב ה-i הגיע ליעדו. ואז $A^c=\bigcup_{i=1}^{n} B_i$

הבעיה היא שאלה לא מאורעות. זרים. אבל אפשר להשתמש

בנוסחת ההכלה וההדחה:

$$P(A^c) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) - \dots \sum_{i<j} P(B_i\cap B_j) + \sum_{i<j<k} P(B_i\cap B_j\cap B_k) - \dots (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$$

אז אם נדע לחשב את כל זה (אמאלה) נפתרה הבעיה!

נעשה ערשי כמה חישובים:

$$P(B_i) = \frac{|B_i|}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P(B_i\cap B_j) = \frac{|B_i\cap B_j|}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

* נוסחת ההכלה וההפרדה...

א. יהי אותה נוסחה מה היא ההסתברות שלא יקבל אף מכתב?
מה הקשר כאשר n גדול מאוד מאוד מאוד? כאשר $k<<n$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \Leftarrow$$

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \dots + \frac{1}{n!}(-1)^{n+1}\binom{n}{n} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{1}{n!}(-1)^{n+1}$$

אז: $P(A) \approx e^{-1} \approx 0.37$

לכן נקבל, אפשרי כי היו n מכתבים שאם יש הרבה מכתבים כזה
שפחות אחד יגיע ליעדו. אבל נקבל שההסתברות שאף
מכתב לא יגיע ליעדו e^{-1}.

מהי ההסתברות שבדיוק k מכתבים יגיעו ליעדם?

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \Rightarrow |A| = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}n!$$

נסמן C_k = מדויק k מכתבים יגיעו ליעדם

D_k = רק k המכתבים הראשונים יגיעו ליעדם.

$$|D_k| = (k-n)! \sum_{i=0}^{k-n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

כי הורדנו k מכתבים ראשונים אז נשארו

$$\Rightarrow P(D_k) = \frac{(k-n)!}{n!} \sum_{i=0}^{k-n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

אז C_k הינו איחוד זר של כל האפשרויות בהם k מכתבים מסוימים
הגיעו ליעדם. לכן:

$$P(C_k) = \binom{n}{k} P(D_k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

מספר הדרכים לבחור k מכתבים

מהי הקירוב ראשון של הקבוע? אכן: $P(C_k) \approx \frac{e^{-1}}{k!}$

* בעדם מעבר לעניין המצכירה יש לנו פה טענות על פוובדיות פרמוטדיות. בעדם ההגדרה היבשה של מה שפתרנו ערשו היא מדיאת ההסתברות ל-K נקודות שבת בפרמוטדיות...

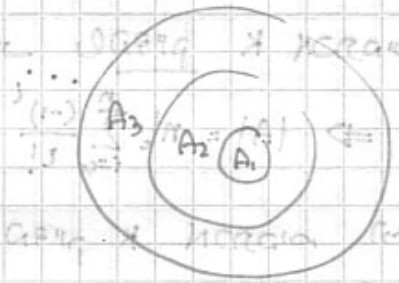
רדיפות של פוורקדיית ההסתברות

אנתנו נרדה להוכיח ש:

$$P(\lim_n A_n) = \lim_n (P(A_n)) \Leftarrow \text{קיים } \lim_{n\to\infty} A_n \ , \ (A_n) \in \mathcal{F}$$

<u>משפט:</u> אם (A_n) סדרה עולה של מאורעות אז $P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$

<u>הוכחה:</u> רבר אמרנו פעם שאדטיביות לה כל מה שמשתלם בחיים, אבל הבעיה היא שתכונת האדטיביות מתייחסת למאורעות ברים ואילו כאן:



אז במקום לדבר על העיגולים השלמים נדבר על הטבעות שנוצרו.

נגדיר סדרת מאורעות (B_n) באופן הבא:

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ B_3 = A_3 \setminus A_2 \\ \vdots \\ B_n = A_n \setminus A_{n-1} \\ \vdots \end{cases}$$

ברור לפי ההגדרה שכל הקבוצות שהגדרנו ברות $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$.

די ברור גם ש-B_n מתכנסת לקבוצה הריקה - מספר האיברים שמופיעים אינסוף פעמים הוא אפס ורק גם לגבי האיברים שמופיעים בכל קבוצה החל מ-n מסוים.

(12)

$$\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i = A_n \quad \text{ולכן} \quad \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

פעם הוכחנו ש $\lim_n A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ כי (A_n) עולה.

$$\Rightarrow P(\lim_n A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \underset{\text{לפי אינפי}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i) =$$

$$= \lim_n P(A_n)$$

(11) מש"ל

השתמשנו באדטיביות פעמיים - פעם אחת כדי להפוך איחוד לסכום ופעם אחת ההפך. אבל היינו דרירים את שתי הפעמים, כי ככה הוכחנו את הגבול החולה - לקחנו את האינסופי והפכנו אותו לסופי ורק אז יכולנו להוציא את הגבול...

אז הוכחנו את תכונת הרציפות למקרה פרטי.

<u>תרגיל</u>: להוכיח את המקרה הפרטי שהסדרה יורדת

<u>למה של Fatou</u>

(A_n) סדרת מאורעות. $P(\liminf_n A_n) \le \liminf_n P(A_n)$

לסדרת מאורעות תמיד יש liminf. זאת יכולה להיות הקבוצה הריקה, אבל היא קיימת.

<u>למה Reverse Fatou</u>

(A_n) סדרת מאורעות $P(\limsup_n A_n) \ge \limsup_n P(A_n)$

$$P(\liminf A_n) \le \liminf P(A_n) \underset{\text{אינפי}}{\le} \limsup P(A_n) \le P(\limsup A_n)$$

אם קיים גבול אז כל האי שוויונים הם שוויונים ואז נובעת רציפות פונקציית ההסתברות...

(13) 17.11.05
הסתברות

רציפות פונקציית ההסתברות

טענה: $\lim_n P(A_n) = P(\lim_n A_n)$

הוכחנו את הטענה למקרה הפרטי ש- (A_n) עולה.
והשארנו כתרגיל להוכיח למקרה ש- (A_n) יורדת.

הלמה של פטו: $P(\liminf_n A_n) \le \liminf_n P(A_n)$

הלמה ההפוכה של פטו: $P(\limsup A_n) \ge \limsup P(A_n)$

בעזרת שימוש במשפט הסנדוויץ' נוכל לקבל את הטענה.

נזכור ש- $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

ונוכיח את הלמה של פטו:

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

$$G_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

(כל שמוליפאת n
התכיפפחות ולכן זה עולה)

נטען ש- G_n היא סדרה עולה, פשוט כי זה חיתוך
$\Leftarrow$ יש לה גבול. הוכחנו שהגבול של סדרה עולה הוא
האיחוד האינסופי שלה. $\Leftarrow$ $\liminf_n A_n = \lim_n G_n$

$\Leftarrow$ $P(\liminf A_n) = P(\lim G_n) = \lim P(G_n)$

הוכחנו עבור סדרות עולה.

$G_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ $\Leftarrow$ לכל $k \ge n$ מתקיים $G_n \subseteq A_k$ (כי G_n
הוא חיתוך שלהם) $\Leftarrow$ $P(G_n) \le P(A_k)$ לכל $k \ge n$

$\Leftarrow$ $P(G_n) \le \liminf_k P(A_k)$ (לפי אינפי). נאחד אתכל אי
השוויונים ונקבל $P(\liminf_n A_n) \le \liminf_k P(A_k)$

משל ☺

הוכחת הלמה ההפוכה של פטו:

באופן דומה מאוד:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{:= H_n} = \lim P(H_n) = P(\lim H_n) = P(\limsup A_n)$$

סדרה יורדת כי ככל שמגדילים את n מאוחדים פחות ופחות.

$$P(H_n) \geq P(A_k) \Leftarrow H_n \geq A_k \quad \text{לכל } k \geq n \Leftarrow H_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\lim_n P(H_n) \geq \limsup_k P(A_k) \Leftarrow P(H_n) \geq \limsup_k P(A_k) \Leftarrow$$

ובכך הוכחנו את מה שנדרש. מש"ל ☺

הלמה של Borel-Cantelli

אם (A_n) סדרת מאורעות המק"מת $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

אז $P(\limsup A_n) = 0$

פרשנות: אם הסכום מתכנס אז ההסתברות ש $\omega \in \Omega$

יופיע באינסוף A_n-ים היא אפס.

הוכחה:

$$P(H_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\limsup A_n) \Leftarrow \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{:= H_n}$$

לכל n $P(H_n) \geq P(\limsup_m A_m)$.

מצד שני $P(H_n) = P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$.

אז מה יש לנו?

$$\forall n \quad P(\limsup A_m) \leq P(H_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

כי זה זנב של סדרה מתכנסת

מש"ל ☺

(14)

נסיים את השיעור בשעשוע קטן:

יש קופסה גדולה. ב-11:59 צורקים רדורים 1-10.

הוצאנו אחד באקראי.

1/2 דקה ל-12 הכנסנו רדורים 11-20 והוצאנו אחד

באקראי. וכן הלאה.

נטען שבשעה 12 בהסתברות 1 אין אף רדור בקופסה.

נתמקד ברדור מס' 1.

$E_n = \{$ הרדור עדיין בקופסה n לעדים $\}$

מה הסתברות לרב? זה אומר שהוא שרד n הוצאות

$$\Rightarrow P(E_n) = \frac{9}{10}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{27}{28}\cdots\frac{9n}{9n+1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{9k}{9k+1}$$

הסדרה E_n היא יורדת

הרדור נשאר בקופסה 12 $= \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ ונוכיח ש $P(\bigcap_1^{\infty} E_n) = 0$

$$P(\bigcap_1^{\infty} E_n) = \lim_n P(E_n) = \lim_n \prod_{k=1}^{n}\frac{9k}{9k+1} = \lim_n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{9k+1}{9k}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_n\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{9k}\right)\right)^{-1} = \lim_n\left(\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{18}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{9n}\right)\right)^{-1} \le$$

$$\le \lim\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{9n}\right)^{-1} = 0$$

באותו אופן מוכיחים לשאר הרדורים

והאיחוד האינסופי $\le$ סכום ההסתברויות

$\Rightarrow$ סה"כ הסיכוי שאיזה רדור נשאר הוא אפס!

(15) 21.11.05
הסתברות

על מה דיברנו עד כה?

- מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- מרחבים סופיים שווי הסתברות
- "אינפי" - תכונות של פונקציית ההסתברות בהיותה רציפה.

הסתברות מותנית
Conditional Probability

דוגמה: מטילים שתי קוביות מה ההסתברות שהסכום 8?

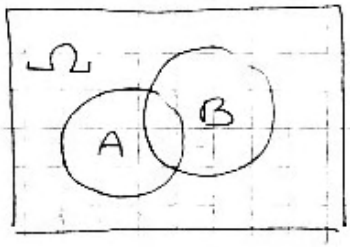
באופן טבעי $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$ $|\Omega| = 36$.

$A = \{(6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6)\}$

נניח שהמרחב שווה הסתברות ולכן $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$

נניח שמישהו בא ולחש לנו באוזן שההטלה הראשונה תצא 3.

כלומר, נתון שבהטלה הראשונה יצא 3 $\Leftarrow$ נתון ש- ω תוצאת הניסוי נמצא בקבוצה $B = \{3\} \times \{1,\dots,6\}$. הגבלנו את קבוצת תוצאות הניסוי. נצייר דיאגרמה:



אחרי שצמצמנו את המרחב ל- B נקבל



אם נתון שתוצאת הניסוי ב- B אז מספר התוצאות האפשריות מצטמצם ל- $|B| = 6$. במצבנה, המאורע "סכום ההטלות הוא 8" מצטמצם למאורע $\{(3,5)\}$ $\Leftarrow$ ההסתברות החדשה (המותנית)

של A תהיה $\frac{1}{6}$. נשים ♡ ש:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \text{"ההסתברות החדשה של A"}$$

<u>הגדרה:</u> יהיו A ו- B מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
נניח $P(B) \neq 0$. ההסתברות של A מותנית ב- B (כלומר ההסתברות ש- A קרה בהינתן ש- B קרה) מוגדרת

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

זו הגדרה! בשנשתמש בהגדרה הזאת בדוגמאות זו אינטרפרטציה שמבוטסת על ניטון היום יום שנו. כה לא איזה אקסיומה הסתברותית.

<u>דוגמה:</u>



10 כדורים לבנים
5 כדורים זהובים
10 כדורים שחורים

מוציאים כדור באקראי. מהי ההסתברות שהוא זהוב?
נסמן את הכדורים במספרים ואז $\Omega = \{1, \dots, 25\}$
הכדור זהוב $A = \{11, \dots, 15\}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{25}$$

מה ההסתברות שהכדור זהוב אם יודעים שהוא לא שחור!
$B = \{16, \dots, 25\}$ הכדור שחור רוצים לחשב את $P(A|B^c)$.
לפי ההגדרה נרשום:

$$P(A|B^c) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{5/25}{15/25} = \frac{5}{15}$$

דוגמה: יוסי מתלבט אם לשאול הסתברות או סטטיסטיקה.

(המאזר מוסר, מדור של סטטיסטיקה...)

אם הוא בוחר סטטיסטיקה יש סכוי $\frac{1}{2}$ שהוא יעבור את הבחינה.

אם הוא בוחר הסתברות יש סכוי $\frac{1}{3}$ שהוא יעבור את הבחינה.

הוא לא יודע מה יהיה בחינה מטבע הוא מטיל מטבע הוגן. H - הטלת עץ. T - טלת פלי.
מה ההסתברות שהוא יעבור בהסתברות?

מרחב ההסתברות בה מטילים מטבע פעמיים:

$$\Omega = \{H,T\} \times \{P,F\} = \{HP, HF, TP, TF\}$$

$A = \{HP, HF\}$ ההסתברות

$A^c = \{TP, TF\}$ סטטיסטיקה

נתון 1: $P(A) = P(A^c) = \frac{1}{2}$ מאחר שההסתברות שווה להסתברות המשלים הוא.

$B = \{HP, TP\}$ נגדיר בחינה כך ש:

נתון נוסף: $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ו- $P(B|A^c) = \frac{1}{2}$.

ההסתברות הוא $P(A \cup B) = \frac{2}{9}$ (שזה אומר שיקבל

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

אולם לא נעשינו מתי בוחרים הסתברות אבל יש פה אינטואיציה מסוימת, מתי קדה יפי A אם B ? אם קדה A ואחר B.
כאשר מקבלים את המשקלה בין $P(A)$ ל- $P(B|A)$.
אחר, נניח שם $P(B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ ומה נכון אחרונה אינטואיטיבית כי, כדאי לנו לומר שקפה קדה B ואחר כך, מכי מקדה מקבלים את האותות שנזקקים קדה.

דוגמה: 5 אדומים, 9 שחורים. מוציאים שני כדורים. מה ההסתברות שהשני אדום?

$$\Omega = \{(i,j) : i \neq j, 1 \leq i,j \leq 14\}$$

A - הכדור הראשון אדום. B - הכדור השני אדום.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{14 \cdot 13}}{\frac{5 \cdot 14}{14 \cdot 13}} = \frac{1}{2}$$

משפט: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. B מאורע כך ש- $P(B) \neq 0$.

לכל $A \in \mathcal{F}$ נגדיר $Q(A) = P(A|B)$.

אזי הפונקציה Q היא פונקציית הסתברות.

הוכחה: צריך להוכיח ש- Q מקיימת את אקסיומות פונקציית ההסתברות.

(i) $$0 \leq Q(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

כי $A \cap B \subset B$ — כי זו מנה של פונקציות אי שליליות

(ii) $$Q(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

(iii) $$Q(\dot{\bigcup_1^\infty} A_n) = P(\dot{\bigcup_1^\infty} A_n | B) = \frac{P((\dot{\bigcup_1^\infty} A_n) \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(\dot{\bigcup_1^\infty} (A_n \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_1^\infty P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_1^\infty Q(A_n)$$

מש"ל ☺

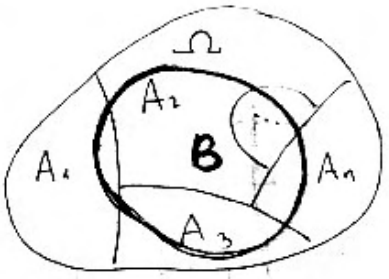
הודעה אדמיניסטרטיבית:

אתר הקורס נפתח: www.ma.huji.ac.il/~razk

מה המשמעות העמוקה של מה שהוכחנו ערשיו? בתחילת הקורס רשלמדנו על פונק' ההסתברות הוכחנו כל מיני תכונות לגביה, פשוט בהיותה פונק' הסתברות. למשל אם $C \subseteq A$ אז $P(C) \leq P(A)$.

ערשיו אנחנו יכולים להגיד אותו הדבר על Q $P(C|A) = Q(C) \leq Q(A) = P(A|B)$

גם כל הדברים על הגבולות נכונים וכן הלאה וכן הלאה. אז קיבלנו פה המון דברים ברוינים...



נוסחת ההסתברות השלמה

נניח $(A_i)_{i=1}^{n}$ כיסוי זר של Ω.

$$\Omega = \dot{\bigcup_{1}^{n}} A_i$$

לכל $B \in \mathcal{F}$ מתקיים $B = \dot{\bigcup_{1}^{n}} (B \cap A_i)$

ואז $P(B) = \sum_{1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$

השוויון $\boxed{P(B) = \sum_{1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)}$ נקרא נוסחת ההסתברות השלמה.

עוד נוסחה: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\qquad$ $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

נעביר אגפים ונקבל

$\boxed{P(A|B) = P(B|A)\,\dfrac{P(A)}{P(B)}}$ נוסחת Bayes

דוגמה: מעבדה לאיתור HIV:

אם אדם נשא ⇐ תשובה חיובית ב- 95%

אם אדם אינו נשא ⇐ תשובה חיובית ב- 1%

1/2% מהאוכלוסיה נשאים.

מה ההסתברות שאדם שנמדא חיובי נשא?

(רגיל) נגדיר את מרחב המדגם, המאורעות וכן הלאה...

$$\Omega = \{T, F\} \times \{+, -\}$$

נשא, לא נשא, בדיקה חיובית, בדיקה שלילית

נתונים: $P(A) = 0.005$ $\qquad$ $A = \{T\} \times \{+, -\}$ נשא

$P(B|A) = 0.95$ $\qquad$ $B = \{T, F\} \times \{+\}$ יצא חיובי

$P(B|A^c) = 0.01$ $\qquad$ מחפשים: $P(A|B) = ?$

לפי ביס: $P(A|B) = P(B|A)\,\dfrac{P(A)}{P(B)}$. ולפי נוסחת ההסתברות השלמה

$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$, שהרי $\Omega = A \cup A^c$. נציב את הנתונים ונקבל

$$P(A|B) = \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} \approx \frac{1}{3}$$

ניסויים מורכבים

למה: נתון שלמשתנה מקריות X יש k ערכים אפשריים $x_1, \dots, x_k$ עם הסתברויות $p_1, \dots, p_k$ בהתאמה ($\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$).
מאותה סיבה יש להסתברות שווה שלכל k ערכים אפשריים בניסוי בן n ניסויים.
מהו מרחב ההסתברות?

נסמן את מרחב ההסתברות של הניסוי כולו ב-Ω. אנו יודעים שלכל משתנה, למשל כאלה שלמדנו עד כה, יש לו טווח ערכים אפשריים / בנות. את מרחב ההסתברות כאן יהיה

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n) : n \in \mathbb{N},\ a_j \in \{g, b\}\}$$

כאשר נרשום את כלל הזוגות בין המשתנה למשל gg, gb, bg, bb וכו'.

יש k ניסויים $A_k = \{$ נתון שלכל $P(A_k) = p_k$.

יהי $\omega \in \Omega$. מהו $P(\{\omega\})$?

נשים לב ש $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ הוא כיסוי של Ω $\Rightarrow$ לפי חוק ההסתברות השלם:

$$P(\{\omega\}) = \sum_{k=1}^{n} P(\{\omega\} | A_k)\, P(A_k)$$

אם $\omega \notin A_k$ אז המותנה ריק שזהה בהכרח ל A_k שלכן $P(\{\omega\} | A_k) = 0$.

אחרת: $\omega \in A_k$ $\Rightarrow$ $\omega \cap A_k = \omega$ $\Rightarrow$ $P(\{\omega\} | A_k) = P(\omega | A_k) = 1$

$\Rightarrow$ $P(\{\omega\}) = p_k$

יש 2^n סדרות אפשריות של בנים/בנות
והנתון שכל הסתברות שווה לכן זהה לכל
$\Rightarrow P(\{\omega\} | A_k) = \frac{1}{2^n}$

אבל $k \neq n$ - למשתנה יש או n ילדים או k. אין שניהם! $\Rightarrow A_k \cap A_n = \omega \cap \emptyset = \emptyset$

אם $\omega = A_k$ אז המותנה ריק שזהה בהכרח ל A_k שלכן $P(\{\omega\} | A_k) = 0$.

ה שלמה: $P(\{\omega\}) = \sum_{k=1}^{n} P(\{\omega\} | A_k)\, P(A_k)$

אבל $\omega \in \Omega$ $\Rightarrow$ לפי חוק ההסתברות השלם $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ הוא כיסוי של Ω שיש לו 2^n ערכים.

יהי $\omega \in \Omega$. מהו $P(\{\omega\})$?

יש n ילדים $A_k = \{$ ונתון שלכל $P(A_k) = p_k$.

כאשר רושמים את כלל הזוגות בין המשתנה למשל gg, gb, bg, bb וכו'.

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n) : n \in \mathbb{N},\ a_j \in \{g, b\}\}$$

מאותה סיבה יש להסתברות שווה שלכל k ערכים אפשריים בניסוי בן n ניסויים.
מהו מרחב ההסתברות?

נסמן את מרחב ההסתברות של הניסוי כולו ב-Ω. אנו יודעים שלכל משתנה, למשל כאלה שלמדנו עד כה, יש לו טווח ערכים אפשריים / בנות. את מרחב ההסתברות כאן יהיה

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n) : n \in \mathbb{N},\ a_j \in \{g, b\}\}$$

כאשר רושמים את כלל הזוגות בין המשתנה למשל gg, gb, bg, bb וכו'.

משפט בייס

נתון/ידוע מהנה את ההסתברות $\frac{1}{2}$ שאין הר. את הזוג או בכוד או ידוע לה אבל יכול שלה שהיא שהאן יודעים שהאן
ובהמשך הזוג יש אות ידוע אבל הטיבוי ש"ש זו אותה הזוג $\frac{1}{2}$

באותן קומה מאשר שאם יש אות מכור אבל הטיבוי ש"ש זו אותה הזוג $\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \text{יש מת } A = \{bg, gb, gg\} \\ \text{ש משפחות בן אחד } B = \{bg, gb, bb\} \end{cases}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/4}{3/4} = \frac{2}{3}$$

זוג הסתברות ש"ש למשפחה מת מהיתן שיש לפחות בן אחד?

ומהיתן שיש למשפחה 2 ילדים. ומהיתן שהמשפחה שווה הסתברות.

$\{gg, gb, bg, bb\} = \Omega$

הענין פה הוא שאנחנו לא יודעים את כל הסיפור מאחורה -
מניחים שיש 2 ילדים בבית, ואז אולי הילדים מטולים מטבע כדי
להחליט מי יפתח. ויכול להיות שההורים חושבים שיותר בטיחותי
לשלוח בן לדלת ולכן אם יש בן במשפחה אז הוא יפתח.

$$\Omega = \{bb, bg, gb, gg\} \times \{1,2\}$$

הילדים מחליטים מי יפתח
את הדלת אז שאם הטלת מטבע

$$|\Omega| = 8$$

פתח בן $A = \{bb1, bb2, bg1, gb2\}$

יש בת $B = \{bg, gb, gg\} \times \{1,2\}$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2|8}{4|8} = \frac{1}{2}$$

אבל אם מניחים שאם יש בן אז הוא פותח את הדלת
ובן פותח את הדלת אז אנחנו מייד פוטלים את האופציה שיש
2 בנות וזה מחזיר אותנו ל- 2/3.

תחשבו על זה...

(19) 24.11.05
הסתברות

הודעה אדמינוסטרטיבית:

החל משבוע הבא כל תרגיל מגיש (בשלמות) = נקודת מגן.

בשבוע הבא הוא יביא נוסחה לחישוב הציון

בפעם הקודמת דיברנו על הסתברות מותנית ואמרנו $P(A|B) = P(A\cap B)/P(B)$

אי-תלות

נגדיר "מאורע A אינו תלוי ב-B": באופן אינטואיטיבי זה אומר שזה שהתרחש B לא מש זה את הערכתי להתרחשות של A.

הגדרה: יהיו A,B מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. (אמר ש-A אינו תלוי ב-B אם $P(A|B) = P(A)$ (כמובן $P(B) \neq 0$).

נפתח קצת:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)^{(**)}}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)^{(*)}$$

וזאת האינטואיציה שלנו להרפלה של הסתברויות.

אם נסתכל ברוט (-2) נראה ש (*) זאת ההגדרה של אי תלות.

קופרמן יותר אוהב את ההגדרה (**) אבל ל-(*) יש רגה יתרונות, למשל היא רגלת בתוכה את המקרה ש- $P(B) = 0$ אבל מיד רואים שם שאי התלות היא יחס סימטרי.

דוגמה: מוציאים קלף מחפיסה של 52 קלפים.

$A = \{$יצא אס$\}$
$B = \{$יצא תלתן$\}$
האם המאורעות האלה תלויים?

$P(A) = \frac{4}{52}$ כי יש 4 אסים

$P(B) = \frac{13}{52}$ כי יש 13 תלתנים

$P(A\cap B) = \frac{1}{52}$ כי יש רק אס תלתן אחד

ואכן $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$

דוגמה הטלת שתי קוביות

$A = \{$ קוביה ראשונה זוגית $\}$

$B = \{$ סכום $= 9\}$

$P(A) = \frac{6}{36}$, $P(B) = \frac{5}{36}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$\Leftarrow$ שני המאורעות תלויים! כלומר, אם ידוע שהתוצאה היתה 9 לא משנה את ההערכה שלנו לגבי הקוביה הראשונה. לא ייתכן שלפני הטלה ראשונה הסכום $= 7\}$ קטן מ A ו-C לעומת $C = \{$ הסכום $= 7\}$ אבל לא כך ניכון. לעומת מאורע ש A ו-C לעומת תלויים. אנו לא תאר פיר מקרה ספציפי:

נוסחת כפל רצף מן ההגדרה של אי תלות כ - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

ונסיק כי אינו מסקנות

* כל מאורע שהסתברותו <u>אינה</u> אפס או אחד תלוי בעצמו.

שכן: $P(A) = P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0$ או 1

* כל מאורע בי"ת (מלת תלוי) ל- Ω וגם ל- $\emptyset$.

$P(\emptyset) = P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) \cdot P(A) = 0 \cdot P(A) = 0$

$P(A) = P(\Omega \cap A) = P(\Omega) \cdot P(A) = 1 \cdot P(A) = P(A)$

* אם A בי"ת ל- B אז A בי"ת ל- B^c.

הוכחה: יודע $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) =$

$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) =$

$= P(A) \cdot P(B^c)$

☺

* הוכחנו שאם A תלוי ב- B אז הוא תלוי גם ב- B^c. נסמן קבוצה של כל המאורעות שתלויים ב- B. $\sigma(B)$ - לפי ה σ-אלגברה הנוצרת ע"י B.

$\{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$

2 מאורעות.

בפיזיקה סימנו זאת כ σ אז שים לב/ן יודע אי תלות של

אבל בחיים מדברים גם על אי תלות של יותר מ-2 מאורעות.

נתונים 3 מאורעות A,B,C. מה אי תלות של 3 מאורעות?

הדעה א': נאמר ש A, B, C בת"ל אם A בת"ל ב-B, B בת"ל ב-C ו-C בת"ל ב-A.

דוגמה: מטלים שתי קוביות:

$A = \{$ הסכום הוא $7\}$

$B = \{$ קוביה ראשונה $= 4\}$

$C = \{$ קוביה שנייה $= 3\}$

בשלושת מאורעות אלו כל זוג מקיים יחס אי תלות.

האם זה משכנע אותנו שכל השלושה בת"ל? ובכן, לא!

כי אם B ו-C קרו זה ישפיע על ההערכה שלנו ש-A קרה.

כלומר מידי לראות שאם $B \cap C$ התרחש זה משפיע על ההסתברות (המותנית) לכך ש A קרה.

אבוי! מה נעשה? ההדעה הראשונה לא טובה...

נעשה זאת לאט ובטוח, (האהא)

נרדה תחולה להגדיר את המושג "A אינו תלוי בזוג B,C"

באופן אינטואיטיבי נרדה שכל קומבינציה של התרחשות B ו-C לא תשפיע על A.

הגדרה: נאמר ש-A אינו תלוי בזוג המאורעות B, C אם הוא אינו תלוי באף מאורע הנוצר ע"י B ו-C, כלומר ה σ אלגברה של B ו-C:

$$\sigma(B,C) = \{\Omega, \emptyset, B, B^c, C, C^c, B\cap C, B\cup C, B\cap C^c\}$$

נוכיח בשיעור הבא:

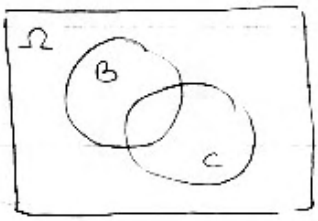
A בת"ל ב $\sigma(B,C)$ אמ"מ A בת"ל B

A בת"ל ב-C

A בת"ל ב $B\cap C$

28.11.05
הסתברות

ענינו שיש שני מאורעות שהם בלתי תלויים במרחב ההסתברות.



הם מחלקים את המרחב ל-4 חלקים בלתי תלויים:
$A\setminus B$, $A\setminus C$, $A\cap B$, $A\cap(B\cup C)^c$.
כל הבעיות האפשריות על האירועים האלה + הקבוצה הריקה הן כל האלגברה שלהם

טענה: מאורע A אינו תלוי בצמד מאורעות B,C אם ורק אם הוא אינו תלוי ב-B, ב-C וב $B\cap C$.

הוכחה: ($\Rightarrow$) כך ראינו. שכן יש אי תלות בכל הסכימות, אבל בפרט יש אי תלות ב-3 אברים מתוכה.

($\Leftarrow$) נניח שלה תנאי מספיק. אנחנו כבר יודעים ש- $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, וראינו גם ש- $P(A\cap C)=P(A)P(C)$, $P(A\cap(B\cap C))=P(A)P(B\cap C)$. נותר לבדוק ש- $P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$ ו- $P(A\cap(B\cup C)^c)=P(A)P((B\cup C)^c)$.
נזכיר תזכורת ש- A אינו תלוי ב- $B\cap C$:

$$P(A\cap(B\cap C))=P(A)\cdot P((A\cap B)\cap C)=P(A)\cdot P(A\cap(B^c\cup C^c)^c)=P(A\cap(B\cup C))$$

(באופן כללי: $A\setminus B=A\cap B^c$ ואם $E=(E\cap F)\cup(E\cap F^c)$ אז $P(E\cap F^c)=P(E)-P(E\cap F)$)

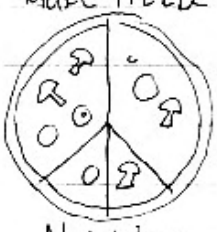
$$P(A)-P(A\cap(B\cup C)^c)=P(A)-P(A\cap B^c\cap C^c)=P(A)-P(A\cap B^c)+P(A\cap B^c\cap C)=P(A)-P(A\cap(B\cup C))+P(A\cap(B\cup C))$$

$$P(A)P(B\cup C)=P(A)[P(B)+P(C)-P(B\cap C)]=P(A)[1-P(B^c)+P(C)-P(B\cap C)]$$

את המקרים האחרים מורים בקלות דומה.

משל ☺

Make Pizza



Not War

A תלוי בצמד B,C אם:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(A\cap(B\cup C))=P(A)P(B\cup C)$$

מסקנה: A,B,C אינם תלויים זה בזה, מאותן שום מאורע אינו תלוי בכולם

המאורעות האחרים אם מנוסף לא-תלות בצמדות אם

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

הגדרה: n מאורעות $A_1,\dots,A_n$ נקראים בלתי תלויים אם לכל תת קבוצה של k מאורעות ($2 \le k \le n$) מתקיים

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_{j_i})$$

נניח שיש מרחב הסתברות $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$ לא אידיה נשוי כאומן.
נרצה ליצור מרחב הסתברות ה"גדול" שיהיה שקול ש n ניסויים Ω_0 שאנחנו תלויים לה בלה.

נניח שיש ב Ω_0 מרחב בדיד $\Omega_0 = \{a_1, a_2, \dots\}$ ונסמן
$p_j = P(\{a_j\})$.

באופן טבעי, מרחב המדגם יהיה $\Omega = \{(a_{j_1}, \dots, a_{j_n}) : a_{j_i} \in \Omega_0\} = \Omega_0^n$
יש להבחין בהבדל שבין ניסוי שבו ההסתברות אכן נתונה אותנו מסוימת שאנו תלויים
מה לבין ניסוי בו אין תלות.

$$\textcircled{*} \quad P(\{(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})\}) = \prod_{i=1}^{n} p_{j_i}$$

לה נוכחו מתבקש להגדיר כבה כי אה לה הי יה הגיאה ב לה שאמר שקרה
a_j ואצ קרה a_j ואות a_j וכן הלאה. ואותנו נוגעים שלה יהיה בית.
שרשרו נוכיח שאה מתירתנו אינ הה אכן בית. אה) קיבל פרים שהראות
שלאה אכן שוקלות ההסתברות.

טענה: $\textcircled{*}$ מאפיינת פונקציית הסתברות על Ω.

הוכחה: צריך רק שהראות ש $P(\Omega) = 1$.

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{a_{j_i} \in \Omega_0} \{(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})\}\right) = \sum_{a_{j_1} \in \Omega_0} \cdots \sum_{a_{j_n} \in \Omega_0} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{j_i}\right) = \left(\sum_{a_{j_1} \in \Omega_0} p_{j_1}\right) \cdots \left(\sum_{a_{j_n} \in \Omega_0} p_{j_n}\right) = 1$$

משל $\textcircled{*}$

טענה: יהיו $A_1, \dots, A_n$ n מאורעות כך שלכל j המאורע A_j נקבע אך
ורק ע"י הניסוי ה- j שב המאורעות $\{A_j\}$ בית לה בלה.

ההוכחה: $A_j \subset \Omega$ נקבע ע"י הניסוי ה- j אם הוא מהצורה $A_j = \Omega_0^{j-1} \times B_j \times \Omega_0^{n-j}$
כאשר $B_j \subset \Omega_0$.

הוכחה: נתבונן ב $P(A_j)$ ונרצה לחשב אותו ע"י הנתונים:

$$P(\Omega_0^{j-1} \times B_j \times \Omega_0^{n-j}) = P\left(\bigcup_{b_1 \in \Omega_0} \cdots \bigcup_{b_{j-1} \in \Omega_0} \bigcup_{b_{j+1} \in \Omega_0} \cdots \bigcup_{b_n \in \Omega_0} \{(b_1, \dots, b_n)\}\right)$$

$$= \sum_{b_1\in\Omega_0}\sum_{b_2\in\Omega_0}\cdots\sum_{b_j\in B_j}\cdots\sum_{b_n\in\Omega_0} P_{b_1}P_{b_2}\cdots P_{b_j}\cdots P_{b_n} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot\sum_{b_j\in B_j} P_{b_j}\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1 = P_0(B_j)\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1$$

$$\Rightarrow P(\Omega_0^{j-1}\times B_j\times\Omega_0^{n-j}) = P_0(B_j)$$

מש"ל ☺

אין הסתברות שזו גישה שאני מעדיף כי אי אפשר לראות את הדברים האלה. מה שכן אפשר לעשות זה לנסות לאמוד את ההסתברות שיש גישה שמוגשת כך אחד אחד.

טענה: לכל $j<k$ $\quad P(A_j\cap A_k) = P(A_j)P(A_k)$

הוכחה:

$$P(A_j\cap A_k) = P(\Omega_0^{k-1}\times B_k\times\Omega_0^{j-k-1}\times B_j\times\Omega_0^{n-j}) =$$

$$= P\Big(\bigcup_{b_1\in\Omega_0}\bigcup_{b_2\in\Omega_0}\cdots\bigcup_{b_n\in\Omega_0}\{(b_1,\ldots,b_n)\}\Big) =$$

$$= P_0(B_j)P_0(B_k)\cdot\Big(\sum_{b_j\in B_j}P_{b_j}\Big)\Big(\sum_{b_k\in B_k}P_{b_k}\Big)\cdot\sum_{b_1\in\Omega_0}\cdots\sum_{b_n\in\Omega_0}P_{b_1}\cdots P_{b_n} =$$

$$= P(A_j)P(A_k)$$

מש"ל ☺

הוכחנו שפע לוח אורלוגין הנ"ל בתנאי. מאותו אופן מוכיחים לפע שלשה, רבייה וכו'.

הערה: נסו גם מרחב ההסתברות המתאים לשתי הקוביות הנ"ל מרגע:

[נסמן את ההסתברות שבקוביה ה-k ואחר ההסתברות שבשתיהן ב- $q_k:=1-p_k$.]

תרגיל:

1) מהי ההסתברות שבקבע שתקבל בדיוק k הצלחות ב-n ניסויים?

2) מהי ההסתברות שבקבע שתקבל לפחות הצלחה אחת ב-n ניסויים?

פתרון:

1) נגדיר את מרחב ההסתברות שבקבע שתקבל בדיוק k הצלחות ב-n ניסויים.

$\Omega = \{0,1\}^n$. נגדיר את ההסתברות שבקבע שתקבל הצלחה ב-p ואחר ההסתברות שבשתיהן ב- $q=1-p$.

$$P(\underbrace{1101\ldots001}_{n\text{ אורך}}) = p^{\#\text{הצלחות}}q^{\#\text{כשלונות}}$$

לפי מה שלמדנו בקורס אפשר לחשב:

$$P(\{\omega\in\Omega : \omega \text{ יש בדיוק } k \text{ הצלחות}\}) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

2) מהי ההסתברות שבקבע שתקבל לפחות הצלחה אחת ב-n ניסויים?

$$P(\{\omega\in\Omega : \omega \text{ יש לפחות הצלחה אחת}\}) = 1-P(\{\omega\in\Omega : \omega \text{ אין הצלחות}\}) = 1-q^n$$

תשובות:

1) המאורע המשלים הוא היחידון $\{0\}^n$ והסתברותו $q^n \Leftarrow$ התשובה $1-q^n$.

2) $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ ... יש $\binom{n}{k}$ יחידונים כאלה והם רולם לרים. הסתברות של אחד מהם תלויה במס' ההצלחות.

3) לה עוד לא מוגדר כ"כ מבחינתנו. בינתיים הגדרנו שהניסוי סופי. אז כל n שנעצור בו יש לנו הכל מוגדר טוב ויפה. ואז אפשר להסתכל על גבולות של לה.

$A_n = \{$ הצלחה בניסוי ה-n $\}$ אז מהשאנחנו מעוניינים בו הגו החיתוך:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}_{\text{סדרה יורדת}}\right) = P\left(\lim \bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 1 & p=1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

The Gambler's Ruin Problem ברנול, 1713

שחקן א' - i שקלים
שחקן ב' - $N-i$ שקלים
} תחילת המשחק

הם מטילים מטבע שנופל על Head בהסתברות p ועל Tail בהסתברות q אם יצא Head שחקן ב' משלם שקל לשחקן א' ולהפך אם נופל על Tail. חוזרים על המשחק עד שלאחד השחקנים נגמר הכסף (הניסויים בלתי תלויים).

א. מהי ההסתברות ששחקן א' ניצח?
ב. מהי ההסתברות ששחקן ב' ניצח?
ג. האם ירגל להיות שהמשחק נמשך לעולם?

מהו מרחב המדגם?

אפשרות ראשונה: $\Omega = \{H,T\}^N$

אפשרות שנייה: $\Omega = \{HHTH\}$ - כל הסדרות הסופיות רק שלראשונה $\#H - \#T = N-i$
או $\#T - \#H = i$

אבל לאת בעיתית כי היא מנירה שהמשחק נגמר. אז נשתמש באפשרות הראשונה.

(23) 1.12.05
הסתברות

נחזור למשחק משיעור שעבר:

2 שחקנים מטילים מטבע שנופל בהסתברות p על Head
ו- q על tail.

שחקן א' מתחיל עם i שקלים ושחקן ב'
מתחיל עם $N-i$ שקלים.

אם יוצא Head שחקן א' נותן שקל לשחקן ב' ולהפך.
מהי ההסתברות ששחקן א' נוצח?

נסתכל על מרחב מדגם $\Omega = \{H,T\}^N$. כל הסדרות
האינסופיות של H ו- T. זה אוסף לא בן מניה
(יש איזוומורפיזם בין Ω לקטע $0,1$ ע"י הפיתוחים
הבינאריים, כלומר כל סדרה היא כמו...0.100110101110 1
וכל סדרה בינארית מתאימה למספר ממש בן 0 ל- 1).

$A = \{$ שחקן א' נוצח $\}$

$B = \{$ ההטלה הראשונה היתה Head $\}$

נשתמש בחוק ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) =$$

$$P(A) = p\,P(A|B) + q\,P(A|B^c)$$

לראורה רק סבכנו לעצמנו את החיים.
אבל יש פה משהו יקורסיבי. הרי אחרי כל הטלה המשחק
ראילו מתחיל מחדש רק שיש להם סכומי כסף חדשים.
נגדיר α_i = ההסתברות ששחקן א' נוצח ראשר הוא
מתחיל את המשחק עם i שקלים. ואז נקבל

$$\begin{cases} \alpha_i = p\alpha_{i+1} + q\alpha_{i-1} \\ \alpha_0 = 0 \\ \alpha_N = 1 \end{cases}$$

נפתור את זה בעמוד הבא:

$p+q=1 \Leftarrow$ אפשר לרשום

$$(p+q)\alpha_i = p\alpha_{i+1} - q\alpha_{i-1}$$

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{q}{p}(\alpha_i - \alpha_{i-1})$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{q}{p}\alpha_1$$

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \frac{q}{p}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{q^2}{p^2}\alpha_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^2\alpha_1$$

$$\alpha_4 - \alpha_3 = \frac{q}{p}(\alpha_3 - \alpha_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^3\alpha_1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_N - \alpha_{N-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\alpha_1$$

סכום $\alpha_N - \alpha_1 = \alpha_1 \sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i$

אבל אפשר לרשום גם: $\alpha_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^0\alpha_1 =$

$$\alpha_N = \left[1 + \frac{q}{p} + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right]\alpha_1 =$$

$$= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}{\frac{q}{p} - 1}\alpha_1 = 1$$

$\downarrow$

כי $\alpha_N = 1$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{q/p - 1}{(q/p)^N - 1}$$

לחישוב α_i נסכם את i המשוואות הראשונות:

$$\alpha_i = \left[1 + \frac{q}{p} + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]\alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{(q/p)^i - 1}{(q/p)^N - 1}$$

מה ההסתברות ששחקן ב' נידח?

התשובה מתקבלת מטעמי סמטריה ע"י החלפת p ב-q ו-i ב-$N-i$.

β_i - ההסתברות ששחק ב' נידח ראשר שחקן א' מתחיל עם i שקלים)

$$\Rightarrow \beta_i = \frac{(p/q)^{N-i} - 1}{(p/q)^N - 1}$$

מהי ההסתברות שאחד השחקנים נידח? כלומר, האם המשחק נגמר?

ובכן המאורע ששחקן א' נידח והמאורע ששחקן ב' נידח הם כמובן זרים ⇐ ניתן לחבר את ההסתברויות שלהם.

$$\alpha_i + \beta_i = \frac{\cancel{q^i p^{N-i}} - p^N}{q^N - p^N} + \frac{\cancel{p^{N-i} q^i} - q^N}{p^N - q^N} =$$

$$= \frac{-p^N + q^N}{q^N - p^N} = 1$$

⇐ המשחק יגמר בהסתברות 1 ⇐ המהמר תמיד יתרושש.

הערה: הנוסחה שהגענו אליה לא נפונה ראשר $p = q = \frac{1}{2}$.

ה Catch הוא בסכום של הטור ההנדסי.

ראשר המנה = 1 זה פשוט סכום. רגיל

$$\alpha_N = N\alpha_1$$

$$\alpha_1 = 1/N$$

$$\alpha_i = i\alpha_1 = \frac{i}{N}$$

חוקי 0-1 (קולמוגורוב. רוסים כבוד!)

זה אוסף בעיות שבהן למאורעות יש הסתברות או 0 או 1.
לא יודעים מהי מראש אבל זה ירול להיות רקאם או אחד.

דוגמה: פעם היה מרשיר שבקרא מכונת כתיבה. מושיבים קוף ליד המכונה הוא מהר מאוד מבין מה צריך לעשות ומתקתק באקראי על מכונת כתיבה. הוא מייצר שרשרת אינסופית של תווים. בכל שנייה הוא מקליד תו אחד.
(מי שמוטרד מרק שקוף יש תוחלת חיים סופית אפשר לגרום לו לתקתק את התו הראשון בדקה ל-12, את השני בחצי דקה ל-12 וכן הלאה ☺).
כל תו בלתי תלוי באחרים.

מה ההסתברות שהתנ"ב מופיע (בתת מתרוצת) אינסוף פעמים?

האמת היא שההסתברות היא 1 אבל אנחנו נוכיח כאן רק שהיא או אפס או אחד.

H = {התנב מופיע ∞ פעמים}

H_k = {התנ"ב מופיע לפחות k פעמים}

$H_{m,k}$ = {התנ"ב מופיע לפחות k פעמים עד כמן m}

H^m = {התנ"ב מופיע אינסוף פעמים החל מהתו ה- $m+1$}

ברור ש- $H = H^m$. למה אנחנו כותבים את אותו הדבר פעמיים? תכף נעשה בזה שימוש.

כמו כן $H_{m,k}$ סדרה עולה בפונק ציה של m. $\Leftarrow$ $\lim_m H_{m,k} = H_k$

H_k סדרה יורדת ב- k $\Leftarrow$ $\lim_k H_k = H$

$$P(\underbrace{H_{m,k}}_{m \text{ תחים ראשונים}} \cap \underbrace{H^m}_{\text{מהתו ה- } m+1}) = P(H_{m,k})\,P(H^m)$$

המאורעות בת"ל כי הקול מקליד באופן אקראי לתלוטין.

$$H = H^m$$

$$\Leftarrow \quad P(H_{m,k} \cap H) = P(H_{m,k})P(H)$$

כעת נשאיל את m ל- ∞ ונזכור ש- P פונק' הסת' רציפה

$$P(H_{m,k}) \longrightarrow P(H_k)$$

$$H_k \supseteq H \Rightarrow H_k \cap H = H$$

$$P(H_{m,k} \cap H) \longrightarrow P(H_k \cap H) = P(H)$$

$$\Longrightarrow P(H) = P(H_k)P(H)$$

ערשיו נשאיל את k ל- ∞. $P(H_k) \longrightarrow P(H)$

$$\Longrightarrow P(H) = P(H) \cdot P(H)$$

זה ירדל להיות רק אם $P(H)=1$ או $P(H)=0$!

מגניב ☺

קולמוגורוב הוכיח באופן כללי שחוקי 1-0 לאת
תכונה כללית של מאורעות לנב.
אלה מאורעות שלאו תלויים בכל תחילית סופית של
המאורע.
די מוצר שהקול יקליד אינסול פעמים את התנ"ך אבל לה
נסין ובעדם נכאה לו שמם נוכיח את לה בהמשך.

(26) 5.12.05
הסתברות

משתנים מקריים

ניסוי אנרונו מתארים בעזרת מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

הגדרה (זמנית): משתנה מקרי הוא פונקציה ממרחב המדגם Ω לקבוצה S

משתנה מקרי נקרא ממשי אם $S \subseteq \mathbb{R}$.

דוגמה: נחשוב רגע על הטלת מטבע. מה קובע את התוצאה? ובכן, תנאי ההתחלה - המקום שבו אנחנו נמצאים, האופן שבו מחזיקים את המטבע, התנע הזוויתי והקווי שמקנים לו (נניח שנזניח אפקטים קוונטיים) וכו'. אז בעיקרון, זה יהיה מאוד מאוד מסובך, אבל התוצאה H או T נקבעת ע"י תנאי ההתחלה והם אקראיים. בניסוי זה המשתנה המקרי יהיה העתקה מ- Ω - תנאי ההתחלה ל- $S=\{H,T\}$.

דוגמה: הניסוי הוא הטלת שתי קוביות $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$

הסתברות אחידה: $\forall \omega \in \Omega \quad P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$

המשתנה המקרי X הוא סכום ההטלות:

$$X : \Omega \longrightarrow \{2,\dots,12\} := S$$

$$X((i,j)) = i+j$$

אם כל מה שמעניין אותנו בעולם הוא הסכום, הינו רוצים לבנות מודל הסתברותי שמתעלם מהדברים האחרים.

לכל $A \subseteq S$ הינו רוצים לדעת את ההסתברות שתוצאת הניסוי מתאימה לקבוצה A: $P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = ?$

אבל לקבוצה הזאת יש שם. X לא דווקא הופכי, אבל בכל זאת אפשר להסתכל על תמונה. $\{\omega : X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$

$$\Longrightarrow P(X^{-1}(A)) = P \circ X^{-1}(A)$$

משתנה מקרי הוא העתקה מדידה.

<u>הגדרה:</u> יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד. העתקה $X: \Omega \to S$ נקראת <u>מדידה</u> אם לכל $A \in \mathcal{F}_S$ מתקיים $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

למה: יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד. העתקה $X: \Omega \to S$ מגדירה מרחב מדיד $(S, \mathcal{F}_S)$ כך ש- $\mathcal{F}_S = \{A \subseteq S : X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ הוא המרחב המדיד הקטן ביותר ביחס להכלה שעבורו X מדידה.

הוכחה: נבדוק שזו סיגמא אלגברה. $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$ ו- $X^{-1}(S) = \Omega \in \mathcal{F}$. אם $A \in \mathcal{F}_S$ אז $X^{-1}(A^c) = X^{-1}(A)^c \in \mathcal{F}$ ולכן $A^c \in \mathcal{F}_S$. אם $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_S$ אז $X^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i X^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$ ולכן $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}_S$. ברור שכל $\mathcal{G}$ כך ש- X מדידה מכיל את $\mathcal{F}_S$.

אוסף התת-קבוצות של Ω הוא תמיד סיגמא אלגברה, אבל מה יקרה אם $\mathcal{F} \neq 2^\Omega$? אז נוכל לקבל שמקור של A הוא לאו דווקא מאורע. נניח שכל המאורעות הם 2^S שמוגדרות אותנו. מה חישבנו עד כה: התפלגות $P \circ X^{-1}$.

נשאלת השאלה $(S, 2^S, P \circ X^{-1})$ הוא מרחב הסתברות. שפונקציית ההסתברות שמשרה מקרי משתנה ה induce של S קרויה ההתפלגות שלו (distribution).

מהמשך נראה ש $P \circ X^{-1}$ היא אכן פונקציית הסתברות. בינתיים נאמין לזה.

רק הערה: $P \circ X^{-1}$ אכן מוגדר. P פועלת על מאורעות, הם יכולים להיות יחידונים אפילו אם לאו מלכתחילה אין לנו בעיה שהלה של X הינו לכל תחת X^{-1} יכולה להתגיר כמה אטומים - קבוצה של אטומים היא מאורע ו- P פועלת על המאורע הלזה. לה בסדר!

ברשותכם נפרמל קצת את מה שעשינו.

אוסף התת-קבוצות של Ω הוא מרחב עם מבנה $(\mathcal{F}, \Omega)$.

פונקציה על מהם מדיד היא העתקה מהרחב מדיד אחר.

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{F}, P: \mathcal{F} \to [0,1]) & & \\ \uparrow X^{-1} \quad \downarrow X & & \\ (S, \mathcal{F}_S, P_X = P \circ X^{-1}) & & \end{array}$$

X העתקה מקבוצ Ω לקבוצ S מאפיינה פונקציה הופכית X^{-1} מ- 2^S ל- 2^Ω

$$\{A \in \mathcal{F} : \exists \omega \in \Omega \} = (A) X^{-1} \in 2^\Omega$$

אבל מה אם $\mathcal{F} \neq 2^\Omega$? אז נוכל לקבל שמקור של A הוא לאו דווקא מאורע. נניח שכל המאורעות הם 2^S שמוגדרות אותנו. מה חישבנו עד כה: התפלגות $P \circ X^{-1}$.

נשאלת השאלה $(S, 2^S, P \circ X^{-1})$ הוא מרחב הסתברות. שפונקציית ההסתברות שמשרה מקרי משתנה ה induce של S קרויה ההתפלגות שלו (distribution).

מהמשך נראה ש $P \circ X^{-1}$ היא אכן פונקציית הסתברות. בינתיים נאמין לזה.

רק הערה: $P \circ X^{-1}$ אכן מוגדר. P פועלת על מאורעות, הם יכולים להיות יחידונים אפילו אם לאו מלכתחילה אין לנו בעיה שהלה של X הינו לכל תחת X^{-1} יכולה להתגיר כמה אטומים - קבוצה של אטומים היא מאורע ו- P פועלת על המאורע הלזה. לה בסדר!

ברשותכם נפרמל קצת את מה שעשינו.

אוסף התת-קבוצות של Ω הוא מרחב עם מבנה $(\mathcal{F}, \Omega)$.

פונקציה על מהם מדיד היא העתקה מהרחב מדיד אחר.

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{F}, P: \mathcal{F} \to [0,1]) & & \\ \uparrow X^{-1} \quad \downarrow X & & \\ (S, \mathcal{F}_S, P_X = P \circ X^{-1}) & & \end{array}$$

X העתקה מקבוצ Ω לקבוצ S מאפיינה פונקציה הופכית X^{-1} מ- 2^S ל- 2^Ω

$$\{A \in \mathcal{F} : \exists \omega \in \Omega \} = (A) X^{-1} \in 2^\Omega$$

טענה: אם $X: \Omega \to S$ פונקציה מדידה בין שני מרחבים מדידים אזי
$$X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c$$
$$X^{-1}(\bigcup A_n) = \bigcup X^{-1}(A_n)$$
ומכאן אם $A, B \in \mathcal{F}_S$ למשל כך $X^{-1}(A), X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ למשל.

הוכחה:
$$X^{-1}(A^c) = \{\omega : X(\omega) \in A^c\} = \{\omega : X(\omega) \notin A\} = \{\omega : X(\omega) \in A\}^c = (X^{-1}(A))^c$$
- הוכחת האיחוד נשמה בדרך דומה.
- נניח $A, B \in \mathcal{F}_S$ למשל. $X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\}$
$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$
נניח ש $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) \neq \emptyset \Rightarrow$ קיים $y \in X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$
$\Rightarrow X(y) \in A$ וגם $X(y) \in B$ אבל X פונקציה
תד ערכית $X(y) = b \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ אם $b \in A$ וגם $b \in B$ מקיימת
לכן ש $A \cap B = \emptyset$. משל (ב)

משפט: X פונקציה מדידה מ- $(\Omega, \mathcal{F})$ ל- $(S, \mathcal{F}_S)$
ההתפלגות של X $P_X := P \circ X^{-1}$ היא פונקציית הסתברות על $(S, \mathcal{F}_S)$.

הוכחה:
- $P_X(S) = 1$: $P_X(S) = P \circ X^{-1}(S) = P(\Omega) = 1$
- $P_X : \mathcal{F}_S \to [0,1]$: ברור כי $0 \leq P \leq 1$
- יהי (A_n) סדרת מאורעות זרים ב- $\mathcal{F}_S$ $P_X(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$:

$$P_X(\bigcup A_n) = P(X^{-1}(\bigcup A_n)) = P(\bigcup X^{-1}(A_n)) = \sum P(X^{-1}(A_n)) = \sum P_X(A_n)$$

(הגדרת ההסתברות) (הגדרת P_X)

משל (ג)

מרשים כל מה שהכרנו עבור הסתברות עשוי נכון גם עבור מרחב הסתברות!

הגדרה: מרחב מדידה הוא זוג $(\Omega, \mathcal{F})$ כאשר $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ היא σ-אלגברה

דוגמה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

A מאורע ב- $\mathcal{F}$. נגדיר $X = I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$

האם I_A מ"מ? כלומר, האם לכל x ממשי $\{\omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$?

השטח של I_A הוא $S = \{0,1\}$.

ניקח $\mathcal{F}_S = 2^{\{0,1\}}$. האם X^{-1} שומרת על $\mathcal{F}$?

$X^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} = A \in \mathcal{F}$

$X^{-1}(\{0\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = A^c \in \mathcal{F}$

$\Leftarrow$ I_A אכן מ"מ (משתנה מקרי). I_A נקרא הפונקציה האינדיקטורית של המאורע A.

מהי ההתפלגות של I_A? מאחר ש- S סופי, ההתפלגות נקבעת ע"י ההיתכנים. $\Leftarrow$

$P_{I_A}(\{1\}) = P(I_A^{-1}(\{1\})) = P(A)$

$P_{I_A}(\{0\}) = P(I_A^{-1}(\{0\})) = P(A^c)$

אכן רואים ש- $P_{I_A}(\{0,1\}) = P(A) + P(A^c) = 1$.

תרגיל

נכתב שלושה שחקנים משחקים אחד מול השני. כל אחד מהם (נניח i) זורק מטבע מאוזן C_i. אם התוצאות שונות אחד מהם (נניח i) זורק שוב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם (נניח i) יזרוק k פעמים?

הדרכה במקום לעבוד עם משתנים מקריים בדידים, נזכור S קבוצה בדידה (סופית או בת מניה) כלשהי. פונקציה $p_X : S \to [0,1]$ תהווה היתכנים. $p_X(s) = P_X(\{s\})$ $\forall s \in S$ -

ההתפלגות (האטומית) הנקודתית של המשתנה X.

קיימת סדרה של סימונים:

ההסתברות $P : \mathcal{F} \to [0,1]$

ההתפלגות $P_X : \mathcal{F}_S \to [0,1]$

ההתפלגות הנקודתית $p_X : S \to [0,1]$

$P_X(\{s\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = s\}) = P(X^{-1}(\{s\}))$. $p_X(s)$

פיתרון:

נגדיר מרחב מדגם $\Omega = \{(i,j,k) : 1 \le i < j < k \le 20\}$

$|\Omega| = \binom{20}{3}$

P - הסתברות אחידה על המרחב.

ברור שאם $k \ge 17$ אז לפחות אחד מהם יצא M או יותר.

נגדיר משתנה מקרי $X((i,j,k)) = k$

$X : \Omega \longrightarrow \{3, \dots, 20\} \equiv S$

האם X מ"מ? כן! מה שדרוש לבדוק הוא האם $X^{-1}(A) \subseteq \mathcal{F}$

אבל אם הגדרנו $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ לה בטוח.

השאלה שדרוש לבדוק היא $P_X(\{17,18,19,20\})$

$\Rightarrow P_X(\{17,\dots,20\}) = P_X(\{17\}) + \dots + P_X(\{20\}) =$

$= p_X(17) + \dots + p_X(20) \cong 0.508$

$3 \le m \le 20 \qquad p_X(m) = P(\{\omega : X(\omega) = m\}) = \dfrac{\binom{m-1}{2}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{\left|\begin{matrix}\text{כל אות}\\ \text{מ-1 עד}\\ m-1\end{matrix}\right|}{|\Omega|}$

פונק' התפלגות

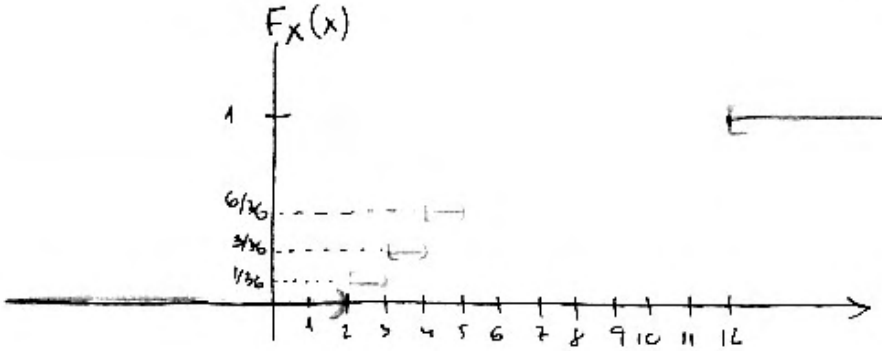
אם X מ"מ (ממשי) על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. P_X

ההתפלגות. נגדיר פונקציה $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(\{\omega : X(\omega) \le x\})$

הערה. הרחבנו את S לכל $\mathbb{R}$)

דוגמה: הניסוי הוא הטלת שתי קוביות ו- $X((i,j)) = i + j$



משפט: פונק' התפלגות F_X של מ"מ X מאשי מקיימת את התכונות:

(i) F_X מונוטונית עולה

(ii) F_X רציפה מימין

(iii) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

(iv) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

הוכחה

(i) $x \le y \Rightarrow (-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$

$\Rightarrow P_X((-\infty, x]) \le P_X((-\infty, y])$

$F_X(x) \le F_X(y)$

(ii) תהי (h_n) סדרה מונוטונית יורדת לאפס. כ"ל

לכל x $\lim_{n\to\infty} F_X(x+h_n) = F_X(x)$

$(-\infty, x+h_n]$ סדרה יורדת של מאורעות

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-\infty, x+h_n] = (-\infty, x]$

$\lim_n F_X(x+h_n) = \lim_n P_X((-\infty, x+h_n]) = P_X(\lim_n (-\infty, x+h_n]) =$

$= P_X(-\infty, x]) = F_X(x)$

(iv) $\lim_n F_X(n) = \lim P_X((-\infty, n]) = P_X(\lim(-\infty, n]) = P_X(\mathbb{R}) = 1$

(iii) מאותו אופן

משל ☺

נע"ב: לחזור על ההרצאה ולעשות תרגילים ל

8.12.05
הסתברות

משתנים אקראיים

אמרנו שמשתנה מקרי הוא העתקה $X:\Omega\to S$, S קבוצה אחרת. אבל זה לא רק זה, X ממש יוצר מבנה חדש

$$X:(\Omega,\mathcal{F},P)\longrightarrow(S,\mathcal{F}_S,P_X)$$

X

X^{-1}

החלק של ה X^{-1} הוא מאוד חשוב כי אחרת לא נוכל לחזיר אחורה ל $\mathcal{F}$ רדי לחשב את ההסתברות.

סימונים:

$P:\mathcal{F}\to[0,1]$ הסתברות

$P_X:\mathcal{F}_S\to[0,1]$ התפלגות

$p_X:S\to[0,1]$ התפלגות נקודתית

$F_X(x)=P_X((-\infty,x])$ פונקציית ההתפלגות

בהינתן פונק' ההתפלגות נוכל תמיד לחשב את ההתפלגות

$$P_X((a,b])=P_X((-\infty,b]\setminus(-\infty,a])=$$
$$=P_X((-\infty,b])-P_X((-\infty,a])=F_X(b)-F_X(a)$$
$$P_X((a,b))=P_X\left(\lim_{n\to\infty}(a,b-\tfrac{1}{n}]\right)=\lim P_X((a,b-\tfrac{1}{n}])=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[F_X(b-\tfrac{1}{n})-F_X(a)\right]$$

ככה אפשר להראות שלכל קטע ב $\mathbb{R}$. אפשר למצוא את ההתפלגות של SK כך נותן לנו מוטיבציה למה פונקציית התפלגות זה טוב.

בעיית אסף הקופונים Cupon Collector

יש N סוגי קלפים.

בכל יחידת זמן מגרילים קלף. נניח ההסתברות $\frac{1}{N}$ לכל קלף וזה בת' בהגרלות הקודמות.

נגדיר מרחב מדגם $\Omega = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$

זה מרחב אינסופי, אפילו לא בן מניה, אבל לכל מאורע סופי אנחנו יודעים לחשב את ההסתברות שלו.

נגדיר מ"מ T: מספר הקלפים שהגרלנו עד שקיבלנו (לפחות) אחד מכל סוג. $T: \Omega \to \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\} \cup \{\infty\}$

למקרה שאתרע מכלנו מאוד מאוד ולא קיבלנו את כל הקלפים אל פעם (תלוות סינאי ☺)

מטרה: לחשב את ההתפלגות (קודתם) ש T.

$$P_T(\{k \in \mathbb{N} : k > n\}) = ?$$

נגדיר:

$A_1 = \{$עד הצעד ה-n עדין לא קיבלתי את קלף $1\}$

$\vdots$

$A_N = \{$עד הצעד ה-n עדין לא קיבלתי את קלף מס' $N\}$

$$P_T(\{k \in \mathbb{N} : k > n\}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \dots \pm P(A_1 \cap \dots \cap A_N) =$$

$$= N\left(\frac{N-1}{N}\right)^n - \binom{N}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n + \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k}\left(\frac{N-k}{N}\right)^n (-1)^{k+1}$$

$$P_T(\{n+1, n+2, \dots, \infty\}) = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k}\left(\frac{N-k}{N}\right)^n (-1)^{k+1}$$

$$\Rightarrow P_T(n) = P_T(\{n, n+1, \dots, \infty\}) - P_T(\{n+1, \dots, \infty\})$$

תהליך ברנולי

ניסוי המורכב מ-n תת ניסויים בת"ל שכל אחד מהם בעל מרחב מדגם בגודל 2 $\{0,1\}$.

נסמן את ההסתברות להצלחה בתת ניסוי באות p.

$$\Omega = \{0,1\}^n$$

$$P(\{(a_1,\dots,a_n) : a_i \in \{0,1\}\}) = p^{\sum a_i}(1-p)^{n-\sum a_i}$$

נגדיר על מרחב זה מ"מ X שהוא מספר ההצלחות:

$$X : \Omega \longrightarrow \{0,\dots,n\}$$

$$p_X(k) \equiv P(\{\omega : X(\omega) = k\}) = p^k q^{n-k} \binom{n}{k}$$

k הצלחות

$n-k$ השלונות $(q = 1-p)$

מספר הסידורים האפשריים ל-k הצלחות

<u>הגדרה:</u> מ"מ X מעל מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ייקרא <u>מ"מ הינומי</u> עם פרמטרים (n,p) אם הוא מקבל ערכים בקבוצה $\{0,\dots,n\}$ ו- $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

נסמן $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

<u>דוגמה</u>

חברה Pampggies מייצרת חיתולים. כל חיתול פגום בהסתברות 0.01 באופן בת"ל בשאר ~~הש~~ הצרכן קונה חבילות של עשרה חיתולים ומקבל כספו חזרה אם בחבילה <u>יותר</u> מחיתול פגום אחד. מה הסתברות שצרכן יקבל כספו מחזרה.

X - מספר החיתולים הפגומים בחבילה ! $X \sim \mathcal{B}(10, 0.01)$

$$\Rightarrow P_X(\{2,\dots,10\}) = 1 - P_X(\{0,1\}) =$$

$$1 - p_X(0) - p_X(1) = 1 - \binom{10}{0}(0.01)^0(0.99)^{10} - \binom{10}{1}(0.01)^1(0.99)^9 \approx 0.07$$

(31) 12.12.05
הסתברות

התפלגות בינומית

נאמר ש $X \sim B(n,p)$ ראשר $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$k \in S = \{0, \dots, n\}$

נשים לב שאנחנו לא יודעים פה כלום על מרחב המדגם המקורי וזה גם לא חשוב.

<u>שאלה</u>

מטילים מטבע הוגן $2n$ פעמים. מהי ההסתברות ל-n ראשים?

$X \sim B(2n, \frac{1}{2})$ מס' הראשים

$$\Rightarrow \quad p_X(n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n}$$

רוצים לדעת עבור $2n = 100$. אז לחשב $100!$ זה לא רוץ. אפילו המחשבון לא אוהב את זה. אבל יש לנו כלים לחשב את זה - קירוב סטירלינג.

$$n! \simeq \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$$

הערה חשובה: ההפרש בין שני האוגפים הוא גדול, אבל המנה יורדת ל-1 מהר מאוד! אז -

$$\frac{(2n)!}{n!\,n!\,2^{2n}} \simeq \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-2n} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} \sqrt{2}\sqrt{n}}{2\pi\, e^{-2n}\, n^{2n+1} \sqrt{2}\sqrt{n} \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

עבור $2n = 100$ וקבל $p_X(50) \simeq 0.08$

מהו תחום הגליה של $p_X(k)$?

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)!\,(k-1)!\,p}{(n-k)!\,k!\,(1-p)} =$$

$$= \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

תחום עליה ראשר $(n-k+1)p > k(1-p) \Rightarrow k < (n+1)p$

כלומר ההתפלגות עולה ומגיעה למקסימום ראשר

$$k = \lfloor (n+1)p \rfloor$$

משתנה מקרי פואסוני Poisson

X "קרא מ"מ פואסוני (ע"ש האיש, לא הדג) עם פרמטר $\lambda>0$ אם $S=\{0,1,\dots\}$ וההתפלגות הנקודתית שלו היא $p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

למה $\frac{2}{0}$ כובע $\frac{1}{0}$ סתם. מסתבר שלה משתנה מקרי זי חשוב בחיים. למשל דעיכה רדיואקטיביות קורית לפי התפלגות פואסונית.

מספר אנשים שנכנסים לסניף דואר ביום אקראי הוא בקירוב טוב מ"מ פואסוני

מספר ה typos בספר אקראי של סופר אקראי הוא מ"מ פואסוני.

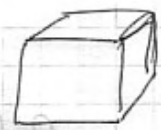
<u>תצבורת:</u> מצמן מצמן רשעוד לא היה נורא כל רק לקום בבוקר למדני על המצבירה המבולבלת. יש n מרתבים ההסתברות שבהיוק k מרתבים הגיעו ליעדם הייתה עבור $n>>1$ $\frac{e^{-1}}{k!}$ לה מ"מ פואסוני עם $\lambda=1$.

<u>הערה:</u> $\sum_{k\in S} p_X(k) = e^{-\lambda}\sum_{1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$



מודל הסתברותי להתפרקות רדיו-אקטיבית

(בכל ε שניות ו- $\varepsilon>>1$.)



בכל יחידת זמן ε ההסתברות להתפרקות רדיו אקטיביות אחת היא $\varepsilon\lambda$ (לו הנחת מודל - הפיסיקאים מספרים לנו שלה ליוארי) (סמן $n=\frac{1}{\varepsilon}$ אנו מודדים X = מספר התפרקויות בשניה.

לה מ"מ בינומי $X\sim B(\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\lambda)$ ואז נקבל

$$p_X(k)=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

אומרים ש- n גדול מאוד ביחס ל- λ אם λ קטן מאוד ביחס ל- n. נראה את ההשערה הבאה.

$$p_X(k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{\lambda^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{n^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{(1-n)\cdots(1+k-n)}{n\cdot n\cdots n}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

($\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$; $\frac{(1-n)\cdots(1+k-n)}{n\cdot n\cdots n} \to 1$; $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \to 1$)

ולכן מתקבל פואסון. את זה פואסון הוכיח עבור של מה מתנהג כאשר n גדול ו- p קטן.

נניח למשל עבור $X \sim B(500, 0.01)$ קשה מאוד לחשב את ההסתברות ה מדויקת אבל אפשר לקרב לכוורת $p(k) \sim \frac{5^k}{k!}\cdot e^{-5}$.

תרגיל: נתון שמספר טעויות הדפוס בעמוד הוא משתנה פואסוני. יש פרופ $\frac{1}{2}$. מה ההסתברות שיש בעמוד שלפחות טעות אחת?

$$X \sim Poi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P_X(\{1,2,\dots\}) = 1 - p_X(\{0\}) = 1 - \phi_X(0) =$$

$$= 1 - \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{0!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.395$$

משתנה מקרי גיאומטרי

מייצג את מספר הניסויים (ההסתברות p) עד להצלחה הראשונה. $X \sim Geo(p)$

$$S = \{1,2,\dots\}$$

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$$

בדיק בדקנו ש $P_X(S) = 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{1-(1-p)}p = 1$$

<u>טענה:</u> מ"מ גאומטרי היא "חסר זיכרון" במובן ש

$$P(\{\omega : X(\omega)=k\} \mid \{\omega : X(\omega)>j\}) = p_X(k-j)$$

<u>הוכחה:</u>

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow p(X=k \mid X>j) = \frac{P(X=k, X>j)}{P(X>j)} = \frac{P(X=k)}{P(X>j)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{k-1}p}{\sum_{m=j+1}^{\infty}(1-p)^{m-1}p} = \frac{1-p^{k-1}}{(1-p)^j \cdot \frac{1}{1-(1-p)}} = (1-p)^{k-j-1}p = p_X(k-j)$$

מש"ל ☺

האמת היא שלה לא מפתיע כי הניסויים בלתי תלויים.

<u>דוגמה</u> בכד יש N כדורים לבנים $M-1$ שחורים.
בכל פעם מוציאים כדור (עם החזרות) עד לקבלת
כדור שחור?

א. מה ההסתברות שהיינו צריכים k הוצאות?

ב. מה ההסתברות שהיינו צריכים לפחות n הוצאות.

נותן לזהות בקלות ש- $X \sim Geo(\frac{M}{N+M})$ מס' ההוצאות.

$$\Leftarrow \quad p_X(k) = \left(1-\frac{M}{N+M}\right)^{k-1} \cdot \frac{M}{N+M} =$$

$$= \frac{N^{k-1}M}{(N+M)^k}$$

$$P_X(\{n, n+1, \dots\}) = \sum_{j=n}^{\infty} P_X(j) = \frac{M}{N}\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{N}{M+N}\right)^j =$$

$$= \frac{M}{N}\cdot\left(\frac{N}{M+N}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{N}{M+N}} = \frac{M}{N}\left(\frac{N}{M+N}\right)^n \frac{M+N}{M} = \left(\frac{N}{M+N}\right)^{n-1}$$

וזאת ההסתברות שנכשלנו ב- $(n-1)$ ההוצאורת הראשונות.

כאן סיימנו עם ~~[illegible]~~ התפלגויות שונות.

טוב (?) עכשיו שני משתנים מקריים.

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (S_X, \mathcal{F}_X, P_X)$$
$$\Big\downarrow Y \qquad\qquad (S_X \times S_Y, \mathcal{F}_{X,Y}, P_{X,Y})$$
$$(S_Y, \mathcal{F}_Y, P_Y)$$

נזכיר לעצמנו מה הכוונה: $P_X(A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\})$, $A \in \mathcal{F}_X$
$P_Y(B) = P(\{\omega : Y(\omega) \in B\})$, $B \in \mathcal{F}_Y$

ראה לה מעניין ל<u>הוכיח</u>. היה אחד והיה עוד אחד.
<u>שאלה לקבל</u>: אחרי ההסתברות ש $X(\omega) \in A$ ואם $Y(\omega) \in B$?
<u>ינאי עונה</u>: $P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B))$

מאופן מפתיע התשובה נכונה... ☺

אומנם תיבים לחצור לארחבה הראשון Ω. בהינתן $(P_X, \mathcal{F}_X, S_X)$ ו- $(P_Y, \mathcal{F}_Y, S_Y)$ אומנם יכולים לענות את על שאלה שקשורה רק ל-X או רק ל-Y. אבל בשביל לדבר על היחסים ביניהם צריך לחזור ל $(P, \mathcal{F}, \Omega)$.

הדרך ה"נכונה" לחשוב על כזה משתנים מקריים:

$$\Omega \xrightarrow{(X,Y)} (S_X \times S_Y, \mathcal{F}_{X,Y}, P_{X,Y})$$

ההתפלגות המשותפת של הזוג X ו-Y:

על כל $E \in \mathcal{F}_{X,Y}$ $P_{X,Y}(E) = P(\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in E\})$

בפרט, אם נבחר $E = A \times S_Y$, $A \subseteq S_X$.

$$P_{X,Y}(A \times S_Y) = P(\{\omega : X(\omega) \in A, Y(\omega) \in S_Y\}) =$$
$$= P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = P_X(A)$$

באותו אופן $P_{X,Y}(A \times S_Y) = P_X(A)$
$P_{X,Y}(S_X \times B) = P_Y(B)$

אלו ההתפלגות המשותפת אפשר לדעת את ההתפלגות ה<u>שוליות</u>. בהסתכלות הזאת לא נכון

ראשר S_X, S_Y קבוצות בדידות ($P_{X,Y}$ מוגדרת ע"י ערכה עבור יחידונים.

$$P_{X,Y}(\{(x,y)\}) \equiv P_{X,Y}(x,y)$$

התפלגות משותפת נקודתית.

כמו כן, נגדיר ראשר $S_X, S_Y \subseteq \mathbb{R}$

פונק' התפלגות משותפת

$$F_{X,Y}(x,y) = P_{X,Y}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) =$$

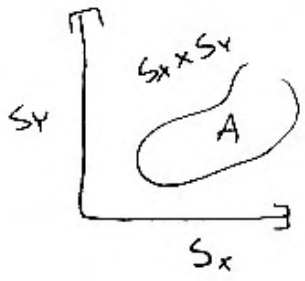
$$= P(\{\omega : X(\omega) \le x,\ Y(\omega) \le y\})$$

יש פה מעבר קונטפטואלי גדול נערל אותו בשעור הבא. בינתיים יש פה אוסף הגדרות.

(34) 15.12.05
הסתברות.

דיברנו על צוגות של משתנים מקריים.

$$(S_X \times S_Y, \mathcal{F}_{X,Y}, P_{X,Y}) \xleftarrow{X,Y} (\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (S_X, \mathcal{F}_X, P_X)$$
$$\searrow^{Y} (S_Y, \mathcal{F}_Y, P_Y)$$



$$P\{\{\omega : (X(\omega), Y(\omega) \in A\}) := P_{X,Y}(A)$$

מראן תמיד אפשר להצור לעולם של משתנים בודדים.

$$P_X(E) = P_{XY}(E \times S_Y)$$

אם זה בדיד אפשר להסתכל על יחידונים (בדידונים הא הא)

ונגדיר $P_{XY}(x,y) = P_{XY}(\{x\} \times \{y\})$

דוגמה:



מודיאים 3 כדורים.

$X(\omega)$ = מספר האדומים.

$Y(\omega)$ = מספר האדומים.

מהי ההתפלגות המשותפת של X,Y?

$S_X = \{0,1,2,3\}$
$S_Y = \{0,1,2,3\}$ $\Longrightarrow$ כי מודיאים 3 כדורים.

$|S_X \times S_Y| = 16$

אם נמצא את ההסתברות של היחידונים זה יתן לנו את ההתפלגות המשותפת.

$$P_{X,Y}(0,0) = \binom{5}{3} / \binom{12}{3}$$
$$P_{X,Y}(1,0) = \binom{3}{1}\binom{5}{2} / \binom{12}{3}$$
$$P_{X,Y}(2,0) = \binom{3}{2}\binom{5}{1} / \binom{12}{3}$$
$$P_{X,Y}(3,0) = 1 / \binom{12}{3}$$

ככה אמורים להמשיך לחשב. אפשר להציג את
התוצאות בצורה של טבלה:

y \ x	0	1	2	3
0	·	·	·	·
1				0
2			0	0
3		0	0	0

← שורה זו חישבנו

← כולא ירולים להיות יותר מ-3 הדורים.

אז צריך לחשב את כל מה שנשאר.

נסען ש- $\sum_{j=0}^{\infty} P_{X,Y}(0,j) = P_X(0)$ או באופן כללי

$$\sum_{x\in S_X} P_{X,Y}(x,y) = P_Y(y)$$

$$\sum_x P_{X,Y}(\{x\}\times\{y\}) = P_{X,Y}\left(\bigcup_{x\in S_X}\{x\}\times\{y\}\right) =$$

$$= P_{X,Y}(S_X\times\{y\}) = P_Y(\{y\}) = P_Y(y)$$

<u>הכללה ל- n משתנים מקריים</u>

$X_1,\dots,X_n$ מ"מ מעל מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},P)$

$$(\Omega,\mathcal{F},P) \xrightarrow{X_1,\dots,X_n} \left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} S_i,\ \mathcal{F}_{X_1\dots X_n},\ P_{X_1\dots X_n}\right)$$

$$: A \subseteq \mathop{\times}_{i=1}^{n} S_i$$

$$P_{X_1\dots X_n}(A) = P(\{\omega : X_1(\omega),\dots,X_n(\omega)\in A\})$$

אי תלות של מ"מ

$$(\Omega,\mathcal{F},P) \xrightarrow{X} (S_X,\mathcal{F}_X,P_X)$$

לפי הגדרת X מ"מ $\sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A\in\mathcal{F}_X\} \subseteq \mathcal{F}$

<u>טענה:</u> (תרגול) הקבוצה הנ"ל היא σ-אלגברה.

קוראים לה ה σ אלגברה שמושרית ע"י המ"מ X.

ערשיו נניח שיש לנו מ"מ Y

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{Y} (S_Y, \mathcal{F}_Y, P_Y)$$

$$\sigma(Y) = \{ Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_Y \} = Y^{-1}(\mathcal{F}_Y)$$

נסתכל עליהם ביחד:

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X,Y} (S_X \times S_Y, \mathcal{F}_{XY}, P_{XY})$$

גם ביחד הם משרים σ-אלגברה.

$$\sigma(X,Y) = \{ \{ \omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in A \} : A \in \mathcal{F}_{XY} \}$$

X, Y ו- XY חיים כל אחד מעולם משל עצמו.
אבל כל ה σ-אלגבראות חיות באותו עולם - תק' של $\mathcal{F}$.

קל לראות ש $\sigma(X,Y) \supseteq \sigma(X) \cup \sigma(Y)$

<u>הגדרה:</u> שני מ"מ X, Y נקראים בת' אם כל מאורע ב $\sigma(X)$ בת' בכל מאורע ב $\sigma(Y)$.

<u>דוגמה:</u> מטילים שתי קוביות. $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

$X(i,j) = i+j$

$Y(i,j) = i$

ראינו ש $X^{-1}(\{7\})$ בת' ב- $Y^{-1}(\{3\})$

אבל X ו- Y אינם בת'. מספיק שנמצא מאורע אחד ב $\sigma(Y)$ שיהיה תלוי במאורע ב $\sigma(X)$. דוגמה יכן הא $X^{-1}(\{6\})$ ו- $Y^{-1}(\{3\})$.

$$\sigma(Y) = \{ \{(i,j) : 1 \le j \le 6, i \in A\} : A \subseteq \{1, \dots, 6\} \}$$

זו קבוצה של קבוצות. באותו אופן

$$\sigma(X) = \{ \{ (i,j) : i+j \in B \} : B \subseteq \{2, \dots, 12\} \}$$

(36)

19.12.05
הסתברות

אי תלות בין מ"מ

מ"מ מגדיר σ - אלגברה - תלקית ל- $\mathcal{F}$.

X, Y ב"ת אם כל מאורע ב- $\sigma(X)$ ב"ת בכל מאורע ב $\sigma(Y)$.

זאת הגדרה שלא כ"כ נוח לעבוד איתה כי יכול להיות שנדטרק לבדוק אינסוף זוגות מאורעות.

אם X, Y ב"ת ותבונן במאורע $\underset{\mathcal{F}_X}{A} \times \underset{\mathcal{F}_Y}{B} \in \mathcal{F}_{X,Y}$

$$P_{X,Y}(A\times B) = P(\omega : X(\omega)\in A,\ Y(\omega)\in B\}) =$$
$$= P(\{\omega : X(\omega)\in A\} \cap \{\omega : Y(\omega)\in B\}) =$$
$$= P(\{\omega : X(\omega)\in A\}) \cdot P(\{\omega : Y(\omega)\in B\}) =$$
הם ב"ת
$$= P_X(A)\cdot P_Y(B)$$

בפרט, לכל $x\in S_X$, $y\in S_Y$ נבחר $A=\{x\}$ ו- $B=\{y\}$

ונקבל
$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\cdot p_Y(y)$$

נזכור שכל עוד אנחנו בעולם בדיד הכל מוגדר ע"י היחידונים ולכן קיבלנו שאם ההתפלגות המשותפת היא מכפלת ההתפלגויות אז המ"מ ב"ת. אבל דרך לוודא שמה שעשינו כאן הוא אם ורק אם.

באותו אופן יכולנו לבחור $A=(-\infty,x]$ $B=(-\infty,y]$ ואז
$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

באופן כללי, אם יש n מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ הם ייקראו ב"ת זה בזה אם
$$p_{X_1\dots X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$$

Borel - Cantelli הלמה של

תזכורת: אם (A_n) סדרת מאורעות כך ש

$$\sum_1^\infty P(A_n) < \infty$$

אז $P(\limsup A_n) = P(A_n \text{ i.o.}) = 0$

למה (חלק 2 של $B \subset$):

אם (A_n) סדרת מאורעות בלתי תלויים ו $\sum_1^\infty P(A_n) = \infty$

אז $P(\limsup A_n) = 1$.

הוכחה:

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k\right)^c =$$

$$= \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k^c \quad (= \liminf A_n^c)$$

(A_k) מת"ל לכן

$$P\left(\bigcap_{k=n}^\infty A_k^c\right) = \prod_{k=n}^\infty P(A_k^c) =$$

$$= \prod_{k=n}^\infty [1-P(A_k)] \leq \prod_{k=n}^\infty e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^\infty P(A_n)} = 0$$

$1-x \leq e^{-x}$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{k=n}^\infty A_k^c\right) = 0 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k^c\right) = 0$$

אקסיומה של P

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k^c\right)^c\right) = 1$$

☺ סיום

דוגמה:

נתבונן בסדרה אינסופית של ניסוי ברנולי (הסתברות $0<p<1$ להצלחה). מה ההסתברות לקבל אינסוף פעמים רצף של SFS.

יהי A_n המאורע $X_n X_{n+1} X_{n+2} = \text{"SFS"}$.

ברור שהמאורעות $(A_{3k+1})_{k=1}^{\infty}$ בת"ל כי אין תפיפה.

כמו כן, $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = \infty \Leftarrow P(\limsup A_{3n+1}) = 1$

מסקנה: הקול מהסיפור הקודם הקליד את התנ"ב ∞ פעמים.

עתשיו אנחנו הולכים לדבר על סכומים של מ"מ.

יש לנו 2 מ"מ ואנחנו תוהים (is that so??) מה ההתפלגות של הסכום.

X, Y מ"מ (כמובן שהם באים עם המבנים שלהם)

נגדיר $Z = X + Y$. מהי ההתפלגות של Z?

$$F_Z(z) = P(\{Z \le z\}) = P\left(\bigcup_{x \in S_X} \{X = x, Y \le z - x\}\right) =$$

$$= \sum_{x \in S_X} P(\{X = x, Y \le z - x\}) = \sum_{x \in S_X} P\left(\bigcup_{S_Y \ni y \le z - x} \{X = x, Y = y\}\right) =$$

$$= \sum_{x \in S_X} \sum_{S_Y \ni y \le z - x} p_{X,Y}(x,y) = F_Z(z)$$

נשים ♡ שאם היו נתונות לנו רק p_X ו- p_Y זה לא היה מספיק לנו! צריך את ההתפלגות המשותפת.

באותו אופן,

$$p_Z(z) = P(\{Z = z\}) = \sum_{x \in S_X} \sum_{S_Y \ni y = z - x} p_{X,Y}(x,y)$$

אבל יש רק y אחד שמקיים את זה, אז זה מטומטם לרשום סכום. אפשר לרשום $p_Z(z) = \sum_x p_{X,Y}(x, z - x)$

כאשר X Y בת"ל מתקבל

$$p_{X+Y}(z) = \sum_{x \in S_X} p_X(x) p_Y(z - x)$$

זאת קונבולוציה!

דוגמה: $X \sim Poi(\lambda_1)$, $Y \sim Poi(\lambda_2)$ בת"ל.

מהי ההתפלגות של הסכום?

$$P_{X+Y}(k) = \sum_{j=0}^{\infty} p_X(j)\, p_Y(k-j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1)^j}{j!} e^{-\lambda_2} \frac{(\lambda_2)^{k-j}}{(k-j)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (\lambda_1)^j (\lambda_2)^{k-j} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

כלומר התפלגות של סכום מ"מ פואסוניים בת"ל בעלי פרמטרים λ_1 ו- λ_2 היא פואסונית עם פרמטר $\lambda_1+\lambda_2$.

התפלגות מותנית

X, Y מ"מ בעלי התפלגות משותפת $P_{X,Y}$. נגדיר את ההתפלגות הנקודתית המותנית של X בהינתן Y:

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X=x\}|\{Y=y\}) =$$

$$= \frac{P(\{X=x, Y=y\})}{P(\{Y=y\})} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$\Rightarrow \quad p_{X,Y}(x,y) = p_{X|Y}(x|y)\, p_Y(y)$$

נסכם על $y \in S_Y$ $\quad p_X(x) = \sum_y p_{X|Y}(x|y)\, p_Y(y)$

זה כמו נוסחת ההסתברות השלמה.

דוגמה

$p_{X,Y} =$

Y \ X	0	1
0	0.4	0.1
1	0.2	0.3

מה ההתפלגות של X בהינתן Y?

$$p_{X,Y}(0|0) = \frac{p_{X,Y}(0,0)}{p_Y(0)} = \frac{0.4}{0.4+0.1}$$

וכדה ממשיכים לחשב לכל האופציות של X ו- Y.

דוגמה $X \sim Poi(\lambda_1)$ $Y \sim Poi(\lambda_2)$ ב"ת

מה ההתפלגות של X בהינתן ש- $X+Y=n$?

$$p_{X|X+Y}(k,n) = \frac{P(\{X=k,\ X+Y=n\})}{P(\{X+Y=n\})} =$$

$$= \frac{p_{X,Y}(k,n-k)}{p_{X+Y}(n)} = \qquad (0 \le k \le n)$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_1^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \quad p_{X|X+Y}(\cdot|n) \sim B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

סימוניים

$$p_{X,Y|Z}(x,y|z) := P(\{X=x,\ Y=y\}|\{Z=z\}) =$$

$$= \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_Z(z)}$$

$$p_{X|Y,Z}(x|y,z) := P(\{X=x\}|(Y=y,\ Z=z\}) =$$

$$= \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_{Y,Z}(y,z)}$$

טענה $p_{X,Y,Z}(x,y,z) = p_{X|Y,Z}(x|y,z)\, p_{Y|Z}(y|z)\, p_Z(z)$

הוכחה:

$$p_{X,Y,Z}(x,y,z) = p_{X|Y,Z}(x|y,z)\, p_{Y,Z}(y,z) =$$

$$= p_{X|Y,Z}(x|y,z)\, p_{Y|Z}(y|z)\, p_Z(z)$$

☺

דוגמה נתונה סדרה $(X_i)_{i=0}^{n}$ של מ"מ בעלי טווח משותף S

$$p_{X_0\dots X_n}(a_0,\dots,a_n) = p_{X_n|X_0\dots X_{n-1}}(a_n|a_0,\dots,a_{n-1})\cdot$$

$$\cdot p_{X_{n-1}|X_0\dots X_{n-2}}(a_{n-1}|a_0,\dots,a_{n-1})\cdot\ldots\cdot p_{X_1|X_0}(a_1|a_0)\, p_{X_0}(a_0)$$

הגדרה סדרה של מ"מ נקראת שרשרת מרקוב (Markov)
אם לכל k מתקיים

$$p_{X_k|X_0,\dots,X_{k-1}}(a_k|a_0,\dots,a_{k-1}) = p_{X_k|X_{k-1}}(a_k|a_{k-1})$$

(כלומר התלות היא רק במאורע הקודם)

ראשר $p_{X_k|X_{k-1}}$ היא פונקציה על $S\times S$ שאינה תלויה ב-k.
לפונקציה זו נקרא M.

תחת סימון זה נקבל

$$p_{X_0,\dots,X_n}(a_0,\dots,a_n) = M(a_n|a_{n-1})\cdot M(a_{n-1}|a_{n-2})\cdots M(a_1|a_0)\,p_{X_0}(a_0)$$

אם נסכם על כל ה- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ נקבל

$$p_{X_n}(a_n) = \sum_{a_{n-1}}\sum_{a_{n-2}}\cdots\sum_{a_0} M_{a_n,a_{n-1}} M_{a_{n-1}a_{n-2}}\cdots M_{a_1a_0}\,p_{X_0}(a_0) =$$

$$= \sum_{a_0} M^n_{a_na_0}\,p_{X_0}(a_0)$$

אנחנו בעדם מתייחסים ל- M כמטרי זה כי זה משהו
שמקבל שני ערכים ומחזיר ערך שלישי (וזה בדיד)

הגדרה שרשרת מרקוב בה לכל התפלגות התחלתית p_{X_0}
ההתפלגות p_{X_n} שואפת לגבול כאשר $n\to\infty$ והגבול
אינו תלוי ב-p_{X_0} נקראת ארגודית (Ergodic)

(39)

22.12.05
הסתברות

נניח ש $\{X_k\}$ סדרה של משתנים מקריים.

ונניח $X_j \in \mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_s\}$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \text{"ממוצע"}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} a_j \times \left\{ \begin{matrix} \text{מס' הפעמים} \\ \text{שהתקבל } a_j \end{matrix} \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\text{מס' הפעמים שקבלנו } a_j}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{בערך ולאפורמלי}} \sum_{j=1}^{s} a_j\, p_X(a_j)$$

<u>הגדרה:</u> יהי X מ"מ בדיד בעל התפלגות נקודתית p_X (נסווח S). התוחלת של X מוגדרת ע"י $E[X] = \sum_{x\in S} x p_X(x)$

התוחלת מוגדרת רק אם הטור מתכנס בהחלט.

(expectation)
(expected value)

<u>דוגמאות</u>

① X תוצאה של הטלת קוביה.

$$S = \{1, \dots, 6\} \qquad p_X(k) = \frac{1}{6}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

② X מ"מ ברנולי

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$

$$\Rightarrow E[X] = 1\cdot p + 0(1-p) = p$$

③ $X \sim B(n,p) \Leftarrow$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!\,k!} p^{k+1} q^{n-k-1} =$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}}_{=1} = np$$

$$(p+q)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$$

$X \sim Poi(\lambda)$ (4)

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$$

$X \sim Geo(p)$ (5)

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q} =$$

$$= p\left[\frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2}\right] = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

X מ"מ עם התפלגות p_X

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $g(X)$ מ"מ חדש.

איך מחשבים $E[g(X)]$?

<u>תשובה:</u> אם נגדיר את $Y = g(X)$ אז דרוש לחשב את S_Y

ואת p_Y ואז

$$E[Y] = \sum_{y \in S_Y} y\, p_Y(y)$$

זה מה שדרוש לעשות באופן עקרוני.

<u>דוגמה:</u> X נתון ע"י

x	0	1	2
$p_X(x)$	$1/2$	$1/3$	$1/6$

$\Leftarrow$ $Y = g(X) = X^2$

y	0	1	4
$p_Y(y)$	$\frac{1}{2}$	$1/3$	$1/6$

← ההסתברות זהה כי הפונ' חח"ע.

$$\Rightarrow E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 1 =$$

$$= \sum_x x^2 p_X(x)$$

ושאלת השאלה - האם באופן כלל אפשר לרשום:

$$E[Y] = \sum_{y\in S_Y} y\, p_Y(y) = \sum_{x\in S_X} g(x)\, p_X(x) \quad ?$$

לראורה נראה שלה נכון אם $g(x)$ חח"ע, אבל ובכן, זה נכון תמיד.

<u>משפט</u> (unconscious statitician)

X מ"מ בדיד בעל התפלגות p_X $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי

$$E[g(X)] = \sum_{x\in S_X} g(x)\, p_X(x)$$

<u>הוכחה:</u> נגדיר $Y=g(X)$ אזי $S_Y=\{g(x): x\in S_X\}$

אם $y\in S_Y$ אז

$$p_Y(y) = P(\{w: Y(w)=y\}) = P(\{w: g(X(w))=y\}) =$$

$$= P(\{w: X(w)\in g^{-1}(y)\}) = \sum_{x\in g^{-1}(y)} p_X(x)$$

המבור של y

$$\Longrightarrow E[Y] = \sum_{y\in S_Y} y\, p_Y(y) = \sum_{y\in S_Y} y \sum_{x\in g^{-1}(y)} p_X(x) =$$

$$= \sum_{y\in S_Y}\sum_{x\in g^{-1}(y)} g(x)\, p_X(x) = \sum_{x\in S_X} g(x)\, p_X(x)$$

מש"ל ☺

<u>הערה:</u> הכל ראן תחת הנחה שהטורים מתכנסים בהחלט כי אחרת התיחלת בכלל לא מוגדרת.

עוד משהו - אין הגבלות על g. $g(X)$ הוא מ"מ כי אנחנו בעולם בדיד. ברצף ירולות לדוף בעיות.

(41) 26.12.05
הסתברות

תוחלת

משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_x(x)$

דוגמה

מועדון כדורגל מצמין בתחילת העונה חולצות של שחקנה המצטיין
על מנת למכור לאוהדים. הביקוש X הוא מ"מ בעל התפלגות $p_x(k)$
על כל חולצה שנמכרת מרווח המועדון b שקלים.
על כל חולצה שלא נמכרת מפסיד המועדון l שקלים.
כמה חולצות יש להצמין על מנת למקסם את תוחלת הרווח?

a - מס' החולצות שהוצמנו. $g(X) = \begin{cases} bX - (a-X)l & X \le a \\ ba & X > a \end{cases}$ הרווח

לפי משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה:

$$E[g(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)p(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{a} [(b+l)k - al]\, p(k) + \sum_{k=a+1}^{\infty} ba\, p(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{a} [(b+l)k - al]\, p(k) - \sum_{k=0}^{a} ba\, p(k) + \underbrace{\sum_{k=0}^{a} ba\, p(k) + \sum_{k=a+1}^{\infty} ba\, p(k)}_{= 1 \cdot ba} =$$

$$= ba + (b+l)\sum_{k=0}^{a} (k-a)\, p(k) \equiv G(a)$$

איך נמקסם את זה? כדי בדיד אז נגזרת זה לא מה שאורנו
צריכים נסתכל מה קורה במעבר ו a ל- $a+1$.

$$G(a+1) = G(a) + b - (b+l)\sum_{k=0}^{a+1} p(k)$$

מתי רדאי להעלות את a ב-1?

$$b > (b+l)\sum_{k=0}^{a+1} p(k)$$

$$P(X \le a+1) < \frac{b}{b+l}$$

דוגמה אינטראקטיבית:

יבגני נקרא ללית וניתן לו לבחור בין 2 מעטפות שאחת
מהן יש 3ק על שמו בסכום מסוים ובמעטפה השניה יש 3ק
עם סכום גדול פי 2.

בוחרים מעטפה. מה התוחלת של הסכום במעטפה השנייה?

סכום	$\frac{1}{2}x$	x	$\Rightarrow E(\text{מעטפה שנייה}) = 1.25x$
הסתברות	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

אז רדאי להחליף מעטפות. OK, התלפנו מעטפות,
וערשיו אותו החישוב יראה שוב שרדאי להחליף מעטפות
זה פרדוקס!

מה הענין פה? הסתתרה פה הנחה שלכל $x \in \mathbb{R}$ יש
הסתברות אחידה להופיע במעטפה. לא קיים מודל
הסתברות כזה!

<u>טענה:</u> אם $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות $a \in \mathbb{R}$. $E[a] = a$.

<u>הסבר:</u> חושבים על a כמ"מ קבוע: $X(\omega) = a$

$$p_X(\cdot) = \begin{cases} a & 1 \\ \text{אחר} & 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{\{a\}} x p_X(x) = a \cdot 1 = a$$

<u>דוגמה:</u> $E[E[X]] = E[X]$

<u>הרחבת משפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה:</u>

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות X, Y מ"מ ממשיים.

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ אזי $E[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$

("נתן כתרגיל) זה זהה למשפט הסטטיסטיקאי חסר ההכרה,
רק קצת בשינוי אותיות).

מסקנה: X, Y מ"מ, $a, b \in \mathbb{R}$ אז:

$$E(aX + bY) = aE[X] + bE[Y]$$

הוכחה:

$$E[aX + bY] = \sum_{x,y} (ax + by)\, p_{X,Y}(x,y) =$$

$$= a\sum_{x,y} x\, p_{X,Y}(x,y) + b\sum_{x,y} y\, p_{X,Y}(x,y) =$$

$$= a\sum_{x} x \overbrace{\sum_{y} p_{X,Y}(x,y)}^{P_X(y)} + b\sum_{y} y \overbrace{\sum_{x} p_{X,Y}(x,y)}^{P_Y(y)} =$$

$$= aE[X] + bE[Y]$$

מש"ל ☺

הגדרה: X מ"מ. נניח שהתוחלת קיימת (סופית) ונסמן $\mu = E[X]$. **המומנט** ה-k של X הוא

$$M_k[X] = E[X^k]$$

המומנט המרכזי ה-k של X הוא

$$C_k[X] = E[(X-\mu)^k]$$

למומנט המרכזי השני קוראים **שונות**

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2]$$

לשתנף השונות קוראים **סטיית תקן**.

השונות (ובעצם אל אחד מהדברים שהגדרנו) לא בהכרח קיימת.

$$Var[X] = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] =$$

$$= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 =$$

$$= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 =$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

טענה: X מ"מ. אם $Var[X]=0$ אז $X=E[X]$

מהסתברות 1 כלומר X קבוע.

הוכחה

$$\underset{\text{סח"ה}}{Var[X]} = \sum_x (x-\mu)^2 p_X(x) = 0$$

$$\Rightarrow p_X(\mu) = 1$$

☺

$$E[aX] = aE[X] = a\mu$$

$$\Rightarrow Var[aX] = E[a^2(X-\mu)^2] = a^2 Var[X]$$

אנחנו רואים שהשונות לא לינארית. כמעט לינארית אבל לא!

דוגמה חישוב שונות של $X \sim B(n,p)$

נשתמש בכך ש $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

ידוע ש $E[X]=np$. נחשב:

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}}_{=1} = n(n-1)p$$

$$E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X] = n(n-1)p^2$$

$$Var[X] = E[X^2] - (np)^2 =$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

בשביל לחשב את $E[X^3]$ נשתמש באותו טרק נחשב $E[X(X-1)(X-2)]$

אז אנחנו יודעים עקרונית לחשב V מומנט של מ"מ בנומי.

שאלה: מה השונות של משתנה מקרי $X \sim Poi(\lambda)$?

$$Var[X] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} np(1-p) = \lambda$$

הגדרה: X, Y מ"מ. השונות המשותפת (Covariance) היא:

$$Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] =$$
$$= E[X\cdot Y] - E[X]E[Y]$$

* נשים לב שאם $X=Y$ נקבל פשוט את השונות.

שני משתנים שהשונות המשותפת שלהם אפס נקראים **תסרי קורלציה** (uncorrelated)

טענה: אם X, Y בת"ז אז לכל שתי פונק' ממשיות g, h:

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

הוכחה:

$$E[g(X)h(Y)] \overset{\text{סה"ח}}{=} \sum_{x,y} g(x)h(y)p_{XY}(x,y) \underset{\text{בת"ז}}{=}$$

$$\underset{\text{בת"ז}}{=} \sum_x g(x)p_X(x) \cdot \sum_y h(y)p_Y(x) = E[g(X)]E[h(Y)]$$

מש"ל ☺

מסקנה: מ"מ בת"ז הם תסרי קורלציה.

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] =$$
$$\underset{\text{כרגע הוכחנו וזה הם בת"ז}}{=} E[X]E[Y] - E[X]E[Y] = 0$$

מש"ל ☺

האם מה הכיוון ההפוך נכון? לא

חוסר קורלציה אינו גורר אי תלות!

דוגמה:

X \ Y	-1	0	1
0	1/3	0	1/3
1	0	1/3	0

$$E[XY] = 0$$

$$E[X] = \frac{1}{3}\cdot 1$$

$$E[Y] = (-1)\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0$$

$$Cov[X,Y] = 0 - \frac{1}{3}\cdot 0 = 0$$

אין קורלציה.

אבל $p_{X,Y}(x,y) \neq p_X(x)\,p_Y(y)$

X, Y מא ו $\mu_X = E[X]$ $\mu_Y = E[Y]$

$$Var[X+Y] = E[(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2] =$$

$$= E[(X-\mu_X)^2 + (Y-\mu_Y)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] =$$

$$= Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y]$$

אז באופן כללי זה לא נכון ששונות של סכום זה סכום של שונויות אבל זה נכון במקרה הפרטי ש X, Y מא בת.

תרגיל: ניתן להרחיב:

$$Var\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} Var[X_k] + 2\sum_{i<j} Cov[X_i, X_j]$$

דוגמה

$X \sim B(n,p)$ חשב באופן חרמאת $E[X]$ ו- $Var[X]$.

משתנה בינומי נותן להצגה כסכום של n ניסוי ברנולי

בת"ע הסתברות הצלחה p.

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases} \qquad 1 \le i \le n$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E[X_1] = 1 \cdot p + 0(1-p) = p$$

$$Var[X_1] = E[X_1^2] - (E[X_1])^2 = p(p-1)$$

$$E[X] = \sum_{1}^{n} E[X_i] = np$$

$$Var[X] = \sum_{1}^{n} Var[X_i] = np(p-1)$$

בגלל שהם בת"ע

דוגמה המצכירה המבולבלת שולחת n מכתבים ב n מעטפות.

מה התוחלת של מס' המכתבים שהגיעו ליעדם?

נגדיר לכל $1 \le i \le n$ מ"מ $X_i = \begin{cases} 1 & \text{i הגיע ליעדו} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$$P_{X_i}(1) = \frac{1}{n} \qquad X := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E[X] = \sum_{1}^{n} E[X_i] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

(45) 29.12.05
הסתברות

שימושים של האדטיביות של התוחלת

המצבירה המבולבלת:

יש n מרתבים

$X(\omega)$ = מספר המרתבים שהגיעו ליעדם.

$$p_X(k) = \sum \cdots \underset{\substack{1 \le n \\ k \text{ קבוע}}}{\sim} \frac{e^{-1}}{k!}$$

הגדרנו:

$$X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & k \text{ הגיע ליעדו} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$1 \le k \le n$

$$E[X_k] = p_{X_k}(1) = \frac{1}{n}$$

כמו בכל משתנה ברנולי

ברור ש

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$$

$$\Rightarrow E[X] = n\,E[X_k] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$Var[X] = n\,Var[X_1] + 2\binom{n}{2} Cov[X_1, X_2]$$

לפי נוסחה שראינו

נחשב את מה שחסר:

$$Var[X_1] = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

כי זה משתנה ברנולי

$$Cov[X_1, X_2] = \underbrace{E[X_1 X_2]}_{\text{מכפלה של משתני ברנולי גם היא משתנה ברנולי.}} - \underbrace{E[X_1]\,E[X_2]}_{\frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow E[X_1 X_2] = p_{X_1 X_2}(1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow Var[X] = n\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\,\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right] = 1$$

דוגמה

חבולה מעורבת של $2n$ קלפים: צוג של "1", צוג של "2" וכן הלאה צוג של "n". מוציאים m קלפים באקראי. מה התוחלת של מספר הצוגות השלמים שנותרו בחבולה?

נגדיר $X_k(\omega)$ מ"מ באופן הבא:

$$X_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{הצוגה } k \text{ נותר} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(אנחנו שוב ושוב רואים דוגמאות לבנ"ת משתנה ברנולי חכם)

$X = \sum_{1}^{n} X_k(\omega)$ מס' הצוגות שנשארו

$$E[X] = nE[X_1] = n\,p_{X_1}(1) = n \cdot \frac{\binom{2n-2}{m}}{\binom{2n}{m}}$$

דוגמה coupon collector

n קופונים שונים בכל תור לוקחים קופון באקראי. מהי התוחלת של מספר הקופונים שיש לאסוף עד לקבלת אוסף שלם.

גם פה ננסה לבנות מ"מ חכם שיעזור לנו.

נגדיר $X_k(\omega)$ $0 \le k \le n-1$: מספר הקופונים שנאספו מהרגע שהיו לנו k קופונים שונים ועד שהיו $k+1$ קופונים שונים.

ברור ש $X(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega)$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{k=0}^{n-1} E[X_k]$$

X_k משתנה גאומטרי עם פרמטר $1-\frac{k}{n}$.

$$\Rightarrow E[X_k] = \frac{1}{1-\frac{k}{n}} = \frac{n}{n-k}$$

$$\Rightarrow E[X] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = n\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \xrightarrow[n \gg 1]{\sim} n \cdot \ln n$$

טענה: $X(\omega) \geq a$ (בהסתברות 1 - זאת דרך אחרת להגיד לכל ω) אז $E[X] \geq a$.

הוכחה:

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \sum_{x \geq a} x p_X(x) \geq$$

$$\geq a \sum_{x \geq a} p_X(x) = a P(\{\omega : X(\omega) \geq a\}) = a$$

מש"ל ☺

טענה:

$$E[|X|] \geq |E[X]|$$

הוכחה: לפי חוק הסטטיסטיקאי חסר ההכרה:

$$\sum_x |x| p_X(x) \overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\geq} \left|\sum_x x p_X(x)\right|$$

מש"ל ☺

משפט (ללא הוכחה):

(X_k) סדרה של מ"מ שמקיימים $\sum_1^\infty E[|X_k|] < \infty$

אזי $E\left[\sum_1^\infty X_k\right] = \sum_1^\infty E[X_k]$

יהי $X(\omega)$ מ"מ המקבל ערכים טבעיים. לכל i טבעי (נגדיר $X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & X(\omega) \geq i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. נסתכל על הסכום האינסופי

$$\sum_1^\infty X_i(\omega) = \sum_{i=1}^{X(\omega)} 1 = X(\omega)$$

$$E[X] = \sum_1^\infty E[X_i] = \sum_1^\infty P(\{\omega : X(\omega) \geq i\}) =$$

$$= \sum_1^\infty (1 - F_X(i-1))$$

משפט: X משתנה מקרי אי-שלילי אז $E[X]=\int_0^\infty P(X\ge x)\,dx$

הוכחה:

$$\int_0^\infty P(X\ge x)\,dx=\int_0^\infty\int_x^\infty p_X(y)\,dy\,dx=\int_0^\infty\int_0^y p_X(y)\,dx\,dy=\int_0^\infty y\,p_X(y)\,dy=E[X]$$

משפט: X משתנה מקרי אי-שלילי בדיד אז $E[X]=\sum_{i=0}^\infty P(X>i)$

הוכחה:

$$\sum_{i=0}^\infty P(X>i)=\sum_{i=0}^\infty\sum_{k=i+1}^\infty p_X(k)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{i=0}^{k-1}p_X(k)=\sum_{k=1}^\infty k\,p_X(k)=E[X]$$

משפט: X משתנה מקרי בדיד אז $E[X]=\sum_{i=1}^\infty P(X\ge i)$

הוכחה:

$$\sum_{i=1}^\infty P(X\ge i)=\sum_{i=1}^\infty\sum_{k=i}^\infty p_X(k)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{i=1}^{k}p_X(k)=\sum_{k=1}^\infty k\,p_X(k)=E[X]$$

משפט: X משתנה מקרי בדיד אז $E[X]=\sum_{i=0}^\infty P(X>i)$

הוכחה:

$$\sum_{i=0}^\infty P(X>i)=\sum_{i=0}^\infty\sum_{k=i+1}^\infty p_X(k)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{i=0}^{k-1}p_X(k)=\sum_{k=1}^\infty k\,p_X(k)=E[X]$$

משפט: X משתנה מקרי בדיד אז $E[X]=\sum_{i=1}^\infty P(X\ge i)$

הוכחה:

$$\sum_{i=1}^\infty P(X\ge i)=\sum_{i=1}^\infty\sum_{k=i}^\infty p_X(k)=\sum_{k=1}^\infty\sum_{i=1}^{k

$$E[X] = m\,E[X_j] = m\,p_{X_j}(1) = \frac{2}{m}$$

סה"כ מצפים לבצע $\frac{2}{m}$ ניסויים עד שנמצא את w.

$X = \sum_{j=1}^{m} X_j$ מספר הכדורים שנבחרו $X_j = \begin{cases} 1 & \text{אחרת} \\ 0 & \text{אם } X_j = w \end{cases}$

הערה: משקיע מתחיל של X ביחס ל-Y הוא $\psi(y) = E[X|Y=y]$ כאשר y ערך אותו מקבל Y. כלומר:

$$E[X|Y](\omega) = E[X|Y=y]\Big|_{y=Y(\omega)}$$

משפט: $E[X] = E[E[X|Y]]$

הוכחה:

$$E[X] = \sum_x x\,p_X(x) \overset{?}{=} \sum_y E[X|Y=y]\,p_Y(y) \quad \text{כלומר: } \psi(Y) = E[X|Y]$$

$$E[X] = \sum_x x \underbrace{p_X(x)}_{\sum_y p_{X,Y}(x,y)} = \sum_y \sum_x x \underbrace{p_{X|Y}(x|y)}_{p_{X,Y}(x,y)} \underbrace{p_Y(y)}_{p_{X,Y}(x,y)} = \sum_y E[X|Y=y]\,p_Y(y)$$

דוגמה: n כדורים: A - מקבל מחלקה של 3 שנים

B - מקבל ציון מעולה לפחות 5 שנים

C - $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 7 שנים

אדם מגריל ע"מ בסיס ציון. מהי תוחלת הציון שיקבל המועמד?

Y - הציון שיקבל המועמד

X - הציון שיקבל הציון

$$E[X] = E[X|Y=A]\,p_Y(A) + E[X|Y=B]\,p_Y(B) + E[X|Y=C]\,p_Y(C)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\underbrace{(E[X+5])}_{E[X]+5} + \frac{1}{3}\underbrace{(E[X+7])}_{E[X]+7} \quad \text{נעביר אגף ונקבל ש-} E[X] = 15$$

$E[X] = E[Z+5]$ כאשר $Z = X-5$ מקבל A

$E[X] = E[X+5]$ נקבל $3 - X = Z$ כאשר Z מקבל A

כמו כן ניתן לחשב תוחלת שונה מהותית:

$$E[X^2] = \frac{1}{3}E[(X+1)^2] + \frac{1}{3}E[(X+5)^2] + \frac{1}{3}\cdot 6 = \frac{1}{3}E[X^2+2X+1] + \frac{1}{3}E[X^2+10X+25] + 2$$

דוגמה: מטילים סדרה של מטבעות עד שמתקבלת הסדרה "1,1". נרצה לדעת מה התוחלת של מספר ההטלות?

$X(\omega)$ - מספר ההטלות עד לקבלת 2 זוגות רצופים של 1.

$Y(\omega)$ - תוצאת ההטלה הראשונה כך ש-$Y(\omega) = j$.

$$E[X] = E[X|Y=0]\underbrace{p_Y(0)}_{q=} + E[X|Y=1]\underbrace{p_Y(1)}_{p=} = \underbrace{E[X]+1}_{\text{נסיון "מבוזבז" לאחר ההטלה}}\,q + (1)\,p$$

$$E[X|Y=1] = E[X|Y=1, Y_1=1]\,p_{Y_1}(1) + E[X|Y=1, Y_1=2]\,p_{Y_1}(2) = (1)\,p + \underbrace{E[X]+2}_{q-1=}\,q$$

$$\Rightarrow E[X] = p[2-p+(1-p)(2+E[X])] + q[2-p] \quad (2 \le)$$

$$(1-p)E[X] + ((1-p)^2 + 2p - p^2)E[X] = p(2-p) + (1-p) \quad \Rightarrow \boxed{E[X] = \frac{2-p^2}{p+1}}$$

נשים לב שמתקיים $E[X] \to 2$; $p \to 1$

בדיקת שפיות: שרשרת מרקוב:

$$\begin{cases} E[X|"2"] = 0 \\ E[X|"1"] = [\text{"0"}|X]E[X](q-1) + [\text{"1"}|X]E[X]p + 1 = [\text{"0"}|X]E[X](q-1) + 1 \\ E[X|"0"] = [\text{"0"}|X]E[X](q-1) + [\text{"1"}|X]E[X]p + 1 = [\text{"0"}|X]E[X](q-1) + 1 \end{cases}$$ ניתן לפתור ע"י מערכת משוואות לינארית

פונקציה יוצרת מומנטים

הגדרה: X מ"מ. נגדיר:

$$\phi_X(t) = E[e^{Xt}] = \sum_x e^{xt} p_X(x)$$

דוגמה: $X \sim B(n,p)$

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^k = (1-p+e^t p)^n$$

נשים לב:

$$\phi_X'(t)\Big|_{t=0} = \sum_x x p_X(x) = E[X]$$

$$\phi_X''(t)\Big|_{t=0} = \sum_x x^2 p_X(x) = E[X^2]$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n \phi_X}{dt^n}\Big|_{t=0} = E[X^n] = X \text{ של } n\text{-ית המומנט}$$

דוגמה נוספת:

$$\phi_X'(t) = n(1-p+e^t p)^{n-1} p e^t \Rightarrow \phi_X'(0) = np$$

משתנים אקראיים רציפים

מ"מ: $(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (S_X, \mathcal{F}_X, P_X)$, $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$

הגדרה: מ"מ X יקרא רציף אם קיימת פונקציה אי-שלילית ואינטגרבילית $f_X(x)$ כך ש- $f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

במידה ו-X יקרא רציף אם פונקציה הנ"ל שנקראת $f_X(x)$ קיימת בכל הישר הממשי של X.

טענה: ① לכל $a \le b$: $P_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

② אם A הינו איחוד סופי של קטעים $(a_i, b_i]$, אז $P_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx$

③ $P_X([a,b]) = P_X\left(\lim_{n\to\infty} (a-\frac{1}{n}, b]\right) = \lim_{n\to\infty} P_X\left((a-\frac{1}{n}, b)\right) = \lim_{n\to\infty} \int_{a-\frac{1}{n}}^{b} f_X(x)\,dx = \int_a^b f_X(x) = P_X((a,b))$

④ $P_X(\{a\}) = P_X([a,b] \setminus (a,b]) = P_X([a,b]) - P_X((a,b]) = 0$

⑤ תכונת הנירמול: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

דוגמה: X מ"מ רציף בעל צפיפות $f_X(x) = \begin{cases} 2c(2x-x^2) & 2 \ge x \ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. מצא את הפרמטר c. $X \ge 1$ מוכפלים עם צורת f_X

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 2c\int_0^2 (2x-x^2)\,dx = 2c\left(4-\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}c \Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{8}}$$

$$\Rightarrow P(\{\omega : X(\omega) \ge 1\}) = P_X([1,\infty)) = \int_1^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^2 2 \cdot \frac{3}{8}(2x-x^2)\,dx = \frac{1}{2}$$

(49) 5.1.06
הסתברות

אנחנו בעולמם של המשתנים הרציפים. דיברנו על חלק מההגדרה שלהם שהאוביקט שמחליף ת ההתפלגות הנקודתית הוא צפיפות ההתפלגות $f_X(x)$.
אם $A \subseteq \mathbb{R}$ אז ההתפלגות $P_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx$

מ"מ בעל התפלגות אחידה:

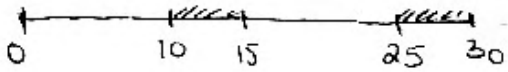
הגדרה: X יקרא בעל התפלגות אחידה בקטע $[a,b]$ אם

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מסמנים $X \sim U[a,b]$

מה שזה אומר הוא לעשל אם מעניים תל למטרה (חד ממדית) אז בכל הקטעים באותו אורך יש הסתברות שווה שהתל יפגע בהם.

דוגמה אוטובוס מגיע לתחנה כל 15 דקות (התל מ-7:00 בבוקר).
אדם הגיע לתחנה בשעה אקראית המתפלגת באופן אחיד בין 9:00 ל- 9:30. מה ההסתברות שהמתין פחות מ-5 דקות?
(נגדיר $X(\omega)$ = זמן ההגעה לתחנה (בדקות אחרי השעה 9:00)
נתון ש- $X \sim U[0,30]$ מה קורה בזמן הזה?

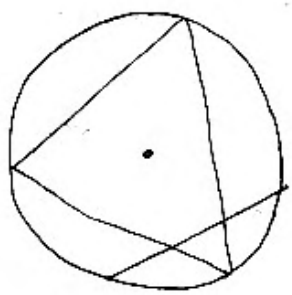


(נגדיר $Y(\omega)$ = זמן ההמתנה.

$$\{Y<5\} = \{10 < X \le 15\} \cup \{25 < X \le 30\} \cup \{X = 0\}$$

$$\Rightarrow P(\{Y<5\}) = \int_{\substack{(10,15] \\ (25,30] \\ \{0\}}} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$$

פרדוקס ברטרנד



מסתלים במעגל מיתר אקראי.
מה ההסתברות שהוא יהיה ארוך מהצלע של משו"ד חסום במעגל?
ב-2 דרכים שונות ניתן להגיע ל-2 תוצאות שונות. הלקח, כרגיל, הוא שלא בחרנו מרחב הסתברות ולא עשינו באופן מסודר.

משתנה מקרי נורמלי

אומרים שמ"מ רציפ X יש התפלגות (μ, σ^2) (סימון $X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

אם $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$

צורה?

הצורה כן נקבעת ע"י μ ו-σ (תרגיל!)

טענה: יהי $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ויהי $Y(\omega) = aX(\omega) + b$

אזי: $Y(\omega) \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

הוכחה: מחקירה (לפחות) שראינו. נקבל שמתקיים. בכל מקרה

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

הצבת משתנים: $x = \frac{y-b}{a}$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1/a^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(ax+b-a\mu-b)^2}{2a^2\sigma^2}} dx$$

$$\Rightarrow f_Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-\frac{(ax+b-a\mu-b)^2}{2\sigma^2 a^2}}$$

$$\Rightarrow Y \sim N(a\mu+b, \sigma^2 a^2)$$

מש"ל

הגדרה מ"מ נורמלי סטנדרטי אם $\mu = 0$ ו- $\sigma^2 = 1$

מסקנה: אם $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אז $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ סטנדרטי.

למה? $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

נאמן את שקנ"י שהתפלגות ש מ"מ $N(0,1)$

ב- $\Phi(x)$ נסמן

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

אז עבור מ"מ $N(\mu, \sigma^2)$

$$F_X(x) = P(\{X \le x\}) = P\left(\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

<u>דוגמה</u>

משך הריון (בימים) הוא מ"מ $N(270, 100)$ אשתו של ימאי ילדה (מזל טוב). נתון שבשלה נעדר מהבית במשך תקופה שהתחילה 290 יום לפני הלידה והסתיימה 240 יום לפני הלידה.

מה ההסתברות שהרתה כאשר היה בבית? זה עדיין לא אומר שהוא האבא, אבל נהיה אופטימיים.

X משך ההריון. $X \sim N(270, 100)$.

$$P(\{X > 290\} \cup \{X < 240\}) =$$

$$= P(\{X > 290\}) + P(\{X < 240\}) =$$

$$= P\left(\left\{\frac{X-270}{10} > \frac{290-270}{10}\right\}\right) + P\left(\left\{\frac{X-270}{10} < \frac{240-270}{10}\right\}\right) =$$

$$= [1 - \Phi(2)] + \Phi(-3) = 0.241$$

לפי הלוחות של האינטרלים

שהיזות לימאי!

(51) 9.1.06
הסתברות

משתנים נורמליים

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

משום מה יש איזו אמונה תפלה שהתפלגות ציונים בכיתה צריכה להיות גאוסאן. זה לא נכון. זה להלוטין אפשרי שרולם יהיו אפסים. בכל אופן זה תלוי בהתפלגות של הכיתה

— משפט הגבול המרכזי (או יותר נכון מקרה פרטי שלו) —

הערה: $\frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$ = מ"מ בעל תוחלת אפס ושונות אחד

תהי $\{X_n\}$ סדרת מ"מ שווי התפלגות אך בלתי תלויים.

i.i.d. = independent, identically distributed

$$S_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - E[X_i]}{\sqrt{Var[X_i]}}$$

משפט הגבול המרכזי אומר: $S_n \to \mathcal{N}(0,1)$ במובן הבא:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{a \le S_n \le b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

אנחנו לא נוכיח את המשפט אלא מקרה פרטי שלו.

משפט: (דה-מואבר לפלס)

מקרה פרטי של משפט הגבול המרכזי כאשר X_i משתנה ברנולי עם פרמטר p:

$$p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{cases}$$

נגדיר $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1}^{n} \frac{X_i - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ אז לכל $a<b$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{a \le S_n \le b\}) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

הוכחה: את S_n אפשר לרשום גם כך.

$$S_n = \frac{\sum X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

נגדיר $X = \sum X_i$ כאשר X_i משתנים מקריים
ובכך מתקיים בבירור $X \sim B(n,p)$.

נרצה את $P(\{a \le S_n \le b\})$ כאשר S_n מתפלג
$\{q\sqrt{(p-1)np} + np \le X \le a\sqrt{(p-1)np} + np\}$

אומרת כי בגבול n גדול מספיק

$$P(\{a \le S_n \le b\}) = \sum_{k=np+\sqrt{np(1-p)}a}^{np+\sqrt{np(1-p)}b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

נזכור כי כאשר n גדול, k גדול מספיק ו$n-k$ גדול מספיק
קירוב סטירלינג. אז:

$$\binom{n}{k} \sim \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}{k^k \sqrt{k}\, e^{-k} \sqrt{2\pi}\sqrt{n-k}\,(n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \text{הסכום} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=np+\sqrt{np(1-p)}a}^{np+\sqrt{np(1-p)}b} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left[\frac{(p-1)n}{n-k}\right]^{n-k}$$

נגדיר משתנה מקרי חדש:

$$m\sqrt{(p-1)np} + np = k$$

m משתנה ו- $a \cdot b$ מקיים גם

$$\Delta m = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$\Rightarrow \text{הסכום} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{\substack{m=a \\ (\text{step } \Delta m)}}^{b} \Delta m \underbrace{\frac{1}{\Delta m}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left[\frac{(p-1)n}{n-k}\right]^{n-k}}_{\text{כאשר } k \text{ שואף ל- } g(m)}$$

$$\frac{1}{\Delta m}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n^2 p(1-p)}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

כי $k = np + O(\sqrt{n})$

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k \quad \begin{matrix} k = np + r\sqrt{n} \\ r = m\sqrt{p(1-p)} \end{matrix} \quad \left(\frac{np}{np + r\sqrt{n}}\right)^{np + r\sqrt{n}} = a_n \xrightarrow{?} 0$$

נחשב את הגבול של $\ln a_n$ ואז נראה שגם a_n
נקבל את הגבול של a_n.

$$\ln a_n = (np + r\sqrt{n}) \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{r}{\sqrt{np}}}\right) = (np + r\sqrt{n}) \ln\left(1 - \frac{r}{\sqrt{np}} + \frac{r^2}{np} + O(n^{-3/2})\right) =$$

$$\left[\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right]$$

$$= (np + r\sqrt{n})\left(-\frac{r}{\sqrt{np}} + \frac{r^2}{np} - \frac{r^2}{2np} + O(n^{-3/2})\right) =$$

$$= -r\sqrt{n} - \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{2p} + O(n^{-1/2}) =$$

$$= -r\sqrt{n} - \frac{r^2}{2p} + O(n^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$= -\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}\, m - \frac{p(1-p)m^2}{2p} + O(n^{-\frac{1}{2}})$$

בדיוק באותו אופן עושים ל- $\left[\frac{n(1-p)}{n-k}\right]^{n-k}$

$$\ln\left[\frac{n(1-p)}{n-k}\right]^{n-k} = r\sqrt{n} - \frac{1}{2}pm^2 + O(n^{-\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow \ln\left[\left(\frac{np}{k}\right)^k \left[\frac{n(1-p)}{n-k}\right]^{n-k}\right] =$$

$$= -r\sqrt{n} - \frac{p(1-p)m^2}{2p} + r\sqrt{n} - \frac{1}{2}pm^2 + O(n^{-1/2}) =$$

$$= -\frac{m^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{np}{k}\right)^k \left[\frac{n(1-p)}{n-k}\right]^{n-k} \longrightarrow e^{-\frac{m^2}{2}}$$

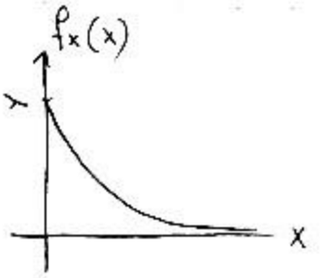
$$\Rightarrow \text{הסכום} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{m^2}{2}}\,dm$$

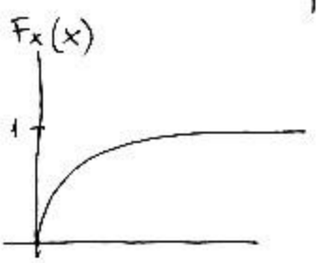
מש"ל ☺

התבר הבא שלנו הוא

<u>מ"מ אקספוננציאלי</u>

X יקרא $Exp(\lambda)$ אם $f_X = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0 \end{cases}$





$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0 \end{cases}$$

דוגמה נתון שמשך שיחת טלפון (בדקות) היא $Exp(\frac{1}{10})$

מהי ההסתברות ששיחה מסויימת תארך מעל 10 דקות

$$P(\{X>10\}) = P_X((10,\infty)) =$$
$$= 1 - F_X(10) = 1-(1-e^{-\lambda\cdot 10}) = e^{-1} \approx 0.368$$

בהינתן שהשיחה ארכה לפחות 10 דקות, מהי ההסתברות שהיא תארך לפחות 20 דקות?

$$P(\{X>20\}|\{X>10\}) = \frac{P(\{X>20,\ \cancel{X>10}\})}{P(\{X>10\})} = \frac{e^{-\frac{20}{10}}}{e^{-\frac{10}{10}}} = e^{-1}$$

אז אם חיכינו 10 דקות זה לא אומר כלום!

משתנה אקספוננציאלי חסר זיכרון במובן הבא:

$$P(\{X>t+s\}|\{X>t\}) = P(\{X>s\}) \Leftarrow t,s>0$$

טענה: המשתנה האקס' הוא הוחיד שהינו חסר זיכרון.

הוכחה: נתון

$$\frac{P(\{X>t+s,\ \cancel{X>t}\})}{P(\{X>t\})} = P(\{X>s\})$$

$$[1-F_X(t+s)] = [1-F_X(s)][1-F_X(t)]$$
$$1-F_X(t) := g(t)$$
$$\Rightarrow g(t+s) = g(t)\cdot g(s)$$

יש רק פונק' אחת שיש לה את התכונה הזאת: האקספוננט.

פונקציות של מ"מ רציפים

= ~~~ = ~~~ = ~~~ = ~~~ = ~~~ = ~~~ = ~~~

X מ"מ עם צפיפות f_X.

g פונק' ממשית $Y(\omega) = g(X(\omega))$

מהי ההתפלגות של Y?

<u>דוגמה</u> $X \sim U[0,1]$, $Y = X^n$

$$F_X = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases} \qquad f_X = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$0 \le y \le 1$

$$F_Y(y) = P(\{Y \le y\}) = P(\{X^n \le y\}) =$$

$$= P(\{x \le y^{\frac{1}{n}}\}) = F_X(y^{\frac{1}{n}}) = y^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ y^{\frac{1}{n}} & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} & 0<y<1 \\ 0 & y>1 \end{cases}$$

<u>דוגמה</u> X בעל צפיפות f_X ו- $Y = X^2$.

$$F_Y(y) = P(\{Y \le y\}) = P(\{X^2 \le y\}) =$$

$$= P(\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

נכלו עוד קלת. נניח X בעל צפיפות f_X. $Y = g(x)$

ו- g מונוטונית עולה ממש. מבטיח לנו קיום פונק' הופכית.

$$F_Y(y) = P(\{g(x) \le y\}) = P(\{x \le g^{-1}(y)\}) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = \left[\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right] f_X(g^{-1}(y))$$

אם y יורדת

$$F_Y(y) = P(\{g(x) \le y\}) = P(\{x \ge g^{-1}(y\}) =$$
$$= 1 - F_X(g^{-1}(y)) =$$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y))$$

במקרה הכלל:

$$f_Y(y) = \sum_{\{g^{-1}(y)\}} \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y))$$

<u>דוגמה</u>

נניח שרוצים לייצר על מחשב מ"מ בעל פונק' התפלגות $F(x)$

rand() - מ"מ מפולג באופן אחיד בין $[0,1]$

נסמן $Y(\omega) = F^{-1}(X)$

$$F_Y(y) = F_X((F^{-1})^{-1}(y)) = \underbrace{F_X}_{\text{פונק' הזהות}}(F(y)) = F(y)$$

ונה בדיוק מה שרצינו

למשל אם $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

ואז $F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(y-1)$

$$-\frac{1}{\lambda}\log(X(\omega) - 1) \sim Exp(\lambda)$$

לשיטה הזאת קוראים inverse trans. method

(94) 12.1.06
הסתברות

יום הולדת שמח לאלרסיל

אנחנו עוסקים במשתנים מקריים רציפים ובמובן מסוים אנחנו חוזרים על על כל מה שעשינו.
טיפלנו באופן מאוד מפורט במקרה הבדיד וערשיו אנחנו חוזרים על אותם הדברים רק שבהקשר הרציף. לכאורה כה בדיוק אותו הדבר - משוט במקום ק יש f. אבל בחלק מהמקרים יש דקויות ואנחנו נעמוד עליהן.

התפלגות משותפת

הגדרה: כוג משתנים מקרים X, Y יקראו בעל התפלגות משותפת רציפה, אם קיימת פונקציה אינטגרבילית אי שלילית $f_{X,Y}(x,y)$ (צפיפות ההסתברות המשותפת) כך ש

$$P(\{X \le x, Y \le y\}) = F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

באופן כלל. אם $A \subseteq \mathbb{R}^2$ אז

$$P(\{(X,Y) \in A\}) = P_{X,Y}(A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

אגב, אם X ו-Y בעלי התפלגות משותפת רציפה, אז גם כל אחד מהם רציף שהרי: $F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,y)\,dy}_{f_X(x)}\,du$

כלומר אם מקבעים את x אז $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

y $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

כלומר מקבלים את ההתפלגות השולית של x ושל y.
וזה מאוד דומה למה שהיה לנו במקרה הבדיד, שבו

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

דוגמא התפלגות אחידה בתוך עיגול ברדיוס R:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}c & x^2+y^2\le R^2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

① מהו c? ② מהי ההתפלגות השולית של X?

③ מהי ההסתברות ש- $x^2+y^2\le a^2$ $(a<R)$.

פתרון:

① צריך למצוא את c שעבורו הנפח של הגליל יהיה 1:

$$\iint_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=1 \Rightarrow c\cdot\pi R^2=1 \Rightarrow c=\frac{1}{\pi R^2}$$

② $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=$

$$=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2} & |x|\le R\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

③ $\iint_{x^2+y^2\le a^2}f_{X,Y}(x,y)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}c\,dxdy=\frac{\pi a^2}{\pi R^2}=\left(\frac{a}{R}\right)^2$

כי בהנחה $a\le R$

← מה המשמעות הניתוחי של התוצאה? מתוך הגיאומטריה.

מה האומר התוצאה לגבי הגיאומטריה שלעיל מלבד התשובה אותה זה.

אי תלות

X, Y מ"מ אם לכל $A,B\subseteq\mathbb{R}$ $P(X\in A, Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$

$$\iint_{A\,B}f_{X,Y}(x,y)\,dydx=\int_A f_X(x)\,dx\int_B f_Y(y)\,dy$$

$$\Leftrightarrow \text{(אי תלות)} \quad f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

דוגמה $X,Y,Z\sim U[0,1]$ בלתי תלויים. מהי ההסתברות ש- $Z\cdot Y<X^2$?

$$P(\{\omega: X(\omega)>Y(\omega)Z(\omega)\})=\iiint_{zy<x}f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dxdydz=$$

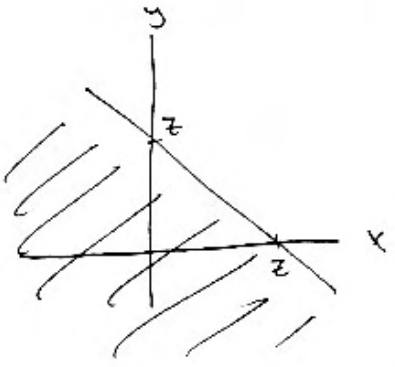
$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^x 1\cdot dzdydx=\int_0^1\int_0^1\int_{zy}^1 dxdydz=\int_0^1\int_0^1(1-zy)dydz=$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{z}{2}\right)dz=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

סכום של משתנים מקרים

X, Y מ"מ רציפים בת"ל. מהי ההתפלגות של $X+Y$?

$$F_{X,Y}(z) = \iint_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, F_Y(z-x)\,dx$$

$$\Rightarrow f_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} F_{X+Y}(z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

זאת הקונבולוציה של f_X, f_Y מוערכתבנקודה z.

$$f_{X+Y}(z) = (f_X * f_Y)(z)$$

לקונבולוציות יש המון תכונות יפות והן מאוד שימושית.

<u>דוגמה</u> $X, Y \sim U[0,1]$ ובת"ל.

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z) f_Y(z-x)\,dx = \int_0^1 f_Y(z-x)\,dx \underset{z-x=w}{=}$$

$$= -\int_z^{z-1} f_Y(w)\,dw = \int_{z-1}^{z} f_Y(w)\,dw =$$

$$= \begin{cases} 0 & z<0 \\ z & 0\le z\le 1 \\ 2-z & 1<z\le 2 \\ 0 & 2<z \end{cases}$$

(56)

16.1.06
הסתברות

התפלגות משותפת

מה היה לנו במקרה של משתנה בודד?

מ"מ X ו- $Y=g(X)$ ראינו שאם g מונוטונית

ע"ל הרק אב $f_Y(y)=|(g^{-1})'(y)|f_X(g^{-1}(y))$

ערשיו נניח שיש לנו משתנים מקריים X_1, X_2

ונגדיר $Y_1=g_1(X_1,X_2)$

$Y_2=g_2(X_1,X_2)$.

כרגיל, ותקול את זה במקרה פרטי שבו גם g_1 וגם g_2 מונוטוניות עולות בשני המשתנים. אח"כ ננפנף ידיים ונגיד שמה שקיבלנו נכון תמיד (כל עוד יש הופכי - כלומר יש מונוטוניות).

כרגיל, נרתוב את

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=P(\{Y_1\le y_1, Y_2\le y_2\})=$$

$$\cancel{=P(\{g_1(X_1,X_2)\le y_1, g_2(X_1,X_2)\le y_2\})=}$$

$h_1(Y_1,Y_2)=X_1$

$h_2(Y_1,Y_2)=X_2$

$$\cancel{=P(\{X_1\le h_1(y_1,y_2), X_2\le h_2(y_1,y_2)\})=}$$

$$\cancel{=F_{X_1,X_2}(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2))}$$

~~זה לחלוטין אנאלוגי למה שהיה לנו במקרה של משתנה בודד~~

הוא הגיע למסקנה שזה לגמרי לא נכון (למרות שזה לא מאש ברור לי) וערשיו עושים את זה מחדש.

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = P(\{Y_1 \le y_1,\ Y_2 \le y_2) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{g_1(x_1,x_2)\le y_1 \\ g_2(x_1,x_2)\le y_2}} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f_{X_1,X_2}\left(h_1(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2), h_2(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2)\right) \overbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}^{J(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2)} d\tilde{y}_1\,d\tilde{y}_2$$

$$\Rightarrow f_{Y_1,Y_2} = f_{X_1,X_2}\left(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\right) J(y_1,y_2)$$

אם לא שתי ה- g מונוטוניות עולות בשני
המשתנים זה עלול לעלות לנו בסימן של הי עקוביאן.
$\Leftarrow$ באופן כלל:

$$f_{Y_1,Y_2} = f_{X_1,X_2}\left(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\right) |J(y_1,y_2)|$$

<u>דוגמה</u>: נניח $X_1, X_2 \sim U[0,1]$ בת"ל
ונגדיר
$$Y_1 = \sqrt{-2\log X_1}\,\cos(2\pi X_2)$$
$$Y_2 = \sqrt{-2\log X_1}\,\sin(2\pi X_2)$$

אז מקבלים $Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$ בת"ל
זאת השיטה לקבל התפלגויות נורמליות.
לדבר הזה קוראים Box-Muller Transform
ב- Matlab יש פונק' שקראת randn()
וזה מה שהיא עושה...

צפיפות מותנה

תזכורת: אם X, Y מ"מ בדידים

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} = P(\{X=x\}|\{Y=y\})$$

הגדרה X, Y מ"מ רציפים ה צפיפות המותנית
של X בהינתן Y:

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

אבל מה המשמעות של זה??

שאלה: האם $f_{X|Y}(x|y) = P(\{X=x\}|\{Y=y\})$

לא! אנחנו לא יודעים להשוות את זה בכלל!
זה לא מוגדר! שהרי לתנאי $\{Y=y\}$ יש הסתברות אפס!

האם $\int_A f_{X|Y}(x|y)\,dx = P(\{X\in A\}|\{Y=y\})$
זה נראה אפילו יותר גרוע מהקודם, אבל קופרמן
טוען שזה נירן להבנה!
ניקח סדרה יורדת של קבוצות B_n שלרולן מידה
סופית (קטעים סופיים) ומקיימות:

$$B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \{y\}$$

(קל לבנות כזה. לדוגמה $B_n = (y-\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n})$)

אינטרפרטציה:

$$P(\{X\in A\}|\{Y=y\}) = \lim_{n\to\infty} P(\{X\in A\}|\{Y\in B_n\})$$

כלת זה מוגדר היטב. לא ידוע שהגבול קיים,
אבל לפחות זה מוגדר.

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X\in A\} \mid \{Y\in B_n\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{P(\{X\in A, Y\in B_n\})}{P(\{Y\in B_n\})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_A \int_{B_n} f_{X,Y}(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{y}\, d\tilde{x}}{\int_{B_n} f_Y(\tilde{y})\, d\tilde{y}} =$$

את המעבר הזה הוא עושה ללא הצדקה פורמלית

$$= \int_A \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{B_n} f_{X,Y}(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{y}}{\int_{B_n} f_Y(\tilde{y})\, d\tilde{y}} \right] d\tilde{x} =$$

עד כדי אינפי

$$= \int_A \frac{f_{X,Y}(\tilde{x},y)}{f_Y(y)}\, d\tilde{x} = \int_A f_{X|Y}(\tilde{x},y)\, d\tilde{x}$$

לפי הגדרה

אכן קיבלנו שהאינטרפרטציה שלנו מסתדרת.

פתוחלת

תזכורת: לא"מ בדיד הגדרנו $E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$

או $E[X] = \sum_{x\in S} x\, p_X(\{x\})$

נרצה משהו אנאלוגי במקרה הרציף

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

או $E[X] = \int_S x\, p_X(dx)$

אבל זה חסר פשר מבחינתנו, למרות שכבה מגדירים את זה בתורת המידה.

במקרה הרציף אי אפשר לומר

$$E[X] = \sum_x x\, p_X(\{x\})$$

א) כי זה סכום לא בן מניה

ב) ההתפלגות של כל יחידון היא אפס...

אז ננסה לקרב בעזרת סכומי רימן

$$E[X] \simeq \sum_i x_i P_X\left(\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)\right)$$

ואז נשאיף $\Delta x \to 0$

$$P_X\left(\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = f_X(x_i)\Delta x + o(\Delta x)$$

אז עבור מ"מ רציף נגדיר $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx$

<u>תרגיל</u> מהי התוחלת של $X \sim U[a,b]$?

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x\,dx =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

<u>תרגיל</u> מהי התוחלת של $X \sim Exp(\lambda)$?

$$E[X] = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} \lambda\,dx =$$

$\lambda x = y$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty y e^{-y}\,dy = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty y e^{-\alpha y}\,dy \Big|_{\alpha=1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)\int_0^\infty e^{-\alpha y}\,dy \Big|_{\alpha=1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Big|_{\alpha=1} = \frac{1}{\lambda}$$

מי שלא מבין- אפשר לעשות את זה בחלקים.

תרגיל $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{x^2}} (x-\mu+\mu)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x-\mu)\,dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \mu$$

לאה?
האינטגרל הראשון
מתאפס כי זו
פונק' אי זוגית.

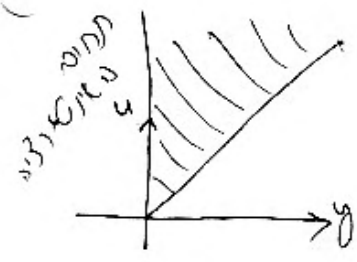
משפט $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,dx$

הוכחה: (שונה לגמרי מהמקרה הבדיד)

לאה Y מ"מ רצ"ל: $E[Y] = \int_0^{\infty} [1 - F_Y(y) - F_Y(-y)]\,dy$

הוכחה:

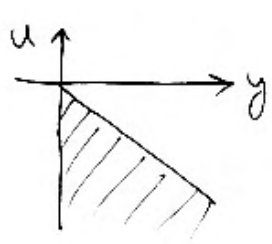
$$\int_0^{\infty} P(\{Y > y\})\,dy = \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} f_Y(u)\,du\,dy =$$



$$= \int_0^{\infty}\int_0^{u} f_Y(u)\,dy\,du =$$

$$= \int_0^{\infty} u f_Y(u)\,du$$

$$\int_0^{\infty} P(\{Y \le -y\})\,dy = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{-y} f_Y(u)\,du\,dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{0}\int_0^{-u} f_Y(u)\,dy\,du = -\int_{-\infty}^{0} u f_Y(u)\,du$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} P(\{Y > y\})\,dy - \int_0^{\infty} P(\{Y \le -y\})\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u f_Y(u)\,du = E[Y]$$

אבל מצד שני

$$\int_0^\infty \left[1 - F_Y(y) - F_Y(-y)\right] dy =$$

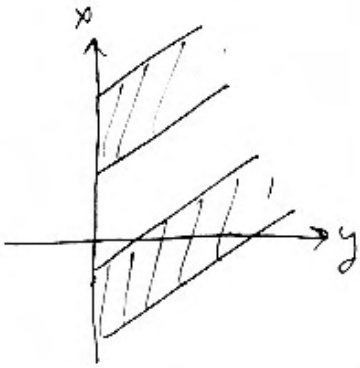
$$= \int_0^\infty P(\{Y > y\})\, dy - \int_0^\infty P(\{Y \le -y\})\, dy$$

$\Leftarrow$ מסמן לאה

מהלמה:

$$E[g(X)] = \int_0^\infty P(\{g(x) > y\})\, dy - \int_0^\infty P(\{g(x) \le -y\})\, dy =$$

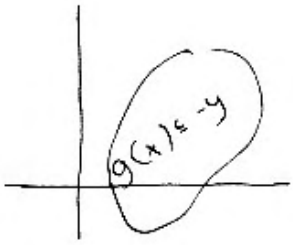
$$= \int_0^\infty \int_{g(x)>y} f_X(x)\, dx\, dy - \int_0^\infty \int_{g(x)\le -y} f_X(x)\, dx\, dy = I_1 - I_2$$



$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\max(g(x),0)} f_X(x)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \max(0, g(x))\, dx$$

$$I_2 = \int_0^\infty \int_{g(x)\le -y} f_X(x)\, dx\, dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\max(-g(x),0)} f_X(x)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \max(0, -g(x))\, dx$$

$$E[g(X)] =$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left[\max(0, g(x)) - \max(0, -g(x))\right] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, g(x)\, dx$$

מסמן ☺

(60) 19. 1. 06
הסתברות

ישלו הרגשה שבשיעור הקודם לא אמש הבנו, אז נעשה את זה שוב.

$$E[g(X)] = \int_0^\infty P(\{g(x) > y\})dy - \int_0^\infty P(\{g(x) \le -y\})dy =$$

$$= \int_0^\infty \int_{\{x: g(x) > y\}} f_X(x)dx\,dy - \int_0^\infty \int_{\{x: g(x) \le -y\}} f_X(x)dx\,dy$$

$$\{0<y<\infty,\ g(x)>y\} = \{x\in\mathbb{R},\ 0<y<g(x)\} = \{g(x)>0,\ 0<y<g(x)\}$$
$$\{0<y<\infty,\ g(x)<-y\} = \{x\in\mathbb{R},\ 0<y<-g(x)\} = \{g(x)<0,\ 0<y<-g(x)\}$$

$$\Rightarrow E[g(X)] = \int_{\{x: g(x)>0\}} \int_0^{g(x)} f_X(x)dy\,dx - \int_{\{x: g(x)<0\}} \int_0^{-g(x)} f_X(x)dy\,dx =$$

$$= \int_{\{x: g(x)>0\}} f_X(x)g(x)\,dx + \int_{\{x: g(x)<0\}} f_X(x)\,g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)dx$$

<u>דוגמה</u> מה השונות של $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\sigma =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sigma^2$$

קל להרחיב את חוק הסטטיסטיקאי מסר ההכרה לריבוי משתנים.

$$E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

פונקציה יוצרת מומנטים

$$M_X(t) \equiv E[e^{Xt}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f_X(x)\,dx$$

$M_X(t)$ הוא טרנספורם של $f_X(x)$.
ולכן טרנספורם הפוך !!

דוגמא מהי M_X עבור $X \sim N(\mu, \sigma^2)$?

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[\frac{2\sigma^2 tx - x^2 + 2x\mu - \mu^2}{2\sigma^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \underbrace{\exp\left\{\frac{(\mu+\sigma^2 t)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}\right\}}_{\text{סביר שלא ת.א}} dx$$

$$= \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$$

↓
כי צ"ל
שבסוף
אינטגרל
שווה ל-1

טענה אם f_X ו- f_Y התפלגויות
ו- $f = f_X * f_Y$. אם M_X, M_Y,
M הן בהתאמה הפונק' יוצרות מומנטים
אז $M(t) = M_X(t) M_Y(t)$

הוכחה

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) f_Y(x-y)\,dy}_{(f_X * f_Y)(x)}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_X(y)\, e^{t(x-y)} f_Y(x-y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_X(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-y)} f_Y(x-y)\,dx}_{M_Y(t)}\,dy = M_X(t) M_Y(t)$$

תרגיל

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ בת. מה ההתפלגות של $X+Y$?

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) f_Y(z-y)\,dy = \dots$$

אפשר להדיג ולעביד קשה ולקבל את השובה.

אבל אפשר גם אחרת:

$$M_X(t) = \exp\left(\mu_1 t + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\right)$$

$$M_Y(t) = \exp\left(\mu_2 t + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\right)$$

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) = \exp\left((\mu_1+\mu_2)t + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2\right)$$

וזו פונק' יוצרת מומנטים של מ"מ נורמלי שבו

$\mu = \mu_1 + \mu_2$ ו- $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

$$\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

אי שוויונים

אנחנו הולכים לראות משפחה של אי שוויונים הסתברותיים. מבחינה בונטפטואלית זה מאוד שונה מפיתוח זהויות. אנחנו צריכים אי שוויונים כשאנחנו מעוניינים בהערכות.

אי שוויון מרקוב

X מ"מ אי שלילי. אז לכל $a>0$ $P(\{X \geq a\}) \leq \frac{E[X]}{a}$

הערה: 1) אם $a \leq E[X]$ המשפט לא תקף באופן ריק.

2) נשים ♡ שאין כל הנחה על ההתפלגות של X.

הוכחה:

$$E[X] = \int_0^\infty x f_x(x)dx \geq \int_a^\infty x f_x(x)dx \geq$$

$$\geq \int_a^\infty a f_x(x)dx = a P(X \geq a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E[X]}{a} \geq P(X \geq a)$$

☺ כנ"ל

(62) 23. 1. 06
הסתברות
Oh Joy!

עניינים טכניים -

יש סקר הוראה - אפשהו באתר של האוניברסיטה יש שאלוני הערכת מרצים / מתרגלים.

יש הרט של 100 ש"ח באקדמון

☺ ☺ ☺ ☺

<u>אי שוויון מרקוב</u>

$$X(\omega) \geq 0 \quad , P(\{X(\omega) \geq a\}) \leq \frac{E[X]}{a}$$

תוצאה מייצית מאי-שוויון מרקוב הוא <u>אי שוויון Chebyshev</u> (צבי - צב)
לכל מ"מ X (לא בהכרח חיובי) ולכל $a>0$

$$P(\{|X-E[X]| \geq a\}) \leq \frac{Var[X]}{a^2}$$

הוכחה: נסמן $\mu := E[X]$
$\sigma^2 := Var[X]$

$$P(\{|X-\mu| \geq a\}) = P(\{|X-\mu|^2 \geq a^2\}) \leq$$

$$\underset{\text{מרקוב}}{\leq} \frac{E[|X-\mu|^2]}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2} = \frac{Var[X]}{a^2}$$

מש"ל ☺

אם נציב $a = k\sigma$ $k>0$ אז

$$P(\{|X-\mu| \geq k\sigma\}) \leq \frac{1}{k^2}$$

ההבעצה מראה לנו מה ההסתברות לחיות רחוק מהממוצע ביחידות של סטיית תקן.

דוגמה

$X \sim U[0,10]$

$\mu = 5, \quad \sigma^2 = \frac{25}{3}$

$$P(\{|X-5| \geq 4\}) = P(\{0 \leq X \leq 1\} \cup \{9 \leq X \leq 10\}) = 0.2$$

מדד שני לפי צ'בישב $P(\{|X-5| \geq 4\}) \leq \frac{25/3}{16} \cong 0.52$

אז אנחנו חאים שהאי שוויון לא מאוד קרוב, אבל תמיד משהו שהוא כללי כ"כ נותן תוצאות פחות טובות ממשהו ספציפי. בכל אופן אנחנו נעשה שימושים יותר חרמים באי שוויון הלה.

אי שוויון Jensen

הגדרה: פונק' ממשית g נקראת קמורה אם לכל x,y ולכל $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) : 0 < \lambda < 1$



גרפית - הפונקציה תמיד מתחת למיתרים בין כל שתי נקודות.

נותן להוכיח:

- קמירות מבטיחה רציפות
- הנגזרות החד כיווניים קיימים ומתקיים

מימין $\lim_{h \downarrow 0} \frac{g(x)-g(x-h)}{h} \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ משמאל

משפט: אם X מ"מ ממשי ו- g פונק' ממשית קמורה, אזי $g(E[X]) \leq E[g(x)]$ בהנחה שהתוחלות קיימות.

הוכחה: נניח לרגע ש- g גזירה פעמים ברציפות.

נסמן $\mu = E[X]$ ונפתח את g לטור טיילור סביב התוחלת

$$g(x) = g(\mu) + g'(\mu)(x-\mu) + \frac{1}{2} g''(\xi)(x-\mu)^2 \geq$$

$$\geq g(\mu) + g'(\mu)(x-\mu)$$

$\downarrow$

כי g'' חיובית

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)g(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}} f_X(x)g(\mu)dx + \int_{\mathbb{R}} f_X(x)g'(\mu)(x-\mu)dx$$

$$\overset{\shortparallel}{E[g(x)]} \qquad \overset{\shortparallel}{g(\mu)\int f_X(x)dx = g(\mu)} \qquad \overset{\shortparallel}{g'(\mu)\int f_X(x)(x-\mu) = 0}$$

תוך הסטטיסטיקאי

$$E[g(x)] \geq g(E[X])$$ כלומר

זה נכון במקרה שהיא גזירה פעמיים. אבל

גם במקרה הכללי קיים m כך ש-

$$g(x) \geq g(\mu) + m(x-\mu)$$

m יכול להיות כל מספר $g'_L(\mu) \leq m \leq g'_R(\mu)$ (גזירת ימנית) (גזירת שמאלית)

ואז ההוכחה היא אותה הוכחה רק בעבור $g(\mu)$

ו- $g'(\mu)$ יש קבועים אחרים.

מש"ל ☺

דוגמה exp פונק' קמורה.

$$\Rightarrow e^{E[tX]} \leq E[e^{tX}] = M_X(t)$$

אם $t>0$ אז

$$E[X] = \frac{E[tX]}{t} \leq \frac{1}{t}\log M_X(t)$$

דוגמה $\Omega = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ $\quad x_i > 0$

לכל i, $p(x_i) = \frac{1}{n}$

$g(x) = -\log x$ פונקציה קמורה עבור $x>0$.

לפי אי שוויון Jensen:

$$-\log E[X] \leq E[-\log(X)]$$

$$-\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-\log(x_i))$$

$$\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\log x_i\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n}\log x_i\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

ולכן אי שוויון הממוצעים מגיעים ☺

אבל ראון אנחנו רואים מיד הכללה של אי שוויון הממוצעים.

אם $p(x_i) = p_i$ רק ש- $\sum_{1}^{n} p_i = 1$. אז

$$\log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \log x_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}}$$

אפה השתמשנו בזה ש $\sum p_i = 1$? -בשימוש באי שוויון Jensen

<u>אי שוויון קולמוגורוב</u>

<u>למה:</u> X, Y, Z מ"מ ו- Y בת"ל ב- X ו- Z (בשניהם ביחד). אז

$$E[XY \mid Z] = E[X \mid Z]\, E[Y]$$

<u>הוכחה:</u> (למקרה של מ"מ בדידים).

בעדם מה שדרוך להורות הוא שלכל z

$$E[XY \mid Z = z] = E[X \mid Z = z]\, E[Y]$$

מה המשמעות של זה ש- Y בת"ל בזוג X, Z.

כלומר $p_{X,Y,Z}(x,y,z) = p_{X,Z}(x,z)\, p_Y(z)$

$$E[XY \mid Z = z] = \sum_{xy} x \cdot y\, p_{X,Y|Z}(x,y \mid z) =$$

$$= \sum_{xy} xy \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_Z(z)} =$$

$$= \sum_{xy} \frac{p_{X,Z}(x,z)\, p_Y(y)}{p_Z(z)}\, xy =$$

$$= \sum_{x} p_{X|Z}(x \mid z)\, x \sum_{y} y\, p_Y(y) = E[X \mid Z = z]\, E[Y]$$ מש"ל ☺

אי שוויון קולמוגורוב:

יהיו $(X_i)_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת (לא בהכרח שווי התפלגות) לכולם תוחלת אפס ו- $\sigma_i^2 = Var[X_i] < \infty$. אזי לכל $a>0$

$$P\left(\left\{\max_{1\le k\le n} |X_1+\dots+X_k| > a\right\}\right) \le \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$$

הערות:

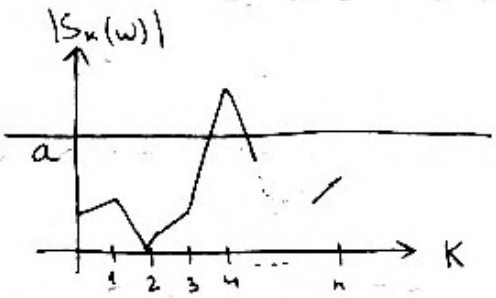
1) עבור $n=1$ זהו אש"ש צ'בישב

2) כנ"ל אם במקום $\max_k$ הינו פשוט מסכמים עד $k=n$.

הוכחה: נגדיר $S_k(\omega) = \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega)$

אי השוויון דן בהסתברות של המאורע $\{\omega: \max_{1\le k\le n}|S_k(\omega)|>a\}$

יש פה איזשהו תהליך מקרי ושואלים אם איפשהו במהלך התהליך (לא משנה מתי) עברנו את a.



לכל ω נגדיר $N(\omega)$ להיות $N(\omega)=\min\{k: |S_k(\omega)|>a\}$ המקום הראשון שבו עברנו את a.

ואם לא קיים כנ"ל אז $N(\omega)=n$.

$$\{\omega: \max_{1\le k\le n}|S_k(\omega)|>a\} = \{\omega: S_{N(\omega)}(\omega) > a\}$$

$$\Rightarrow P\left(\{\omega: \max_k |S_k(\omega)|>a\}\right) = P\left(\{|S_{N(\omega)}(\omega)|^2 > a^2\}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{a^2}E\left[|S_{N(\omega)}(\omega)^2\right] = \frac{1}{a^2}E\left[|X_1+\dots+X_{N(\omega)}|^2\right]$$

מקום

נותר להוכיח ש- $E[|X_1+\dots+X_{N(\omega)}|^2] \le \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$

דריך להעריך את $E[S_N^2]$. יתרה מרך רוצים להראות

$$E[S_N^2] \le E[S_n^2]$$

מספיק להראות שלכל $1 \le k \le n$

$$(*)\quad E[S_N^2 \mid N=k] \le E[S_n^2 \mid N=k]$$

מדוע? כי מפה ינבע ש $E[S_N^2 \mid N] \le E[S_n^2 \mid N]$

תוחלת של תוחלת מותנית היא תוחלת ואז

נקבל $E[S_N^2] \le E[S_n]$.

אז נוכיח את $(*)$

עבור $k=n$ כמובן זה נכון כי $E[S_N \mid N=n] = E[S_n \mid N=n]$

ואי השוויון מתקיים כשוויון

אם $k<n$

$$E[S_n^2 \mid N=k] = E[(X_1+\dots+X_N+X_{N+1}+\dots+X_n)^2 \mid N=k] =$$

$$= E[S_N^2 \mid N=k] + \overset{\ge 0}{E[(X_{N+1}+\dots+X_n)^2 \mid N=k]} +$$

$$+ 2\underbrace{E[(X_1+\dots+X_N)(X_{N+1}\dots+X_n) \mid N=k]}$$

נראה שזה אפס ואז נקבל את הדרוש.

נזכור שכל ה-X-ים הם ב"ת. כלומר המוכפל הראשון

ב"ת במוכפל השני. וכן $X_{N+1}+\dots+X_n$ ב"ת ב-N.

ואז נכנסת הלמה. מהלמה

$$E[(X_1+\dots+X_N)(X_{N+1}+\dots+X_n) \mid N=k] =$$

$$= E[X_1+\dots+X_N \mid N=k]\, E[X_{N+1}+\dots+X_n] = 0$$

מש"ל ☺

ההוכחה הזאת היא פטיית הקורס מבחינת הקורס. אבל

זוהי טכניקה סטנדרטית מחקר של תהליכים אקראיים-

שתילת מ"מ שאומר מהי הפעם הראשונה שמשהו קרה.

(65) 26.01.06
הסתברות

קיים מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ומוגדרת סדרה $(X_n)_1^\infty$ של מ"מ כל שהם X מ"מ.

(1) הגדרה: נאמר שהסדרה (X_n) מתכנסת ל-X רמעט תמיד (או בהסתברות אחד) אם

$$\boxed{P\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1}$$

$\Updownarrow$ קבוצה משלימה

$$P\left(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\right) = 0$$

$\Updownarrow$ לפי הגדרה של איהתכנסות — אינסוף פעמים

$$P\left(\{\omega : \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \ \text{i.o.}\}\right) = 0$$

$\Updownarrow$

$$P\left(\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \ \text{i.o.}\}\right) = 0$$

מתי הסתברות של איחוד בן מניה היא אפס?
אמ"מ ההסתברות של כל איחוד בנפרד היא אפס.

$$\boxed{\text{כלומר לכל } \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \quad P\left(\{|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \ \text{i.o.}\}\right)}$$

סימון: $X_n \xrightarrow{\text{כ"ת a.s}} X$ almost surely

(2) הגדרה: נאמר שהסדרה X_n מתכנסת ל-X ב-L^2 (in the mean square) אם

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^2\right] = 0}$$

נסמן $X_n \xrightarrow{m.s} X$ mean square

לא ברור כרגע מה היחסים בין 2 ההגדרות האלה.

③ הגדרה נאמר שהסדרה X_n מתכנסת ל-X בהסתברות אם לכל $\varepsilon > 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0}$$

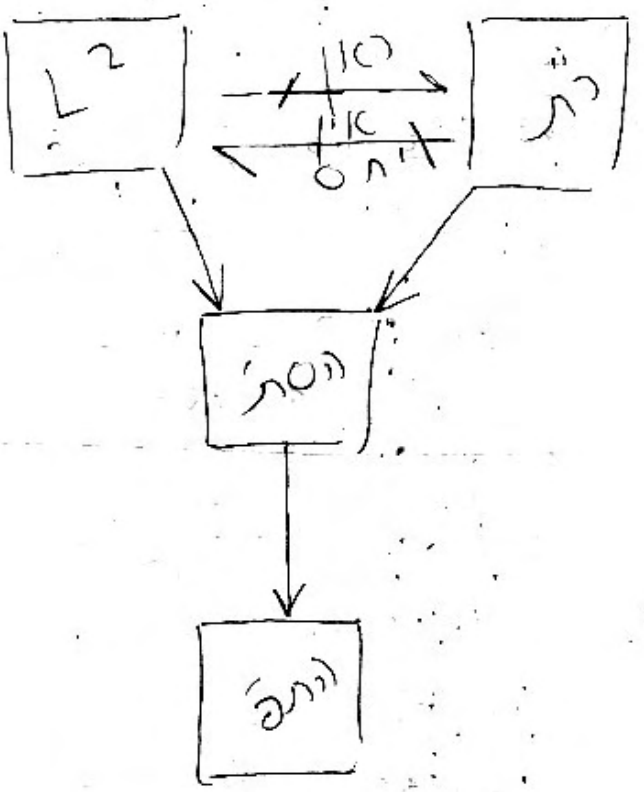
סימון $X_n \xrightarrow{P} X$ probability

④ הגדרה נאמר שהסדרה X_n מתכנסת ל-X בהתפלגות אם לכל $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a) = F_X(a)}$$

סימון $X_n \xrightarrow{D} X$ distribution

נטען שבין ההגדרות האלה יש יחסים:



טענה: אם $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אז $X_n \xrightarrow{p} X$

הוכחה: נתון שעבור $\varepsilon > 0$

$$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \text{ i.o.}\}) = 0$$

נגדיר $B_n^\varepsilon = \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$

משמעות הנתון היא $P(B_n^\varepsilon \text{ i.o.}) = 0$

כלומר $P(\limsup_n B_n^\varepsilon) = 0$

מהגדרת $\limsup$ ו-Fatou $P(\limsup_n B_n^\varepsilon) \geq \limsup_n P(B_n^\varepsilon)$

אלא שגם $P(B_n^\varepsilon) \geq 0$ אז $\liminf_n P(B_n^\varepsilon) \geq 0$

$\Leftarrow$ כלומר $\lim_{n\to\infty} P(B_n^\varepsilon) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$$

ולכן בהגדרה $X_n \xrightarrow{p} X$ (א)

טענה: אם $X_n \xrightarrow{sq} X$ אז $X_n \xrightarrow{p} X$

הוכחה: נתון ש $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0$

צ"ל שמתקיים

$$\geq \varepsilon^2 P(\{\omega : |X_n - X|^2 > \varepsilon^2\}) \lim_{n\to\infty} = \varepsilon^2 P(\{\omega : |X_n - X| > \varepsilon\}) \lim_{n\to\infty}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} E|X_n - X|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n - X| > \varepsilon\}) = 0 \Rightarrow$$

כלומר $X_n \xrightarrow{p} X$ (ב)

טענה: Z כל אוסף כזה כלומר כולם שווים שווה שווה

הוכחה: נתון (X_n) סדרת משתנים מקריים בדיד

כך ש X_n מקבלת הערכים הבאים

$$P_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & x = 0 \\ \frac{1}{n} & x = 1 \end{cases}$$

ונתון $X(\omega) \equiv 0$.

די ברור ש $X_n \xrightarrow{m.s} X$

$$E[|X_n - X|^2] = E[X_n^2] = E[X_n] = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כי להברנולי

נראה ש X_n אינו שואל ל-X כמעט תמיד:

יהי $\varepsilon = \frac{1}{2}$. נראה: ש-$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \text{ i.o.}\}) = 1$.

$$P(\{|X_n(\omega)| > \varepsilon\}) = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} P(\{|X_n| > \varepsilon\}) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

לפי הלמה השנייה של בורל-קנטלי, מאחר ש X_n ב"ת, נובע ש-

$$P(\{|X_n| > \varepsilon \text{ i.o.}\}) = 1$$

$\Leftarrow$ $X_n \not\xrightarrow{\text{ר"ת}} X$ ☺

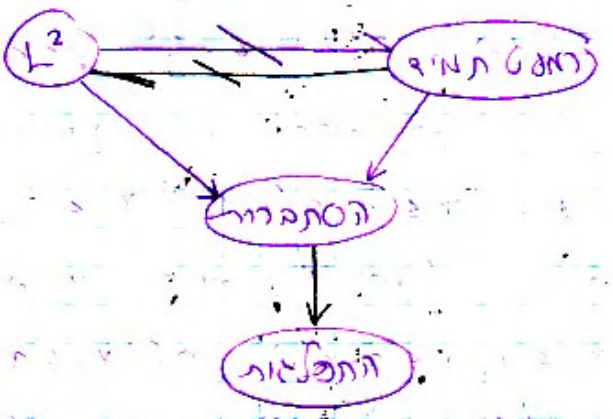
30.1.06
הסתברות

היום השיעור האחרון. ביום חמישי יהיה תרגול במבוא הרצאה.

☺ ☺ ☺

דיברנו על התכנסות של משתנים מקריים. הגדרנו מספר הגדרות שונות והראנו מספר יחסים ביניהן.

הראנו
נשאר להראות



טענה: התכנסות כמעט תמיד אינה גוררת התכנסות ב- L^2

תצבורת: $X_n \xrightarrow{ms} X \iff \lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0$

הוכחה: צריך לתת דוגמה נגדית וכמובן נחפש את הדוגמה הפשוטה ביותר.

יהיו X_n ב"ת (כי לא דרישה. אנחנו בוחרים את כה רק רדי שיה פשוט) וניקח $P_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & x = n^3 \\ 1-\frac{1}{n^2} & x = 0 \end{cases}$ (X_n ירו לקבל 2 ערכים)

ניקח $X \equiv 0$ אז:

$$E|X_n - X|^2 = \frac{1}{n^2} n^6 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) 0 = n^4 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow X_n \overset{ms}{\not\longrightarrow} X$$

כעת נראה ש X_n מתכנס כמעט תמיד ל- X.

sea ε mayor que cero. $P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) \le \frac{1}{n^2}$

הזל מ- n מסוים

$$\Rightarrow \sum_1^\infty P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) < \infty$$

$\Leftarrow$ מהלמה הראשונה של בורל קנטלי $P(\{|X_n - X| > \varepsilon\} \text{ i.o}) = 0$

$\Leftarrow$ $X_n \xrightarrow{a.i} X$

מש"ל ☺

הגדרה: התכנסות בהסתברות משתנים מקריים

תזכורת: התכנסות בהסתברות $\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\}) = 0 \quad (\forall \varepsilon>0)$

התכנסות בהתפלגות $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(a) = F_X(a)$ לכל $a\in\mathbb{R}$ שבו F_X רציפה

הערה: הסתברות ש"מ $(??)$ קיימים ב"התכנסות בהתפלגות" אך לא בהתכנסות הבאה.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. $F_{X_n}(a) = P(\{\omega : X_n(\omega)\le a\})$

אבל את המאורע הזה נוכל לפרק כך:

$\{\omega : X_n(\omega)\le a\} = \{\omega : X_n\le a,\ X\le a+\varepsilon\} \cup \{\omega : X_n\le a,\ X>a+\varepsilon\}$

(השתמש פה את X מאופן שרירותי); משיקולים של entonces:

$F_{X_n}(a) = P(\{X_n\le a,\ X\le a+\varepsilon\}) + P(\{X_n\le a,\ X>a+\varepsilon\}) =$

$= P(X_n\le a \mid X\le a+\varepsilon)\cdot P(X\le a+\varepsilon) + P(X_n\le a \mid X>a+\varepsilon)\cdot P(X>a+\varepsilon)$

אבל אם $X_n\le a$ אז $X\le a+\varepsilon$ אלא אם $|X_n-X|>\varepsilon$

לכן $\{X_n\le a,\ X\le a+\varepsilon\} \subseteq \{X_n\le X+\varepsilon\}$

$F_{X_n}(a) \le P(\{X\le a+\varepsilon\}) + P(\{|X_n-X|>\varepsilon\})$

אבל אם $|X_n-X|>\varepsilon$ אז $X_n\le X+\varepsilon$ לכן

$F_{X_n}(a) \le F_X(a+\varepsilon) + P(\{|X_n-X|>\varepsilon\})$

אם נשאיף את n לאינסוף ונשתמש בהתכנסות בהסתברות:

$$\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(a) \le F_X(a+\varepsilon)$$

(נסתכל כעת על $F_X(a-\varepsilon)$)

לכן $\{X_n<a,\ X\le a-\varepsilon\} \subseteq \{X\le a-\varepsilon\}$

$F_X(a-\varepsilon) = P(\{X\le a-\varepsilon\}) =$

$= P(\{X\le a-\varepsilon,\ X_n\le a\}) + P(\{X\le a-\varepsilon,\ X_n>a\}) =$

$= P(X\le a-\varepsilon \mid X_n\le a)\cdot P(X_n\le a) + P(X\le a-\varepsilon,\ X_n>a) \le$

$\le F_{X_n}(a) + P(\{|X_n-X|>\varepsilon\})$

$\{X\le a-\varepsilon,\ X_n>a\} \subseteq \{X_n-X\ge \varepsilon\} \subseteq \{|X_n-X|\ge\varepsilon\}$

$\Rightarrow F_{X_n}(a) \ge F_X(a-\varepsilon) - P(\{|X_n-X|>\varepsilon\})$ מאופן דומה כמו קודם

$$\liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(a) \ge F_X(a-\varepsilon)$$

טטירום יש לנו את שני הדברים הבאים:

$$\limsup F_{X_n}(a) \le F_X(a+\varepsilon)$$
$$\liminf F_{X_n}(a) \ge F_X(a-\varepsilon)$$

תיקון: התרגסות בהתפלגות: $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$

בכל נקודות הרציפות של F_X.

כלת אם a נק' רציפות של F_X נשאיל $\varepsilon \to 0$

$$\limsup F_{X_n}(a) \le F_X(a)$$
$$\liminf F_{X_n}(a) \ge F_X(a).$$

$\Leftarrow$ קיים גבול ומתקיים $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$.

מש"ל ☺

Legales de los números grandes

El legal débil de los números grandes — החוק החלש של המספרים הגדולים

(X_n) סדרה של מ"מ בת"ל ובעלי התפלגות משותפת בעלי תוחלת μ ושונות $\sigma^2 < \infty$ ונגדיר $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

אזי $S_n \xrightarrow{P} \mu$.

El legal fuerte de los números grandes — החוק החלק של המספרים הגדולים

אם בנוסף $E|X_1|^3 < \infty$ אזי $S_n \xrightarrow{a.s} \mu$.

הערה: בשעור הראשון דיברנו על הסתברות ואמרנו שזו השריחות של מאורע בביצוע אינסוף ניסויים. רעת הזרחנו את זה.

A מאורע ונקח את הפונק' המציינת שלו $I_A = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$

זו השריחות היחסת של A $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} I_A^{(k)}(\omega)$

לפי החוק החלש $S_n \longrightarrow E[I_A] = P(A)$

הוכחת חוק המספרים הגדולים

יהי $\varepsilon > 0$ קבוע כלשהו. אז:

$$P(|S_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{Var[S_n]}{\varepsilon^2}$$

(ש"מ S_n הוא $\bar{X}_n$)

$$E[S_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \mu \qquad Var[S_n] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow P(|S_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

מש"ל ☺

הוכחת חוק המספרים הגדולים החלש יותר קלה ואנחנו לא נוסיף עליה כאן.

משפט הגבול המרכזי

אם (X_n) סדרה של משתנים בלתי תלויים שווי התפלגות עם $E[X_i] = 0$ ו- $Var[X_i] = 1$ ונגדיר $S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$.

אז $S_n \xrightarrow{d} N(0,1)$. (את d מעניין)

הוכחה:

① מומנט שלישי $Var[S_n] = 1$, $E[S_n] = 0$.

② אם $E[X_i] = \mu$ ו- $Var[X_i] = \sigma^2$ אז ניתן להראות ש-

$$\frac{\mu - \mu_X}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \qquad S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

③ הזמנו את המשפט שהוכיח שכל (X_n) משתנים בלתי תלויים (משפט זה מוכיח שקל σ)

④ יש הרבה משפטי גבול מרכזי.

הוכחה היא לפחות 2 שיטות בהוכחה:

- נוכיח בהוכחה שאם $M_{X_n}(t)$ קיימת (כי לא כל הפונקציות של המשפט).
- נסתמך על הטענה (בלי הוכחה) שאם $M_{X_n}(t) \to M_X(t)$ אז $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$

תזכורת: אם $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אז $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$\Rightarrow$ צריך שמתקיים $M_{S_n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} e^{\frac{t^2}{2}}$

תזכורת נוספת: אם X_1, X_2 בלתי תלויים אז $M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)$.

בפרט אם $X_1, \ldots, X_n$ זהים אז $M_{\sum X_i}(t) = [M_{X_1}(t)]^n$

תזכורת: טענה ב - $M_{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_i}(t) = \left[M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$

נוכיח את

$$\log M_{S_n}(t) = n \log M_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= n \log \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\frac{t}{\sqrt{n}}x} dx =$$

$$= n \log \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\left[1 + \frac{xt}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{n}t^2 + \frac{1}{6}\frac{x^3}{n\sqrt{n}}e^{\frac{xt}{\sqrt{n}}}t^3\right] dx =$$

$e^{\frac{t}{n}x}$ פיתוח טיילור של סביב $t=0$

$$= n \log\left[1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\underbrace{E[X_1]}_{0} + \frac{t^2}{2n}\underbrace{E[X_1^2]}_{Var=1} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] =$$

$$= n \log\left[1 + \frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right] =$$

$\log(1+x)$ טור טיילור של $\leftarrow$

$$= n\left(\frac{t^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log M_{S_n}(t) = \frac{t^2}{2}$$ מצוין

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} M_{S_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

ולכן מתקיים ההתפלגות של $N(0,1)$.

משפט (ש)

$$P\left(a \le \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \le b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

אשמח להסבר מילולי. אבחנה מה זה אומר? נניח לה את אותו הדבר סיכום.

$$P\left(a \le \frac{\frac{1}{n}X_1 + \ldots + \frac{1}{n}X_n - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \le b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-y^2/2} dy$$

אנו נה נוסף "סנן" ההתפלגות סביב התוחלת של $\frac{1}{n}$ בזמן טכניות אחרות small diviations

יש תורה שלמה שמדברת על טכניות אקסטרמיות

המבחן

כל מה שנמדא בסירוגים באתר של קופרמן
הוא למבחן!

מה דריך לדעת בע"פ ל - דברים מהותיים
למדנו ס התפלגויות והנרלן חשובות מאוד -
ד בדידות ו-ד רציפות.
כל מה שקשור להן דריך לדעת בע"פ.
אבל אם יהיו שאלות על משהו שאין סיבה שנדע בע"פ זה
יהיה רשום שם.
שנה שעברה הוא נכשל ברתבת הבחינה. השנה הבחינה
תהיה קשה.
- יהיו שאלות של הבנה בסיסית של החומר וקלת הרחבה
כמו משפטונים.
- סביר שגם יהיה משפט ארוד יותר גדול
- תרגולים מהסוג שבין היתר נתקלנו בתרגולים. לא נמדא
אתהגלגל בחדש. זה יהיה ברוח התרגולים.