

~~$V(A \cap B) = V(A \cup B)$~~

סתברות (1) (80420)

מועד א' תשס"ו

שם המורה: פרופ' רז קופרמן

חלק א' (25 נק')

יש לענות על אחת מבין שתי השאלות הבאות.

$$P(A \cap B \cap C)$$

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C \cup B \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

מחיר
מחיר

רציבות
המשל

ק עבור יורדת?
עבור יורדת?

1. הוכיחו את הלמה של Fatou:

$$\limsup_n P(A_n) \leq P\left(\limsup_n A_n\right)$$

2. הוכיחו שאם A_n סדרה יורדת של מאורעות אז הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ קיים.

 ΔA_n

חלק ב' (כל שאלה 16 נק')

יש לענות על חמש מבין שש השאלות הבאות.

3. א. הוכיחו שפונקציית הסתברות מעל מרחב מדגם בן-מניה נקבעת באופן יחיד על ידי

ההסתברות של כל היחידונים. (הגדירו את פונקציית ההסתברות, והראו שהיא

מקיימת את האקסיומות).

ב. מדוע אין טיעון זה תקף עבור מרחב מדגם שאינו בן מניה?

4. יהי X משתנה מקרי המקבל ערכים אי-שליליים. הוכיחו שאם קיימת ל X פונקציה

יוצרת מומנטים $M_x(t)$, אז לכל $t, a \geq 0$ מתקיים

$$.P(\{X \geq a\}) \leq \frac{M_X(t)}{e^{at}}$$

$$P(e^{x_1} \geq e^a) = \frac{P(e^{x_1})}{e^a}$$

5. יהיו A, B, C מאורעות במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

א. הגדירו אי-תלות של A בזוג (B, C) .

ב. הוכיחו או הפריכו: A בלתי תלוי בזוג (B, C) אם ורק אם

7. A בלתי תלוי ב B , A בלתי תלוי ב C , ו- A בלתי תלוי ב $B \cup C$.

6. נתון משתנה מקרי $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

א. חשבו את התוחלת והשונות של X .

 $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x}$

ב. חשבו את $P(\{|X - E[X]| > a\})$ עבור $a > \frac{1}{\lambda}$.

ג. מה קובע אי-שוויון צ'בישב לגבי סעיף ב'?

$$\leq \frac{1}{(x\alpha)^2}$$

$$E[e^{xt}] = \int e^{xt} \lambda e^{-\lambda x} = \int \lambda e^{x(t-\lambda)} = P(x \geq 0) = 1$$

7. חוזרים N פעמים על ניסוי ברנולי בלתי תלויים עם הסתברות הצלחה p , כאשר

$$N \sim \text{Poi}(\lambda)$$

יהיו X, Y מספרי ההצלחות והכשלונות בהתאמה.

א. מהי ההתפלגות של X ? $\text{Poi}(\lambda p)$ כוונתי

ב. הוכיחו שהמאורעות $\{X = k\}$ ו- $\{Y = m\}$ בלתי תלויים לכל m, k .

8. במשחק רולטה רוסית שחקן בוחר אחד משלושה אקדחים, מצמיד אותו לרקתו ויורה.

בכל אקדח מקום לשישה כדורים. באקדח אחד הוכנסו 2 כדורים, בשני 3 כדורים,

ובשלישי 4 כדורים (מבלי שהשחקן יודע כמה כדורים בכל אקדח).

א. בהינתן שהשחקן מת, מהי ההסתברות שבחר אקדח בו 4 כדורים? $\frac{6}{9}$

ב. בהינתן שהשחקן מת, מהי ההסתברות שהאקדח הכיל 3 או 4 כדורים? $\frac{7}{9}$

אזהרה: אין לבצע את הניסוי.

בהצלחה!

$$P(B) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B|A) P(A)$$

$$\downarrow$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

בחינה בתורת ההסתברות (1) (80420)

מועד ב' תשס"ו

משך הבחינה: 3 שעות

שם המורה: פרופ' רז קופרמן

חלק א' (25 נק')

יש לענות על אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. ✓ הוכיחו את הלמה הראשונה של Borel-cantelli: אם A_n סדרת מאורעות המקיימת

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

אז

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = 0$$

2. הוכיחו את חוק ההסתברות השלמה: אם $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ כיסוי זר של מרחב המדגם Ω , אז

לכל מאורע B

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$$

חלק ב' (כל שאלה 16 נק')

יש לענות על חמש מבין שש השאלות הבאות.

3. ✓ יהי X משתנה מקרי מעל מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ המקבל ערכים בקבוצה בת

מניה S .

א. הגדירו את ה- σ -אלגברה $\sigma(X)$ המושרית על ידי X .

ב. תהא $\varphi: S \rightarrow S$

הוכיחו ש $\sigma(\varphi(X)) \subseteq \sigma(X)$

4. ✓ מטילים קוביה הוגנת. אם תוצאת ההטלה היא k , מטילים לאחר מכן k קוביות הוגנות.

✓ א. בנו מרחב הסתברות המתאים לניסוי זה.

✓ ב. מהי ההסתברות שסכום תוצאות k הקוביות הוא 7?

5. יהי X משתנה מקרי רציף מעל מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

הוכיחו שהמספר הממשי היחיד a המקיים

$$\int_{-\infty}^a P(\{X < x\}) dx = \int_a^{\infty} P(\{X > x\}) dx$$

הוא $a = E[X]$



6. ✓ האם ניתן למצוא משתנה מקרי X המקיים את הזהות

$$P\left(\left\{X \geq E[X] + 4\sqrt{\text{Var}[X]}\right\}\right) = 0.3$$

אם כן מצאו כזה משתנה, ואם לא נמקו את הסיבה.

7. ✓ מאורעות A, B בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

האם אחד משני אי-השוויונים

$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) \text{ או } P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$$

נכון תמיד (כלומר, גם אם A ו- B תלויים)? הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמאות נגדיות.

8. ✓ יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות גאומטרית עם פרמטרים

λ, μ בהתאמה. מצאו את ההתפלגות של המשתנה המקרי $Z = \min(X, Y)$.

בהצלחה!

$$\min(X, Y) = \frac{X+Y}{2}$$

$$\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

⊙ מבחן ההסתברות ⊙

חלק ג'

(1) הניחה הראשונה של בורל-קנטלי:
 תהי (A_n) סדרת מאורעות הלק"מ $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$
 אזי $P(\limsup A_n) = 0$

הוכחה:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{לפי ההגדרה}$$

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \quad \text{אז } G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{[NO] } \checkmark$$

$G_{n+1} \subseteq G_n$ סדרת יורדת. כי $\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ כי אם $G_{n+1} \subseteq G_n$ וזכרנו כי $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$

למען משפט שמוכר ש (G_n) סדרת יורדת
 של מאורעות אז קיים הקטן $\lim G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$

ולכן נקבל $\limsup A_n = \lim G_n$ - ל
 $P(\limsup A_n) = P(\lim G_n) \quad \Leftarrow$

למען משפט שמוכר ש (G_n) סדרת יורדת
 של מאורעות אז מתקיים $P(\lim G_n) = \lim P(G_n)$

לכן נקבל $P(\limsup A_n) = P(\lim G_n) = \lim P(G_n)$

אם $G_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

למען משפט שמוכר ש (A_n) סדרת מאורעות
 מתקיים $P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$

לכן נקבל $P(G_n) = P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$

נניח $\epsilon > 0$, נמצא N כך ש-
 $P(G_N) < \epsilon$ וכל $n \geq N$ יהיה
 $P(\limsup A_n) < \epsilon$

נניח $0 < \epsilon$ נתון.
 קיים N כך ש- $P(G_N) < \epsilon$
 כל $n \geq N$ יהיה

$$P(G_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

נניח $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \epsilon$.
 אז $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) < \epsilon$ לכל n

$$P(G_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \leq \sum_{k=N}^{\infty} P(A_k) < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(G_n) = 0 \quad \Leftarrow$$

$$P(\limsup A_n) = 0 \quad \Leftarrow$$



לכן

חלק ב'

(7) מאורעות A, B בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 אי-השוויון $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$ אינו כיוון תמיד

דוגמה: (סתר) הניסוי של הטלת מטבע הואן.
 ז'א' $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$ אם

$$P(H \cap T) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(H) \cdot P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ו'א' כיוון של $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$
 כאשר $B = T$! $A = H$

אי-השוויון $P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$ אינו כיוון תמיד

דוגמה: (סתר) הניסוי של הטלת מטבע הואן.
 ז'א' $P(H) = \frac{1}{2}$ אם

$$P(H \cap H) = P(H) = \frac{1}{2}$$

$$P(H) \cdot P(H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ו'א' כיוון של $P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$
 כאשר $A = B = H$

(6) אם ניתן למצוא משתנה מקרי X המקיים את
 $P(\{X \geq E[X] + 4\sqrt{\text{Var}[X]}\}) = 0.3$ הרי

ה'כחה: אי-שוויון

שיטתית משתנה מקרי Y אי-שוויון מקרה אחר שבהינתן משתנה מקרי Y
 אם $0 < a$ אז תוחלת μ

$$P(Y \geq a) \leq \frac{\mu}{a}$$

$$Y = \frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \quad (NO)$$

כדי שיהיה נורמלית צריך להחסיר את התוחלת
ועל התוחלת להכפיל

$$E[Y] = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}[X]}} E[X] - \frac{E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} = 0$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{1}{(\sqrt{\text{Var}[X]})^2} \cdot \text{Var}[X] = \frac{\text{Var}[X]}{\text{Var}[X]} = 1$$

וכן

$$P(X \geq E[X] + 4\sqrt{\text{Var}[X]}) =$$

$$= P\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \geq 4\right) \leq P\left(\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}}\right)^2 \geq 4^2\right) =$$

$$\left\{\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \geq 4\right\} \subseteq \left\{\left(\frac{X - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}}\right)^2 \geq 4^2\right\}$$

$$= P(Y^2 \geq 16) = P((Y - 0)^2 \geq 16) =$$

$$= P((Y - E[Y])^2 \geq 16) \leq \quad \checkmark$$

$$\leq \frac{E[(Y - E[Y])^2]}{16} = \frac{\text{Var}[Y]}{16} = \frac{1}{16}$$

$(Y - E[Y])^2$
היכנס

$$p = P(X \geq E[X] + 4\sqrt{\text{Var}[X]}) \leq \frac{1}{16} \quad \text{אם}$$

אם כן יתכן שיהיה - 0.3

$$\cdot \frac{1}{16} < \frac{3}{10} \quad \text{אם}$$



(3) יהי X מפתנה מעל מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
המקבל ערכים מקבוצה בת מניה S

(4) נניח $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (S, \mathcal{F}_S, P_X)$

ה- σ -אלגברה המושגת על ידי X היא המקבוצה:

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{F}_S) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_S\}$$

(כמובן) $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$ ✓

(5) תהא $\varphi: S \rightarrow S$ א.ב.

$$\sigma(\varphi(X)) \subseteq \sigma(X)$$

הוכחה: יש להראות שלכל $B \in \sigma(\varphi(X))$
מתקיים $B \in \sigma(X)$

(נסו) $Y = \varphi \circ X$ נהיו מפתנה מקבלי

$$Y: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (S_Y, \mathcal{F}_Y, P_Y)$$

כאשר $S_Y = S$ ו- $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_S$
כל:

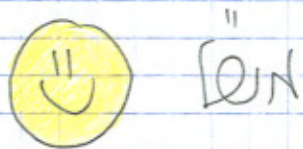
$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(X)) &= \sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{F}_S) = \{Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_Y\} = \\ &= \{X^{-1}(\varphi^{-1}(A)) : A \in \mathcal{F}_Y\} : \\ &\stackrel{\checkmark}{=} \{X^{-1}(\varphi^{-1}(A)) : A \subseteq S\} \\ Y^{-1} &= X^{-1} \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

נבין אם $B \in \sigma(\varphi(X))$ אז היא מקבוצה

✓ $A \in \mathcal{F}_Y$ כאשר $X^{-1}(\varphi^{-1}(A))$

אם $A^* = \varphi^{-1}(A) \in S$ בלתי נראה

פירמה צורה $X^{-1}(A^*)$ האשר
 - ל $A^* \subseteq S$ וזה הסיווג מיון
 $\sigma(X) = \{ X^{-1}(A^*) : A^* \in \mathcal{L}_S \}$
 $= \{ X^{-1}(A^*) : A^* \subseteq S \}$



חוק ב' (המשק)

(4) מסיקים קבוצה חדשה. אם תוצאת ההטלה היא k מסיקים שאתר k קבוצת החדשות.

(א) נבנה מרחב הסתברות המתאים לניסוי זה:

$$\Omega = \{ (a_1, \dots, a_n) : \forall 1 \leq i \leq n, a_i \in \{1, \dots, 6\}, n \in \{1, \dots, 6\} \}$$

במרחב זה נעצם n מסמך את התוצאה של ההטלה הראשונה ואז $(a_1, \dots, a_n)$ זו התוצאה של הטלת n הקוביות שאתר k . $(*)$ המשק הממוצע

$$n = a_i + 1$$

(-1)

(ב) מהי ההסתברות שסכום תוצאות k הקוביות הוא 7?

(נסמן $B =$ סכום תוצאות k הקוביות הוא 7).

על $1 \leq i \leq 6$ $A_i =$ קבוצה הראשונה וזו i .

כמוכן $\Omega = \bigcup_{i=1}^6 A_i$ יכון.

$$P(B) = \sum_{i=1}^6 P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

מאתר שהקוביה הולאת ברור ש- $P(A_i) = \frac{1}{6}$.

יכון נותר לנו לחשב את $P(B|A_i)$.

(*) מאחר ש- Ω כן מנייה,

נקבע את המאונדו לדיבור 2^n .

השטח פונקציה ההסתברות:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(\underbrace{\{a_1, \dots, a_n\}}_{B_n}) = \sum_{i=1}^6 P(\underbrace{B_n}_{A_i} | A_i) \cdot P(A_i)$$

ברור שלא $0 = P(B_n | A_i)$ אם $n \neq i$ (כי מסלולים n קבוצה אלו יצא n מהטאף הראשונה).
כמו כן, מאחר שהקבוצה הולדת $1 \leq i \leq 6$ מתקיים $P(A_i) = \frac{1}{6}$.

$$\Rightarrow P(B_n) = P(B_n | A_n) \cdot \frac{1}{6}$$

כעת נוני שלב תוצאה $(a_1, \dots, a_n)$ יש אותה
הסתברות מתקבל ודברים האפשריים באורכ n
ולכן $P(B_n | A_n) = \frac{1}{6^n}$

$$\Rightarrow P(B_n) = \frac{1}{6^n} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^{n+1}}$$

היצרנו את ההסתברות על ידי פונקציה שלמה
כן מנייה לה מספיק ומאזיר באופן חד ערכי את
פונק' ההסתברות $A \subseteq \Omega$.

$$P(B|A_1) = 0 \quad - \text{על הרוב}$$

$$P(B|A_2) = P(\{(1,6), (2,5), \dots, (6,1)\}) = \\ = 6 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B|A_3) = P(\{(1,1,5), (1,2,4), \dots, (1,5,1) \\ (2,1,4), (2,2,3), (2,3,2), (2,4,1) \\ (3,1,3), (3,2,2), (3,3,1) \\ (4,1,2), (4,2,1) \\ (5,1,1)\}) = 15 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{15}{6^3}$$

$3+6+3+3=15$

$$P(B|A_4) = P(\{(1,1,1,4), (1,1,2,3), (1,1,3,2), (1,1,4,1) \\ (1,2,1,3), (1,2,2,2), (1,2,3,1) \\ (1,3,1,2), (1,3,2,1) \\ (1,4,1,1) \\ (2,1,1,3), (2,1,2,2), (2,1,3,1) \\ (2,2,1,2), (2,2,2,1) \\ (2,3,1,1) \\ (3,1,1,2), (3,1,2,1) \\ (3,2,1,1) \\ (4,1,1,1)\}) = \frac{26}{6^4}$$

$$n \text{ independent } = B_n \quad (NO)$$

$$P(B_7 | A_i) =$$

$$= P(\underbrace{\{1, \dots\}}_{\substack{\text{not} \\ \text{in } B_7}}) + P(\underbrace{\{2, \dots\}}_{\substack{\text{not} \\ \text{in } B_7}}) + \dots + P(\underbrace{\{6, \dots\}}_{\substack{\text{not} \\ \text{in } B_7}}) =$$

$$= \frac{1}{6} (P(B_6 | A_{i-1}) + P(B_5 | A_{i-1}) \dots + P(B_1 | A_{i-1}))$$

$$P(B | A_5) = P \left(\begin{array}{l} (1,1,1,1,3), (1,1,1,2,2), (1,1,1,3,1) \\ (1,1,2,1,2), (1,1,2,2,1) \\ (1,1,3,1,1) \\ (1,2,1,1,2), (1,2,1,2,1) \\ (1,2,2,1,1) \\ (1,3,1,1,1) \\ (2,1,1,1,2), (2,1,1,2,1) \\ (2,1,2,1,1) \\ (3,1,1,1,1) \end{array} \right) = \frac{14}{6^5}$$

$$P(B | A_6) = P \left(\begin{array}{l} (1,1,1,1,1,2), (1,1,1,1,2,1) \\ (1,1,1,2,1,1) \\ (1,1,2,1,1,1) \\ (1,2,1,1,1,1) \\ (2,1,1,1,1,1) \end{array} \right) = \frac{6}{6^6}$$

* אני מתן צלח (8) הדורש העקומה שבה זה
(ספר. סה"כ התוצאה יוצאת

$$P(B) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{15}{6^3} + \frac{20}{6^4} + \frac{14}{6^5} + \frac{6}{6^6} \right)$$

-1

X

(ד) יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים. הנתפסות
 כזמן חייהם של פרמטים λ, μ בהתאמה.
 $Z = \min(X, Y)$ גיל צעיר
 מהי ההתפלגות של Z

$$\begin{aligned}
 X \sim \text{Geo}(\lambda) &\Rightarrow p_X(k) = (1-\lambda)^{k-1} \lambda \\
 Y \sim \text{Geo}(\mu) &\Rightarrow p_Y(k) = (1-\mu)^{k-1} \mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_Z(z) &= P(Z=z) = P(\min(X, Y) = z) = \\
 &= P((X=z \cap Y \geq z) \cup (Y=z, X \geq z)) = \\
 &= P(X=z, Y \geq z) + P(Y=z, X \geq z) - P(X=z, Y=z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=z, Y \geq z) &= \sum_{y=z}^{\infty} P(X=z, Y=y) = \sum_{y=z}^{\infty} p_{X,Y}(z, y) = \\
 &= \sum_{y=z}^{\infty} p_X(z) \cdot p_Y(y) = \sum_{y=z}^{\infty} (1-\lambda)^{z-1} \lambda \cdot (1-\mu)^{y-1} \mu = \\
 &= (1-\lambda)^{z-1} \lambda \left(\underbrace{\sum_{y=1}^{\infty} \mu (1-\mu)^{y-1}}_{\substack{\text{סדר הציפייה של } Y \\ \text{אם } Y \sim \text{Geo}(\mu) \\ \text{אז } E[Y] = \frac{1}{\mu} \\ \text{אז } 1 = \frac{\mu}{1-(1-\mu)} \text{ לפי } P \text{ של } Y}} - \underbrace{\sum_{y=1}^{z-1} \mu (1-\mu)^{y-1}}_{\substack{\text{זה סדר הציפייה של } Y \\ \text{אם } Y \sim \text{Geo}(\mu) \\ \text{אז } E[Y] = \frac{1}{\mu} \\ \text{אז } D_1 = \frac{1}{\mu} - (z-1)}} \right) = \\
 &= (1-\lambda)^{z-1} \lambda (1 - D_1)
 \end{aligned}$$

האופן אחר (מחליפים λ ב- μ)

$$\begin{aligned}
 P(Y=z, X \geq z) &= (1-\mu)^{z-1} \mu (1 - D_2) \\
 \cdot D_2 &= \sum_{x=1}^{z-1} \lambda (1-\lambda)^{x-1} \quad \text{זהו }
 \end{aligned}$$

$$p_z(z) =$$

נדרש

$$= (1-\lambda)^{z-1} \lambda (1-D_1) + (1-\mu)^{z-1} \mu (1-D_2) -$$

$$- p_x(z) \otimes p_y(z) =$$

$$= (1-\lambda)^{z-1} \lambda (1-D_1) + (1-\mu)^{z-1} \mu (1-D_2) -$$

$$- (1-\lambda)^{z-1} \lambda (1-\mu)^{z-1} \mu$$

נצאנו את ההתפלגות הנקראת של z

מאחר שמדובר במרחב $\mathbb{N}$ נוכל להשתמש
משפט של $A \in \mathbb{N}$ מחקרים

$$P_z(A) = \sum_{z \in A} p_z(z)$$

אם מדובר ב-1?

$$\frac{12}{16}$$