3.11.05
ת. דסקברוט

claudep@math.huji.ac.il :המרצה

בניגוד לתכנון התרגול של יום ג' 25.10 עבר

היום נעשה חזרה על קומבינטוריקה.

פרמוטציות: של n איברים $n!$

קומבינציות: בחירה של k איברים מתוך n $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

נניח שיש r קופסאות ואוסף של n כדורים. איך אפשר לסדר?

(1) אם הכדורים שונים - r^n. כי כל כדור יכול ללכת ל r קופסאות.

(2) אם הכדורים זהים - $\binom{n-1+r}{n-1}$ - (סמן על לה כסף

n כדורים - o o o o o o o o o o ואותנו יכלו לשים

מיניפס מחיצות כמשהו שיהיו r קופסאות צריך $r-1$

מחיצות: o o | o o o | o o o o | o o | אז יש $n+r-1$

אלמנטים וצריך לבחור איפה נשים $r-1$ מחיצות כלומר

איזה $r-1$ אלמנטים נבחר.

<u>אלגנטי סרימי</u> - יש מין אסתטיקה כזאת

ההסבר האינטואיטיבי שאפשר לעלות רק ימינה או למעלה ושאלה

כמה מסלולים כאלה יש? - $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$.

בשביל ההסבר לא משנה. מהי צריך לעשות $n+m$ צעדים כלשהם.

נניח שהם כולם למעלה עכשיו אני צריכה לבחור m מהם

ולהפוך אותם למימינה. אפשר לסדר אותם בכמה דרכים $\binom{n+m}{n}$.

ניתן שרוצים למצוא את מספר המסלולים מ- $(0,0)$ ל- (t,s) שעוברים ב- $(1,0)$.

כלומר נחפש את מספר המסלולים מ $(0,0)$ ל- (t,s) במספר המסלולים מ $(1,0)$ ל (n,m)

$$\binom{s+t}{s} \cdot \binom{s-m+n-(s+t)}{s-m}$$

מספר המסלולים שאינם עוברים דרך (t,s):

$$\binom{n+m}{n} - \binom{s+t}{s}\binom{s-m+n-(s+t)}{s-m}$$

בקורס הבא ג בצאן נדבר על קלפים, קלפים ומכוניות עמוסות בשלג.

הנה שאלה על קלפים:

32 קלפים שחורים } בחפיסה מעורבבת, שלפים קלפים
32 קלפים אדומים } עד שיש או 32 אדומים (ואז עדיין שנשארו רק שחורים) או 32 שחורים (ואז עדיין שנשארו רק אדומים).

מה ההסתברות שנשארו רק קלפים אדומים בחפיסה?

OK, נניח הכי הרבה ומסתכלים שאנחנו מד', ונתעניין למה שנגיע למצב...

$\Rightarrow$ נקבל שסדרה חשבונית: $\frac{n(n+1)}{2} = (n+1) + \dots + 2 + 1 + 0$

← מצב שאין מתנדבים

(2) נתון אוסף של n אדמים. נסמן את האדמים ב- 1..n בהתאם.
מטרתנו היא: 1) למיין את הקבוצה לפחות בקבוצות ריקות.
2) ע"י בקבוצה שיש בה יותר מאבר אחד (נסמן ב-1)

בדומה לזה יש ב אדמים יוצאו לענן על שביבו:

כמה בחירות שונות יש לבחור את התשובה?

$$\binom{2}{2}\binom{3}{2}\cdots\binom{1-n}{2}\binom{n}{2}$$

נשמרו לפנינו את התשובה נסמן על התפלק אחרת
יש לנו n קבוצות ואותנו רוצים לבחור 2 מהן - $\binom{n}{2}$
נשארו לנו 1-n קבוצות ורוצים לבחור 2 מהן $\binom{1-n}{2}$
וכן הלאה עד שנשארות לנו 2 קבוצות ואותנו מאותרים אותן.

6/11/05 ③

* ההקדמה הבאה מתבלבלת איכשהו מ' שיש לו בעיה שולק לאותו מתח לאחרונה.

בהינתן שלשה מרחב הסתברות ובעלות לפחות אחת מהן שונה מ-0 או 1 מתי אפשר לומר שהן בלתי תלויות? אפשר להיזכר כאן בהגדרה של מאורעות בלתי תלויים: אבל מה יש לנו כאן מאורעות?

- מרחב מדגם Ω - כל קבוצה של איברים.
- אוסף המאורעות (σ-אלגברה) $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ שמקיים:
  1) $\Omega \in \mathcal{F}$
  2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
  3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
- פונקציית ההסתברות P שמקיימת כמה תכונות שנזכיר בהמשך.

מרחב ההסתברות הינו השלשה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

שאלה:

מטילים קובייה שוב ושוב עד לקבלת התוצאה 6.
מה יהיה מרחב המדגם שלנו? ובכן, אפשר לבחור באין-סוף דרכים, ואף השאלה הינה מה מעניין אותנו.
אפשר לבחור $\Omega = \mathbb{N}$ אם מעניין אותנו רק מתי יצא 6.
אפשר לבחור $\Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{(6, i_1, \ldots, i_k) : i_j \in \{1,2,3,4,5\}\}$ ולפה יכולה לבוא אחת מהשתיים: שיצאו קבלים.
אותנו נשתמש ב $\Omega = \mathbb{N}$.
נגדיר: E_n = שבשלב ה n יצאה לראשונה 6.
אז $E_n = \{n\}$
$F_n = E_n^c = \Omega \setminus E_n = \{1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots\}$
עד כאן מאורעות אלו פה מדגמה, אולם:

$$\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k$$

$$\liminf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} E_k$$

נכתוב לתשם את מה שבור F_n.

$$\bigcup_{k\geq n} F_k = \bigcup_{k\geq n}\{k+1, k+2, \dots\} = \{n+1, n+2, \dots\}$$

$$\limsup F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} F_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{n+1, n+2, \dots\} = \lim_{n\to\infty}\{n+1, n+2, \dots\}$$

$$\dots \cap \{5,4\} \cap \{5,4,3\} \cap \{4,3,2\} \dots$$

מה זה אומר? $\emptyset$ - ניסוי שנמשך ונמשך ופשוט אף פעם לא.

יש מתשפים $\limsup F_n$ ו $\liminf$ אחד בקצה.

אלו אותנו מקבלים $\limsup F_n = \liminf F_n$. אלו אומרים

ש- $\lim F_n$ = "קיים בעצם".

F_n - מה אומר שתיכון יתר n-ים קיים לקבל 6.

מכאן אינטואיציה מהו שמשמעות של F_n היו שלנו קבלנו

6 על פחות אבל פחות קרוב לשלם שקיים צבוע ואחר,

וכך את שלושתם מתשפים לאחלה.

עכשיו נעבור על פונקציית ההסתברות. יש לה 3 תכונות:

1) $0 \leq P \leq 1$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ אחוז ∞.

<u>תרגיל</u> הוכיחו 1) $P(E\cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$

2) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - (n-1)$

<u>הוכחה:</u>

$$E \cup F = (E\setminus F) \cup (F\setminus E) \cup (F\cap E)$$

$$\Rightarrow 1 \geq P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$$

$$\Rightarrow P(E\cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$$

יש שוויון כאשר $E\cup F = \Omega$.

עכשיו באינדוקציה:

$$P\left(E_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right)\right) \geq P(E_n) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} E_i\right) - 1 \geq$$

$$\geq P(E_n) + \sum_{1}^{n-1} P(E_i) - (n-1-1) - 1 = \sum_{1}^{n} P(E_i) - (n-1)$$

דוגמא: $\Omega = \{x_1, \ldots, x_{20}\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.

עלינו את P בהסתברות אחידה. כלומר לכל מאורע A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

כדי להבטיח ש-P מקיימת את תכונות ההסתברות. עלינו לעשות את זה כאן אחד לא נתן.

(5) 13.11.05
ת. הסתברות

תרגיל:

מטילים מטבע הוגן 5 פעמים. מהי ההסתברות שיופיע ראש פעמיים בדיוק לפחות פעם אחת?

נקבע כי לשם נוחות אפיין: $\Omega = \{H,T\}^5$

עוד שההסתברות אחידה. $|\Omega| = 2^5 = 32$

המאורע שאנחנו מתעניינים בו הינו

$$A = \{\text{יופיע ראש פעמיים בדיוק לפחות פעם אחת}\}$$

הדרכה פעמיים עוד שהסתבך עם המאורע המשלים:

$$B = A^c = \text{לא יהיה בדיוק ראש פעמיים}$$

מה הדברים האפשריים?

0 H - TTTTT

1 H מהם אופציות

2 H - שם אופציות:

HTHTT
THTTH
HTTTH
THTHT
HTTHT
TTHTH

3 H - אופציה אחת HTHTH

$$|B| = 13 \Leftarrow$$

$$P(A) = 1 - P(B) =$$

$$= 1 - \frac{13}{25}$$

תרגיל:

יש תפוסת קלפים: 20 אדומים ו-
30 שחורים.

מוציאים קלפים אחד אחד עד שנשארו 10 קלפים מאותו
צבע בתפוסה.

מה ההסתברות שנשארו רק קלפים אדומים?

$$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_{50}) : i_j \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{50} i_j = 30\}$$

(0 = אדום, 1 = שחור)

P ההסתברות אחידה. לפי סדרה יש אותן סיכוי
עבור כל סדרה אחרת אפס כך לא אומר
כי ההסתברות של כל הסדרות קלף שפצ'ם.

$$A = \{(i_1, \ldots, i_{50}) : i_{50} = 0\}$$

$$|\Omega| = \binom{50}{20}$$ כי צריך לבחור אופן ה"אדומים"

$$|A| = \binom{49}{19} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{5}$$

עניין שיש אחרי מקרה לאו סופי. איך לגדיר
הסתברות אחידה?

תרגיל: מטילים 2 קוביות עד שמופיע הסכום או 5 או 7.
מה ההסתברות שיופיע 5 קודם?

$$\text{סכומים} = A = \{2, \ldots, 12\}$$

$$\Omega = \left\{ (i_1, \ldots, i_k) \;,\; i_k \in \{5,7\},\ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; i_j \in A \setminus \{5,7\} \text{ for } j = 1, \ldots, k-1 \right\}$$

אנו מתחילים את הטלה אחת אפשר לחשב ההסתברות
כאות לא ההסתברות אחידה כמובן.

$$P(\{2\}) = \frac{1}{36} \quad P(\{3\}) = \frac{2}{36} \quad P(\{5\}) = \frac{4}{36} \quad P(\{7\}) = \frac{6}{36}$$

⑥

משפט (שלא נדרשים להוכיח)

אם מסתכלים על σ אלגברות הסופיות של Ω שעל כל אחת מהן אפשר להגדיר הסתברות קיימת פונקציית הסתברות יחידה P שהיא ההרחבה של הסתברות P_0 (על σ אלגברה סופית) (= משפט ההרחבה של Caratheodory)

הדוגמא שאותה מנסים כאן היא

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ יהי

E_n = מאורעות פרטים שסכום הקוביות הוא n כאשר n הוא אי-זוגי בין 5 ל-7 ואפסי אחרת

$$P(E) = \sum_{n\text{ אי-זוגי}} P(E_n) = \sum_{n} \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} \quad \Leftarrow \quad E = \bigcup_{n} E_n$$

$$P(E_n) = \frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{4}{36}-\frac{6}{36}\right)^{n-1}$$

שמוש שצריך להכיח באמצעות אותה σ-

$$P\left(\bigcup_{n} E_n\right) \leq \sum P(E_n) \quad (1-n)$$

שיוון אמ"מ $E_i \cap E_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$, $i=1$

הערות לתרגיל:

⑥ n קוביות

$m = n - \left[\frac{n}{2}\right]$ - המס' המקסימלי שעליו רוצים

למצוא m אנשים קיימים מעודם שאי אפשר למיינם.

מעודם הכי לפחות שאז האנשים בריק לפחות אחד יכולו למיינם.

כך ש- m הקוביות + קוביה אחת יכלו למיינם.

$\Leftarrow$ יש $\binom{n}{m}$ אפשרויות

יש $\binom{m}{1-n}$ אפשרויות כך לכל קוביה יש אפשרות

$n-m$ אנשים שהוא לא שייך ל-$n-m$ יהיה

שהם

(7) 20.11.05
הסתברות

הסתברות מותנית

הסתברות מותנית של המאורע A כאשר ידוע ש-B קרה.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

שאלה אינטואיטיבית: מהי ההסתברות ש $P(B|B) = 1$
כי אם B קרה אז B קרה כמובן. אבל איך נראה
זאת ש $P(B|B) = 1$?

$$P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$$

שוב משפט: $P(A) \cdot P(B|A) = P(B \cap A)$ ומכאן ש-

דוגמא: מטילים מטבע הוגן פעמיים. מה ההסתברות ש יצאו
פעמיים H בהנחה ש:
(1) מהטלה הראשונה יצא H?
(2) הופיע H לפחות פעם אחת?

פתרון:

$\Omega = \{H,T\}^2$, $|\Omega| = 4$

$A_1 = \{HH, HT\}$ יצא בוודאי בהטלה הראשונה.

$B = \{HH\}$ יצאו פעמיים H.

$$P(B|A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} = \frac{P(B)}{P(H_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$A_2 = \{HT, HH, TH\}$ הופיע H לפחות פעם אחת.

$$P(B|A_2) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2)} = \frac{P(B)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

תשלום: מבלים ניסוי המתאים לאחת המאפיינים

$(\Omega_0, \mathcal{F}_0, P_0)$ $n = |\Omega_0|$

אח"כ מבלים ניסוי נוסף, אם יצא $\omega_j \in \Omega_0$ $n \geq j \geq 1$

מבלים ניסוי המתאים לאחד המאפיינים $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$

תארו מרחב ההסתברות המתאים לניסוי המורכב.

$$\Omega = \{(\omega_j, \omega_j^i) : \omega_j \in \Omega_0, \omega_j^i \in \Omega_j\}$$

$$\mathcal{F} = \{A : A = A_0 \times A_{j_1} \times \dots \times A_{j_m}, A_0 \in \mathcal{F}_0, A_{j_i} \in \mathcal{F}_{j_i}\}$$

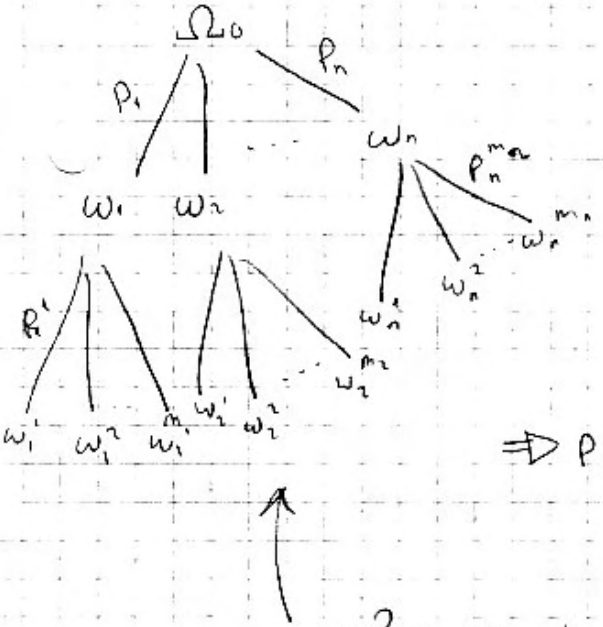
איך נגדיר P? תכונה ש-

$$P_j = P(\omega_j \times \Omega_j) = P_0(\omega_j)$$

↓

כי אם יבצע הניסוי הראשון ונקבל ω_j אז אחר כך נבצע לפחות בניסוי השני אשר מ- Ω_j את ההסתברויות הרגילות שלהם.

$$P_j^i = P_j(\omega_j^i) = P((\omega_j, \omega_j^i) \mid \omega_j \times \Omega_j)$$



אם $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ - חלוקה של Ω כנ"ל

$$P(A) = P(A \cap (\cup A_i)) = \sum P(A \cap A_i) =$$

$$P(A) = \sum P(A \mid A_i)\, P(A_i)$$

$$\Rightarrow P(\omega_j, \omega_j^i) = \sum_{k=1}^{n} P((\omega_j, \omega_j^i) \mid \underbrace{\omega_k \times \Omega_k}_{\text{תפקיד } A_k}) P(\omega_k \times \Omega_k) =$$

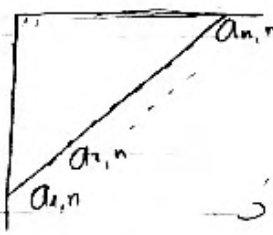
יחלוקה הראשית המאפיין ומוצאים את מה בציור

$$= P_j^i \cdot P_j$$

שזה המשפחה של ההסתברויות ולכן זו אינטואיטיבי.

(8)

27.11.05
ת. ההסתברות



תזכורת: יש מטריצה אינסופית
אלגוריתם לבחירת איבר
קודם בוחרים אלכסון B_n ואז כ
בוחרים איבר.
הסתברות לבחירת אלכסון B_n : $c\,n\,2^{-n}$
כדי לוודא את c נדרוש לפחות אותו $\sum_{n=1}^{\infty} c\,n\,2^{-n} = 1$
הסתברות לבחירת איבר ב B_n : $\frac{1}{n}$

- מה ההסתברות שיבחר איבר מהשורה n?
נסתכל על כל בזן בנפרד.
Ω_n = אוסף האלכסונים
P_0 = המ"ה שהוגדרה $P(B_n) = c\,n\,2^{-n}$
Ω_n = אוסף האיברים באלכסון n
P_n - המ"ה שהוגדרה $P(a_{i,n}) = \frac{1}{n}$

$\Omega = \{(B_n, a_{i,n}) : a_{i,n} \in B_n, n \in \mathbb{N}\}$
P - like last week for combined experiment

A_n = "נבחר איבר מהשורה n"

$$P(A_n) = P(A_n \cap \Omega) = P\left(A_n \cap \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} (B_k \times (\bigcup a_{i,k}))\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P(A_n \cap (B_k \times \bigcup a_{i,k})) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} P(A_n \mid B_k \times (\bigcup a_{i,k}))\, \underbrace{P(B_k \times (\bigcup a_{i,k}))}_{P_0(B_k)} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} c\,k\,2^{-k}\,\frac{1}{k} = c\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = c\cdot 2^{-n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = c\cdot 2^{-n+1}$$

האם המאורעות "בחרו באיבר מהשורה ה-i" ו"בחרו באיבר מעמודה j" בלתי תלויים?

A_i = איבר בשורה i

C_j = איבר בעמודה j

הרי $P(A_i \cap C_j) = P(A_i)P(C_j)$

חישבנו קודם

לפי האומר שבחרנו איבר אחד ספציפי.
אין זה אומר שבחרנו קודם את השורה
ואח"כ איבר, וזה כופלים רק בדרך
שהשג אנליטים של האלגוריתם והאיבר.

$$P(A_i \cap C_j) = P((B_{i+j-1}, x)) = \Leftarrow$$
$$= P(B_{i+j-1})\,P(x) = \frac{1}{i-j+1} \cdot \frac{1}{(i-j+1)-2} \neq \frac{1}{2^{i-j-1}} = P(A_i)P(C_j)$$

אז יודעים שהם לא שווים, כלומר הם תלויים.
לפי מרואה שמשמש מושג הבורות היו לנו אינטואיציה.

שאלת נפוצה: A,B בת $\Leftarrow A \cap B = \emptyset$
לא לגמרי נכון!

מה שכן נכון הוא: A,B בת $\Leftarrow$ A^c, B^c בת
$\Leftarrow$ A, B^c בת
$\Leftarrow$ A, A בת

דוגמה (קלפים אלנת שקד)
יש 4 קבוצות: 9 בנים שנה ג' 9 בנות שנה ג'
9 בנים שנה ב' 9 בנות שנה ב'
מה ניתן להגיד על כך ש"שנה" ו"מין" יהיו בת"ל?
נבחר אקראית x, $n+16$ פעמים (x_i, y_i) $i=1$ ל- $n+16$
P = הסתברות אחידה
A = שנה ג'
B = נקבה

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{n+9}{n+16} \cdot \frac{n+9}{n+16} = \frac{9}{n+16}$$

$\Leftarrow n=9$ וכאן יודעים אותן יחס בין הבנים לבנות.

(9)

נוסף מוך נתונים

	שנה	מין	מספר	הסת' שקלד
$A \cap B^c$	ג	ב	1	0.4
$B \cap A$	א	ג	6	0.8
$A^c \cap B^c$	ב	ב	6	0.6
$B \cap A^c$	ד	ג	6	0.7

נכתוב כן ארבע שאלות שוקלד. מה ההסתברות שהוכן אשה ב?

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$

Ω_1: שנה, Ω_2: מין, Ω_3: אחת שוקלד

E = "אחת שוקלד"

A = "שנה א"

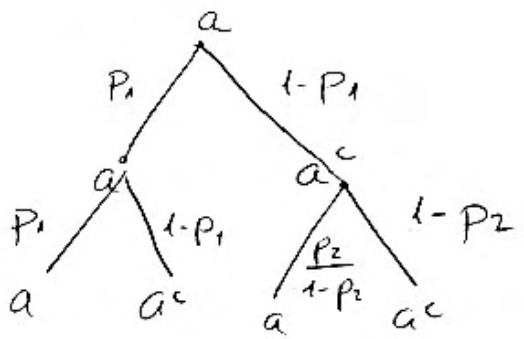
B = "נקבה"

$P(A^c \cap B^c | E) = ?$

$$P(A^c \cap B^c | E) = \frac{P(E | A^c \cap B^c) P(A^c \cap B^c)}{P(E)}$$

הוראה: במידת הכושר אם התאוכה האותרוכה אירעה עפ"י א
יש סיכוי ההסתברות שתקרה תשובה אחת (עפ"מות) ה"ו A_k
ה"ה שהסברות שלו תהיה תשובה A_{k-1}. המשך ח"ים בדיוק
ע"ז הבר תשובה מה ההסתברות ש-
ב"ו - אין תשובות?
מ - יש מדיוק תשובה אחת?

נסתכל על לה כיוון אותה.



כלה מאושרים

A_n = "קבוצה ייחידה תאווה ב- n ימים" $P(A_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$

אחלה של הפלג הכי ימני

$A_n \subset A_{n-1}$ מהיר ש $\Leftarrow$ $P(A_n) = P(A_n \cap A_{n-1})$ ראשון פורמלי:

$$P(A_n \mid A_{n-1})P(A_{n-1}) = (1-p_n)P(A_{n-1})$$

(10) 4.12.05
ת ה סתברות

נסויים תלויים

מטילים 2 קוביות הוגנות זו אחר זו. מה
ההסתברות שהתקבל 7 ופחות 3 פעמים בדיוק?

יש 2 אפשרויות לתיאור המרחב מתאים:

1) המרחב את מתאר $\Omega_0 = \{1,\dots,6\}^2$ $\Omega = \Omega_0^{10}$

2) לאבר אחד מהצורה $\Omega = (\Omega_0')^{10}$ $\Omega_0' = \{1,2,\dots\}$

נניח $\Omega = \{(a_1,\dots,a_{10}) \mid a_i \in \Omega_0'\}$

$P(a_1\dots a_{10}) = p_1\cdots p_{10}$ כאשר $p_i = P(a_i)$

Ω_0' מאחד

$P(\{7\}) = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow P(A) = \sum_{(a_1,\dots,a_{10})\in A} p_1\cdots p_{10}$

עבור מחלקה ב A ההסתברות היא: $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$

$\Rightarrow P(A) = |A|\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$

מהי ההסתברות שיהיו n בלחות שבהן שיהיו 7 כשעות?
לאור ההגדרה האחרונה היתה הבעיה:

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{k} p^{k+m}(1-p)^{n-k} = p^m \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

כאן היה טיבוק אבל שובץ מילה שלאו האדיני Ω
ולזה הבעיה שלנו מהשיעור

(11) 11.12.05
ת. הסתברות

מבלי פגיעה בכלליות נניח שסיכוי ההצלחה p קטן מסיכוי הכישלון $1-p$.

הוכחת משפט ברנולי: נתונים n הצלחות לפני m כשלונות.

(i) נסתכל על $n+m-1$ ניסויים.

$\Omega = \{0,1\}^{n+m-1}$

נגדיר A = "יש n הצלחות ב $n+m-1$ הניסויים הראשונים" (מהירות הכי גדולה שאירוע של n הצלחות לפני m כשלונות יכול להתרחש) כאן n או יותר הצלחות

הסתברות של בדיוק k הצלחות ב $n+m-1$ ניסויים:

$$\binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

$$P(A) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} p^k (1-p)^{n+m-1-k}$$

(ii) מבלי לגלות ניסוי ברנולי זה קיבלנו n הצלחות לאחר X = מס' הניסויים שהיה צריך לבצע כדי לקבל n הצלחות.

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{X}, P_X)$$

Ω: סדרות אינסופיות של $\{0,1\}$

$\mathcal{A}$: σ-אלגברה

S: $\mathbb{N}$

$$P_X(k) = P\{\omega : X(\omega) = k\} = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} \quad k \geq n$$

$$P_X(k) = 0 \quad k < n$$

(* כאן X נקרא משתנה מקרי בגלל שלילי)

צריך להוכיח ש $\sum_{k=n}^{\infty} P_X(k) = 1$ וזאת לאור העובדה כאמור כאן.

נסתכל על $n+m-1$ ניסויים הראשונים שצריך k ניסויים הכוונה $\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

(n הצלחות ראשונות) p $\cdot$ (m כשלונות) $(1-p)^{k-n}$ $\cdot$ $\binom{k-1}{n-1}$ $\sum_{k=n}^{n+m-1}$

נבלגן כהוגן ונמצא $\binom{n+m-1}{n} p^n (1-p)^{k+1-n+m} = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ $\sum_{n}^{n+m-1}$

תרגיל:

נתון מ"מ: $X:(\Omega,A,P)\to(S,2^S,P_X)$ (S סופית)

נגדיר $Y(\omega)=|X(\omega)|$ לכל $\omega\in\Omega$

(i) הראו כי: Y מ"מ?

(ii) מהי ההתפלגות של Y?

תשובה: נגדיר $Z(\omega)=-X(\omega)$. הראה ש Z מ"מ: $Z:(\Omega,\mathcal{A},P)\to(S',2^{S'},P_Z)$

כאשר $S'=-S=\{-x: x\in S\}$

יש להבדק כי: $A\in\mathcal{A}$ $Z^{-1}(B')$ עבור $B'\in 2^{S'}$

$Z^{-1}(B')=\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in B'\}=$

$=\{\omega\in\Omega: -X(\omega)\in B'\}$

לכל B הקבוצה הנ"ל מוגדרת ע"י B':

$X(\omega)\in B \iff -X(\omega)\in B'$

לאחר שמצאנו $B'=-B=\{-x: x\in B\}$

$=\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in B\}\in A$

כי X מ"מ.

$Y:(\Omega,\mathcal{A},P)\to(|S|,2^{|S|},P_Y)$

כאשר $|S|=\{|x|: x\in S\}$

Y מ"מ: תהי $C\subseteq|S|$

$Y^{-1}(C)=\{\omega: Y(\omega)\in C\}=$

$=\{\omega: X(\omega)\in C \vee -X(\omega)\in C\}=$

$=\{\omega: X(\omega)\in C\}\cup\{\omega: -X(\omega)\in C\}=$

$=X^{-1}(C)\cup Z^{-1}(C)\in\mathcal{A}$

כי X, Z מ"מ.

(24)

מה ההתפלגות של Y?

$$F_Y(a) = P_Y((-\infty, a])$$

נניח ש $a \neq 0$ אז

$$F_Y(a) = P\{w : Y(w) \leq a\} =$$
$$= P\{w : |X(w)| \leq a\} =$$
$$= P\{w : X(w) \leq a\} - P\{w : X(w) = -a\} + P\{w : X(w) \leq -a\} =$$
$$= F_X(a) - F_X(-a) + P_X(-a)$$

אם $a = 0$ אז $F_Y(0) = P_X(0)$

פתרון אחר

מקפסה ל כדורים שחורים ו-4 לבנים.
מגרלים את הכדורים האלו: אחד-אחד ללא החזרה.
מקפלים הצלחה כאשר מתקבל ה-4 ש 2 לבנים
בדיוק. שלוש מרצים את הכדורים לקבוצה
מה ההסתברות שנצליח פ-מ"ט עד להצלחה k?
נגדיר X: מס' הניסויים עד לקבלת הצלחה.

$$X : (\quad) \longrightarrow (S, \mathcal{F}, P_X)$$

X ושוב את ההתפלגות
מהגדרה שנצליח לראשונה ב k ניסויים
ב k ניסוי הראשון: ברגע על הסתברות להצלחה:

$$p = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{4}{1}} \leftarrow \text{מתוך 2 שחורים} \leftarrow \text{בקופסה 2 שחורים}$$
$$\text{כל האפשרויות} \leftarrow \text{4 כדורים}$$

$$\Rightarrow P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

X נקרא מ"מ גאומטרי.

(14) 25.12.05
ת. הסתברות

תרגיל: X,Y הם בת"מ מעל Ω ונתון $Z=X+Y$ שקיבל ערכים שלמים אי-שליליים.
הוכיחו כי X ו-Y הם בת"מ.

הוכחה: $(X,Y) \longrightarrow (P_{X,Y}, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y, S_X \times S_Y)$

קיים $(x,y) \in S_X \times S_Y$ כך ש-

$$0 < P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

משלילה, קיים $x' \neq x \in S_X$ כך ש $0 < P_X(x')$

אז: $0 < P_{X,Y}(x',y) = P_X(x') P_Y(y)$

אפשר שני $\alpha \neq \beta$ וקיבלנו

$$0 < P_{X,Y}(x,y) \leq P_Z(\alpha) \neq P_Z(\beta)$$

מסתירה לכך ש $P_Z(\alpha) = P_Z(\beta) = 0$

לכן $P_Z = P_X * P_Y$. מאחר ואופן נקבע $P_Z = P_X * P_Y$ (11)

אם X ו-Y לכו בת"מ כך ראינו באופן מוכרח.

שקילות: X = קודקוד של הטלת קובייה הוגנת

$Y = X - 6$

אז $Z = X + Y = 6$, אבל X,Y תלויים. מספיק לתת דוגמא שני מאורעות כאלו שתלויים. למשל

$$P(X=1, Y=5) = P(X=1) = \frac{1}{6}$$

כי $\Rightarrow$ אחרת מאורע

אבל $P(X=1)P(Y=5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \neq \frac{1}{6}$

תרגיל: X,Y הם בת"מ $X \sim Geo(\lambda)$, $Y \sim Geo(\mu)$

X,Y מופיעים על אותו מרחב הסתברות.

משכו:

1) $n \in \mathbb{N}$ $\quad P(X+Y=n)$

2) $k,n \in \mathbb{N}$ $\quad P(X=k \mid X+Y=n)$

תשובה:

$\lambda \neq \mu$

1) $P_{X+Y}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_X(k)\, p_Y(n-k) =$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda(1-\lambda)^{k-1}\, \mu(1-\mu)^{n-k-1} =$

$= \lambda\mu(1-\mu)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1-\lambda}{1-\mu}\right)^{k-1} =$

$= \lambda\mu(1-\mu)^{n-2} \frac{1-\left(\frac{1-\lambda}{1-\mu}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1-\lambda}{1-\mu}\right)} =$

$= \frac{\lambda\mu(1-\mu)^{n-2}}{(1-\mu)^{n-1}} (1-\mu) \frac{(1-\mu)^{n-1} - (1-\lambda)^{n-1}}{(1-\mu)-(1-\lambda)} =$

$= \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} \left[(1-\mu)^{n-1} - (1-\lambda)^{n-1}\right]$

2) $P\left(\{X=k\} \mid \{X+Y=n\}\right) =$ $\lambda \neq \mu$

$= \frac{P\{X=k,\, X+Y=n\}}{P(X+Y=n)} = \frac{P_X(k)\, P_Y(n-k)}{P_{X+Y}(n)} =$

$= \frac{\lambda(1-\lambda)^{k-1}\, \mu(1-\mu)^{n-k-1}}{\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left((1-\mu)^{n-1} - (1-\lambda)^{n-1}\right)} =$

$= \frac{(\lambda-\mu)(1-\lambda)^{k-1}(1-\mu)^{n-k-1}}{(1-\mu)^{n-1} - (1-\lambda)^{n-1}}$

מה קורה כש $\lambda = \mu$?

1) $P_{X+Y}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda(1-\lambda)^{k-1}\, \lambda(1-\lambda)^{n-k-1} =$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{n-2} = \lambda^2 (1-\lambda)^{n-2}(n-1)$

(13)

$$P(X=k \mid X+Y=n) = \frac{\lambda^k (1-\lambda)^{k-1}}{\lambda^2 (1-\lambda)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$$

מה בעצם לא תלוי ב k! אין אפשר להבין את התוצאה הזו?

אי שקילות הוא אשון כלל:
אם $X=Y$ אז אין הבדל בין סיכוי הבחירה מצמן לה זו לצמן אחר - אלו אומרים מתמטים ש X ו Y ראויים הם מתאימים סימטרי הבחירה ומטרף ואין הבדל.
לה קשה מאוד משהו הסר סיכון.

תרגיל מטילים קוביה הוגנת X = מס' הפעמים שקיבלנו "3". מהו $E[X]$?

$$X \sim Geo\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E[X] = \sum_{x \in S_x} x\, p_x(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{d}{dp}\left(\sum (1-p)^k\right) \cdot p = \frac{d}{p^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p}\right)^2} \cdot p = \frac{1}{p}$$

ה הרצאה שה עניינים בעיקר אינפ'

מטילים קובייה פעמיים.

X - הסכום

Y - התוצאה של הקובייה מס' 1

- מה טווח הערכים של $E[X|Y=i]$
- יש לרשום נוסחה ל- $E[X|Y=i]$ עבור $i=1,\dots,6$

תשובה נכון ש $P_{X|Y}(j|i)$ לא תמיד $\frac{1}{6}$ כלומר $X|Y=i$ אינו מתפלג
של Y ופונקציה של i אם כן

$i \in \{1,\dots,6\}$

$E[X|Y=i] = \sum_{j=1}^{6} (i+j)\, P_{X|Y}(j|i)$

$= \sum_{j=1}^{6} (i+j)\underbrace{P(j)} = i\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{21}{6} = i+3.5$

$\Leftarrow$ טווח הערכים $\{4.5, \dots, 9.5\}$

(ההסתברות שמתקבלת בהשוואה ל-j)

נניח שרוצים לחשב את $E[X]$.

אפשרות 1 $E[X] = \sum_{x\in S_X} x\, P_X(x) =$

כך למשל לא ראינו עד כאן אחרת.

אפשרות 2: עלה בשימוש בנוסחת התורה $E[X]=E[E[X|Y]]$

↳ Porque? $E[X] = \sum_x x P_X(x) = \sum_x x \sum_y P_{X,Y}(x,y)$

$= \sum_y P_Y(y) \sum_x x P_{X|Y}(x|y)$

$E[E[X|Y]] = \sum_y P_Y(y)\,(E[X|Y=y]) = \sum_y \left(\frac{1}{6}(y+3.5)\right)$

$E[E[X|Y]] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} E[X|Y=i] = 3.5+3.5 = 7$

אלו תשובה שניתן את השטה הבאה (2) עלה בהברת קלה יותר מ (1),
במידה ויש אפשרות

תרגיל: $X \sim Poi(\lambda)$ – מספר תקלות במכונה

$N \sim Poi(\mu)$ כאשר $\lambda = N^2$

[ההתפלגות של X בהינתן $N=n$ היא $Poi(n^2)$]

X, N מוגדרים על אותו מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

חשבו את $E[X]$:

נשתמש ב- $E[X] = E[E[X|N]]$

$E[X|N=n] = n^2$

why? $Y \sim Poi(\lambda) \Rightarrow E[Y] = \lambda$

$$E[E[X|N]] = \sum_0^\infty E[X|N=n] P_N(n) = \sum_0^\infty n^2 \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} =$$

$$= e^{-\mu} \sum_1^\infty n \frac{\mu^n}{(n-1)!} = e^{-\mu} \mu \left[\sum_1^\infty (n-1) \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_1^\infty \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \right] =$$

$$= e^{-\mu} \mu \left[\mu \sum_2^\infty \frac{\mu^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_1^\infty \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \right] = e^{-\mu} \mu \left[\mu e^{\mu} + e^{\mu} \right] =$$

$$= \mu + \mu^2 = E[X]$$

הגדרה: אם X, Y מקיים כי

$$E[X|Y] = E[X]$$

לכל $y \in S_Y$

$$E[X|Y=y] = \sum_{x \in S_X} x P_{X|Y}(x|y) = \sum_{x \in S_X} x P_X(x) = E[X]$$

תרגיל: $X \sim Poi(\lambda)$

תנו דוגמא של X המקיים כי X זוגי.

$$P(\text{זוגי}) = \sum_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cosh \lambda$$

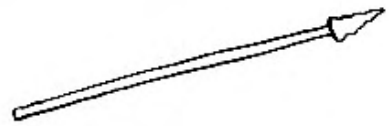
(טור טיילור)

$E[X|X \text{ זוגי}] = \sum 2k P\{X=2k \mid X \text{ זוגי}\}$

$P\{X=2k \mid X \text{ זוגי}\} = \frac{P\{X=2k, X \text{ זוגי}\}}{P\{X \text{ זוגי}\}}$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}}{e^{-\lambda} \cosh \lambda}$$

$$= \sum_0^\infty 2k \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!\cosh\lambda} = \frac{\lambda}{\cosh\lambda} \sum \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} = \lambda \tanh\lambda$$



שוברים מקל מאורך אחד. שוברים אותו במקום X

$$X \sim U(0,1)$$

R - המרחק שבין הנקודה לקצה.

יש למצוא את פונקציית הצפיפות של R.

$$f_X = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$P_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

$$F_X(a) = P\{X \le a\} = \int_{x \le a} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 & a \ge 1 \\ \int_0^a dx = a & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$R = \min\{X, 1-X\}$$

$$F_R(a) = P\{R \le a\} = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \cdot & 0 \le a \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < a \end{cases} =$$

$$= P(\min\{X, 1-X\} \le a) = 1 - P\{\min\{X, 1-X\} > a\} =$$

$$= 1 - P\{X > a,\ 1-X > a\} = 1 - P\{a < X < 1-a\} =$$

$$= 1 - \int_{a<x<1-a} f_X(x)\,dx = 1 - \int_a^{1-a} dx = 1 - (1-2a) = 2a$$

לגזור את F_R

$$f_R(a) = \frac{dF_R(a)}{da} = \begin{cases} 2 & 0 \le a < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר $R \sim U(0, \frac{1}{2})$

הדגמה בעזרת סימולציות של משתנה מקרי שאינו
מוכר. למשל כמות הפעמים שאפשר
לה מתאים הוא בינומי. אפשר לשערך את
שמאפשרים לקבל את הפונקציה שאנו רוצים.
אנו נשתמש כאן ב $U(0,1)$

תזכורת: נתון $X \sim U(0,1)$
רוצים לקבל מדגימה מזו בעזרת הפונקציה
$f_Y(y) = 2(\frac{1}{2} - y)$, $0 \le y \le \frac{1}{2}$

לאחר מכן נבדוק שאכן פונקציה זו מקיימת:
$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2(\frac{1}{2} - y)\,dy = 1$$

7

<u>משפט</u>: יהי g פונקציה מונוטונית ועל.
$Y = g(X)$ נגדיר
$$P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = P\{X \le g^{-1}(y)\}$$
$$F_X(x) = \int_0^x \underbrace{f_X(t)}_{1}\,dt = x \quad \text{אם} \quad 0 \le x \le 1$$
$$F_X(x) = 0 \quad \text{אחרת} \quad \text{אם} \quad x < 0$$
$$F_X(x) = 1 \quad \text{אחרת} \quad \text{אם} \quad x > 1$$

$$\Rightarrow P(X \le g^{-1}(y)) = g^{-1}(y)$$
אם מתקיים $0 \le g^{-1}(y) \le 1$
$$\Leftarrow \quad g(0) \le g \le g(1)$$
אם $y < g(0)$ אז $P\{Y \le y\} = 0$
אם $y < g(1)$ אז $P\{Y \le y\} = 1$

רוצים למצוא את g כך ש-

$$F_Y(y) = \int_0^y 12(t-\frac{1}{2})^2 dt = \text{עבור } 0 \le y \le 1$$

$$= \frac{12}{3}(t-\frac{1}{2})^3 \Big|_0^y = (y-\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} = g^{-1}(y)$$

כדי למצוא את g נזכור ש:

$$y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y)$$

$$x = 12(g(x) - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{12}\right)^{1/3} + \frac{1}{2}$$

$g(0) = 0 \quad g(1) = 1$

ונותר להראות שהפונקציה - שלנו היא הפונקציה בין 0 ל-1.

תרגיל: $X \sim Exp(\lambda)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 < x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}, \quad 0 < \lambda$$

נזכר בהגדרת היתוך שהוא תמיד מכיל אך לא בהכרח מתחיל ונגמר במקומות שבהם המכיל אינו שווה לאפס.

נגדיר $N = [X]$ חלק שלם

$X_1 = X - [X]$ חלק השארית

א. יהי $\lambda > 0$. חשבו את הפונקציית F_{X_1}

ב. חשבו את ההתפלגות של N, Z

ג. N ו-Z בלתי תלויים

פתרון

(א) אם $Y=g(X)$ כאשר g חח"ע אז

$$f_Y(y)=\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y))$$

כאשר $y\in Range\, g(X)$

אחרת $f_Y(y)=0$

למה?

$$F_X(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\le g^{-1}(y))$$

g עולה

$$=\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y}{dy}=f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y))$$

כלל: $g(x)=x^\alpha$ עולה $\Leftarrow \alpha>0$

$x\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow Range\, g(x)=\mathbb{R}^+ \Rightarrow$ עבור $y>0$

$$g(x)=x^\alpha$$

$$x=g^{-1}(y)=y^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}g^{-1}(y)=\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot\lambda e^{-\lambda y^{\frac{1}{\alpha}}} & y>0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

(ב) N הוא מספר הפעמים שהמשתנה יורד $p_N(n)$ $n=0,1,2,\ldots$

$$p_N(n)=P(n\le X<n+1)=\int_n^{n+1}\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_n^{n+1}=e^{-n\lambda}-e^{-\lambda(n+1)}=e^{-n\lambda}(1-e^{-\lambda})$$

הערה: לבדוק ש $\sum_0^\infty p_N(n)=1$

נחשב $f_Z(z)$ עבור $0 \le z < 1$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{n \le X \le n+z\}\right) =$$

$$= \sum_0^\infty P\{n \le X \le n+z\} = \sum_0^\infty \left(e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+z)}\right) =$$

(מיקלדה)

$$= \sum_0^\infty e^{-\lambda n}\left(1 - e^{-\lambda z}\right) = \left(1 - e^{-\lambda z}\right) \sum e^{-\lambda z} =$$

$$= \left(1 - e^{-\lambda z}\right) \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} = F_z(z)$$

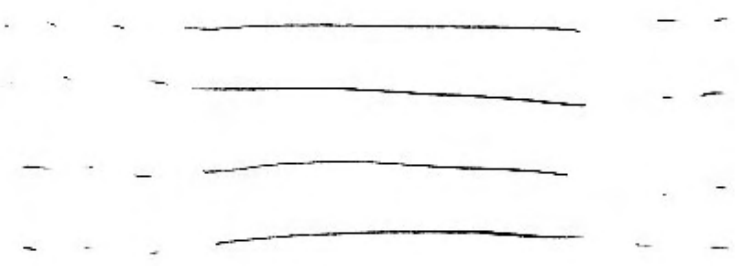
$$\frac{dF_z(z)}{dz} = \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} = f_z(z) \quad \text{ו} 0 < z < 1$$

ג) $P\{\text{זוגי } N\} = \sum_0^\infty P\{N = 2k\} = \dots$

(20) 22.1.06
ת. הסתברות

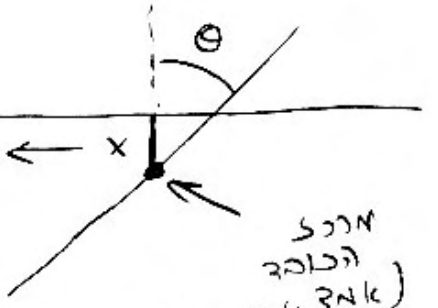
ניסוי של מחט

נסיון ראשון של Buffon (קבו לוקלן)
יש מחט באורך 7 מטילים אותה על משור אינסופי,
שיש עליו קווים מקבילים במרחק $D=7$.

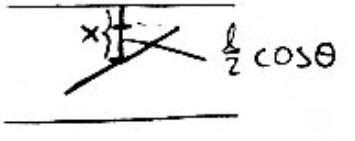


מה ההסתברות שהמחט תחתוך איזשהו קו?

נסתכל במקרה שהיא חתכה:



$A = \{(x,\theta): x \le \frac{7}{2}\cos\theta\}$ המחט חותכת קו



נניח אחידות על המרחב אל
$X \sim U(0, \frac{7}{2})$ אזי
$\theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ובנוסף
X, θ בת

ההתפלגויות:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{D} & 0 \le x \le \frac{D}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$P(A) = \iint_A f_{X,\theta}(x,\theta)\,dx\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}\cos\theta} f_\theta(\theta) f_X(x)\,dx\,d\theta =$$

בגלל שθ וx בלתי תלויים

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\theta(\theta)\,d\theta \int_0^{\frac{D}{2}\cos\theta} f_X(x)\,dx$$

$\frac{D}{2} \ge \frac{D}{2}\cos\theta$ $\Leftarrow$ מהתנאים אם במקרה ונקבל

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi}\,d\theta \int_0^{\frac{D}{2}\cos\theta} \frac{2}{D}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{D}\cdot\frac{D}{2}\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi D}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi D}$$

תרגיל: $X, Y \sim N(0,1)$ בת"ל

לפניכם: $U = X + Y$ $\quad V = X - Y$

מצאו: $f_{U,V}$

$$(u,v) = g(x,y) = (x+y,\ x-y)$$

$$(x,y) = h(u,v) = \left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right) = g^{-1}(u,v)$$

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} f_{X,Y}(h(u,v))\,|\det J(h(u,v))| & (u,v) \in \text{Range } g(X,Y) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$J(h(u,v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = \frac{1}{2}$$

(21)

$(u,v) \in \mathbb{R}^2$ לכל $\Leftarrow$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) =$$

X ו-Y בלתי תלויים $= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) =$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{u-v}{2}\right)^2}{2}} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}} = f_{U,V}(u,v)$$

U, V כלומר: מכפלת שוליות שווה ל

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4}}\,dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2\cdot 2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}\,dv = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}}$$

$\downarrow$

כי $\int \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = 1$

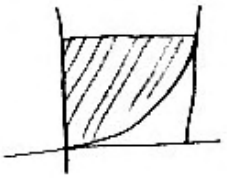
$\Leftarrow U \sim N(0,2)$

מסיימטריה $V \sim N(0,2)$

ולכן $f_{U,V} = f_U \cdot f_V$

כלומר U, V בלתי

תרגיל



(X,Y) מתפלג באופן אחיד

$D=\{(x,y): 0<x^2<y<1\}$ בתחום

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}c & (x,y)\in D\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$ ← מהו כדי שיוגדר התפלגות

חשב

$f_{Y|X}(y|x)$

$E[Y|X]$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X|Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{1} f_{X,Y}(x,y)\,dy = c(1-x^2)$$

$0<x^2<1$

$$f_{Y|X}(y,x)=\frac{c}{c(1-x^2)}=\frac{1}{1-x^2},\quad y\in(x^2,1)$$

$$E[Y|X=x]=\int y f_{Y|X}(y|x)\,dy = \text{תלוי ב-}x$$

נניח $Z\sim U(a,b)$

$$E[Z]=\int_a^b z f_Z(z)\,dz=\int_a^b \frac{z}{b-a}\,dz=$$

$$=\frac{z^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$ שזה אומר שהתוחלת הקטע

$\Rightarrow$ אותנו נבנה g –

$$E[Y|X=x]=\frac{1+x^2}{2}$$

רשום בפ"ע על x^2 בקבוע ואז מה אומר הקטע.

(22) 29.1.06

א. שוויונים

אי-שוויון מרקוב: $X \geq 0$, $a > 0$ אז $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

אי-שוויון צ'בישב: X משתנה, $a > 0$ אז $P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{Var X}{a^2}$

תלמיד מדידה (מטר) יצא לפי [illegible] שהבין כי סטודנט(ית) מהקורס שלו הוא. מא כפל תוחלת 25 שונות 25

א. * תנו חסם מעליד להסתברות לכך שסטודנט זה בין מאה 28 ל- 28?

ב. מה ניתן לומר על ההסתברות שהבין יהיה בין 25 ל- 28?

ג. כמה סטודנטים צריכים להיבחן אם נרצה שמעל זה בינוים יהיה מאחוז של לפחות 0.9 ה' מהתלמידים בקורס, בהסתברות 0.95?

תשובה:

נסמן ב- X_i את הציון של התלמיד ה- i, $i = 1, \ldots, n$

X_i הציון. $EX_i = 75$. $Var X_i = 25$

א. $P(X_i \geq 85) \leq \frac{EX_i}{85} = \frac{75}{85} \approx 0.88$

ב. $P(70 \leq X_i \leq 80) = P(|X_i - EX_i| \leq 5) \geq 1 - P(|X_i - EX_i| \geq 5) \geq 1 - \frac{Var X_i}{100} = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$

ג. נגדיר $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ הממוצע של הציונים

$P(|Y - EY| \leq 5) = 1 - P(|Y - EY| > 5) \geq 1 - \frac{Var Y}{25} = 1 - \frac{1}{25} Var(\frac{1}{n}\sum X_i)$ (ציונים מתלמידים שונים בלתי תלויים)

$= 1 - \frac{1}{25 n^2}\sum_{i=1}^{n} Var X_i = 1 - \frac{1}{n}$

$\Leftarrow 0.9 \leq 1 - \frac{1}{n}$

$\Leftarrow n \geq 10$

משפט הגבול המרכזי:

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ בת"ש זהות התפלגות ובעלי תוחלת ושונות

$$P\left\{a \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{X_i}^2}} \le b\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(b) - \Phi(a)$$

כאשר $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

אנחנו נשים את לב שהמקרה שלנו:
מה היה לנו? .

$$P\{|A_n - EA| \le \varepsilon\} = P\left\{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X)} \le \varepsilon^{-1}\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)}{\sqrt{n}S} \le \sqrt{n}\varepsilon\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(\sqrt{n}\varepsilon) - \Phi(-\sqrt{n}\varepsilon)$$

כאן מגדירים סוף כל סוף, אפשר את אותו דבר.

$$= \Phi(\sqrt{n}\varepsilon) - (1 - \Phi(\sqrt{n}\varepsilon)) = 2\Phi(\sqrt{n}\varepsilon) - 1 \ge 0.9$$

אז אפשר לבדוק: בשביל איזה n מקבלים כבר...

שעל כל ε נתון, נרצה ש $n \to \infty$

$\varepsilon \le n$ מאיזה שלב ואילך כבר...

תרגיל יהי X מ"מ: $0 < X$ ותוחלתו $EX = \frac{1}{\lambda}$.

יהי מ"מ רציף ש $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ עבור $x > 0$, $\lambda > 0$.

כלומר $X \sim Exp(\lambda)$ (*)

הוכיחו: $E[\frac{1}{X}] \overset{(*)}{=} E[E[Y|X]] = E[Y]$

פתרון: הוכחנו קודם המקרה הסופי ואז נוכל לומר שגם ב

$\frac{1}{x} = g(x)$ ואז נקבל שכי שזו. Jensen

$$E[Y] \le g(E[X]) = \frac{1}{E[X]} \Rightarrow E[Y] \le E[\frac{1}{X}]$$

(23)

תרגיל: יהיו X, Y משתנים מקריים בעלי תומך סופי.

$$\{x_1 \dots x_n\}$$

$$-E\log p_Y(X) \geq -E\log p_X(X) \quad (1)$$

$$-E\log p_X(X) \leq \log n \quad (2)$$

פתרון:

(1) נגדיר משתנה מקרי $g(x)$, $g(x_i) = \log p_X(x_i)$ ונקבל

$$E\log p_X(X) - E\log p_Y(X) = \sum_1^n \log p_X(x_i)\, p_X(x_i) -$$

$$- \sum_1^n \log p_Y(x_i)\, p_X(x_i)$$

$$= \sum_1^n \log \frac{p_X(x_i)}{p_Y(x_i)}\, p_X(x_i) = \sum_1^n \log \frac{p_Y(x_i)}{p_X(x_i)}\, p_X(x_i) =$$

$$h\left(\frac{p_Y(x_i)}{p_X(x_i)}\right)$$

$$\Rightarrow h(x) = -\log x$$

קמורה

$$= E\left[-\log\left(\frac{p_Y}{p_X}\right)\right] \geq -\log E\left[\frac{p_Y}{p_X}\right] =$$

$$= -\log \sum_1^n \frac{p_Y(x_i)}{p_X(x_i)}\, p_X(x_i) = -\log 1 = 0$$

$$\Rightarrow E\log p_X(X) > E\log p_Y(X)$$

(2) ...

(24) 2.2.06
ת. הסתברות

ההוכחה של זה מהווה טפיר שתהיה לזה שאלה.

תזכורת: הוכחה של מקרה פה הסתברות

p קבוע ומתקיים

T_n מספר הניסויים עד הצלחה ראשונה $= H_n$

מספר כישלונות ב n הניסויים הראשונים: T_n

הוכחנו כי $\frac{T_n - H_n}{n} \xrightarrow{p} 1-p$ (*)

כעת, אנו נרצים להכיר את ההוכחה המלאה של ההסתברות

$x \xrightarrow{?} x_n$ אם $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} |\{x : |x_n(\omega) - x(\omega)| > \varepsilon\}| = 0$

מה החוק החלש של המספרים הגדולים? אם $X_1, X_2, \ldots$ סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות כך ש $EX_i = \mu$ ו $\mathrm{Var} X_i = \sigma^2 < \infty$ אז

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p} \mu$$

אנו נוכיח את (*) כי $\frac{T_n}{n}$ של זוגה מ"מ שמ"מ

זוהי התפלגות של הסדרה:

נגדיר: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{הצלחה} \\ 0 & \text{כישלון} \end{cases}$

ואכן: $T_n - H_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

שכן $EX_i = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = 1-p$

X_i מתקיים כי נתון: שהתפלגות

ובדיוק לבדוק שהשונות סופית

$\mathrm{Var} X_i = p + 1 - p = 1$

מתקיימים כל התנאים של החוק החלש

$$\frac{T_n - H_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n} \longrightarrow EX_i = 1-p \quad \Leftarrow$$

תהי $X_n \sim Poi(n)$ לכל $n \geq 1$ שלמה.
נגדיר $Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$
הוכיחו כי $Y_n \xrightarrow{D} X$ כאשר $X \sim N(0,1)$

אם רואים שאלה על התפלגות אז
כדאי לחשוב על איזשהו הגבול המרכזי.
מה הוא אומר?

$X_1, X_2, \ldots$ בת"ש שכל $EX_i = \mu$, $Var X_i = \sigma^2$
אזי $\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{D} N(0,1)$ כלומר לכל a

$$P\left\{\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right\} \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

אנו רואים קודם כל כי Y_n כסכום.
נרשום את X_n כסכום של מ"מ בת"ש
$X_n = Z_1 + \ldots + Z_n$
לדוגמה: $Z_i \sim Poi(1)$ אזי $X_n \sim Poi(n)$

$EZ_i = 1$ ו $Var Z_i = 1 = \sigma^2$

$$Y = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n - n}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{Z_1 + \ldots + Z_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

לפי המשפט $\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

(25)

תזכורת אי-שוויון מרקוב: אם X משתנה מקרי אי-שלילי ו-$a>0$ מספר ממשי, אז $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

תשובה 100 הוא מספר טוב בשביל שרשרת מארקוב יהפוך.

נגדיר X_i עבור $i=1,\ldots,100$ בצורה הבאה: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{בצד א'} \\ 0 & \text{בצד ב'} \end{cases}$

ונניח שהמטבע שבו אנו משתמשים הוא הוגן.

אם נסמן $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ ונשאל מה $P(Y \geq 50) = ?$

$E(X_i) = p \cdot 1 = 0.5$ לפי הנתון

$\mathrm{Var}(X_i) = p - p^2 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$

$$P(Y \geq 50) = P\left\{ \frac{Y - 100p}{\sqrt{100(p-p^2)}} \geq \frac{50 - 100p}{\sqrt{100(p-p^2)}} \right\}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\frac{50-50}{\sqrt{100(p-p^2)}}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

כלומר הקירוב שנקבל אם $n=100$

$$P(Y \geq 50) \approx \Phi\left(\frac{50-100p}{\sqrt{100(p-p^2)}}\right) = 0.15$$

כלומר לנו אינטרס שלנו הקירוב

הערה: אי-שוויון מרקוב נכון לכל משתנה מקרי אי-שלילי, גם אחד שאינו בינומי, ואפילו אחד שאינו בדיד.

הנחות $\{X_n\}$ סדרה כלשהי

$EX_n = 0$

$Var\, X_n = \sigma_n^2 < \infty$

ניתוח $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

הראו: ① $X_n \xrightarrow{s.m.} 0$

② $X_n \xrightarrow{Pr} 0$

תשובה

① נזכור מהלימה: התכנסות ב-L^2:

$X_n \xrightarrow{sm} X$

אם $E|X_n - X|^2 \longrightarrow 0$

אז במקרה שלנו

$$E[X_n - X]^2 = E|X_n - 0|^2 = EX_n^2$$

$$= E|X_n - EX_n|^2 = Var\, X_n = \sigma_n^2 \longrightarrow 0$$

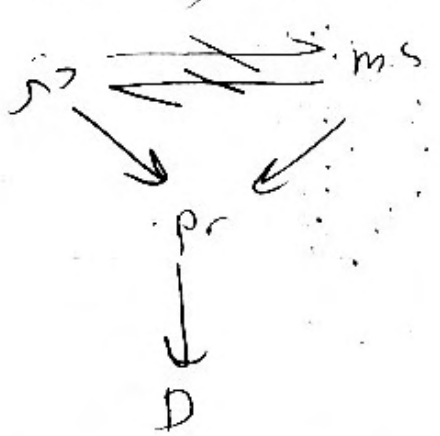
② התכנסות $sm \Rightarrow$ התכנסות Pr.

אם מישהו לפני צוכך איך להוכיח

$\forall \varepsilon > 0$ צ"ל $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$

$$\overset{\text{צ'בישב}}{\leq} \frac{Var\, X_n}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

למה את הדיאגרמה:



(36)

תרגיל התכנסות כמעט בוודאי גוררת התכנסות בהסתברות

נתון $X_n \sim Exp(1)$ $n=a,3,1$ בת"ל

$$Y_n = \frac{X_n}{\log n}$$

טענה (1) $Y_n \xrightarrow{Pr} 0$

(2) $Y_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$

הוכחה

(1) יהי $\varepsilon>0$ נסמן את ε ונבדוק $\lim P(|Y_n|<\varepsilon)$

$$= P(|Y_n| < \varepsilon) = P(X_n < \varepsilon \log n) =$$

$$= 1 - P(X_n \geq \varepsilon \log n) = 1 - e^{-\varepsilon \log n} = 1 - \left(e^{\log n}\right)^{-\varepsilon} = 1 - n^{-\varepsilon} = 1 - \frac{1}{n^\varepsilon} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

(2) צריך להראות שהתכנסות כמעט בוודאי של $Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$ נכשלת

נניח בשלילה $Y_n \xrightarrow{a.s.} X$ אם לכל $\varepsilon>0$

$P(|Y_n - X| < \varepsilon \text{ i.o.}) = 1$ אז $X=0$ a.s.

$\Rightarrow$ קיים ω כך ש $\lim X(\omega) = 1$ כלומר $X(\omega) = 1$ בהסתברות 1.

מספיק להראות שקיים $\varepsilon>0$ כך ש

$$P(|Y_n - 0| < \varepsilon \text{ i.o.}) < 1$$

יהי $\varepsilon>0$ (יבחר מאוחר יותר) $A_n^\varepsilon = \{\omega : Y_n(\omega) < \varepsilon\}$

$$P(A_n^\varepsilon) = \frac{1}{n^\varepsilon}$$

מי קונבס

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\varepsilon} = \infty$$

A_n^ε בת"ל $\Leftarrow$ $A_n^\varepsilon \in \sigma(Y_n)$, (∞,ε) ב Y_n ו A_n^ε בת"ל

X_n בת"ל $\Leftarrow$ $\sigma(X_n)$ בת"ל $\Leftarrow$ $\sigma(Y_n)$ בת"ל $\Leftarrow$ A_n^ε בת"ל

לפי הלמה השנייה של בורל קנטלי $P(A_n^\varepsilon \text{ i.o.}) = 1$!! משלים