דינה כ[illegible]
6/11/05

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 1

1. כמה פתרונות שלמים שונים אי שליליים יש למשואה $x_1 + ... + x_5 = 23$? כמה פתרונות שלמים שונים תחת האילוץ $x_i \leq 4$, $i = 1, .., 5$? תחת האילוץ $x_i \geq 5$?

2. (א) נתונים שני ישרים מקבילים במישור. יש n נקודות שונות על אחד הישרים ו- m על הישר השני. כמה משולשים שונים ניתן ליצור ע"י חיבור הנקודות?

   (ב) נתון ריבוע במישור, כאשר על כל צלע יש 10 נקודות שונות (ושונות מהפינות). כמה משולשים שונים ניתן ליצור?

3. בכמה סידורים שונים יכולה משפחה בת 5 נפשות להצטלם בשורה אחת כאשר א. אין הגבלות, ב. אמא ואבא מופיעים ביחד, ג. אמא ואבא מופיעים ביחד וסבתא משמאלם.

4. בכמה צורות ניתן לחלק 15 סוכריות בטעמים שונים לשלושה ילדים? בכמה צורות אם עכשיו כל ילד מקבל לפחות סוכריה אחת? בכמה צורות אם עכשיו כל הסוכריות בטעם תות?

5. הוכיחו:

   (א)

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + ... + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

   (ב)

$$\binom{2n}{n} = \sum_k \binom{n}{k}^2$$

6. n קצינים מניחים מסמכים סודיים בארון שניתן לפתוח רק כאשר רוב הקצינים נמצאים. מאותה סיבה, הארון ננעל על ידי מספר מנעולים, וכל קצין מחזיק במפתחות של כמה מהם. חישבו את a_n המספר המינימלי של מנעולים ואת b_n מספר המפתחות שכל קצין צריך להחזיק.

תורת ההסתברות תשס"ו - פתרון לגליון 1

1. הבעיה דומה לבעית סידור כדורים זהים לתוך קופסאות שונות. $\binom{23+5-1}{5-1}$ במקרה הראשון, ו-0 בשני המקרים האחרים.

2. א. $\binom{n}{1}\cdot\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\cdot\binom{n}{2}$

   ב. $\binom{40}{3}-4\binom{10}{3}=9400$

3. א. $5!=120$

   ב. $4!2!=48$

   ג. $3!2!+(2!)^3+(2!)^2=24$ (נשים לב לכך שהסבתא לא חייבת לשבת בצמוד אל האמא והאבא.)

4. א. 3^{15}

   ב. $3^{15}-\binom{3}{1}\cdot 2^{15}$

   ג. $\binom{15+3-1}{3-1}=\binom{17}{2}$

5. א. נפרש את $\binom{n+m}{r}$ כמספר הדרכים לבחור r בני אדם מתוך קבוצה בת n נשים ו-m גברים. לכל $0\le k\le r$, $\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ הוא מס' הדרכים לבחור k מתוך n נשים ו- $r-k$ מתוך m גברים. כל תת-קבוצה בת r בני אדם היא מצורה זו, לכן נסכום על k, וזה מוכיח את הטענה.

   ב. נרשום $n=m$ ונשתמש בסעיף הקודם. נשתמש גם בכך ש- $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

6. המס' המינימלי של מנעולים צריך להיות כמס' הדרכים להרכיב קבוצה בגודל של $m=$ רוב פחות אחד. זהו $\binom{n}{m}$. ואז, מס' המפתחות הכולל הוא $\binom{n}{m}(n-m)$, לכן מס' המפתחות לאיש הוא $\binom{n-1}{m}=\frac{\binom{n}{m}(n-m)}{n}$. שימו לב ש- $m=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 2

1. הוכיחו כי עבור סדרה יורדת אינסופית של מאורעות $.. \supset A_3 \supset A_2 \supset A_1$, קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} A_n$ ושווה ל-

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

2. הוכיחו את הנוסחא הכללית ל- $P(\bigcup_{i=1}^n E_i)$ עבור המאורעות $E_1, ...E_n$, ועבור $n \geq 1$ (נוסחת ההדחה וההכלה).

3. א. הוכיחו כי לא תיתכן הסתברות אחידה על $\mathbb{N}$.
   ב. האם אותו שיקול תקף לגבי הסתברות אחידה על הקטע $[0, 1]$?

4. בנו מרחב מדגם Ω וסדרה אינסופית של מאורעות A_n כך ש- $\limsup A_n \neq \liminf A_n$ (תנו גם משמעות ל- Ω במובן של משחק או ניסוי).

5. תארו מרחב מדגם מתאים בכל אחד מהמקרים הבאים. בכל סעיף, תארו שני מאורעות ובטאו אותם כתת-קבוצות של מרחב המדגם:
   א. מטילים מטבע 16 פעמים.
   ב. בוחרים 3 בטריות מתוך קופסא של 7 בטריות, ומחליטים אם הן מקולקלות או לא.
   ג. בודקים את אורך החיים של נורה: מדליקים אותה עד שהיא נכבית.
   ד. בסעיף א', בכל שלב רושמים את סכום התוצאות עד ההטלה הנוכחית. מה ההסתברות שסכום זה יהיה זוגי בהטלה השלישית? מה ההסתברות שסכום זה יהיה גדול מ-6 בהטלה העשירית?

6. ארבע זוגות מתיישבים בשורה. מה ההסתברות שאף גבר לא ישב ליד אשתו? מה ההסתברות שלפחות 3 גברים ישבו ליד נשותיהם? מה ההסתברות לאותם מאורעות כאשר הם מתיישבים במעגל? ענו על השאלות תוך כדי ציון של מרחב המדגם ופונקצית ההסתברות בהם השתמשתם.

7. שלושה שחקנים, אריאלה, בועז וגילי מטילים כל אחד בתורו קוביה, לפי הסדר הקבוע אבג, אבג, ...שחקן נפסל מיד כאשר הוא מטיל את הספרה 6, וכמובן המשחק נגמר לאחר שכולם נפסלו.
   א. תארו מרחב מדגם מתאים למשחק.

ב. נניח עכשיו שהמשחק מסתיים כאשר בדיוק שני שחקנים הטילו את הספרה 6 (לאו דווקא אחד מיד אחרי השני). מה עכשיו יהיה מרחב מדגם מתאים?

ג. מה ההסתברות שאריאלה היא השחקן השני שהטיל את הספרה 6?

8. חישוב קירוב סטירלינג: $\frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}} \to 1$

(i) חשבו את הביטויים $A_n = \int_1^n \ln x dx$, ו- T_n, הקירוב ל-A_n ע"י חישוב שטח הטרפזואידים הנקבעים ע"י הנקודות $1, 2, 3, ..., n$.

(ii) הגדירו את הסדרה $a_n = A_n - T_n$, הראו ע"י שיקול של שטחים ש- $a_{n+1} - a_n > 0$ ולכן הסדרה $a_1 + (a_2 - a_1) + ... + (a_n - a_{n-1})$ מונוטונית עולה. בעזרת השטחים המסומנים באיור, קבלו את החסם

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &< \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(n+1) \\ &< \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{2(k+1)}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

מכאן, קבלו חסם ל- a_n, והסיקו שיש לה גבול.

(iii) נשים לב לכך שניתן לכתוב $\ln n! = 1 - a_n + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n$. מכאן, נכתוב $n! = \alpha_n n^{n+1/2}e^{-n}$, עם הסדרה α_n המתאימה (הגדירו אותה). השתמשו באי שוויון (1) כדי לקבל את האי-שוויון

$$1 < \frac{\alpha_n}{\alpha} < 1 + \frac{1}{4n}$$

(כמובן, $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$).

(iv) על מנת לחשב את α, השתמשו בגבול:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$$

וקבלו את קירוב סטירלינג.

(v) האם נכון ש- $n! \to \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$

תורת ההסתברות תשס"ו- פתרון לגליון 2

1. $\{B_n = A_n^c\}$ סדרה יורדת של קבוצות. השתמשו בקיום הגבול על $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ שהוכח בכיתה, ועברו למשלים.

2. ההוכחה באינדוקציה על n, מס' המאורעות:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \bigcup E_n\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\Big) + P(E_n) - P\Big((\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \cap E_n\Big)$$
$$= \Big(\sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + ...\Big) + P(E_n) - P\Big((\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \cap E_n\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + ... + (-1)^{n+1} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\Big)$$

3. א. ראשית, אם לכל i $P(i) = 0,$ אז $1 = P(\Omega) = P(\mathbb{N}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(\{i\}) = 0$ בסתירה. לכן נניח בשלילה כי לכל i, $P(\{i\}) = \epsilon$ כאשר $0 < \epsilon \leq 1$. אז מכיוון שה - $\{i\}$ מאורעות זרים, נקבל $1 = P(\mathbb{N}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{i\}) = \infty$, בסתירה.

   ב. הטעון שלעיל אינו תקף במקרה זה מכיוון שאין לנו דרישה של σ- אדיטיביות לא בת-מנייה. נראה בהמשך הקורס הסתברות אחידה המוגדרת על $[0,1]$ וכך ש-$P(\{x\}) = 0$ לכל $x \in [0,1]$.

4. $\Omega = \mathbb{N}$. נגדיר מאורעות: $E_{2n} = \{1\}$, $E_{2n+1} = \{n, n+1\}$. $\liminf E_n = \emptyset$. $\limsup E_n = \{1\}$.
פרוש אפשרי: באופן טיפה מלאכותי אפשר לומר ש- E_{2n} הוא המאורע "יצא ראש בהטלה הראשונה של המטבע", ו-E_{2n+1} הוא המאורע "יצא ראש בהטלות ה- $n, n+1$ של המטבע", כאשר מרחב המדגם מתאר מתי הופיע ראש כאשר מטילים מטבע מספר סופי (אך לא חסום) של פעמים.

5. א. $\Omega = \{(x_1, ..., x_{16}) : x_i = 0, 1\}$ כאשר נקבע ש- $x_i = 0$ אם קיבלנו ראש ו-$x_i = 1$ אם קיבלנו זנב. $|\Omega| = 2^{16}$.

   ב. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0, 1\}$ כאשר נקבע ש- $x_i = 0$ אם הבטריה מס' i מקולקלת, ו-$x_i = 1$ אם לא.

   ג. $\Omega = [0, \infty)$

   ד. צריך להסתכל על שלוש ההטלות הראשונות בלבד. מרחב המדגם הוא כרגע $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0, 1\}$, $|\Omega| = 2^3 = 8$. יהי E המאורע "הסכום זוגי בהטלה השלישית", כלומר $E = \{(0,0,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$. אז $|E| = 4$ ולכן $P(E) = \frac{4}{8} = 0.5$.

כעת מרחב המדגם הנו $\Omega=\{(x_1,...,x_{10}) : x_i=0,1\}$, $|\Omega|=2^{10}$. יהי F המאורע "הסכום גדול מ-6 בהטלה העשירית". על מנת לחשב את $|F|$, נגדיר לכל $6\geq i\geq 10$ את F_i להיות המאורע "קיבלנו זנב בדיוק i פעמים". אז $F=\underbrace{\bigcup_{i=6}^{10}}_{\text{איחוד זר}}F_i$, ולכן $P(F)=\sum_{i=6}^{10}P(F_i)$. כדי לחשב את $|F_i|$ עלינו לספור בכמה צורות אפשר לבחור i הטלות מתוך 10 בהן יצא זנב, כלומר $|F_i|=\binom{10}{i}$. ולכן

$$P(F)=\frac{\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}}{2^{10}}$$

נשים לב לכך שאם $6\leq i\leq 10$ אז $\binom{10}{i}=\binom{10}{10-i}$, ולכן $\sum_{i=6}^{10}\binom{10}{i}=\sum_{i=0}^{4}\binom{10}{i}$. בנוסף: $2\sum_6^{10}\binom{10}{i}+\binom{10}{5}=2^{10}$, לכן:

$$P(F)=\frac{2^{10}-\binom{10}{5}/2}{2^{10}}=1-\frac{\binom{10}{5}}{2^{11}}\simeq 0.87$$

6. קראו בספר של Ross.

7. א. $U=\{(x_1,..,x_{n-1},6) : x_i\in\{1,..,5\}, i=1,..n-1, n\in\mathbb{N}\}$. מרחב המדגם $\Omega=U^3$.

ב. המשחק עכשיו שונה: משחק מסתיים כאשר 6 הופיע אצל שני שחקנים (ייתכן ששחקן מסוים הטיל 6 יותר מפעם אחת). $V=\{(x_1,..,x_n) : x_i\in\{1,..,6\}, i=1,..n, n\in\mathbb{N}\}$.
אז $\Omega=\{(u_1,u_2,v) : u_1,u_2\in U, v\in V\}$ עם האילוץ שהאורך של v שווה לאורך של הארוך מבין u_1,u_2, או האורך הזה פחות 1.

א. ראשית נסתכל על התת-מרחב $\Omega_r=\{(x_1,..,x_{3r+1}); x_j\in\{1,..,6\}, j=1,..,3r+1\}$ כאשר הסדרה כוללת את התוצאות של שלושת השחקנים, עד ההטלה האחרונה של אריאלה. שימו לב: במרחב זה אנחנו לא מתארים את הניסוי הספציפי המתאים למשחק, אלא ניסוי הוא סדרה (כלשהי) של הטלות. P_r ההסתברות האחידה על Ω_r. $|\Omega_r|=6^{3r+1}$. יהי המאורע $E_r=$ "אריאלה השחקן השני שהטיל 6, בהטלה ה- $r+1$ שלה". מס' הדרכים בהם זה קורה הוא $2\cdot 5^r(6^r-5^r)5^r$, לכן $P_r(E_r)=\frac{2\cdot 5^{2r}(6^r-5^r)}{6^{3r+1}}$. יהי עכשיו $\Omega=\{(x_1,..,x_{3r+1}); x_j\in\{1,..,6\}, j=1,..,3r+1, r\in\mathbb{N}\}$. יהי $E=\uplus_{r=1}^{\infty}E_r=$ "אריאלה השחקן השני שהטיל 6". ממה שנאמר בתרגול, ההסתברות P על Ω מתלכדת עם P_r לכל מאורע המוכל ב- Ω_r. לכן $P(E)=\sum_r P_r(E_r)=\frac{300}{1001}$.

8. להוכחה מלאה של הקירוב, הסתכלו למשל בספר של Courant, Integral and differential calculus. הקרוב הוא $\frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}}\to 1$. זה לא גורר $n!\to\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}$.

ינאי גונצ'רובסקי
תרגול יום ג' 15-16

תורת ההסתברות תשע"ו - גליון 2

(1) בנתוני השאלה:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)\cup\left(\bigcup_{n=2}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

נשים לב שעד כאן לא השתמשנו באף הנחה על המאורעות הנתונים! פה נכון תמיד!

וכן ידוע $\liminf A_n \le \limsup_{n\to\infty} A_n$. הראיתי הכלה הדדית בין הגבולות העליון והתחתון של סדרה זו, אזי הם שווים, ע"כ קיים לסדרה גבול שמקיים:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

(2) יהי נתון $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות.
נוכיח באינדוקציה יהי ~~n~~ n טבעי ויהיו $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}$
אזי:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}} P\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$$

בסיס: $n=1$:

$$P(E_1) = P(E_1)$$

נראה גם עבור $n=2$:

$$P(E_1\cup E_2) = P((E_1\setminus E_2)\cup(E_2)) = P(E_1\setminus E_2) + P(E_2) =$$

$$= P(E_1) - P(E_1) + P(E_1\setminus E_2) + P(E_2) = P(E_1) - P((E_1\setminus E_2)\cup E_1\cap E_2)$$

$$+ P(E_1\setminus E_2) + P(E_2) = P(E_1) - \left(P(E_1\cap E_2) + P(E_1\setminus E_2)\right) + P(E_1\setminus E_2) + P(E_2) =$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1\cap E_2)$$

צעד: נניח נכונות עבור $n=k\ge 1$ ~~ונוכיח~~ ונוכיח נכונות עבור $n=k+1$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)\cup E_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) + P(E_n) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)\cap E_n\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n-1]}{k}} P\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) + P(E_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(E_i\cap E_n)\right) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n-1]}{k}} P\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$$

$$+ P(E_n) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n-1]}{k}} P\left(\bigcap_{i\in I}(E_i\cap E_n)\right) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n-1]}{k}} P\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) +$$

$$P(E_n)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n-1]}{k-1}}P\Big(\big(\bigcap_{i\in I}E_i\big)\cap E_n\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\in\binom{[n]}{k}\\ I\not\ni n}}P\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)+$$

$$+P(E_n)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\in\binom{[n]}{k}\\ n\in I}}P\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\in\binom{[n]}{k}\\ n\notin I}}P\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{I\in\binom{[n]}{k}\\ n\in I}}P\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}P\Big(\bigcap_{i\in I}E_i\Big)$$

מתכונות הטענה עבור $n=2$ ומתכונות עבור $n=k+1$

מתכונות עבור $k=n$ שלם, הטענה נכונה לכל n

שלם מעקרון האינדוקציה. הראיתי שהטענה נכונה

עבור $n=1$ אזי הטענה נכונה לכל n שלם חיובי. ■

(3) נניח בשלילה כי תתכן הסתברות אחידה על $\mathbb{N}$. תהא $p\geq 0$

ההסתברות של כל נק' ב-$\mathbb{N}$. אם $p=0$ אזי מכיוון שכל

הנק' ב-$\mathbb{N}$ זרות: $P(\Omega)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(n)=0$ וזו סתירה

אחרת $p>0$. ע"פ עקרון ארכימדס קיים N

טבעי כך ש $N>\frac{1}{p}$ אזי $P(\{1,2,\dots,N\})=\sum_{n=1}^{N}p>1$

וזו סתירה, אזי לא תתכן הסתברות אחידה על $\mathbb{N}$.

(ב) לא. הכלל שעבור מאורעות זרים ההסתברות

האיחוד הוא סכום ההסתברויות חל רק כאשר

בניגוד הקודם לא סותר את האפשרות

מדובר באיחוד סופי או בן מניה ולכן ~~[illegible]~~

שתתכן הסתברות אחידה על $[0,1]$ כאשר לכל

נק' בודדת x $P(x)=0$. ■

סליחה

(4) נטיל מטבע מאוזן. $\Omega=\{עץ, פלי\}$. נגדיר $\mathcal{F}=2^{\Omega}$

ונגדיר לכל n טבעי: $A_n=$ {פלי} אם n זוגי, {עץ} אם n אי זוגי. כלומר

עבור n זוגי A_n משמעו "יצא עץ" A_{n+1} משמעו "יצא פלי"

מיידית נקבל $\liminf A_n=\emptyset$ $\limsup A_n=\Omega$.

$\Omega = \{ע, פ\}^{16}$ (5) (א)

$E_1 = \{H \in \Omega \mid H_1 = ע\}$ - המאורע "בהטלה הראשונה יצא עץ" ✓

$E_2 = \{H \in \Omega \mid H_1 = פ \wedge H_3 = ע\}$ - המאורע "בהטלה הראשונה יצא פלי ובהטלה השלישית יצא עץ"

(ב) ✓

$\Omega = \{X \in \{\text{תקינה}, \text{מקולקלת}, \text{לא נבחרה}\}^7 : \sum_{i=1,\ X_i = \text{לא נבחרה}}^{7} 1 = 4\}$

$E_1 = \{H \in \Omega \mid H_1 \in \{\text{נבחרה ונמצאה תקינה}, \text{לא נבחרה}\}\}$ - המאורע "הבטריה הראשונה לא נמצאה מקולקלת"

$E_2 = \{H \in \Omega \mid \exists i \le 7 : H_i = \text{מקולקלת}\}$ - המאורע "אף הבטריה לא נמצאה מקולקלת"

(ג) ✓ $\Omega = \mathbb{R}^+$ כלומר ממשיים אי"ש המודדים את חיי הנורה ביממות

$E_1 = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r \ge 2\}$ - המאורע "הנורה חייה לפחות יומיים"

$E_2 = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r \le \frac{1}{1440}\}$ - המאורע "הנורה חייה לכל היותר דקה"

(3) ✓ נניח שהמטבע מאוזן כלומר מדובר בהסתברות אחידה. נגדיר $F = 2^\Omega$ נגדיר עץ $\equiv 0$ פלי $\equiv 1$

$P(\text{הסכום זוגי בהטלה השישית}) = |\{H \in F \mid \sum_{i=1}^{5} H_i\}| / |2^\Omega| = \frac{2^{15}}{2^{16}} = \frac{1}{2}$

$P(\text{הסכום גדול מ-6 ב-10}) = |\{H \in F \mid \sum_{i=1}^{6} H_i > 6\}| / |2^\Omega| = \frac{|\bigcup_{j=6}^{10} \{H \in F \mid \sum_{i=1}^{6} H_i = j\}|}{2^{16}} =$

$= \frac{\sum_{j=6}^{10} |\{H \in F \mid \sum_{i=1}^{6} H_i = j\}|}{2^{16}} = \frac{\binom{10}{6} 2^6 + \binom{10}{7} 2^6 + \binom{10}{8} 2^6 + \binom{10}{9} 2^6 + \binom{10}{10} 2^6}{2^{16}} = \frac{\sum_{j=6}^{10} \binom{10}{j}}{2^{10}}$

מחובר $6 <$

6

(ג)

נגדיר: $\Omega = S_8$

(כאשר סדר כי ישיבה בהנתן $S \in \Omega$: $S \cdot \{$ גבר אשה 3 3 ... גבר אשה 4 4 $\}$)

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ ונגדיר P אחידה.

נסמן: E_1 - המאורע "אף גבר לא ישב ליד אשתו".

$$|E_1^c| = \left|\bigcup_{i=1}^{4} \text{גבר } i \text{ יושב ליד אשתו}\right| \overset{\text{הכלה והדחה}}{=} \sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i}(8-i)! \cdot 2^i \cdot (-1)^{i+1}$$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |E_1^c|}{|\Omega|} = \frac{8! - \sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}(8-i)!\,2^i}{8!} =$$

$$= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}(8-i)!\,2^i}{8!}$$

(ב) נסמן: E_2 - המאורע "לפחות 3 גברים יושבים ליד נשותיהם".

$$|E_2| = \left|\bigcup_{i=1}^{3} \text{כולם פרט לגבר } i \text{ יושבים ליד נשותיהם}\right| \overset{\text{הכלה והדחה}}{=} \binom{4}{1}\cdot 5!\,2^3 - \binom{4}{2}\cdot 4!\cdot 2^4 + \binom{4}{3}4!\cdot 2^4 - \binom{4}{4}4!\cdot 2^4 = 4\cdot 5!\cdot 2^3 - 3\cdot 4!\cdot 2^4$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{4\cdot 5!\cdot 2^3 - 3\cdot 4!\cdot 2^4}{8!}$$

■

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 3

1. תהי $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה בת-מנייה של מאורעות המוגדרים במרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{A},P)$. הוכיחו:

   א. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$.

   ב. אם לכל i, $P(E_i)=1$, אז $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_i)=1$.

   ג. נניח כי המאורעות E_n זרים בזוגות, הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} P(E_n)=0$.

2. מחלקים את הקלפים של חפישה בת 52 קלפים. מה ההסתברות שהקלף ה- 14 הוא מלכה? מה ההסתברות שהמלכה הראשונה תופיע בקלף ה- 14?

3. משתמשים במטבע הוגן לסדרה אינסופית של הטלות. הגדירו מרחב מדגם. A_k הוא המאורע "n או יותר "H" מופיעים ברצף בהטלות הממוספרות $2^k, 2^k+1, ..., 2^{k+1}-1$. הוכיחו כי $P(\limsup A_n)=1$.

4. נניח כי $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ פונקציות הסתברות המוגדרות על אותו מרחב מדיד $(\Omega,\mathcal{A})$. יהיו $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ממשיים חיוביים המקיימים $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1$. נגדיר פונקציה חדשה $P:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ כך: לכל מאורע A ב- $\mathcal{A}$, $P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n P_n(A)$. הוכיחו כי P פונקצית הסתברות על $(\Omega,\mathcal{A})$.

5. יהי X אוסף לא בן מנייה של ממשיים חיוביים . הראו כי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\infty$. הסיקו מכאן שלא ניתן להגדיר הסתברות עם תכונת אדיטיביות לא בת מנייה.

6. נתונות שלוש קופסאות: קופסא א' מכילה 2 כדורים לבנים ו-4 אדומים. קופסא ב' מכילה 8 כדורים לבנים ו-4 אדומים. קופסא ג' מכילה 4 כדורים לבנים ו-3 אדומים.

   א. אם כדור אחד נבחר מכל קופסא, מה ההסתברות שהכדור מקופסא א' יהיה לבן, כאשר ידוע שנבחרו בדיוק שני כדורים לבנים?

   ב. מטילים שתי קוביות הוגנות, ובוחרים קופסא באופן הבא: אם סכום שתי הקוביות קטן מ-7, בוחרים בקופסא א'. אם הסכום שווה 7, בוחרים בקופסא ב'. אם הסכום גדול מ-7, בוחרים בקופסא ג'. ברגע שנבחרה קופסא, בוחרים מתוכה כדור. בהנתן שכדור זה יצא לבן, מה ההסתברות שהוא נבחר מקופסא ג'?

7. נתונות קופסאות א', ב', ג', כמו בשאלה הקודמת. בוחרים כדור מקופסא א' ושמים אותו בקופסא ב'. אח"כ, בוחרים כדור מקופסא ב' ושמים אותו

בקופסא ג'. לבסוף, בוחרים כדור מקופסא ג'. מה ההסתברות לקבל כדור לבן?

8. קופסא מכילה n כדורים לבנים ו- m שחורים. מוציאים כדורים אחד אחד עד שנותרים בקופסא כדורים מאותו צבע בלבד. תהי $P_{n,m}$ ההסתברות שהכדורים שנותרו לבנים.

א. הראה כי $P_{n,m} = \frac{n}{n+m}P_{n-1,m} + \frac{m}{n+m}P_{n,m-1}$.

ב. הראה באינדוקציה על $k = m + n$ כי $P_{n,m} = \frac{n}{n+m}$.

תורת ההסתברות - פתרון לגליון 3

1. א. באינדוקציה נגדיר $F_1 = E_1$, ול- $n > 1$: $F_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ ונשתמש ב- σ - אדיטיביות של P.
ב. אם $P(E_i) = 1$ לכל i, אז $P(E_i^c) = 0$ לכן על פי סעיף א'

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i^c) = 1 - 0$$

ג.

$$P(\dot{\bigcup} E_n) = \sum P(E_n) \leq P(\Omega) = 1$$

לכן מהתכנסות הטור, נסיק כי $P(E_n) \to 0$.

2. נבחר את Ω להיות כל הסידורים האפשריים של 52 קלפים, ההסתברות היא ההסתברות האחידה. $|\Omega| = 52!$ וההסתברות לכל סדרה של 52 קלפים היא $\frac{1}{52!}$. אזי ההסתברות שהקלף ה- 14 הוא מלכה שווה להסתברות שהקלף הראשון מלכה וזה שווה $\frac{4}{52} = \frac{\binom{4}{1}51!}{52!}$. וההסתברות שההופעה הראשונה של מלכה היא בקלף ה- 14 היא $\frac{\binom{48}{1}\binom{47}{1}\cdot\cdot\binom{36}{1}\binom{4}{1}\binom{38}{1}\cdot\cdot\binom{1}{1}}{52!} = \frac{48\cdot 47\cdot\ldots\cdot 36\cdot 4}{52\cdot\ldots\cdot 39}$.

3. זו הייתה שאלה קשה מדי, סליחה.

4. יש לבדוק את שלוש התכונות של ההסתברות. נשאיר לקורא את המקרים $0 \leq P(A) \leq 1$ לכל $A \subset \Omega$ ו- $P(\Omega) = 1$. נוכיח את ה- σ-אדיטיביות: $\{A_k\}$ סדרת מאורעות זרים:

$$P(\uplus_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(\uplus_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

ניתן היה להחליף את סדר הסכימה כי $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n(A_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$.

5. נראה טענה חזקה במעט: קיים $\varepsilon > 0$ וקיימת סדרה $\{x_n\}$ כך ש- $x_n > \varepsilon$, לכל n. ברור כי אם טענה זו נכונה, אזי מצאנו סדרה בת-מנייה המקיימת $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$. ובכן, נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה. נגדיר קבוצות $A_n \subset X$: $A_n = \{x \in X : x > \frac{1}{n}\}$. על פי הנחת השלילה, קבוצות אלה סופיות. לעומת זאת, בוודאי נכון כי $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, בסתירה לכך ש- X אינה בת-מנייה (איחוד בן-מנייה של קבוצות סופיות הוא בן-מנייה). מכאן, שאם הייתה פ' הסתברות עם תכונת אדיטיביות לא בת מנייה, היינו מקבלים שיש מס' לא בן מנייה של קבוצות A כך ש-$P(A) > 0$, וממה שהראינו עכשיו , היינו יכולים למצוא סדרה A_n כך ש $1 \geq P(\cup A_N) = \sum P(A_n) = \infty$, בסתירה.

6. א. מרחב המדגם הנו אוסף השלשות הבא: $\Omega = \{(x_A, x_B, x_C) : x_A, x_B, x_C \in \{0,1\}\}$ כאשר נסכים ש- 0 מתאים לכדור אדום, 1 לכדור לבן, ו- x_A הוא הצבע של הכדור מקופסא א' וכו'. $|\Omega| = 6\cdot 12\cdot 7$.
נגדיר מאורעות: $E =$ "בחרנו בדיוק שני כדורים לבנים", $W_A =$ "הכדור מקופסא א' לבן" , $R_A =$ "הכדור מקופסא א' אדום", ובאופן דומה W_C, R_C, W_B, R_B. אז

ו- $E=(W_A\cap W_B\cap R_C)\cup(W_A\cap R_B\cap W_C)\cup(R_A\cap W_B\cap W_C)$
$W_A\cap E=(W_A\cap W_B\cap R_C)\cup(W_A\cap R_B\cap W_C)$ ואלה איחודים זרים. לכן:

$$P(W_A|E)=\frac{P(W_A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{6}\frac{8}{12}\frac{3}{7}+\frac{2}{6}\frac{4}{12}\frac{4}{7}}{\frac{2}{6}\frac{8}{12}\frac{3}{7}+\frac{2}{6}\frac{4}{12}\frac{4}{7}+\frac{4}{6}\frac{8}{12}\frac{4}{7}}=\frac{5}{13}\simeq 0.38$$

ב. כעת מרחב המדגם צריך להכיל ניסויים מהסוג (i,j,x) כאשר $i+j$ התוצאה של זריקת הקוביה, הקובעת את הקופסא , ו-x- הצבע של הכדור שנבחר מתוכה. אפשר לכתוב מרחב מדגם עליו ההסתברות אחידה , כמו שנעשה בהרצאה. במקום זאת, נפרש את המציאות באופן הבא: יש לכל קופסא הסתברות (ידועה) להיבחר, ונתייחס לניסויים מהסוג (i,x) כאשר i מציין את הקופסא שנבחרה, ו- x שוב את צבע הכדור. $\Omega=\{(i,x):x\in\{0,1\},i\in\{A,B,C\}\}$. נגדיר מאורעות $A=$ "בחרנו בקופסא א" , $B=$ "בחרנו בקופסא ב", $C=$ "בחרנו בקופסא ג" ו- $W=$ "הכדור הנבחר לבן". יש לחשב את $P(C|W)$:

$$P(W)=P(W|A)P(A)+P(W|B)P(B)+P(W|C)P(C)=\frac{2}{6}\frac{15}{36}+\frac{8}{12}\frac{1}{6}+\frac{4}{7}\frac{15}{36}$$

$$P(C|W)=\frac{P(C\cap W)}{P(W)}=\frac{P(W|C)P(C)}{P(W)}=\frac{\frac{4}{7}\frac{15}{36}}{P(W)}=\frac{20}{41}\simeq 0.49$$

7. מרחב המדגם הוא $\Omega=\{(x_A,x_B,x_C),x_A,x_C,x_C\in\{0,1\}\}$.
נגדיר מאורעות W_A,W_B,W_C,R_A,R_B,R_C כמקודם, ויש לחשב את $P(W_C)$:

$$P(W_C)=\underbrace{P(W_C|W_B)}_{\frac{5}{8}}P(W_B)+\underbrace{P(W_C|R_B)}_{\frac{1}{2}}P(R_B)$$

$$P(R_B)=P(R_B|W_A)P(W_A)+P(R_B|R_A)P(R_A)=\frac{4}{13}\frac{2}{6}+\frac{5}{13}\frac{4}{6}=\frac{14}{39}$$

$$P(W_B)=1-P(R_B)=\frac{25}{39}$$

ולכן:

$$P(W_C)=\frac{5}{8}\cdot\frac{25}{39}+\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{39}=\frac{181}{312}\simeq 0.58$$

8. ניתן לפתור את השאלה ללא שימוש בהסתברות מותנית. נביא פתרון שמשתמש בהסתברות מותנית, עם השיטה החשובה של קבלת משוואה רקורסיבית. $\Omega=\{(x_1,..,x_{n+m}):x_i\in\{0,1\},\sum_{i=1}^{n+m}x_i=n\}$. (סדרת ההוצאות האפשריות אם מוציאם את כל הכדורים, ו- 1 מציין כדור לבן). $W=$ "הוצאנו כדור לבן בהוצאה הראשונה". $A_{n,m}=$ "נשארו רק כדורים בצבע לבן". אזי ע"פ נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P_{n,m}=P(A_{n-1,m}|W)P(W)+P(A_{n,m-1}|W^c)P(W^c)=P_{n-1,m}\frac{n}{n+m}+P_{n,m-1}\frac{m}{n+m}$$

לאינדוקציה רק נעיר כי צריך להראות את שלב האינדוקציה על n ו- m.

ינאי גונצ'רובסקי
תרגול יום א' 15-16

תורת ההסתברות תשס"ז - גליון 3

100

בסימוני השאלה:

① (א) טענה: לכל n טבעי: $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$

בסיס: $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} P(E_i) = P(E_1) = P(\bigcup_{i=1}^{1} E_i)$.

יהי $1 \leq k$ טבעי ונניח נכונות הטענה עבור $n=k$

אזי: $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i) = P((\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i) \cup (E_n \cup E_{n+1})) \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) + P(E_n \cup E_{n+1}) =$

$= \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) + P(E_n) + P(E_{n+1}) - P(E_n \cap E_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i)$

מנכונות הטענה עבור $n=1$ ומנכונותה עבור $n=k+1$

מנכונותה עבור $n=k$ טבעי ולפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.

נשים לב: $\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$ טור חיובי איברים חיוביים ולכן קיים לו ערך (ממשי או ∞). כמו כן $\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\}_{n=1}$ סדרת מאורעות עולה ולכן קיים לה גבול.

לכל $n \geq 1$ טבעי: $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

נשאיף לאינסוף בשני האגפים ונקבל $\lim P(\bigcup_{i=1}^{n} E_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

מרציפות פונקציית ההסתברות: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} E_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

∎

(ב) נניח כי לכל i, $P(E_i)=1$ אזי:

$(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i)^c = (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c)$

$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i^c) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 1$

∎

(ג) נניח כי המאורעות E_n זרים בזוגות, אזי:

$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \overset{(A,1)}{=} P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq 1$ ובפרט $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ מתכנס לגבול ממשי, אזי זנבו מתכנס לאפס, כלומר:

$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(E_n) = 0$. לכל $K \geq 1$ טבעי: $0 \leq P(E_K) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(E_n)$

אזי ממשפט הסנדוויץ' $\lim_{K\to\infty} P(E_K) = 0$.

∎

② נגדיר מרחב הסתברות $\{\Omega, A, P\}$ כדלקמן: $\Omega = \{1♣, 2♣, \ldots, A♠, A♥\}$

כלומר איברי Ω הם 52 הקלפים האפשריים, המכילים כל קלף בדיוק פעם אחת. כמו כן $A = 2^{\Omega}$ וכן נגדיר את P להיות ההסתברות האחידה על Ω.

נסמן: $E_1=\{w\in\Omega \mid w_{14}\in\{Q\diamondsuit, Q\heartsuit, Q\spadesuit, Q\clubsuit\}\}$ - כלומר המאורע "הקלף ה-14 הוא מלכה".

$$P(E_1)=\frac{|E_1|}{|\Omega|}=\frac{|\{w\in\Omega \mid w_{14}=Q\diamondsuit\}\cup\{w\in\Omega \mid w_{14}=Q\heartsuit\}\cup\{w\in\Omega \mid w_{14}=Q\spadesuit\}\cup\{w\in\Omega \mid w_{14}=Q\clubsuit\}|}{52!}=$$

$$=\frac{\sum_{\square\in\{\diamondsuit,\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit\}}|\{w\in\Omega \mid w_{14}=Q\square\}|}{52!}=\frac{4\cdot 51!}{52!}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$ ✓

נסמן: $E_2=\{w\in\Omega \mid \neg\exists 1\le i<14: \exists\square: w_i=Q\square\}$

$$P(E_2)=\frac{|E_2|}{|\Omega|}\overset{\text{מאורעות זרים}}{=}\frac{\sum_{\square\in\{\diamondsuit,\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit\}}|\{w\in\Omega \mid w_{14}=Q\square \wedge \neg\exists 1\le i<14\ \exists\triangle\ w_i=Q\triangle\}|}{52!}=$$

המלכה במקום ה-14 / בחירת / בחירת 13 קלפים ראשונים / סידור 13 הקלפים הראשונים / סידור קלפים מהמקומות ה-15

$$=\frac{4\cdot\binom{48}{13}\cdot 13!\cdot(52-13-1)!}{52!}=\frac{4\cdot\frac{48!}{\cancel{13!}\,35!}\cdot\cancel{13!}\cdot 38!}{52!}=4\cdot\frac{36\cdot 37\cdot 38}{49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}$$ ✓

③ נגדיר מרחב מדגם ~~[illegible]~~ עבור הבעיה:

$\Omega=$ ~~[illegible]~~ $\{H,T\}^{\mathbb{N}}$ (כל הסדרות $\Omega=\{\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \mid \forall i: a_i\in\{H,T\}\}$). [illegible]

אדטיביות על מאורעות זרים

$$0\le P(A_n^c)=\sum_{k=1}^{n-1}P(\text{"הרצף הארוך ביותר }k\text{ של H"})=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\binom{2^n}{k}}{2^{2^n}}=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2^n}{k}}{2^{2^n}}\overset{n-1<2^{n-1}}{<}\frac{(n-1)\cdot\binom{2^n}{n-1}}{2^{2^n}}=\frac{(n-1)\cdot\frac{2^n!}{(n-1)!\,(2^n-n+1)!}}{2^{2^n}}=$$

$$=\frac{\frac{2^n(2^n-1)\cdots(2^n-n+2)}{(n-2)!}}{2^{2^n}}<\frac{(2^n)^{n-1}}{2^{2^n}}<\frac{(2^n)^n}{2^{2^n}}=\frac{2^{n^2}}{2^{2^n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$ ✓

$P(A_n^c)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ממשפט הסנדוויץ'

אז $P(A_n)=1-P(A_n^c)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

ולכן $\limsup_{n\to\infty}P(A_n)=1$ והראינו בשיעור:

$$P(\limsup_{n\to\infty}A_n)=1 \Longleftarrow \limsup_{n\to\infty}P(A_n)\le P(\limsup_{n\to\infty}A_n)\le 1$$

④ בתנאי השאלה: ~~...~~ לכל k טבעי נגדיר

$P^k:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, $P^k(A)=\dfrac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n P_n(A)}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}$. טענה: זו פ' הסתברות.

✓

~~...~~

הנוסחה נכונה, אבל למעשה ה-P_k לא משמש רק מסכמים.

① יהי k טבעי:

$$\forall A\in\mathcal{A}:\ P^k(A)=\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n P_n(A)}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}\le\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n\cdot 1}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=1$$

תכונות

$$P^k(A)=\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n P_n(A)}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}\ge\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n 0}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=0$$

$$P^k(\Omega)=\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n P_n(\Omega)}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n\cdot 1}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=1$$

כי P_n הסתברויות

יהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות זרים בזוגות, אזי:

מתכנס בהחלט

$$P^k\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n P_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n\sum_{i=1}^{\infty}P_n(A_i)}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n A_i}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P^k(A_i)$$

יהי $A\in\mathcal{A}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n P_n(A)$ הוא טור של מחוברים חיוביים ~~...~~

וסכומיו החלקיים חסומים ע"י 1 אזי הוא מתכנס.

$$\lim_{k\to\infty}P^k(A)=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n P_n(A)}{\sum_{n=1}^{k}\alpha_n}=\frac{\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\alpha_n P_n(A)}{\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\alpha_n}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n P_n(A)}{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n}=\frac{P(A)}{1}=P(A)$$

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\quad 0\le P^k(A)\le 1\Longrightarrow$$

$$P(A)=\lim_{k\to\infty}P^k(A)\ge 0\ ;\ P(A)=\lim_{k\to\infty}P^k(A)\le 1$$

$$\Omega\in\mathcal{A}\Rightarrow P(\Omega)=\lim_{k\to\infty}P^k(\Omega)=\lim_{k\to\infty}1=1$$

יהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות זרים בזוגות, אזי:

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{K\to\infty} P^K\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{K\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P^K(A_i) =$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^{K} \alpha_n P_n(A_i)}{\sum_{n=1}^{K} \alpha_n} = \lim_{K\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{K}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n P_n(A_i)}{\sum_{n=1}^{K}\alpha_n} = \frac{\lim_{K\to\infty}\sum_{n=1}^{K}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_n P_n(A_i)}{\lim_{K\to\infty}\sum_{n=1}^{K}\alpha_n} =$$

שמספרי הטורים חיוביים אינם משנים התכנסות לשנה

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n P_n(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

אזי P היא הסתברות על $(\Omega, \mathcal{A})$

(5) - אח"כ!

(6) (א) בתנאי השאלה: $\Omega = \{אדום, לבן\}^3$ שלשות סדורות. בהן האיבר הראשון הוא צבע הכדור הנבחר מן הקופסא הראשונה, השני - מן השניה, השלישי - מן השלישית. $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. נגדיר:

$P_1^{אדום} = \frac{4}{6}$ $P_1^{לבן} = \frac{2}{6}$ $P_2^{אדום} = \frac{4}{12}$ $P_2^{לבן} = \frac{8}{12}$

$P_3^{אדום} = \frac{3}{7}$ $P_3^{לבן} = \frac{4}{7}$

נגדיר $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ על הסינגלטונים כלהלן: $P(c_1, c_2, c_3) = P_1^{c_1} \cdot P_2^{c_2} \cdot P_3^{c_3}$ אח"כ

ונרחיב אותה לפי הסתברות על כל $\mathcal{A}$ - (כל איבר ב־$\mathcal{A}$ הוא אוסף סופי של הסינגלטונים ולכן ניתן להרחיבה כנ"ל)

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{כדור א'}\\\text{לבן}\end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix}\text{נבחרו 2}\\\text{לבנים ואדום}\end{smallmatrix}\right) = \frac{P\left(\begin{smallmatrix}\text{נבחרו}\\\text{2 לבנים}\\\text{ואדום}\end{smallmatrix} \cap \begin{smallmatrix}\text{כדור}\\\text{א' לבן}\end{smallmatrix}\right)}{P\left(\begin{smallmatrix}\text{נבחרו 2}\\\text{לבנים ואדום}\end{smallmatrix}\right)} = \frac{P(\{(לבן, אדום, לבן), (לבן, לבן, אדום)\})}{P(\{(לבן, לבן, אדום), (לבן, אדום, לבן), (אדום, לבן, לבן)\})} =$$

$$= \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{3}{7} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{3}{7} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{6}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{7}} = \frac{2\cdot 8\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 4}{2\cdot 8\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 4 + 4\cdot 8\cdot 4} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \checkmark$$

(ב) $\Omega = \{1,2,3\} \times \{אדום, לבן\}$ - זוגות סדורים בהן האיבר הראשון הוא מס' הקופסא שנבחרה והאיבר השני הוא צבע הכדור שנבחר ממנה. $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ נגדיר

$P^1 = \frac{5}{12}$ $P^2 = \frac{2}{12}$ $P^3 = \frac{5}{12}$

כמו P_c^2 רק סכום ה-...

ההסיכוי שיצא 2 קוביות מצומצמות מקומה בהגרלה בלתח

כמו P_c רק ...

נתונה פ' הסתברות $P:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$. ידוע: $P\left(\substack{\text{הכדור נבחר}\\ \text{מקופסא } i}\right)=p^i$; $P\left(\substack{\text{נבחר לבן}} \,\middle|\, \substack{\text{הכדור נבחר}\\ \text{מקופסא } i}\right)=p_i^{\text{לבן}}$

$\boxed{\forall i\in\{1,2,3\}}$ $\boxed{\forall i\in\{1,2,3\} \text{ ולכל } c\in\{\text{לבן, אדום}\}}$

$$P\left(\substack{\text{הכדור נבחר}\\ \text{מקופסא ג'}} \,\middle|\, \substack{\text{כדור לבן}\\ \text{נבחר}}\right) \underset{\text{בייס}}{=} \frac{P\left(\substack{\text{נבחר כדור}\\ \text{לבן}} \,\middle|\, \substack{\text{נבחר כדור}\\ \text{מג'}}\right) P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{כדור מג'}}\right)}{P\left(\substack{\text{נבחר כדור}\\ \text{לבן}}\right)} \underset{\text{הסתב' שלמה}}{=}$$

$$= \frac{P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{לבן}} \,\middle|\, \substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-3}}\right) P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-3}}\right)}{P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{לבן}} \,\middle|\, \substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-1}}\right) P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-1}}\right) + P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{לבן}} \,\middle|\, \substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-2}}\right) P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-2}}\right) + P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{לבן}} \,\middle|\, \substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-3}}\right) P\left(\substack{\text{נבחר}\\ \text{מ-3}}\right)}$$

$$= \frac{p_3^{\text{לבן}}\, p^3}{p_1^{\text{לבן}}\, p^1 + p_2^{\text{לבן}}\, p^2 + p_3^{\text{לבן}}\, p^3} = \frac{\frac{2\cancel{4}}{7}\cdot\frac{5}{\cancel{12}}}{\frac{\cancel{2}}{6}\cdot\frac{5}{\cancel{12}} + \frac{8}{12}\cdot\frac{\cancel{2}}{12} + \frac{2\cancel{4}}{7}\cdot\frac{5}{\cancel{12}}} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{5}{6}+\frac{8}{12}+\frac{10}{7}} =$$

$$= \frac{\frac{10}{7}}{\frac{70+56+120}{\cancel{84}\ 12}} = \frac{10\cdot 12}{246} = \frac{120}{246} = \frac{60}{123} = \frac{20}{41}$$

$\Omega = \{\text{לבן, אדום}\}^3$ – שלשות – ה-i איבר ה-i = צבע הכדור מן הקופסא ה-i

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ נתונה פ' הסתברות $P:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ כך ש- *התשובה בסוף השאלה

$$P\left(\substack{\text{כדור}\\ \text{לבן מ-ג}}\right) \underset{\text{הסת' שלמה}}{=} P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ג}} \,\middle|\, \substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}}\right) P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}}\right) + P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ג}} \,\middle|\, \substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}}\right) P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}}\right) \underset{\text{הסת' שלמה}}{=}$$

$$P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ג}} \,\middle|\, \substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}}\right)\left(P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{לבן}\\ \text{מ-א}}\right) P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-א}}\right) + P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{אדום}\\ \text{מ-א}}\right) P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-א}}\right)\right) +$$

$$P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ג}} \,\middle|\, \substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}}\right)\left(P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{לבן}\\ \text{מ-א}}\right) P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-א}}\right) + P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{אדום}\\ \text{מ-א}}\right) P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-א}}\right)\right) =$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\left(\frac{9}{13}\cdot\frac{2}{6} + \frac{8}{13}\cdot\frac{4}{6}\right) + \frac{4}{8}\cdot\left(\frac{4}{13}\cdot\frac{2}{6} + \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{6}\right) = \frac{5\cdot 9\cdot 2 + 5\cdot 8\cdot 4 + 4\cdot 4\cdot 2 + 4\cdot 5\cdot 4}{8\cdot 13\cdot 6} =$$

$$= \frac{362}{624} = \frac{181}{312}$$

*התשובה: P כך ש:

$P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ג}} \,\middle|\, \substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}}\right) = \frac{5}{8}$ $P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{לבן}\\ \text{מ-א}}\right) = \frac{9}{13}$ $P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-א}}\right) = \frac{2}{6}$ $P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{אדום}\\ \text{מ-א}}\right) = \frac{8}{13}$

$P\left(\substack{\text{לבן}\\ \text{מ-ג}} \,\middle|\, \substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}}\right) = \frac{4}{8}$ $P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{לבן}\\ \text{מ-א}}\right) = \frac{4}{13}$ $P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-ב}} \,\middle|\, \substack{\text{אדום}\\ \text{מ-א}}\right) = \frac{5}{13}$ $P\left(\substack{\text{אדום}\\ \text{מ-א}}\right) = \frac{2}{6}$

8 (א) יהיו $n\geq 1$, $m\geq 1$ שלמים. נגדיר את הניסוי בצורה שונה מעט מן הנתון, אך שלא תפגע בהסתברויות של שארית כדורים מכל צבע בסוף הניסוי.

~~[illegible]~~ נגדיר: $\Omega=\{\text{אדום},\text{לבן}\}^2$ - זוגות סדורים בהם האיבר הראשון הוא צבע הכדור שנבחר ראשון והאיבר השני - צבע ה כדורים שנשארו בסוף. $A:2$. נתונה כי הסתברות $P:A\to\mathbb{R}$.

נשים לב: בתחילה ישנם n כדורים לבנים ו- m כדורים אדומים ולכן: $P(\text{כדור ראשון לבן})=\frac{n}{n+m}$, $P(\text{כדור ראשון אדום})=\frac{m}{n+m}$. כמו כן מהנתון שהכדור הראשון לבן נותרו $n-1$ לבנים, m אדומים וז"כ בשל אי-תלות ההוצאות מערכה בהוצאה שביצענו קודם אנו במצב של תחילת הניסוי, עם מס' כדורים שונים, כלומר:

$P(\text{כדור אחרון לבן}\mid\text{ראשון לבן})=P_{n-1,m}$ כמו האופן דומה $P(\text{כדור אחרון לבן}\mid\text{ראשון אדום})=P_{n,m-1}$. לפי הסת' שלמה:

$$P_{n,m}=P(\text{כדור אחרון לבן})=P(\text{כדור אחרון לבן}\mid\text{ראשון לבן})P(\text{ראשון לבן})+P(\text{כדור אחרון לבן}\mid\text{ראשון אדום})P(\text{ראשון אדום})=\frac{n}{n+m}P_{n-1,m}+\frac{m}{n+m}P_{n,m-1}$$

(ב) <u>בסיס:</u> יהיו $n,m\geq 0$ שלמים כך ש $n+m=1$ $\Leftarrow$

(I) אם $n=1 \Leftarrow m=0 \Leftarrow$ אין צורך להוציא שכן לפני ההוצאה הראשונה ישנם רק כדורים לבנים $\Leftarrow$ $P_{n,m}=1=\frac{n}{n+m}$

(II) אחרת $n=0$, $m=1$ ובאופן דומה: $P_{n,m}=0=\frac{n}{n+m}$

<u>צעד: נניח</u> (יהי $k\geq 1$ טבעי) כי לכל $\bar{n},\bar{m}\geq 0$ שלמים כך ש $\bar{n}+\bar{m}=k$ מתקיים: $P_{\bar{n},\bar{m}}=\frac{\bar{n}}{\bar{n}+\bar{m}}$. צ"ל: יהיו $n,m\geq 0$ שלמים כך ש $n+m=k+1$, צ"ל:

(I) אם $m=0 \Leftarrow$ כמו בבסיס תמיד "שארו רק לבנים $\Leftarrow$ $P_{n,m}=1=\frac{n}{n+m}$

(II) אם $n=0 \Leftarrow$ כמו בבסיס תמיד "שארו רק אדומים $\Leftarrow$ $P_{n,m}=0=\frac{n}{n+m}$

(III) אחרת $n,m\geq 1$ ומסעיף א' ומהנחת האינדוקציה: $P_{n,m}=\frac{n}{n+m}P_{n-1,m}+\frac{m}{n+m}P_{n,m-1}=$

$$=\frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{n}{n+m}+\frac{n}{n+m-1}\cdot\frac{m}{n+m}=\frac{(n-1)\cdot n+n\cdot m}{(n+m-1)(n+m)}=\frac{(n+m-1)\cdot n}{(n+m-1)(n+m)}=\frac{n}{n+m}$$

מנכונות הטענה עבור $n+m=1$ ומנכונותה עבור $n+m=k+1$ מנכונותה עבור $n+m=k\geq 1$ שלם, ע"פ עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n+m$ טבעי.

(5) יהי X אוסף לא בן מנייה של ממשיים חיוביים.

[illegible] נניח בשלילה כי לכל $\varepsilon>0$ ממשי

[illegible] מתקיים $|\{x\in X \mid x>\varepsilon\}|<\infty$.

לכל ובחר n טבעי נגדיר $X_n=\{x\in X \mid x>\frac{1}{n}\}$ $\Leftarrow$ $|X_n|<\infty$

נשים לב: לכל n טבעי $X_n\subseteq X$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\subseteq X$

לכל $x\in X$: $x>0$ $\Leftarrow$ מארכימדיות הממשיים קיים n טבעי

כך ש $x>\frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ $x\in X_n$ $\Longleftarrow$ $X\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

הראיתי הכלה דו כיוונית $\Leftarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$

משמאל יש לנו איחוד בן מניה של קבו' סופיות

ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ בן מניה ולכן X בן מניה וזו

סתירה להנחה, אזי קיים $\varepsilon>0$ ממשי כך

שיש [illegible] אינסוף איברים ב-X שגדולים ממנו -

ניקח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - אוסף בן מניה של איברים כנ"ל.

$\forall n\geq 1: x_n>\varepsilon$ $\Leftarrow$ לא מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ (ייתכן שהגבול כלל לא קיים אך בפרט הוא לא 0), אולי $\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\infty$

(טור חיובי מתבדר ל-∞ אם איבריו לא שואפים ל-0).

לכן נראה שלא ניתן להגדיר פ'
הסתברות ש σ-אדיטיבית זה כי..

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון 4

1. הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. אם E ב"ת ב-F ו- E ב"ת ב- G אז E ב"ת ב- $F \cup G$.

ב. אם E ב"ת ב-F ו- E ב"ת ב- G ו- $F \cap G = \emptyset$, אז E ב"ת ב- $F \cup G$.

ג. אם E ב"ת ב-F ו- F ב"ת ב- G ו- E ב"ת ב-$F \cap G$ אז G ב"ת ב- $E \cap F$.

2. נניח כי $\{E_n\}_{n\geq 1}, \{F_n\}_{n\geq 1}$ סדרות עולות של מאורעות, עם הגבולות E, F בהתאמה. הראה כי אם לכל $n \geq 1$, E_n ב"ת ב- F_n , אזי E ב"ת ב- F . הסק את אותה טענה למקרה בו הסדרות יורדות.

3. קופסא מכילה n כדורים ממוספרים מ- 1 עד n. מוציאים כדור באקראי. יהי A_p המאורע "המספר שעל הכדור מתחלק ב- p", עבור p ראשוני.

א. מהו מרחב המדגם?

ב. אם $p_1, .., p_k$ המחלקים הראשוניים השונים של m, תן הסבר אינטואיטיבי לכך ש-$\{A_{p_i}\}_{i=1}^k$ ב"ת.

ג. הוכח בצורה מתמטית שהמאורעות בסעיף הקודם אכן ב"ת.

ד. הראה כי

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{p,\, p|n \text{ ראשוני}} (1 - \frac{1}{p})$$

כאשר ϕ פונקצית אוילר, כלומר מספר השלמים ב-$\{1, .., n\}$ הזרים ל-n.

4. שלושה טבחים, א', ב', ג' , אופים עוגה מיוחדת, ובהסתברויות 0.02, 0.03 ו- 0.05 בהתאמה, העוגה אינה טופחת. בוחרים טבח אחד: טבח א' נבחר בהסתברות 0.5, טבח ב' בהסתברות 0.3 וטבח ג' בהסתברות 0.2. מהי ההסתברות שעוגה לא מוצלחת נאפתה על ידי טבח א'? (הקפד לתאר את מרחב המדגם בתשובתך).

5. א. מאורעות ב"ת נותנים הצלחה בהסתברות p. נקרא למימוש של מאורע "ניסוי". מבצעים ניסויים עד שבסה"כ התקבלו r הצלחות. הראה שההסתברות לכך שהיינו צריכים לבצע בדיוק n ניסויים היא:

$$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

ב. מטילים מטבע, כאשר ההסתברות לקבל "ראש" היא p. מה ההסתברות לקבל 10 פעמים "ראש" לפני שנקבל שלוש פעמים "זנב"?

6. הגדר את מרחב המדגם להיות אוסף המספרים הראשוניים הקטנים מ- 1000. מצא שני מאורעות ב"ת.

תורת ההסתברות - פתרון לגליון 4

1. א. נגדיר $\Omega=\{a,b,c,d\}$ עם הסתברות אחידה עליו, ומאורעות: $E=\{a,b\}$, $F=\{a,c\}$, $G=\{a,d\}$.
אז $P(E)=P(F)=P(G)=0.5$, E ב"ת ב- F ו- G כי למשל
$P(E\cap F)=P(a)=0.25=P(E)\cdot P(F)$. אבל מתקיים $P(E\cap(F\cup G))=P(\{a\})=0.25$
ואילו $P(E)P(F\cup G)=0.5\cdot 0.75=0.375$

ב.

$$P(E\cap(F\cup G))=P((E\cap F)\cup(E\cap G))=P(E\cap F)+P(E\cap G)-\underbrace{P((E\cap F\cap G)}_{0}$$
$$=P(E)P(F)+P(E)P(G)=P(E)(P(F)+P(G))=P(E)P(F\cup G)$$

ג.

$$P(G\cap(E\cap F))=P(E\cap(G\cap F))=P(E)P(G\cap F)=P(E)P(G)P(F)=P(G)P(E\cap F)$$

2. מכיוון ש- $\{E_n\}_{n\geq 1},\{F_n\}_{n\geq 1}$ סדרות עולות של מאורעות, עם הגבולות E,F בהתאמה, נוכל לרשום $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. קל לראות ש- $\{E_n\cap F_n\}_{n\geq 1}$ סדרה עולה, ונראה כי גבולה $E\cap F$. לשם כך מספיק להראות כי

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap F_n)=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)$$

<u>כיוון ראשון</u>: נניח כי $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap F_n)$, כלומר $x\in E_j\cap F_j$ עבור איזשהו $j\in\mathbb{N}$. בפרט, $x\in E_j$ ו- $x\in F_j$ ולכן $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ וגם $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ כלומר $x\in\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)$.

<u>כיוון שני</u>: נניח $x\in\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\cap\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Big)$. אז קיימים $j_1,j_2\in\mathbb{N}$ כך ש- $x\in E_{j_1}$ ו- $x\in F_{j_2}$. יהי $j_0=\max(j_1,j_2)$. הסדרה $\{E_n\cap F_n\}$ עולה לכן $x\in E_{j_0}\cap F_{j_0}$ כלומר $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap F_n)$, כנדרש.
כעת

$$P(E\cap F)=P(\cup(E_n\cap F_n))\underbrace{=}_{(1)}P(\lim(E_n\cap F_n))=$$

$$\underbrace{=}_{(2)}\lim P(E_n\cap F_n)\underbrace{=}_{(3)}\lim P(E_n)P(F_n)\underbrace{=}_{(2)}P(E)P(F)$$

כאשר ב-(1) הסדרה עולה, (2) מרציפות של P, ו-(3) מאי-תלות.

במקרה של סדרות יורדות, נעבור לסדרת המשלימים E_n^c,F_n^c שהן סדרות עולות.

3. נסמן ב- $p_1,..,p_k$ את המחלקים הראשוניים של n.

א. מרחב המדגם הוא $\Omega=\{1,..,n\}$, וההסתברות תהיה ההסתברות האחידה עליו.

ב. הגדרנו מאורעות $A_{p_i}=$ "p_i מחלק את m (המספר שעל הכדור)", עבור $i=1,..,k$. ההסבר ה"אינטואיטיבי" לכך שהמאורעות A_{p_i} ב"ת, הוא שאם $p_i|m$, אין לנו שום מידע על כך ש- $p_j|m$, עבור $i\neq j$ (משום ש- p_j,p_i זרים).

ג. נרשום את המאורעות באופן הבא: $A_{p_i}=\{m:\exists k\in\mathbb{N},m=kp_i\}$, ואז לכל i , $A_{p_i}\subset\Omega$. כעת, יש בדיוק $\frac{n}{p_i}$ מספרים (בין 1 ל- n) המתחלקים ב- p_i. מספר בין 1 ל- n נבחר עם הסתברות אחידה, לכן $P(A_{p_i})=\frac{|A_{p_i}|}{n}=\frac{n/p_i}{n}=\frac{1}{p_i}$. בהינתן תת-קבוצה $W=\{i_1,..,i_r\}\subset\{1,..,k\}$, נסתכל על המאורע $A_{p_{i_1}}\cap..\cap A_{p_{i_r}}$. זהו המאורע "$m$ מתחלק ב- $p_{i_1}..p_{i_r}$", כלומר $\{\exists k\in\mathbb{N}:m=kp_{i_1}..p_{i_r}\}$, לכן $|A_{p_{i_1}}\cap..\cap A_{p_{i_r}}|=\frac{n}{p_{i_1}..p_{i_r}}$. מכאן:

$$P(A_{p_{i_1}}\cap..\cap A_{p_{i_r}})=\frac{n/p_{i_1}..p_{i_r}}{n}=\frac{1}{p_{i_1}..p_{i_r}}=\prod_{j=1}^{r}P(A_{p_{i_j}})$$

כלומר המאורעות A_{p_i} אכן ב"ת.

ד. יש לחשב כמה מספרים יש בין 1 ל- n הזרים ל- n. מספר $m\leq n$ הוא זר ל- n אם אין לו אף מחלק משותף עם n (אינו מתחלק באף אחד מה- $p_1,..p_k$) , לכן נגדיר מאורע $B=\bigcap_{i=1}^{k}A_{p_i}^c$, ונמצא את $|B|$:

$$\frac{|B|}{n}=P(B)=P(A_{p_1}^c\cap..\cap A_{p_k}^c)=\prod_{i=1}^{k}(1-P(A_{p_i}))=\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})$$

כלומר יש בדיוק

$$\phi(n)=|B|=n\cdot\prod_{p\text{ ראשוני},\,p|n}(1-\frac{1}{p})$$

מספרים שלמים הזרים ל- n (והקטנים מ- n).

4. $\Omega=\{(i,j):i\in\{a,b,c\},j\in\{0,1\}\}$ כאשר האותיות הן האופים ו- 1 מסמל עוגה מוצלחת. נגדיר מאורעות $A=$ "טבח א' נבחר" ו- B, C באופן דומה, ו- $Y=$ "העוגה טופחת". יש לחשב את $P(A|Y^c)=\frac{P(A\cap Y^c)}{P(Y^c)}$: $P(A\cap Y^c)=P(Y^c|A)P(A)=0.02\cdot0.5=0.01$

$P(Y^c)=P(Y^c|A)P(A)+P(Y^c|B)P(B)+P(Y^c|C)P(C)=0.01+0.03\cdot0.3+0.05\cdot0.2=0.029$

ולכן $P(A|Y^c)=\frac{10}{29}\simeq0.34$.

5. א. $\Omega=\{(x_1,..,x_n):x_i\in\{0,1\},i\in\{1,..,n\}\}$ כאשר 0 מסמל כישלון ו- 1 הצלחה. נשים לב לכך שביצוע של n ניסויים על מנת לקבל r הצלחות הוא שקול לביצוע של $n-1$ ניסויים בהם התקבלו בדיוק $r-1$ הצלחות, ובניסוי ה -n- י גם כן התקבלה הצלחה . נגדיר מאורעות: $A=$ "התקבלו בדיוק $r-1$ הצלחות ב- $n-1$ ניסויים", ו- $B=$ "הניסוי ה -n- י מוצלח". אז $A=\{(x_1,..,x_n):\sum_{i=1}^{n-1}x_i=r-1\}$, $|A|=2\cdot\binom{n-1}{r-1}$ ו- $B=\{(x_1,..,x_{n-1},1)\}$.
מחפשים את $P(A\cap B)$:

$A\cap B=\{(x_1,..,x_{n-1},1):\sum_{i=1}^{n-1}x_i=r-1\}$, $|A\cap B|=\binom{n-1}{r-1}$, לכן מכיוון שהניסויים ב"ת, וכל אברי $A\cap B$ בעלי הסתברות $p^r(1-p)^{n-r}$, נקבל $P(A\cap B)=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$. הערה: ניתן לפתור את השאלה בשיטת המחיצות.

ב. $\binom{9}{9}p^{10}(1-p)^0+\binom{10}{9}p^{10}(1-p)^1+\binom{11}{9}p^{10}(1-p)^2$

6. השאלה לא ניתנת לפתרון בלי לדעת מה ההסתברות.

יונתן גונז'רובסקי

תרגול יום א' 16-15

4/4

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון V

1. (א) הטענה איננה נכונה. נתבונן בניסוי: נטיל 2 מטבעות בת"ל ונרשום את תוצאות כל הטלה.

המרחב ההסתברותי: $\Omega=\{H,T\}^2$, $\mathcal{A}=2^\Omega$, $P:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ ההסתברות אחידה $\frac{1}{4}$ לכל יחידון $\Rightarrow$ $\forall A\in\mathcal{A}: P(A)=|A|\cdot\frac{1}{4}$

נגדיר: $E=\{(H,H),(T,T)\}$ - המאורע "שני המטבעות נפלו על אותו הצד"

$F=\{(H,T),(H,H)\}$ - המאורע "המטבע ה-I נפל על ראש"

$G=\{(H,T),(T,T)\}$ - המאורע "המטבע ה-II נפל על ראש"

$P(E\cap F)=P(\{(H,H)\})=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(E)P(F) \Longrightarrow$ E,F ב"ת

$P(E\cap G)=P(\{(T,T)\})=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(E)P(G) \Longrightarrow$ E,G ב"ת

$P(E\cap(F\cup G))=P(E\cap\{(H,T),(H,H),(T,T)\})=P(\{(H,H),(T,T)\})=\frac{1}{2}\neq\frac{3}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=P(E)\cdot P(\{(H,T),(H,H),(T,T)\})=P(E)P(F\cup G)$

$\Longrightarrow$ $E, F\cup G$ תלויים

(ב) הטענה נכונה. יהי $(\Omega,\mathcal{A},P)$ מרחב הסתברות ויהיו $E,F,G\in\mathcal{A}$ כך ש- E,F ב"ת, E,G ב"ת, $F\cap G=\emptyset$, אזי:

$P(E\cap(F\cup G))\overset{\text{פילוג חיתוך באיחוד}}{=}P((E\cap F)\cup(E\cap G))\overset{\text{הכלה והדחה}}{=}P(E\cap F)+P(E\cap G)-P((E\cap F)\cap(E\cap G))=$

$=P(E)P(F)+P(E)P(G)-P((E\cap E)\cap(F\cap G))=P(E)(P(F)+P(G))-P(\emptyset)=$

$=P(E)P(F\cup G)-0=P(E)P(F\cup G)\Longrightarrow$ $E,F\cup G$ ב"ת

$\boxed{\text{E,F ב"ת, E,G ב"ת, איחוד וחיתוך}}$ $\boxed{F\cap G=\emptyset \text{ ותיתוך } P \text{ כי } =\emptyset}$ $\boxed{F\cap G=\emptyset \Rightarrow P(F\cup G)=P(F)+P(G)}$

(ג) הטענה נכונה. יהי $(\Omega,\mathcal{A},P)$ מרחב הסתברות ויהיו $E,F,G\in\mathcal{A}$ כך ש: E,F ב"ת, F,G ב"ת, $E,F\cap G$ ב"ת, אזי:

$P((E\cap F)\cap G)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}P(E\cap(F\cap G))=P(E)P(F\cap G)=P(E)P(F)P(G)=P(E\cap F)P(G)\Longrightarrow$ $G,E\cap F$ ב"ת

2. מהנתון ומסימוני השאלה: $\boxed{\forall n\geq 1: P(E_n)P(F_n)=P(E_n\cap F_n)}$

$P(E)P(F)=P(\lim_{n\to\infty}E_n)P(\lim_{n\to\infty}F_n)=\lim_{n\to\infty}P(E_n)\lim_{n\to\infty}P(F_n)=\lim_{n\to\infty}P(E_n)P(F_n)=\lim_{n\to\infty}P(E_n\cap F_n)=P(\lim_{n\to\infty}(E_n\cap F_n))=P(E\cap F)$

$\boxed{\forall n\geq 1: E_n\cap F_n\overset{E_n\subseteq E_{n+1}}{\subseteq}E_{n+1}\cap F_n\overset{F_n\subseteq F_{n+1}}{\subseteq}E_{n+1}\cap F_{n+1}\Rightarrow\{E_n\cap F_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ סדרה עולה}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(E_n\cap F_n) \text{ קיים}}$

$\boxed{\forall x\in\mathcal{A}: x\in\lim_{n\to\infty}(E_n\cap F_n)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap F_n)\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{N}: x\in E_n\cap F_n\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{N}: x\in E_n\wedge\exists n\in\mathbb{N}: x\in F_n\Leftrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\wedge x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\Leftrightarrow x\in E\cap F}$

ולכן E,F ב"ת

ב) בתנאי ובסימוני השאלה, תהחליפת "עולות" עם "יורדות":
$\{E_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{F_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות עולות המתכנסות אל הגבולות E^c, F^c בהתאמה (הראינו בשיעור כי סדרת המאורעות המשלימים לסדרת מאורעות יורדת היא עולה ומתכנסת למשלים לגבול הסדרה היורדת).

$$P(E)P(F)=(1-P(E^c))(1-P(F^c))=1-(P(E^c)+P(F^c))-P(E^c)P(F^c)\overset{\text{①}}{=}$$
$$1-(P(E^c)+P(F^c)-P(E^c\cap F^c))\overset{\text{הכלה והדחה}}{=}1-P(E^c\cup F^c)\overset{\text{דה מורגן}}{=}1-P((E\cap F)^c)=$$
$$=P(E\cap F)\Longrightarrow$$ E,F ב"ת

3) א) נגדיר: $\Omega=\{1,\dots,n\}$ כל נק' היא מס' הכדור שנבחר בה. $\mathcal{F}=2^{\Omega}$. $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ התפלגות המקנה הסתברות אחידה של $\frac{1}{n}$ לכל יחידון.
לכל p ראשוני: $A_p=\{b\in\Omega \mid p|b\}$.

ב) בסימוני (ובתנאי) השאלה: מכיוון שהמחלקים זרים, כל מידע על חלוקה/אי חלוקה בכל ת"ק שלהם מצמצם (עבור כל מחלק שאינו בת"ק) באותו היחס את מס' הכדורים האפשריים שמתחלקים במחלק הנ"ל וגם מס' הכדורים האפשריים שלא מתחלקים במחלק הנ"ל ולכן לא משפיע על היחס בין שני מס' אלה ולכן ההסתברות לחלוקה במחלק זה לא משתנה.

ג) בסימוני (ובתנאי) השאלה: נסמן $A=\{A_{p_i} \mid 1\le i\le k\}$ ותהי $A'\subseteq A$. נסמן $|A'|=m$.
אזי קיימים $1\le j_1<\dots<j_m\le k$ כך ש: $A'=\{A_{p_{j_i}} \mid 1\le i\le m\}$.

$\boxed{p_{j_i} \text{ זרים כי ראשוניים}}$ $\boxed{\prod_{i=1}^{m}p_{j_i} \mid m \Leftarrow \text{וזרים } p_{j_i} \mid m}$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m}A_{p_{j_i}}\right)=P\left(\left\{b\in\Omega \,\middle|\, \bigwedge_{i=1}^{m}(p_{j_i}|b)\right\}\right)\overset{!}{=}P\left(\left\{b\in\Omega \,\middle|\, \left(\prod_{i=1}^{m}p_{j_i}\right)\Big|\, b\right\}\right)\overset{!}{=}\frac{\left|\left\{b\in\Omega \mid \left(\prod_{i=1}^{m}p_{j_i}\right)|b\right\}\right|}{n}=$$
$$=\frac{\left(\frac{n}{\prod_{i=1}^{m}p_{j_i}}\right)}{n}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}p_{j_i}}=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{p_{j_i}}=\prod_{i=1}^{m}\frac{\left(\frac{n}{p_{j_i}}\right)}{n}=\prod_{i=1}^{m}\frac{|\{b\in\Omega \mid p_{j_i}|b\}|}{n}=\prod_{i=1}^{m}P(\{b\in\Omega \mid p_{j_i}|b\})=\prod_{i=1}^{m}P(A_{p_{j_i}})$$

וזאת לכל $A'\subseteq A$ $\Leftarrow$ ע"פ ההגדרה כל המאורעות שב-A ב"ת.

③ נסמן $S=\{b\in\Omega \mid (b,n)=1\}$ $\overset{\text{הוכחה בכיתה}}{\Longleftarrow}$ $S\in\mathcal{A}$ הוא המאורע "המספר שנבחר זר לכל p_1 - p_k". נזכור שמן ההגדרה: $\{A_{p_i} \mid 1\le i\le k\}$ ב"ת $\Longleftrightarrow$ $\{A_{p_i}^c \mid 1\le i\le k\}$ ב"ת. מכאן:

$$|S| = n\cdot\frac{|S|}{n} = n\cdot P(S) = n\cdot P(\{b\in\Omega \mid (b,n)=1\}) = n\cdot P\left(\left\{b\in\Omega \mid \bigwedge_{i=1}^{k}(p_i\nmid b)\right\}\right) =$$

$$= n\cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{b\in\Omega \mid p_i\nmid b\}\right) = n\cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_{p_i}^c\right) = n\cdot\prod_{i=1}^{k}P(A_{p_i}^c) = n\cdot\prod_{i=1}^{k}(1-P(A_{p_i})) \overset{\text{הראיתי קודם}}{=} n\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

④ נסמן: $\Omega=\{א',ב',ג'\}\times\{\text{נופלת, לא נופלת}\}$ - זוגות סדורים בהם האיבר הראשון הוא המטבע שנבחר והשני - הצלחת העוגה. $\mathcal{A}=2^{\Omega}$

נתונה $P:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ כך ש: $P(\{א'\}\times\Omega_1)=0.5;\ P(\{ב'\}\times\Omega_1)=0.3;\ P(\{ג'\}\times\Omega_1)=0.2$

וכן: $P(\{ג', \text{נופלת}\} \mid \{ג'\}\times\Omega_1)=0.05;\ P(\{ב', \text{נופלת}\} \mid \{ב'\}\times\Omega_1)=0.03;\ P(\{א', \text{נופלת}\} \mid \{א'\}\times\Omega_1)=0.02$

אכן:

$$P(\{\text{נבחרה א'}\} \mid \{\text{העוגה נופלת}\}) = P(\{א'\}\times\Omega_1 \mid \Omega_0\times\{\text{נופלת}\}) \overset{\text{בייס}}{=} \frac{P(\Omega_0\times\{\text{נופלת}\} \mid \{א'\}\times\Omega_1)\,P(\{א'\}\times\Omega_1)}{P(\Omega_0\times\{\text{נופלת}\})} =$$

$$= \frac{0.02\cdot0.5}{P(\Omega_0\times\{\text{נופלת}\})} = \frac{0.01}{P(\Omega_0\times\{\text{נופלת}\})} =$$

$\boxed{\Omega=(\{א'\}\times\Omega_1)\uplus(\{ב'\}\times\Omega_1)\uplus(\{ג'\}\times\Omega_1)}$

$$= \frac{0.01}{P(\Omega_0\times\{\text{נופלת}\} \mid \{א'\}\times\Omega_1)P(\{א'\}\times\Omega_1)+P(\Omega_0\times\{\text{נופלת}\} \mid \{ב'\}\times\Omega_1)P(\{ב'\}\times\Omega_1)+P(\Omega_0\times\{\text{נופלת}\} \mid \{ג'\}\times\Omega_1)P(\{ג'\}\times\Omega_1)} =$$

$$= \frac{0.01}{0.02\cdot0.5+0.03\cdot0.3+0.05\cdot0.2} = \frac{0.01}{0.01+0.009+0.01} = \frac{0.01}{0.029} = \frac{10}{29}$$

⑤ א) $\Omega=\{(a_1,\dots,a_n) \mid a_n=1\wedge\forall 1\le i\le n-1: a_i\in\{0,1\}\wedge\sum_{i=1}^{n}a_i=r\}$ - כל הסדרות הסופיות עם r 1-ים בדיוק כאשר האיבר האחרון הוא 1. כמו כן נגדיר: $P((a_1,\dots,a_m))=p^{\sum a_i}(1-p)^{m-\sum a_i}=p^r(1-p)^{m-r}$ ונרחיב את הגד' של P לכל המאורעות שבהסתברות.

כל הניסיונות בקבוצה $m-r$ עד שתי הצלחות

$$P(\{\text{בדיוק } n \text{ ניסיונות}\}) = P(\{a\in\Omega \mid |a|=n\}) = P(\{(a_1,\dots,a_n) \mid a_n=1\wedge\forall 1\le i\le n-1: a_i\in\{0,1\}\wedge\sum_{i=1}^{n}a_i=r\}) =$$

$$= |\{(a_1,\dots,a_n) \mid a_n=1\wedge\forall 1\le i\le n-1: a_i\in\{0,1\}\wedge\sum_{i=1}^{n}a_i=r\}|\cdot p^r(1-p)^{n-r} =$$

$$= |\{(a_1,\dots,a_{n-1}) \mid \forall 1\le i\le n-1: a_i\in\{0,1\}\wedge\sum_{i=1}^{n-1}a_i=r-1\}|\cdot p^r(1-p)^{n-r} = \left|\binom{[n-1]}{[r-1]}\right| p^r(1-p)^{n-r} = \binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$$

(ב) במינוחי (באותם) הסעיף הקודם נסמן: "מאורע" = הטלת מטבע, "הצלחה" = "ראש" $\Leftarrow p=\frac{1}{2}$ וכן $r=10$. אם כן אנו מטילים מטבע עד שמקבלים 10 פעמים "ראש". אם הטלנו 13 פעמים ומעלה אזי התקבלו 3 פעמים זנב לפני הראש העשירי. אם כן:

$P(\{\text{10 פעמים "ראש" לפני 3 פעמים "זנב"}\}) =$

$P(\{\text{בכל היותר 12 ניסויים יש שבסבב 10 הצלחות}\}) = \sum_{i=3}^{12} P\left(\bigcup_{i=10}^{12}\{\text{בדיוק } i \text{ ניסויים עד שבסבב ה-} i \text{ 10 הצלחות}\}\right) = \sum_{i=10}^{12} P(\{\text{בדיוק } i \text{ ניסויים עד שבסבב 10 הצלחות}\}) = \sum_{i=10}^{12}\binom{i-1}{10-1}\frac{1}{2}^{10}\cdot\frac{1}{2}^{i-10} =$

$= \sum_{i=10}^{12}\binom{i-1}{10-1}\cdot\frac{1}{2}^{i} = \binom{9}{9}\cdot\frac{1}{2}^{10}+\binom{10}{9}\cdot\frac{1}{2}^{11}+\binom{11}{9}\cdot\frac{1}{2}^{12} = \frac{1}{2}^{10}+10\frac{1}{2}^{11}+\frac{11\cdot 10}{2}\cdot\frac{1}{2}^{12} =$

$= \frac{4}{2^{12}}+\frac{20}{2^{12}}+\frac{55}{2^{12}} = \frac{79}{2^{12}} = \frac{79}{4096}$ ✓

∎

(ו) $\Omega=\{p\in\{2,\dots,999\} \mid \forall 1<i<p: i\nmid p\}$ (נבו למעשה אוסף המספרים האי-פריקים הקטנים מ-1000, אך בטבעיים ההגדרה של אי-פריק אומר הוא ראשוני). בחישוב פשוט נקבל $|\Omega|=168$. נגדיר: $\mathcal{A}=2^{\Omega}$, $P:\mathcal{A}\to\mathbb{R}: P(A)=\frac{|A|}{168}$
כלומר הפונקציה P היא פ' הסתברות המקנה לכל יחידון הסתברות אחידה של $\frac{1}{168}$. נסמן: $B_1=\{2,997\}$, $B_2=\{p\in\Omega \mid p\le 461\}$ ש
בחישוב פשוט $|B_2|=89$. ✓

$P(B_1\cap B_2)=P(\{2\})=\frac{1}{168}=\frac{1}{89}\cdot\frac{1}{2}=\frac{|B_1|}{168}\cdot\frac{|B_2|}{168}=P(B_1)P(B_2)$

אזי המאורעות B_1,B_2 בלתי-תלויים.

∎

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון 5

1. יהי $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ מרחב הסתברות. נניח כי כל מאורע בתרגיל שייך ל-$\mathcal{A}$. הראו כי:
   א. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ זרים ולכל n, $P(A_n) > 0$ ו- $P(B|A_n) \geq c$, אז $P(B|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq c$.
   ב. אם לכל n, $A_{n+1} \subset A_n$ ו- $P(A_{n+1}|A_n) \leq \frac{1}{2}$ אז $P(A_n) \to 0$.
   ג. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ זרים ו-$B, C \in \mathcal{A}$ מקיימים: לכל n, $P(B|A_n) = P(C|A_n)$, אז : $P(B|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(C|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.
   ד. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ זרים ו-$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, אז $P(B|C) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$.

2. יהיו $A_1, .., A_n, B$ מאורעות ב"ת.
   (א) הראו כי B, C הם ב"ת עבור כל מאורע C השייך ל- σ - אלגברה $\mathcal{F}(A_1, .., A_n)$, הנוצרת ע"י $A_1, .., A_n$.
   (ב) הראו כי ההסתברות שאף אחד מהמאורעות $A_1, .., A_n$ לא יתרחש קטנה מ- $\exp(-\sum_{j=1}^{n} P(A_i))$.

3. תהי $M_1, .., M_n$ קבוצה של ילדים, כך ש- M_j מספר ל- M_{j+1} על מה שאמר M_{j-1}. יהי R_n המאורע "M_n מספר ש- M_{n-1} סיפר ש-...ש-M_2 סיפר ש- M_1 שקרן". אם כל ילד משקר באופן ב"ת באחרים בהסתברות p, חישבו את p_n, ההסתברות ש- M_1 אמר את האמת מותנה ב- R_n. הראו כי $p_n \to 1 - p$ כאשר $n \to \infty$.

4. פרדוקס האסירים: נודע לשלושה אסירים שאחד מהם ישתחרר והשניים האחרים יועברו לאי השטן. לשומר אסור לגלות לאף אסיר את גורלו הפרטי. על כן, אסיר א' יודע שיש לו הסתברות $\frac{1}{3}$ להשתחרר, והוא מבקש מהשומר לגלות לו את השם של אחד משני האסירים האחרים שנידון למאסר עולם על אי השטן. השומר אומר לו "אסיר ב'". האם יכול אסיר א' לחשב את ההסתברות המותנית לשחרורו?

5. מטילים מטבע הוגן. בכל הטלה יש הסתברות p לראש והסתברות $1 - p$ לזנב. הניחו שההטלות ב"ת. יהי E המאורע "ההופעה הראשונה של r פעמים ראש ברצף היתה לפני ההופעה של s פעמים זנב ברצף". תהי A התוצאה של ההטלה הראשונה. הראו כי

$$P(E|A = Head) = p^{r-1} + (1 - p^{r-1})P(E|A = Tail)$$

מצאו ביטוי דומה ל - $P(E|A = Tail)$ וחישבו את $P(E)$.

פתרון גליון 5 - תורת ההסתברות.

$\boxed{3}$ (1) כל איבר ב- $\mathcal{F}(A_1,\dots,A_n)$ ניתן לכתיבה כאיחוד זר של מינימים מהצורה: $F_1\cap F_2\cap\dots\cap F_n$ כאשר כל $F_i = A_i$ או A_i^c.

מכיוון, $A_1,\dots,A_n,B$ ב"ת $\Leftarrow$ B וכל F_i ב"ת $\Leftarrow$ B וכל מינימום ב"ת
$\Leftarrow$ C, B ב"ת.

(2) נניח כעת כי $P(A_i)<1$ לכל i:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\Big) \overset{\text{אי-תלות}}{=} \prod_{i=1}^{n}P(A_i^c) = \prod\big(1-P(A_i)\big) \underset{1-P(A_i)\neq 0}{=} e^{\ln\prod(1-P(A_i))} = e^{\sum_i \ln(1-P(A_i))}$$

$$\le e^{\sum_i -P(A_i)}$$

כאשר השתמשנו באי השוויון: $\ln(1+x)\le x$ ל- $|x|<1$.

אם $P(A_i)=1$ עבור i כלשהו, אזי $P\big(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\big)=0$

וזה בוודאי קטן מ- $e^{-\sum P(A_i)}$.

$\boxed{4}$ יהי $\Omega=\{T,F\}^n$. ההסת' p נתונה ע"י $P(T)=1-p$, $P(F)=p$

ונו חלום בין הילדים. נסמן כי R_n = "היה מס' זוגי של שקרנים בין n הילדים" או במרחב שלנו, R_n = "מס' אי זוגי של F בסדרה באורך n".

יהי A = "M_1 דובר אמת" = "האיבר הראשון בסדרה $=T$".

נוכל לכתוב

$$P(A\mid R_n) = \frac{P(R_n\mid A)P(A)}{P(R_n)} = \frac{P(R_{n-1})\,(1-p)}{P(R_n)}.$$

נשים לב כי:

$$P(R_n) = P(R_n\mid A)P(A) + P(R_n\mid A^c)P(A^c)$$

$$= (1-p)P(R_{n-1}) + p\cdot\big(1-P(R_{n-1})\big) = p + (1-2p)P(R_{n-1})$$

נוכיח כי $P(R_n)$ סדרה מתכנסת:

(i) אם $p=\frac12$ קל לראות ש- $P(R_n)=\frac12$ לכל n.

(ii) אם $p<\frac12$ נוכל להוכיח באינדוקציה כי לכל n, $P(R_n)\le\frac12 \Rightarrow P(R_{n+1})\ge P(R_n)$

ולכן $P(R_n)$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל $\Leftarrow$ מתכנסת, ונוכל לחשב:

$\lim P(R_n)=a \Rightarrow a=p+(1-2p)a \Rightarrow a=\frac12$.

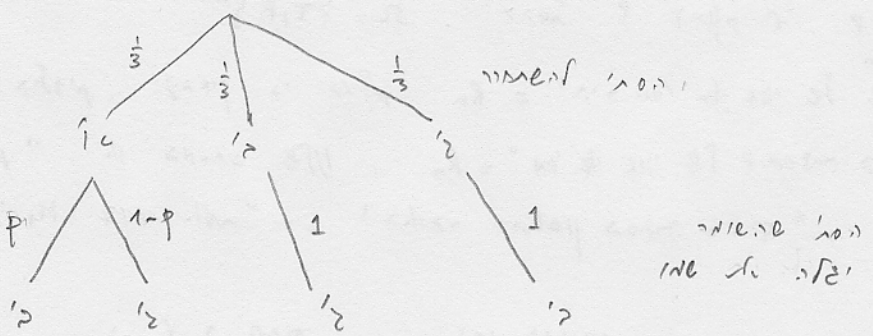
(iii) אם $p > \frac{1}{2}$ באופן דומה נראה כי $P(R_n)$ יורדת מונוטונית ל- $\frac{1}{2}$.
כמסקנה, נקבל כי תמיד קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P(R_n) = \frac{1}{2}$, ולכן

$$\lim_{n\to\infty} P(A|R_n) = \frac{\frac{1}{2}(1-p)}{\frac{1}{2}} = 1-p$$

$\boxed{5}$ לכל אסיר הסיכוי $\frac{1}{3}$ להשתחרר, ורק אחד משתחרר. לכאורה, כאשר אסיר א' יודע שאסיר ב' נידון למאסר עולם, יש לו סיכוי $\frac{1}{2}$ להשתחרר, כי או שהוא או שאסיר ג' משתחרר. מצד שני, אסיר א' מלכתחילה יודע שאחד מבין ב' ; ג' נידון למאסר עולם בוודאות, ולכן ידיעת איזה מהם בדיוק לא משנה שום דבר, ועדיין יש לו הסיכוי $\frac{1}{3}$ להשתחרר. (שני הפתרונות האלה נכתבו בתרגול שלכם). ובכל זאת, מי צודק? נראה, ראשית, שיש לנו בעיה של פרוטוקול שאינו מוגדר, בדומה לבעיה שראיתם בהרצאה.

אנו בעצם מבצעים ניסוי מורכב: $\Omega = \{(i,j) : i \in \{\text{א},\text{ב},\text{ג}\},\ j \in \{\text{א},\text{ב},\text{ג}\}\setminus\{i\}\}$

i - האסיר המשתחרר, j - השם שהשומר מגלה. בלפי הנתון:



נגדיר מאורעות
$A =$ "א' משתחרר" $= \{(\text{א'},\text{ב'}), (\text{א'},\text{ג'})\}$
$B =$ "ב' נידון למאסר עולם" $= \{(\text{א'},\text{ב'}), (\text{ג'},\text{ב'})\}$

ולכן
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P((\text{א'},\text{ב'}))}{P((\text{א'},\text{ב'})) + P((\text{ג'},\text{ב'}))} = \frac{\frac{1}{3}p}{\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}} = \frac{p}{p+1}$$

אם נניח שהשומר מגריל באקראי בין ב' ו- ג', אז $p = \frac{1}{2} \Leftarrow P(A|B) = \frac{1}{3}$
כלומר אין הוספת מידע לאסיר א'.

אם נניח $p > \frac{1}{2}$ (השומר בוחר ב- ב' בעדיפות גבוהה יותר) אז $P(A|B) > \frac{1}{3}$
כלומר יש הוספת מידע לאסיר א' - במקרה, אם $p=1$, אזי $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

$\Omega = \{H,T\}^{\mathbb{N}}$ עם הסת׳ $P(H) = p$, $P(T) = 1-p = q$.

$E =$ "הטלת r ראש ברצף לפני s זנב ברצף"

$A_T =$ "ההטלה הראשונה = זנב" , $A_H = A_T^c$.

$B =$ "r ההטלות הראשונות היו ראש"

$C =$ "s ההטלות הראשונות היו זנב".

$$\begin{aligned}
P(E|A_H) &= P(E\cap B|A_H)\,\cancel{P(B)} + P(E\cap B^c|A_H)\,\cancel{P(B^c)} \\
&= P(E|B\cap A_H)\,P(B|A_H) + P(E|B^c\cap A_H)\,P(B^c|A_H) \\
&= 1\cdot p^{r-1} + P(E|A_T)\cdot(1-p^{r-1})
\end{aligned}$$

השתמשנו בכך ש- $P(\cdot|A_H)$ פ׳ הסת׳. נשים לב כי $P(E|B^c\cap A_H)$ היא הסת׳ לקבלת E כאשר ב- r ההטלות הראשונות היה לפחות זנב אחד אחריהן, והחל ממקום זה מתחילים מחדש, לכן זה שווה $P(E|A_T)$.

נעבור למשלים:

$$\begin{aligned}
P(E|A_T) &= P(E|C\cap A_T)\,P(C|A_T) + P(E|C^c\cap A_T)\,P(C^c|A_T) \\
&= 0 + P(E|A_H)\cdot(1-q^{s-1})
\end{aligned}$$

לכן:

$$P(E|A_T) = \frac{p^{r-1}(1-q^{s-1})}{1-(1-q^{s-1})(1-p^{r-1})}$$

$$P(E|A_H) = \frac{p^{r-1}}{1-(1-q^{s-1})(1-p^{r-1})}$$

$$P(E) = P(E|A_T)\cdot q + P(E|A_H)\,p = \frac{p^{r-1}(1-q^{s})}{1-(1-q^{s-1})(1-p^{r-1})}$$

3. א. $\{A_n\}$ זרים לכן:

$$P(B|\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\frac{P(B\cap\cup_{n=1}^{\infty}A_n)}{P(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B\cap A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}\geq$$

$$\geq\frac{\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=c$$

ב. נסמן ל- $n\geq 1$, $a_n=P(A_n)$. אז $P(A_{n+1}|A_n)=\frac{P(A_{n+1}\cup A_n)}{P(A_n)}=\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (כי $A_{n+1}\subseteq A_n$) לכן באינדוקציה $a_{n+1}\leq 0.5^n a_1$ ולכן $\lim_{n\to}P(A_n)=0$.

ג. על פי ההנחה, לכל $n\geq 1$, $P(B\cup A_n)=P(C\cup A_n)$, A_n זרים, לכן

$$P(B|\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\frac{P(B\cap\cup_{n=1}^{\infty}A_n)}{P(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B\cap A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(C\cap A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=P(C|\cup_{n=1}^{\infty}A_n)$$

ד.

$$P(B|C)=\frac{P(B\cap C\cap\Omega)}{P(C)}=\frac{P(B\cap C\cap\cup_{n=1}^{\infty}A_n)}{P(C)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B\cap C\cap A_n)}{P(C)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(B\cap C\cap A_n)}{P(A_n\cap C)}\frac{P(A_n\cap C)}{P(C)}=\sum_{n=1}^{\infty}P(B|A_n\cap C)P(A_n|C)$$

ינאי גולדרובסקי
תרגול יום א' 15-16

4/4
ציון

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 5

① בסימוני השאלה:

✓ א) בתנאי הסעיף: נסמן $A=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c$

$$P\left(B\,\middle|\,\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\frac{P\left(B\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\middle|A_n\right)P(A_n)+P\left(B\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\middle|A\right)P(A)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=$$

$$0\le P\left(B\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\middle|A\right)\le P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\middle|A\right)=0 \qquad B\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

מהגדרת A: $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, A זרים

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\cap A_n\right)\cdot\frac{1}{P(A_n)}\cdot P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B\cap A_n)\cdot\frac{1}{P(A_n)}\cdot P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}\ \underset{\geq}{}$$

הגדרת חיוב; חיובי $P(B|A_n)$

$$\geq\frac{\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=c\,\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}=c$$

שים לב ~~...~~, ~~...~~ שובלת

למסור עובדה כי $\{A_n\}$ זרים, לכן $P(B\cap\cup A_n)=\sum P(B\cap A_n)$

■

ב) בתנאי הסעיף: אוכיח באינדוקציה: לכל $n\in\mathbb{N}$: $P(A_n)\le 2^{-n+1}$ ✓

בסיס: $n=1$: $P(A_n)\le 1=2^0=2^{-n+1}$ הערה: נניח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ $P(A_n)\neq 0$ (אחרת אין משמעות ל-$P(A_{n+1}|A_n)$)

צעד: נניח נכונות הטענה עבור $n=k\in\mathbb{N}$ ונוכיח עבור $n=k+1$:

$$P(A_{k+1})=P(A_{k+1}|A_k)P(A_k)+P(A_{k+1}|A_k^c)P(A_k^c)=P(A_{k+1}|A_k)P(A_k)\le\frac{1}{2}\cdot 2^{-k+1}=2^{-(k+1)+1}$$

$A_{k+1}\cap A_k^c=\emptyset \Leftarrow A_{k+1}\subseteq A_k$

$\Leftarrow P(A_{k+1}|A_k^c)=0$

מנכונות הבסיס והצעד ולפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה.

אזי: לכל $n\in\mathbb{N}$: $0\le P(A_n)\le 2^{-n+1}$.

ועבור מאינפי $2^{-n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אזי לפי משפט הסנדוויץ' $P(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

■

✓ ג) בתנאי הסעיף: מן הנתון נסיק כי לכל $n\in\mathbb{N}$: $P(A_n)>0$ (אחרת אין משמעות ל-$P(B|A_n)$).

נשתמש ב-(א) הנשאלה ונקבל:

$$P\left(B\,\middle|\,\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\ \overset{\text{(א)}}{=}\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}\ \overset{\text{נתון}}{=}\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(C|A_n)P(A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)}\ \overset{\text{(א)}}{=}\ P\left(C\,\middle|\,\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

A_n זרים ו-$P(A_n)>0$ אזי כמו המעברים בו

A_n זרים ו-$P(A_n)>0$ אזי כמו המעברים בו

■

(3) בתנאי השאלה וכן נניח כי $P(C)\neq 0$ וכן לכל $n\in\mathbb{N}$ $P(A_n\cap C)\neq 0$ (אחרת לא מוגדר)

$$P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}\underset{\boxed{\Omega=\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n}}{\overset{\boxed{P(A_n)\neq 0}}{=}}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}P(B\cap C|A_n)P(A_n)}{P(C)}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(B\cap C\cap A_n)}{P(A_n)}\cdot P(A_n)}{P(C)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(B\cap C\cap A_n)}{P(C)}=$$

$\boxed{\text{לכל } n\in\mathbb{N} \text{ נניח: } P(A_n\cap C)\neq 0}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(A_n\cap C)}{P(C)}\frac{P(B\cap(A_n\cap C))}{P(A_n\cap C)}=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n|C)P(B|A_n\cap C)$$

✓

~~(5) בתנאי השאלה: ... $F(A_1,\dots,A_n)$~~

~~(א) נראה את הטענה ... באינדוקציה~~

~~(I) אם קיים $i\in[n]$ כך ש $C=A_i$ אזי ... $P(B\cap C)=P(B\cap A_i)=P(B)P(A_i)$ ... אזי B,C בת"ל~~

~~(II) אם $C=A^c$ כאשר עבור $A\in$ ... נבחר ... $B\subseteq B$~~

~~$P(B\cap C)=P(B\cap A^c)=P(B\setminus(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)=$ ... מתכונות ההסתברות~~

~~$=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=P(B)P(A^c)=P(B)P(C)\Rightarrow$~~

~~(III) אם $C=A\cup A'$ כאשר עבור $A,A'\in A$ ... נבחר ...~~

~~$P(B\cap C)=P(B\cap(A\cup A'))=P(B\cap(A^c\cap A'^c)^c)=$ ... מתכונות ...~~

~~$=P(B\setminus(B\cap A^c\cap A'^c))=P(B)-P((B\cap A^c)\cap A'^c)=P(B)-P(B\cap A^c)\times P(B\cap A^c\cap A')=$~~

~~$=P(B)-P(B\cap A^c)+P(B\cap A^c\cap A')=P(B)-P(B\setminus(B\cap A))+P((B\cap A')\cap A^c)=$~~

~~$=P(B)-P(B)+P(B\cap A)+P((B\cap A')\setminus(B\cap A'\cap A^c))=P(B\cap A)+P(B\cap A')-P(B\cap A\cap A')=$~~

~~$=P(B)P(A)+P(B)P(A')$~~

(2) ~~(א)~~ בתנאי השאלה: (א) ראינו בכיתה שמכיוון שה-σ-אלגברה $F(A_1,\dots,A_n)$ נוצרת סופית, כל איבר בה הוא איחוד זר של יחידונים מהצורה $\{(C_1\cap\dots\cap C_n)\mid\forall i\in[n]\ C_i\in\{A_i,A_i^c\}\}$.

~~$C_i\in\{A_i,A_i^c\}$ ... $i\in[n]$ ... לכל~~

~~$P(C_1\cap\dots\cap C_n\cap B)=P(C_1\cap\dots\cap C_n)P(B)$~~

~~$\overline{N}=\#\{C_i\mid i\in[n] \wedge C_i=A_i^c\}$ ... באינדוקציה ... לכל~~

~~$P(C_1\cap\dots\cap C_n\cap B)=$ ... $\forall i\in[n]\ C_i=A_i$ ... $\overline{N}=0$~~

~~$P(C_1)\cdots P(B)$ ... $P(C_1\cap\dots\cap C_n)P(B)$~~

__טענה:__ לכל $I\in 2^{[n]}$ לכל $i\in I$, יהא $C_i\in\{A_i,A_i^c\}$ אזי $P((\bigcap_{i\in I} C_i)\cap B)=P(\bigcap_{i\in I} C_i)P(B)$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על $|I|$

בסיס: $|I|=0$ $\Leftarrow$ $P(\bigcap_{i\in I} C_i)P(B) = P(\Omega)P(B)=P(B)=P((\bigcap_{i\in I} C_i)\cap B)$

__צעד:__ יהי $n\ge k>0$ ונניח נכונות הטענה עבור $|I|=k-1$ ונוכיח עבור $|I|=k$:

__צ"ל:__ לכל $I\in\binom{[n]}{k}$ לכל $i\in I$ אם $C_i\in\{A_i,A_i^c\}$ אזי $P((\bigcap_{i\in I} C_i)\cap B)=P(\bigcap_{i\in I} C_i)P(B)$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $N=\#\{C_i \mid i\in I \wedge C_i=A_i^c\}$.

__בסיס:__ $N=0$ $\Leftarrow$ $C_i=A_i$ $\Leftarrow$ $P((\bigcap_{i\in I} C_i)\cap B)=P((\bigcap_{i\in I} A_i)\cap B)=\prod_{i\in I} P(A_i)\cdot P(B)=P(\bigcap_{i\in I} A_i)P(B)=P(\bigcap_{i\in I} C_i)P(B)$

__צעד:__ יהי $|I|\ge\bar N>0$. נניח נכונות הטענה עבור $N=\bar N-1$ ונוכיח עבור $N=\bar N$. נסמן $j\in I$ מינימלי כך ש $C_j=A_j^c$ (קיים כזה כי $N\neq 0$)

$$P((\bigcap_{i\in I} C_i)\cap B)=P(C_j\cap(\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap B)=P(A_j^c\cap(\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap B)=P(((\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap B)\setminus(A_j\cap(\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap B))=$$

$$=P((\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap B)-P(C_1\cap\cdots\cap C_{j-1}\cap A_j\cap C_{j+1}\cap\cdots\cap C_n\cap B)=$$

$$=P(\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)P(B)-P(C_1\cap\cdots\cap C_{j-1}\cap A_j\cap C_{j+1}\cap\cdots\cap C_n)P(B)=$$

עבור $P((\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap B)$ $\Leftarrow$ $|I\setminus j|<|I|$ עפ"י הנחת האינדוקציה.
עבור המאורע השני: נסמן $C_i'=\begin{cases}C_i & i\neq j\\ A_i & i=j\end{cases}$ לכל $i\in I$
נקבל $N-1=\#\{C_i' \mid i\in I \wedge C_i'=A_i^c\}$ ונמשיך עפ"י הנחת האינדוקציה

$$=(P(\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)-P(A_j\cap(\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)))P(B)=P((\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\setminus(A_j\cap(\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)))P(B)=$$

$$=P((\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap A_j^c)P(B)=P((\bigcap_{i\in I\setminus j} C_i)\cap C_j)P(B)=P(\bigcap_{i\in I} C_i)P(B)$$

עפ"י נכונות הצעד והבסיס ועפ"י עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $|I|\ge N\ge 0$
עפ"י נכונות הצעד והבסיס ועפ"י עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n\ge|I|\ge 0$
ובפרט הטענה נכונה עבור $|I|=n$.

יהי כעת $C\in F(A_1,\dots,A_n)$. כאמור ~~[illegible]~~ C הוא איחוד זר של יסודונים כלומר קיימים $S_1,\dots,S_k$ $(0\le k\le 2^n)$ כך ש $C=\dot{\bigcup}_{i=1}^{k} S_i$ וכן לכל $i\in[k]$ קיימים לכל $j\in[n]$ $S_i^j\in\{A_j,A_j^c\}$ כך ש: $S_i=\bigcap_{j=1}^{n} S_i^j$

$$P(C\cap B)=P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right)\cap B\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}(S_i\cap B)\right)=\sum_{i=1}^{k}P(S_i\cap B)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n}S_j^i\right)\cap B\right)=\sum_{i=1}^{k}P\left(\bigcap_{j=1}^{n}S_j^i\right)P(B)=\left(\sum_{i=1}^{k}P\left(\bigcap_{j=1}^{n}S_j^i\right)\right)P(B)=\left(\sum_{i=1}^{k}P(S^i)\right)P(B)=$$

$$=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}S_i\right)P(B)=P(C)P(B)$$

אזי C,B ב"ת וזאת לכל $C\in\mathcal{F}(A_1,\dots,A_n)$.

■

ב

$$P(\{\text{אף אחד מ-}A_1,\dots,A_n\text{ לא מתקיים}\})=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i^c)=\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))=$$

$$=e^{\ln\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))}=e^{\sum_{i=1}^{n}\ln(1-P(A_i))}\le e^{\sum_{i=1}^{n}-P(A_i)}=e^{-\sum_{i=1}^{n}P(A_i)}$$

$\forall 0<p<1\ \ \ln(1-p)<-p$, $\ln(1-0)=0$

הוכחות: ① אם קיים $i\in[n]$ כך ש $A_i=\Omega$ ⟸ $P(\{\text{אף אחד מ-}A_1,\dots,A_n\})=\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))=0<e^{-\sum_{i=1}^{n}P(A_i)}$

② אם קיים $i\in[n]$ כך ש $A_i\neq\emptyset$ ⟸ $P(A_i)>0$ ⟸ הא"ש ⊛ הוכח לא חריף!

■

③ נסמן: $\Omega=\{T,F\}^n$ - n-יות סדורות מהן הכלי כך

ה-i ($1\le i\le n$) הוא T אומר M_i אמר אמת. נסמן לכל $w\in\Omega$: $F(w)=\#\{i\in[n]\mid w_i=F\}$

$P:\mathcal{F}\to\mathbb{R};\ P(w)=(1-p)^{n-F_w}p^{F_w}$, $\mathcal{F}=2^{\Omega}$

נסמן לכל $1\le i\le n$: $F_i=\{w\in\Omega\mid w_i=F\}$ - המאורע "M_i שיקר"

נשים לב כי R_n המאורע במחלקה הינו

שלמה צדק: $R_n=\{w\in\Omega\mid F(w)\equiv 1\pmod 2\}$

נגדיר לכל $1\le i\le n$: $\bar{R}_i=\{w\in\Omega\mid\#\{1\le j\le i\mid w_j=F\}\equiv 1\pmod 2\}$; ונשים לב ש $\bar{R}_n=R_n$

ע"פ הסתברות שלמה, לכל $1<i\le n$:

$$P(\bar{R}_i)=P(\bar{R}_i\mid F_i)P(F_i)+P(\bar{R}_i\mid F_i^c)P(F_i^c)=\frac{P(\bar{R}_i\cap F_i)}{P(F_i)}P(F_i)+\frac{P(\bar{R}_i\cap F_i^c)}{P(F_i^c)}P(F_i^c)=$$

$$=P(\bar{R}_i\cap F_i)+P(\bar{R}_i\cap F_i^c)=P(\{w\in\Omega\mid\#\{1\le j\le i\mid w_j=F\}\equiv 1\pmod 2\wedge w_i=F\})+P(\{w\in\Omega\mid\#\{1\le j\le i\mid w_j=F\}\equiv 1\pmod 2\wedge w_i=T\})$$

$$=P(\{w\in\Omega\mid\#\{1\le j\le i-1\mid w_j=F\}\equiv 0\pmod 2\wedge w_i=F\})+P(\{w\in\Omega\mid\#\{1\le j\le i-1\mid w_j=F\}\equiv 1\pmod 2\wedge w_i=T\})=$$

$$=P(\bar{R}_{i-1}^c\cap F_i)+P(\bar{R}_{i-1}\cap F_i^c)=P(\bar{R}_{i-1}^c)P(F_i)+P(\bar{R}_{i-1})P(F_i^c)=(1-P(\bar{R}_{i-1}))p+P(\bar{R}_{i-1})(1-p)$$

אזי:

$$2P(\bar{R}_i)-1 = 2\left(\left(1-P(\bar{R}_{i-1})\right)p + P(\bar{R}_{i-1})(1-p)\right)-1 =$$

$$= 2p - 2P(\bar{R}_{i-1})p + 2P(\bar{R}_{i-1}) - 2P(\bar{R}_{i-1})p - 1 =$$

$$= -4P(\bar{R}_{i-1})p + 2p + 2P(\bar{R}_{i-1}) - 1 = \left(2P(\bar{R}_{i-1})-1\right)(-2p+1) =$$

$$= (-2p+1)\left(2P(\bar{R}_{i-1})-1\right)$$

אזי:

$$2P(\bar{R}_i)-1 = (-2p+1)\left(2P(\bar{R}_{i-1})-1\right) = (-2p+1)(-2p+1)\left(2P(\bar{R}_{i-2})-1\right) =$$

$$= \cdots = (-2p+1)^{i-1}\left(2P(\bar{R}_1)-1\right) = (-2p+1)^{i-1}\left(2P(F_1)-1\right) =$$

$$= (-2p+1)^{i-1}(2p-1) \Longrightarrow P(\bar{R}_i) = \frac{(-2p+1)^{i-1}(2p-1)+1}{2}$$

נשים לב: אם $p=0 \Longrightarrow P(R_n)=P(\bar{R}_n)=0 \Longrightarrow$ אין משמעות להסתברות מותנה בקיום R_n [illegible]

$$p_n = P(F_1^c \mid R_n) = \frac{P(F_1^c \cap R_n)}{P(R_n)} = \frac{P(F_1^c \cap \bar{R}_n)}{P(\bar{R}_n)} = \frac{P(\{w\in\Omega \mid \#\{1\le j\le n \mid w_j = F\} \equiv 1 \pmod 2 \wedge w_1 = T\})}{P(\bar{R}_n)}$$

$$= \frac{P(\{w\in\Omega \mid \#\{2\le j\le n \mid w_j = F\} \equiv 1 \pmod 2 \wedge w_1 = T\})}{P(\bar{R}_n)} =$$

$$= \frac{P(\{w\in\Omega \mid \#\{2\le j\le n \mid w_j = F\} \equiv 1 \pmod 2\} \cap F_1^c)}{P(\bar{R}_n)} =$$

הסתב' תלויה רק במס' ה-F-ים ולא במיקומן הספציפי בהגרלה

$$= \frac{P(\{w\in\Omega \mid \#\{2\le j\le n \mid w_j = F\} \equiv 1 \pmod 2\})\,P(F_1^c)}{P(\bar{R}_n)} =$$

$$= \frac{P(\bar{R}_{n-1})P(F_1^c)}{P(\bar{R}_n)} = (1-p)\frac{(-2p+1)^{n-2}(2p-1)+1}{(-2p+1)^{n-1}(2p-1)+1}$$

אם $p=1$:

$$\lim_{n\to\infty} p_n \overset{1-p=0}{=} \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = 1-p$$

אזכרת $0 < p < 1 \Rightarrow -2 < -2p < 0 \Rightarrow -1 < -2p+1 < 1$

$$\Leftarrow \lim_{n\to\infty}(-2p+1)^{n} = \lim_{n\to\infty}(-2p+1)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}(-2p+1)^{n-2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}(1-p)\frac{(-2p+1)^{n-2}(2p-1)+1}{(-2p+1)^{n-2}(2p-1)+1} =$$

הסדרות מתכנסות בגבולות.
לכן קיום
הגבולות
וכן גבול המכנה
$\neq 0$ כנדרש

$$=(1-p)\,\frac{\lim_{n\to\infty}(-2p+1)^{n-2}(2p-1)+1}{\lim_{n\to\infty}(-2p+1)^{n-2}(2p-1)+1} = (1-p)\,\frac{0+1}{0+1} = (1-p)$$

■

~~[illegible]~~

שאלת ג.פ מחשבות קבל השלי
של גב עד

איזה אסיר משתחרר   מה הסוהר יגיד

(4) נגדיר $\Omega=\{א,ב,ג\}\times\{ב,ג\}$ $F=2^{\Omega}$

נגדיר $P: F \to \mathbb{R}$ כפונקציה (נגדיר עבור היחידונים ולהמשיך את P לכולם)

$P(\{(ג,ב)\}) = \frac{1}{3}$

$P(\{(ג,ג)\}) = 0$

אם ג ישתחרר הסוהר תמיד יגיד ב

$P(\{(ב,ג)\}) = \frac{1}{3}$

$P(\{(ב,ב)\}) = 0$

אם ב ישתחרר הסוהר תמיד יגיד ג

$P(\{(א,ג)\}) = \frac{1}{6}$

$P(\{(א,ב)\}) = \frac{1}{6}$

$\boxed{\text{נניח}}$ אם א ישתחרר הסוהר יטיל מטבע מאוזנת ולפי התוצאה יגיד ב או ג

נגדיר: $A_א=\{א\}\times\{ב,ג\}$ וכן לכל $ב\in\{ב,ג\}$: $B_ב=\{א,ב,ג\}\times\{ב\}$.

$$P(A_א \mid B_ב) = \frac{P(A_א\cap B_ב)}{P(B_ב)} = \frac{P(\{(א,ב)\})}{P(\{(א,ב),(ב,ב),(ג,ב)\})} = \frac{P(\{(א,ב)\})}{P(\{(א,ב)\})+P(\{(ב,ב)\})+P(\{(ג,ב)\})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

בפרט: $P(A_א \mid B_ב)=P(A_א)$ וכן: $P(A_א \mid B_ב)=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=P(A_א \mid A_ג^c)$

כלומר אסיר א' שלא קיבל מידע ושל שינה את הבנתו את ההסתברות לשחרור

(5) $\Omega=\{H,T\}^{\mathbb{N}}$. עבור כל מאורע A התלוי במס' סופי של הטלות - אם מס' זה הוא n, אזי $P(A)=2^{-n}$. אזי ישנה הרחבה של P על Ω, $F\subseteq$ - σ-אלגברה שמכילה את כל המאורעות שמעניינים אותנו.

נגדיר: לכל i טבעי: E_i - ~~מספר~~ המאורע "ההופעה הראשונה החל מההטלה ה-i, של 7 פעמים ראש ברצף היתה לפני ההופעה הראשונה החל מההטלה ה-i של 5 פעמים זנב ברצף", נשים לב: $E=E_1$. התהליך חסר זכרון (כל ההטלות ב"ת) ולכן לכל i טבעי: $P(E_i)=P(E_1)=P(E)$.

$$P(E \mid A=\text{Head}) \overset{\text{הסת' שלמה}}{=} \frac{P(E\cap A=\text{Head})}{P(A=\text{Head})} \overset{\text{הסת' שלמה}}{=}$$

$$= \frac{P\left(E\cap A=\text{Head} \,\middle|\, \left\{\substack{\text{ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו כולן } H}\right\}\right) P\left(\left\{\substack{\text{ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו כולן } H}\right\}\right) + P\left(E\cap A=\text{Head} \,\middle|\, \left\{\substack{\text{לא כל ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו } H}\right\}\right) P\left(\left\{\substack{\text{לא כל ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו } H}\right\}\right)}{P(A=\text{Head})} =$$

כאן נתון שאין E ואת קיים!!

$$= \frac{P\left(A=\text{Head} \,\middle|\, \left\{\substack{\text{ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו כולן } H}\right\}\right) p^{r-1} + P\left(E_2\cap A=\text{Head} \,\middle|\, \left\{\substack{\text{לא כל ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו } H}\right\}\right)}{P(A=\text{Head})} =$$

ההטלה ה-I באה ב

לא תלויים בהטלה הראשונה ומה

$$= \frac{P(A=\text{Head})\, p^{r-1} + P\left(E_2\cap \left\{\substack{\text{לא כל}\\ \text{ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו } H}\right\}\right) P(A=\text{Head})}{P(A=\text{Head})} =$$

$$= p^{r-1} + P\left(E_2 \cap \dot{\bigcup_{i=2}^{r}} \left\{\substack{\text{ההטלה } i\\ \text{היא הראשונה}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) = p^{r-1} + P\left(\dot{\bigcup_{i=2}^{r}} \left(E_2 \cap \left\{\substack{\text{ההטלה } i\\ \text{היא הראשונה}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right)\right) =$$

$$= p^{r-1} + \sum_{i=2}^{r} P\left(E_2 \cap \left\{\substack{\text{ההטלה } i\\ \text{היא ה-I}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) = p^{r-1} + \sum_{i=2}^{r} P\left(E_2 \,\middle|\, \left\{\substack{\text{ההטלה } i\\ \text{היא ה-I}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) P\left(\left\{\substack{\text{ההטלה } i\\ \text{היא ה-I}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) =$$

$$= p^{r-1} + \sum_{i=2}^{r} P\left(E_1 \,\middle|\, \left\{\substack{\text{ההטלה } i-1\\ \text{היא ה-I}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) P\left(\left\{\substack{\text{ההטלה } i\\ \text{היא ה-I}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) = p^{r-1} + \sum_{i=2}^{r} P\left(E_i \,\middle|\, \substack{\text{ההטלה } i\\ \text{יצאה } T}\right) P\left(\left\{\substack{\text{ההטלה}\\ i\text{-ה}\\ \text{היא ה-I}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) =$$

$$= p^{r-1} + \sum_{i=2}^{r} P(E_1 \mid A=\text{Tail}) P\left(\left\{\substack{\text{ההטלה}\\ i\text{-ה}\\ \text{היא ה-I}\\ \text{שיצאה } T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) = p^{r-1} + P(E_1 \mid A=\text{Tail}) \cdot \sum_{i=2}^{r} P\left(\left\{\substack{\text{ההטלה}\\ i\\ \text{היא ה-I}\\ T\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) =$$

$$= p^{r-1} + P(E \mid A=\text{Tail})\, P\left(\dot{\bigcup_{i=2}^{r}} \left\{\substack{\text{ההטלה } i\\ \text{היא הראשונה}\\ \text{ה-I}\\ \text{מבין } 2,\dots,r}\right\}\right) = p^{r-1} + P(E \mid A=\text{Tail})\, P\left(\left\{\substack{\text{לא כל}\\ \text{ההטלות}\\ 2,\dots,r\\ \text{יצאו } H}\right\}\right) =$$

$$= p^{r-1} + (1-p^{r-1})\, P(E \mid A=\text{Tail})$$

נאמר הסימון תחת ההחלפות: $H/\text{Head}/\text{עץ} \Longleftrightarrow T/\text{Tail}/\text{פלי}$

$$p/r \Longleftrightarrow 1-p/s$$

כמו צריך להיות ל... כל: אם ב E^c.

$$P\left(\left\{\substack{\text{הצלחה}\\ \text{כלל}\\ \text{פלי}}\right\} \middle| A=\text{Tail}\right) = (1-p)^{s-1} (1-p^{s-1}) P(E \mid A=\text{Head}) \Longrightarrow$$

$$P(E \mid A=\text{Tail}) = 1 - P(E^c \mid A=\text{Tail}) = 1-(1-p)^{s-1}\left(1-(1-p^{s-1})\right) P(E \mid A=\text{Head})$$

$$P(E|A=Head)=p^{r-1}+(1-p^{r-1})\left[1-(1-p)^{s-1}-(1-(1-p)^{s-1})P(E|A=Head)\right]=$$

$$=p^{r-1}+(1-p^{r-1})-(1-p^{r-1})(1-p)^{s-1}-(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})P(E|A=Head)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E|A=Head)\left(1+(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})\right)=p^{r-1}+(1-p^{r-1})-(1-p^{r-1})(1-p)^{s-1}$$

$$\Rightarrow P(E|A=Head)=\frac{p^{r-1}+(1-p^{r-1})-(1-p^{r-1})(1-p)^{s-1}}{1+(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})}=\frac{p^{r-1}+(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})}{1+(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})}$$

באופן דומה:

$$P(E|A=Tail)=1-(1-p)^{s-1}-(1-(1-p)^{s-1})\left[p^{r-1}+(1-p^{r-1})P(E|A=Tail)\right]=$$

$$=1-(1-p)^{s-1}-(1-(1-p)^{s-1})p^{r-1}-(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})P(E|A=Tail)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E|A=Tail)\left(1+(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})\right)=1-(1-p)^{s-1}-(1-(1-p)^{s-1})p^{r-1}$$

$$\Rightarrow P(E|A=Tail)=\frac{1-(1-p)^{s-1}-(1-(1-p)^{s-1})p^{r-1}}{1+(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})}=\frac{(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})}{1+(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})}$$

ע"פ הסת' שלמה:

$$P(E)=P(E|A=Tail)P(A=Tail)+P(E|A=Head)P(A=Head)=$$

$$=\frac{(1-p)(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})+p^r+p(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})}{1+(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})}=$$

$$=\frac{\cancel{1}(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})((1-p)+p)+p^r}{1+(1-(1-p)^{s-1})(1-p^{r-1})}=\frac{p^r+(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})}{1+(1-p^{r-1})(1-(1-p)^{s-1})}$$

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון 6

1. מטילים מטבע ארבע פעמים. נרצה להגדיר את המשתנים המקריים הבאים: $X =$ מס' הפעמים בהן יצא "ראש", $Y =$ מס' הפעמים בהן יצא "זנב", ו- $Z = X - Y$.

   א. כל אחד מהמ"מ הנ"ל מעביר מרחב הסתברות למרחב הסתברות אחר, למשל $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (S, \mathcal{F}, P_X)$. ציין את שני מרחבים אלה עבור שלושת המ"מ.

   ב. חשב את ההתפלגויות $P_X(B), P_Y(B), P_{X-Y}(B)$, לכל $B \subset S$.

   ג. נגדיר פונקציה חדשה $F_X(t) : \mathbb{R} \to [0,1]$ באופן הבא: $F_X(t) = P_X([0,t])$. חשב וסרטט את F_X .

2. מירי ויואב משחקים את המשחק הבא: מירי מטילה פעמיים קוביה מיוחדת בת 14 פאות (יש 8 פאות בצבע לבן, 4 בצבע שחור, ו- 2 בצבע כתום). אם יצא צבע שחור, מירי מקבלת מיואב שני ש"ח, ואם יצא צבע לבן, היא נותנת ליואב ש"ח אחד. נסמן ב- X את הרווח של מירי. תאר את המרחבים $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ו- $(S, \mathcal{B}, P_X)$. (יש לחשב את $P_X(B)$ לכל $B \subset S$).

3. מוכר בחנות מעונין לרכוש 6 חבילות של 20 קופסאות כל אחת, כאשר כל קופסא מכילה 12 עפרונות בעלי חוד בהיר. ההסתברות שבעפרון יהיה חוד כהה במקום בהיר היא 0.004. המוכר יקנה את 6 החבילות אם לאחר בדיקה של 2 חבילות אקראיות נמצאה לכל היותר קופסא אחת המכילה עפרון עם חוד כהה. מה ההסתברות שהמוכר יבצע את הקניה?

4. חמישה סטודנטים מהאוניברסיטה העברית וחמישה סטודנטים מאוניברסיטת תל-אביב מדורגים לפי הישגיהם בבחינה. הניחו כי כל הציונים שונים וכי כל !10 הדרוגים האפשריים בעלי אותה הסתברות. נסמן ב - X את ההישג הגבוה ביותר ע"י סטודנט מתל-אביב (למשל $X = 2$ אם סטודנט מהעברית היה במקום הראשון וסטודנט מתל-אביב במקום השני) .תאר את המרחבים $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(S, \mathcal{F}, P_X)$ וחשב את ההתפלגות P_X עבור $1, 2, 3$.

5. יהי $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ מרחב הסתברות. לכל קבוצה $A \in \mathcal{A}$, נגדיר את הפונקציה האופיינית של A ע"י

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

   (א) הראו כי $\mathbf{1}_A$ הוא מ"מ .

   (ב) חישבו את פונקצית ההתפלגות שלו.

6. בקופסא יש כדורים ממוספרים מ-1 עד N. מוציאים באקראי $n \leq N$ כדורים , ללא החזרה. יהי Y המספר הכי גדול מבין הכדורים שנבחרו. חישבו את פונקצית ההתפלגות שלו.

תורת ההסתברות - פתרון לגליון 6

1.א, ב. שלושלת המ"מ מוגדרים על מרחב ההסתברות הבא: $\Omega=\{(x_1,..,x_4):x_i\in\{0,1\}\}$ (ראש = 1, זנב = 0), $\mathcal{A}=2^\Omega$, ו-P ההסתברות האחידה על Ω, כלומר לכל $B\in\mathcal{A}$, $P(B)=\frac{|B|}{2^4}$. נציין את הטווח של כל מ"מ:

<u>עבור המ"מ X</u>: $S=\{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{F}=2^S$, ונחשב את P_X:

$$P_X(\{0\})=P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=0\})=P(\{(0,0,0,0)\})=\frac{1}{2^4}$$
$$P_X(\{1\})=P(\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\})=\frac{4}{2^4}=\frac{1}{4}$$
$$P_X(\{2\})=..=\frac{6}{2^4}=\frac{3}{8}$$
$$P_X(\{3\})=..=\frac{4}{2^4}=\frac{1}{4}$$
$$P_X(\{4\})=\frac{1}{2^4}$$

<u>עבור המ"מ Y</u>: ל-Y אותו טווח כמו ל-X.

<u>עבור המ"מ $Z=X-Y$</u>: $S=\{-4,-2,0,2,4\}$, $\mathcal{F}=2^S$, ונחשב את P_Z (נשים לב לכך שלכל $\omega\in\Omega$: $P_{X+Y}(\omega)=4$):

$$P_Z(\{-4\})=P_X(\{0\})=\frac{1}{2^4},\quad P_X(\{-2\})=P_X(\{1\})=\tfrac{1}{4}$$
$$P_Z(\{0\})=P_X(\{2\})=\frac{3}{8},\quad P_Z(\{2\})=P_X(\{3\})=\tfrac{1}{4}$$
$$P_Z(\{4\})=P_X(\{4\})=\frac{1}{2^4}$$

ג.

$$F_X(t)=\begin{cases} P_X(\emptyset)=0 & t<0\\ P_X(\{0\})=\frac{1}{2^4} & 0\le 0\le t<1\\ P_X(\{0,1\})=\frac{5}{2^4} & 1\le t<2\\ P_X(\{0,1,2\})=\frac{11}{2^4} & 2\le t<3\\ P_X(\{0,1,2,3\})=\frac{15}{2^4} & 3\le t<4\\ P_X(S)=1 & 4\le x\end{cases}$$

2. ניסוי הוא הטלת הקוביה פעמיים ורישום הצבעים בכל פעם, לכן נגדיר $\Omega=\{(i,j):i,j\in\{B,W,O\}\}$. נגדיר מ"מ $X=$ "הרווח של מירי" . אז $X:(\Omega,2^\Omega,P)\to(S,2^S,P_X)$ (P ניתנת לחישוב כרגיל).

$S=\{-2,-1,0,1,2,4\}$, ונחשב את ההתפלגות P_X:

$$P_X(\{-2\})=P(\{(W,W)\})=\left(\frac{8}{14}\right)^2$$
$$P_X(\{-1\})=P(\{(O,W),(W,O)\})=2\frac{2\cdot 8}{14^2}$$
$$P_X(\{0\})=P(\{(O,O)\})=\left(\frac{2}{14}\right)^2$$
$$P_X(\{1\})=P(\{(B,W),(W,B)\})=2\frac{4\cdot 8}{14^2}$$
$$P_X(\{2\})=..=2\frac{4\cdot 2}{14^2}$$
$$P_X(\{4\})=..=\left(\frac{4}{14}\right)^2$$

3. קופסא עם לפחות עפרון אחד בעל חוד כהה תיקרא "מקולקלת". מבצעים ניסוי מורכב: קודם בוחרים 2 חבילות מתוך 6, ואז בודקים אם הן מכילות קופסא מקולקלת. לכן נגדיר $\Omega_1=\{1,..,6\}^2$ עם הסת' אחידה כלומר $P_1(i,j)=\frac{1}{36}$. נגדיר $\Omega_2=\{0,1,..,40\}$ (מס' הקופסאות המקולקלות ב-2 חבילות) עם הסת' P_2. כל בדיקה של קופסא מתפרשת כביצוע ניסוי ברנולי עם הסתברות להצלחה p, ומניחים אי-תלות בין כל הקופסאות. על כן ההסתברות על Ω_2 היא $B(40,p)$. מרחב המדגם שלנו יהיה: $\Omega=\{((i,j),k):(i,j)\in\Omega_1,k\in\Omega_2\}$ עם ההסתברות הבנויה מ- P_1,P_2. נחשב את p: זוהי ההסתברות שבקופסא יש עפרון אחד או יותר עם חוד כהה. נסתכל על כל עפרון כעל ניסוי ברנולי ב"ת באחרים, נגדיר $\Omega_3=\{0,1,..,12\}$ (מס' העפרונות עם חוד כהה בקופסא אחת), עם הסתברות P_3 בינומית $B(12,0.004)$. לכן $p=P_2\{1,2,...,12\}=1-p_2(0)=1-(1-0.004)^{12}$. יהי $A=$ "המוכר מבצע את הקנייה".
$P(A)=\sum_{(i,j)\in\Omega_1}p_1(i,j)p_2\{1,2,..,40\}=\binom{40}{0}p^0(1-p)^{40}+\binom{40}{1}p^1(1-p)^{39}\simeq 0.43$

4. נסמן $T=\{T_1,..,T_5\}=$ הסטודנטים מתל-אביב, $J=\{J_1,..,J_5\}=$ הסטודנטים מירושלים.
$\Omega=\{(x_1,..x_{10}):x_i\in T\cup J,i\neq j\Rightarrow x_i\neq x_j\}$. $|\Omega|=10!$, P - ההסתברות האחידה על Ω. נגדיר מ"מ $X=$ "ההישג הגבוה ביותר ע"י סטודנט מת"א". אז $S=\{1,..,6\}$. אז לדוגמא:

$$\begin{aligned}P_X(\{1\})=P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=1\})&=P_X(\{(T_1,x_2,..,x_{10})\}\cup..\cup\{(T_5,x_2,..x_{10})\})\\&=\sum_{i=1}^{5}P(\{(T_i,x_2,..,x_{10})\})=\frac{5\cdot 9!}{10!}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

5. נבחין כי $\mathbf{1}_A:(\Omega,\mathcal{A},P)\to(S=\{0,1\},2^S,P_{\mathbf{1}_A})$. יהי $B\in 2^S$. אז

$$\mathbf{1}_A^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:\mathbf{1}_A(\omega)\in B\}=\begin{cases}A & B=\{1\}\\ A^c & B=\{0\}\\ \Omega & B=S\\ \emptyset & B=\emptyset\end{cases}$$

וכל אחת מקבוצות אלה שייכת ל- $\mathcal{A}$. $P_{\mathbf{1}_A}(\{1\})=P(A)$, $P_{\mathbf{1}_A}(\{0\})=1-P(A)$, וברור כי $P_{\mathbf{1}_A}$ פונקצית הסתברות על S . מסקנה: $\mathbf{1}_A\sim Bernoulli(P(A))$.

6. יהי $Y:(\Omega,2^{\Omega},P)\to(S,2^{S},P_Y)$ המס' הכי גדול מבין המספרים שנבחרו.
$\Omega=\{(x_1,..,x_n):x_i\in\{1,..,N\},i=1,..,n\}$, עם P אחידה. $S=\{n,..,N\}$. על מנת ש- $Y=k$,
צריך שנבחר ב- $n-1$ כדורים עם מספרים קטנים ממש מ- k ובכדור אחד עם המספר k. על כן:

$$p_Y(k)=P\{\omega\in\Omega:Y(\omega)=k\}=\frac{\binom{k}{n-1}\binom{1}{1}}{\binom{N}{n}}$$

יונתן גונצ'רובסקי
תרגול יום א' 15-16

(4/4)
מצוין

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 6

(1) ראשית נגדיר את מרחב ההסתברות המקורי $(\Omega,\mathcal{A},P)$:
$\Omega=\{H,T\}^4$, $\mathcal{A}=2^{\Omega}$, $P:\mathcal{A}\to[0,1]; P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

(א) $X:\Omega\to\{0,1,2,3,4\}; X(\omega)=\#\{1\le i\le 4 \mid \omega_i=H\}$. במרחב הבחנה: $(S_X,\mathcal{F}_X,P_X)$ כך ש:
$S_X=\{0,1,2,3,4\}$ $\mathcal{F}_X=2^{S_X}$ $P_X:\mathcal{F}_X\to[0,1]; P_X(F)=P(X^{-1}(F))$

$Y:\Omega\to\{0,1,2,3,4\}; Y(\omega)=\#\{1\le i\le 4 \mid \omega_i=T\}$. המרחב הבחנה: $(S_Y,\mathcal{F}_Y,P_Y)$ כך ש:
$S_Y=\{0,1,2,3,4\}$ $\mathcal{F}_Y=2^{S_Y}$ $P_Y:\mathcal{F}_Y\to[0,1]; P_Y(F)=P(Y^{-1}(F))$

$Z:\Omega\to\{-4,-2,0,2,4\}; Z(\omega)=X(\omega)-Y(\omega)$ המרחב הבחנה: $(S_Z,\mathcal{F}_Z,P_Z)$ כך ש:
$S_Z=\{-4,-2,0,2,4\}$ $\mathcal{F}_Z=2^{S_Z}$ $P_Z:\mathcal{F}_Z\to[0,1]; P_Z(F)=P(Z^{-1}(F))$

(ב) (I)
$P_X(\{1\})=P(\{(T,T,T,H),(T,T,H,T),(T,H,T,T),(H,T,T,T)\})=\frac{\binom{4}{1}}{16}=\frac14$; $P_X(\{0\})=P(\{(T,T,T,T)\})=\frac{\binom{4}{0}}{16}=\frac1{16}$

$P_X(\{2\})=P(\{(T,T,H,H),(T,H,T,H),(T,H,H,T),(H,H,T,T),(H,T,H,T),(H,T,T,H)\})=\frac{\binom{4}{2}}{16}=\frac38$

$P_X(\{4\})=P(\{(H,H,H,H)\})=\frac{\binom{4}{4}}{16}=\frac1{16}$; $P_X(\{3\})=P(\{(H,H,H,T),(H,H,T,H),(H,T,H,H),(T,H,H,H)\})=\frac{\binom{4}{3}}{16}=\frac14$

ומאקסיומות ההסתברות לכל $B\in\mathcal{F}_X$: $P_X(B)=\sum_{b\in B}P_X(\{b\})$

(II) באופן דומה: $P_Y(\{4\})=\frac{\binom{4}{4}}{16}=\frac1{16}$; $P_Y(\{3\})=\frac{\binom{4}{3}}{16}=\frac14$; $P_Y(\{2\})=\frac{\binom{4}{2}}{16}=\frac38$; $P_Y(\{1\})=\frac{\binom{4}{1}}{16}=\frac14$; $P_Y(\{0\})=\frac{\binom{4}{0}}{16}=\frac1{16}$

ומאקסיומות ההסתברות לכל $B\in\mathcal{F}_Y$: $P_Y(B)=\sum_{b\in B}P_Y(\{b\})$

(III) לכל $\omega\in\Omega$ אזי: $Z(\omega)=X(\omega)-Y(\omega)=X(\omega)-(4-X(\omega))=2X(\omega)-4\Rightarrow X(\omega)=\frac{Z(\omega)+4}{2}$

אזי:
$P_Z(\{4\})=P_X(\{\frac{4+4}{2}\})=P_X(\{4\})=\frac1{16}$; $P_Z(\{2\})=P_X(\{\frac{2+4}{2}\})=P_X(\{3\})=\frac14$

$P_Z(\{0\})=P_X(\{\frac{0+4}{2}\})=P_X(\{2\})=\frac38$; $P_Z(\{-2\})=P_X(\{\frac{-2+4}{2}\})=P_X(\{1\})=\frac14$

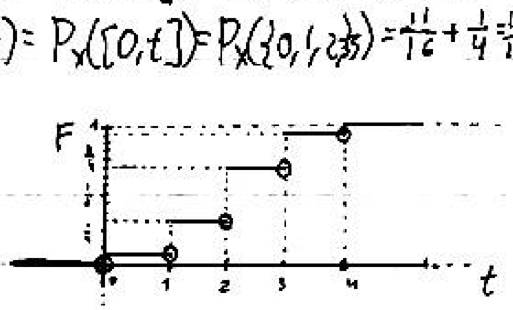
$P_Z(\{-4\})=P_X(\{\frac{-4+4}{2}\})=P_X(\{0\})=\frac1{16}$; $\forall B\in\mathcal{F}_Z: P_Z(B)=\sum_{b\in B}P_Z(\{b\})\ \left(=\sum_{b\in B}P_X(\{\frac{b+4}{2}\})\right)$

(ג)
$\forall t<0: F_X(t)=P_X([0,t])=P_X(\emptyset)=0$; $\forall 0\le t<1: F_X(t)=P_X([0,t])=P_X(\{0\})=\frac1{16}$

$\forall 2\le t<3: F_X(t)=P_X([0,t])=P_X(\{0,1,2\})=\frac5{16}+\frac38=\frac{11}{16}$; $\forall 1\le t<2: F_X(t)=P_X([0,t])=P_X(\{0,1\})=\frac1{16}+\frac14=\frac5{16}$

$\forall t\ge 4: F_X(t)=P_X([0,t])=P_X(\{0,1,2,3,4\})=\frac{15}{16}+\frac1{16}=1$; $\forall 3\le t<4: F_X(t)=P_X([0,t])=P_X(\{0,1,2,3\})=\frac{11}{16}+\frac14=\frac{15}{16}$

שרטוט הפונקציה:



(2) ראשית נגדיר את מרחב ההסתברות המקורי $:(\Omega,\mathcal{A},P)$

$P:\mathcal{A}\to[0,1];\ P(A)=\sum_{a\in A}\frac{8}{14}^{\#\{0\le i\le 2|a_i=\text{לבן}\}}\cdot\frac{4}{14}^{\#\{0\le i\le 2|a_i=\text{שחור}\}}\cdot\frac{2}{14}^{\#\{0\le i\le 2|a_i=\text{כתום}\}}$; $\mathcal{A}=2^{\Omega}$; $\Omega=\{\{\text{כתום, שחור, לבן}\}^2\}$ ✓

כעת:

$X:\Omega\to\{2,0,-1\}+\{2,0,-1\}=\{4,2,1,0,-1,-2\}$; $X(\omega)=\#\{0\le i\le 2|\omega_i=\text{לבן}\}\cdot(-1)+\#\{0\le i\le 1|\omega_i=\text{שחור}\}\cdot 2$

מרחב ההסתברות ש-X משרה הוא: $\{S_x,\mathcal{F}_x,P_x\}$

$S_x=\{4,2,1,0,-1,-2\}$ $\quad\mathcal{F}_x=2^{S_x}$ $\quad P_x:\mathcal{F}_x\to[0,1];\ P_x(F)=P(X^{-1}(F))$

נחשב את P_x לכל $B\in S$:

$P(\{4\})=P(\{(\text{שחור},\text{שחור})\})=\left(\frac{4}{14}\right)^2=\frac{16}{196}=\frac{4}{49}$; $P(\{2\})=P(\{(\text{שחור},\text{כתום}),(\text{כתום},\text{שחור})\})=\frac{4}{14}\cdot\frac{2}{14}+\frac{2}{14}\cdot\frac{4}{14}=\frac{16}{196}=\frac{4}{49}$

$P(\{1\})=P(\{(\text{שחור},\text{לבן}),(\text{לבן},\text{שחור})\})=\frac{4}{14}\cdot\frac{8}{14}+\frac{8}{14}\cdot\frac{4}{14}=\frac{64}{196}=\frac{16}{49}$; $P(\{0\})=P(\{(\text{כתום},\text{כתום})\})=\left(\frac{2}{14}\right)^2=\frac{4}{196}=\frac{1}{49}$

$P(\{-1\})=P(\{(\text{כתום},\text{לבן}),(\text{לבן},\text{כתום})\})=\frac{2}{14}\cdot\frac{8}{14}+\frac{8}{14}\cdot\frac{2}{14}=\frac{32}{196}=\frac{8}{49}$; $P(\{-2\})=P(\{(\text{לבן},\text{לבן})\})=\left(\frac{8}{14}\right)^2=\frac{64}{196}=\frac{16}{49}$

$\forall B\in\mathcal{F}_x:\ P_x(B)=\sum_{b\in B}P_x(\{b\})$

(3) ראשית נגדיר את מרחב ההסתברות: $(\Omega,\mathcal{A},P)$

$\Omega=\{(((\{\text{בהיר, כהה}\}^{12})^{20})^2\}$ - 12·20·2-יות הן מיצג על כל הכדורים ב-2 הקופסאות שנבחרו.

$\mathcal{A}=2^{\Omega}$.

$P:\mathcal{A}\to[0,1];\ P(A)=\sum_{a\in A}0.004^{\#\{0\le i\le 480|a_i=\text{כהה}\}}\cdot 0.996^{\#\{0\le i\le 480|a_i=\text{בהיר}\}}$ ✓

$P(\{\text{ניקוי}\})=P\left(\left\{\text{אין יותר מקופסא אחת עם חוזים כהים}\right\}\right)=P\left(\left\{\text{אין כלל חוזים כהים}\right\}\cup\bigcup_{i=1}^{40}\left\{\text{בקופסא ה-}i\text{ יש חוזים כהים ורק בה}\right\}\right)=$

$=P\left(\left\{\text{אין כהים כלל}\right\}\right)+\sum_{i=1}^{40}P\left(\left\{\text{בקופסא ה-}i\text{ ורק בה יש חוזים כהים}\right\}\right)=P\left(\left\{\text{אין כהים כלל}\right\}\right)+\sum_{i=1}^{40}P\left(\left\{\text{בקופסאות}\neq i\text{ אין כהים}\right\}\cap\left\{\text{בקופסא ה-}i\text{ יש כהים}\right\}\right)\overset{\text{אי תלות כהות חוזים שונים}}{=}$

$P\left(\left\{\text{אין כהים כלל}\right\}\right)+\sum_{i=1}^{40}P\left(\left\{\text{בקופסאות}\neq i\text{ אין כהים}\right\}\right)P\left(\left\{\text{בקופסא ה-}i\text{ יש כהים}\right\}\right)=P\left(\left\{\text{אין כהים כלל}\right\}\right)+\sum_{i=1}^{40}P\left(\left\{\text{בקופסאות}\neq i\text{ אין כהים}\right\}\right)\left(1-P\left(\left\{\text{בקופסא ה-}i\text{ אין כהים}\right\}\right)\right)=$

$\overset{\text{אי תלות כהות חוזים שונים}}{=}0.996^{480}+\sum_{i=1}^{40}0.996^{468}(1-0.996^{12})=0.996^{480}+40\cdot0.996^{468}\cdot(1-0.996^{12})=$

$=0.996^{468}(40(1-0.996^{12})+0.996^{12})=0.996^{468}(40-39\cdot0.996^{12})\approx0.4339$

(4) נתאר ראשית את מרחב ההסתברות: $(\Omega,\mathcal{A},P)$

$\Omega=Sym(\{T_1,\dots,T_5,J_1,\dots,J_5\})$ $\quad\mathcal{A}=2^{\Omega}$ $\quad P:\mathcal{A}\to[0,1];\ P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

$$X:\Omega\to\{1,\dots,6\};\ X(\omega)=\min\{1\le i\le 10 \mid \omega_i\in\{T_1,\dots,T_5\}\}$$

$$P_x:\mathcal{F}_x\to[0,1];\ P_x(F)=P(X^{-1}(F));\ \mathcal{F}_x=2^{S_x};\ S_x=\{1,\dots,6\}$$

$$P_x(1)=\frac{|\{\omega\in\Omega \mid \omega_1\in\{T_1,\dots,T_5\}\}|}{|\Omega|}=\frac{\overset{\text{בחירת הראשון}}{5}\cdot\overset{\text{סידור היתר}}{9!}}{10!}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

✓

$$P_x(2)=\frac{|\{\omega\in\Omega \mid \omega_1\in\{J_1,\dots,J_5\}\wedge \omega_2\in\{T_1,\dots,T_5\}\}|}{|\Omega|}=\frac{\overset{\text{בחירת הראשון}}{5}\cdot\overset{\text{בחירת השני}}{5}\cdot\overset{\text{סידור היתר}}{8!}}{10!}=\frac{25}{10\cdot 9}=\frac{5}{2\cdot 9}=\frac{5}{18}$$

$$P_x(3)=\frac{|\{\omega\in\Omega \mid \omega_1,\omega_2\in\{J_1,\dots,J_5\}\wedge \omega_3\in\{T_1,\dots,T_5\}\}|}{|\Omega|}=\frac{\frac{5!}{3!}\cdot 5\cdot 7!}{10!}=\frac{5\cdot 4\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{5}{2\cdot 2\cdot 9}=\frac{5}{36}$$

$$P_x(\{i\})=\frac{|\{\omega\in\Omega \mid \forall j<i:\omega_j\in\{J_1,\dots,J_5\}\wedge \omega_i\in\{T_1,\dots,T_5\}\}|}{|\Omega|}=\frac{\frac{5!}{(5-i+1)!}\cdot 5\cdot(10-i)!}{10!}$$ באופן כללי לכל $1\le i\le 6$:

אזי לכל $F\in\mathcal{F}_x$:
$$P_x(F)=\sum_{i\in F}\frac{\frac{5!}{(5-i+1)!}\cdot 5\cdot(10-i)!}{10!}$$

■

④ יהי $(\Omega,\mathcal{A},P)$ מרחב הסתברות. לכל קבו' $A\in\mathcal{A}$ נגדיר את הפו' האופיינית של A כפי שלהלן. ✓

④ 1_A מוגדרת מ- Ω. טווח את אחת $\{0,1\}$ $S_{1_A}=$ וכן נניח $\mathcal{F}_{1_A}=2^{S_{1_A}}$

כדי להראות ש- 1_A מ"מ יש להראות שלכל $F\in\mathcal{F}_{1_A}$: $1_A^{-1}(F)\in\mathcal{A}$:

* $1_A^{-1}(\emptyset)=\{\omega\in\Omega \mid 1_A(\omega)\in\emptyset\}=\emptyset$ ולפי 3 $\emptyset\in\mathcal{A}$ כי $\mathcal{A}$ σ-אלגברה ולכן $1_A^{-1}(\emptyset)\in\mathcal{A}$
* $1_A^{-1}(\{0\})=\{\omega\in\Omega \mid 1_A(\omega)=0\}=\{\omega\in\Omega \mid \omega\notin A\}=A^c$ ומסגירות σ-אלגברה $\mathcal{A}$ להשלים $A^c\in\mathcal{A}$ מ"מ $1_A^{-1}(\{0\})\in\mathcal{A}$
* $1_A^{-1}(\{1\})=\{\omega\in\Omega \mid 1_A(\omega)=1\}=\{\omega\in\Omega \mid \omega\in A\}=A$ ונתון $A\in\mathcal{A}$ אזי $1_A^{-1}(\{1\})\in\mathcal{A}$
* $1_A^{-1}(\{0,1\})=\{\omega\in\Omega \mid 1_A(\omega)\in\{0,1\}\}=\Omega$ ולפי 3 $\Omega\in\mathcal{A}$ כי $\mathcal{A}$ σ-אלגברה ולכן $1_A^{-1}(\{0,1\})\in\mathcal{A}$

הראיתי שלכל $F\in\mathcal{F}_{1_A}$: $1_A^{-1}(F)\in\mathcal{A}$ אזי 1_A מ"מ שמעביר את $(\Omega,\mathcal{A},P)$ (מוגדר כי $1_A^{-1}(F)\in\mathcal{A}$) למרחב ההסתברות $(S_{1_A},\mathcal{F}_{1_A},P_{1_A})$ כך ש:

$$P_{1_A}:\mathcal{F}_{1_A}\to[0,1];\ P_{1_A}(F)=P(1_A^{-1}(F)).$$

■

③ נחשב את S_{1_A} לכל $t\in\mathbb{R}$:

$$\forall t<0: F_{1_A}(t)=P_{1_A}((-\infty,t])=P_{1_A}(\emptyset)=0$$

$$\forall 0\le t<1: F_{1_A}(t)=P_{1_A}((-\infty,t])=P_{1_A}(\{0\})=P(1_A^{-1}(\{0\}))=P(A^c)=1-P(A)$$

$$\forall t\ge 1: F_{1_A}(t)=P_{1_A}((-\infty,t])=P_{1_A}(\{0,1\})=P(1_A^{-1}(\{0,1\}))=P(\Omega)=1$$

■

(6) ראשית נגדיר את מרחב ההסתברות המקורי $(\Omega,\mathcal{A},P)$:

$\Omega=\binom{[N]}{n}$. $\mathcal{A}=2^{\Omega}$. $P:\mathcal{A}\to[0,1];\ P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

נסמן: $Y:\Omega\to\{n,\dots,N\};\ Y(w)=\max w$ (ב-w n מספרים שונים בין 1 ל-N ו-N הוא המקסימום.)

נסמן $S_Y=\{n,\dots,N\}$, $\mathcal{F}_Y=2^{S_Y}$. $A=2^{\Omega}$ ולכן בבירור Y^{-1} הוא לתוך $\mathcal{A}$ כי הוא תמיד לתוך 2^{Ω}.

לכן Y הוא מ"מ. מרחב ההסתברות שהוא מעביר

הוא: $(S_Y,\mathcal{F}_Y,P_Y)$ כאשר $P_Y:\mathcal{F}_Y\to[0,1];\ P_Y(F)=P(Y^{-1}(F))$.

$$\forall F\in\mathcal{F}_Y:\ P_Y(F)\overset{\{w\in\Omega\mid Y(w)=f\}\text{ זרות בזוגות}}{=}\sum_{f\in F}P(\{w\in\Omega\mid Y(w)=f\})=\sum_{f\in F}P(\{w\in\Omega\mid \max w=f\})$$

נבחין את S_Y כתת של $\mathbb{R}$ אזי:

$$\forall t<n:\ F_Y(t)=P_Y((-\infty,t])=P_Y(\emptyset)=0=\frac{\binom{\max\{0,\lfloor t\rfloor\}}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{\max\{0,\min\{N,\lfloor t\rfloor\}\}}{n}}{\binom{N}{n}}$$

$$\forall n\le t<N:\ (m=\lfloor t\rfloor)\ P_Y((-\infty,t])=P_Y(\{n,\dots,m\})=P(w\in\Omega\mid \max w\in\{n,\dots,m\})=P(w\in\Omega\mid \max w\le m)=$$

$$=\frac{|\{w\in\Omega\mid \max w\le m\}|}{|\Omega|}=\frac{|\{w\in\Omega\mid w\subseteq\{n,\dots,m\}\}|}{|\binom{[N]}{n}|}=\frac{|\binom{[m]}{n}|}{|\binom{[N]}{n}|}=\frac{\binom{m}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{\lfloor t\rfloor}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{\max\{0,\lfloor t\rfloor\}}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{\max\{0,\min\{N,\lfloor t\rfloor\}\}}{n}}{\binom{N}{n}}$$

$$\forall t\ge N:\ F_Y(t)=P_Y((-\infty,t])=P_Y(\{n,\dots,N\})=1=\frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{\min\{N,\lfloor t\rfloor\}}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{\max\{0,\min\{N,\lfloor t\rfloor\}\}}{n}}{\binom{N}{n}}$$

$$\Longrightarrow \forall t\in\mathbb{R}:\ F_Y(t)=\frac{\binom{\max\{0,\min\{N,\lfloor t\rfloor\}\}}{n}}{\binom{N}{n}}$$

■

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 7

1. X מ"מ בדיד. חשבו את פונקצית ההתפלגות של $Y=\alpha X+\beta$ כאשר β,α ממשיים, $\alpha\neq 0$. נגדיר $Z=F_X\circ X$. הראו כי Z מ"מ וחשבו את F_Z.

2. הסבירו למה פונקצית התפלגות אינה חייבת להיות רציפה משמאל.

3. X מ"מ עם פונקצית התפלגות F_X. נגדיר $Y=\sin X$. חשבו את F_Y (אין צורך להוכיח כי Y מ"מ).

4. מסעדה שרות כוללת $5n-7$ תחנות שרות. כל אחד מ- $10n+2$ לקוחות מחליט בהסת' α לפנות למסעדה, ובהסת' $1-\alpha$ לא לפנות. לקוח שהחליט לפנות בוחר באקראי באחת מ- $5n-7$ תחנות השרות, וכל זה באופן ב"ת בלקוחות האחרים.

א. חשבו את $p_n(k)$ - ההסת' שלתחנה מסוימת יפנו k לקוחות.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} p_n(k)$.

5. נסתכל על סדרת ניסויי ברנולי ב"ת, כל ניסוי מצליח בהסתברות p. יהי X_1 מס' הכישלונות עד ההצלחה הראשונה ו- X_2 מס' הכישלונות שבין ההצלחה הראשונה והשניה. חשבו את ההתפלגות המשותפת P_{X_1,X_2}.

תורת ההסתברות תשס"ו – פתרון לגליון 7.

$\boxed{1}$

$$F_Y(a) = P\{\omega: \alpha X(\omega)+\beta \le a\} = \begin{cases} P\{\omega: X(\omega)\geq \frac{a-\beta}{\alpha}\} = 1-F_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) + p_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) & : \alpha<0 \\ P\{\omega: X(\omega)\le \frac{a-\beta}{\alpha}\} = F_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) & : \alpha>0 \end{cases}$$

לצורך העניין נוכל לכתוב $X:(\Omega,\mathcal{F},P)\to(S_X,\mathcal{F}_X,P_X)$. ($\Omega$ בן מניה)

על כן, אם נסמן $S_Z=F_X(S_X)$ אז: $Z:(\Omega,\mathcal{F},P)\to(S_Z,\mathcal{F}_Z,P_Z)$.

יש לבדוק (א) לכל $A\in\mathcal{F}_Z$, $Z^{-1}(A)\in\mathcal{F}$ (בעצם זה אומר ש- Z פונקציה מדידה)

(ב) P_Z פונקצית הסתברות.

(א) תהי $A\in\mathcal{F}_Z$. אזי $A\subset S_Z=F_X(S_X)$ לכן $F_X^{-1}(A)\subset S_X$ כלומר $F_X^{-1}(A)\in\mathcal{F}_X$

ולכן $Z^{-1}(A)=(F_X\circ X)^{-1}(A)=X^{-1}(F_X^{-1}(A))\in\mathcal{F}$ (כי X מ"מ).

(ב) בעצם הכל הנה מסתכם בהגדרת P_Z: $P_Z(A)=P(Z^{-1}(A))$

אזי תכונות פונקצית ההסתברות נובעות[(א)]. (התכונות הן: $P_Z(S_Z)=1$, $0\le P_Z\le 1$,

ולכל אוסף קבוצות זרות $\{A_n\}\subset\mathcal{F}_Z$ מתקיים $P_Z(\bigcup_n A_n)=\sum_n P_Z(A_n)$).

(א) זה הוכח בהרצאה או לפחות נמצא ברשימות של הקורס.

עתה נחשב את פונקצית ההתפלגות: נניח כעת $0\le a\le 1$:

$$F_Y(a) = P_Y(-\infty,a] = P\{\omega: F_X(X(\omega))\le a\} =$$

$$= P\{\omega: X(\omega)\le F_X^{-1}(a)\} = F_X(F_X^{-1}(a)) = a$$ (F_X מונוטונית לא יורדת)

קל לבדוק כי $F_Y(a)=1$ עבור $a>1$! $F_Y(a)=0$ ל- $a<0$.

$\boxed{2}$ תהי $a\in\mathbb{R}$ ונקח סדרה מונוטונית $a_n\nearrow a$. אזי מרציפות ההסתברות:

$$F_X(a_n) = P_X(-\infty,a_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} P_X(-\infty,a) = F_X(a)-p_X(a)$$

שימו לב!

לכן אם $p_X(a)\neq 0$, F_X לא תהיה רציפה ב- a.

$\boxed{3}$ נקבל את העובדה כי Y גם הוא מ"מ, $Y:(\Omega,\mathcal{F},P_X)\to(S,A,P_Y)$

כאשר $(\Omega,\mathcal{F},P_X)$ הוא מרחב ההסתברות המוגדר ע"י X, ואת (S,A,P_Y) יש

צורך להגדיר. היות ואנו מתעסקים פה במ"מ בדידים בלבד, נוכל

לכתוב $\mathcal{F}=2^{\Omega}$, $\Omega=\{x_1,x_2,\dots\}\subseteq\mathbb{R}$

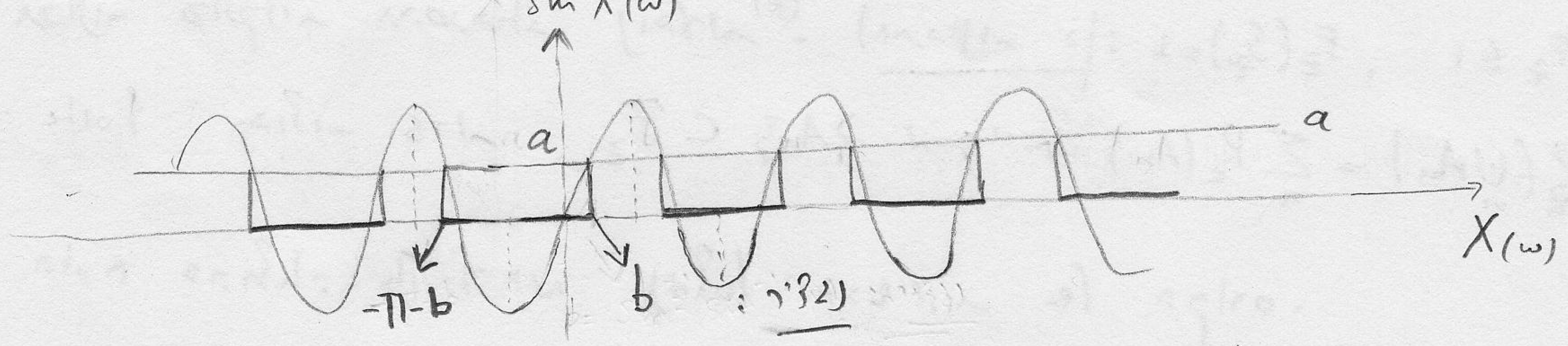
ולכן $S=\{\sin x_i: x_i\in\Omega\}$, $A=2^S$.

את P_Y נקבל כלהלן:

$$y\in 2^S:\quad P_Y(y)=\cancel{P_X}P\{\omega: \sin X(\omega)=y\}$$
$$=\cancel{P_X}P\{\omega: X(\omega)=\underbrace{\sin^{-1}(y)}_{\text{זו קבוצה } \subseteq \mathbb{R}}\}$$

נעבור לחישוב F_Y:

$$-1<\underline{a<1}:\quad F_Y(a)=P_{\cancel{X}}\{\omega: Y(\omega)\le a\}=P\{\omega: \sin X(\omega)\le a\}$$



$$=P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{\omega: -2\pi n-\pi-b\le X(\omega)\le 2\pi n+b\}\Big)$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}P_X\big([-2\pi n-\pi-b,\,2\pi n+b]\big)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big[F_X(2\pi n+b)-F_X(-2\pi n-\pi-b)+p_X(-2\pi n-\pi-b)\Big]$$

$a\le -1\quad F_Y(a)=0\qquad,\qquad 1\le a:\quad F_Y(a)=1$

$\boxed{5}$ נסתכל על הזוג (X_1,X_2) כעל הפונקציה: $(X_1,X_1):(\Omega,\mathcal{F},P)\to(S_{X_1}\times S_{X_2},A,P_{X_1,X_2})$

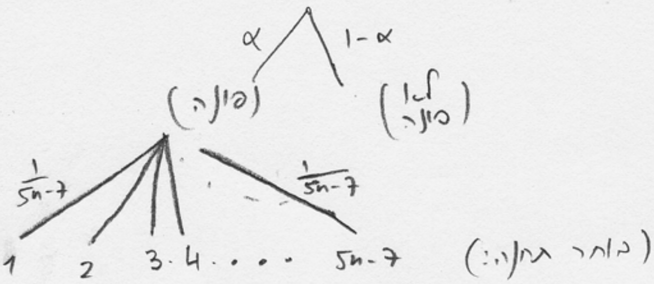
כאשר אפשר לחשוב על $(\Omega,\mathcal{F},P)$ כעל המרחב בו מתרחשים "ניסויי" הברנולי.

מעצם הגדרת X_1,X_2, ברור כי $S_{X_1}=S_{X_2}=\mathbb{N}$ ולכן נבחר $A=2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

נותר לחשב את P_{X_1,X_2}: יהיו $k,m\in\mathbb{N}$ אזי

$$P_{X_1,X_2}(k,m)=P\{\omega: X_1(\omega)=k,\ X_2(\omega)=m\}=p(1-p)^{k}\,p(1-p)^{m}=p^2(1-p)^{k+m}$$

$\boxed{4}$ מכיוון שהלקוחות ב"ת, נסתכל כרגע על לקוח בודד. נגדיר ניסוי מורכב: הלקוח מחליט לפנות או לא לפנות, ואז הוא מגריל באופן אחיד תחנה אחת מתוך $5n-7$ תחנות השרות:



על כן, לפי בניית מודל ההסתברות בניסוי המורכב, נקבל כי

$$p = P\left\{\begin{matrix}\text{הלקוח פונה}\\ \text{לתחנה מסוימת}\end{matrix}\right\} = \frac{\alpha}{5n-7}$$

כעת נחזור לשאלה: כל אחד מ- $10n+2$ הלקוחות כאמור בוחר באופן ב"ת באחרים. נוכל להגדיר מ"מ:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{לקוח } i \text{ פונה לתחנה המסוימת} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, 10n+2$$

X_i ב"ת $\Rightarrow$ $X = \sum_{i=1}^{10n+2} X_i$ (= מס' הלקוחות שפנו לתחנה המסוימת), הוא מ"מ בינומי: $X \sim B(10n+2, p)$.

לכן: (א)

$$p_n(k) = \binom{10n+2}{k} p^k (1-p)^{10n+2-k} = \binom{10n+2}{k}\left(\frac{\alpha}{5n-7}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{5n-7}\right)^{10n+2-k}$$

(ב) נגדיר: $\lambda_n = (10n+2)\cdot p = \frac{10n+2}{5n-7}\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\alpha = \lambda$. נרצה לקבל קירוב

$$p_n(k) = \binom{10n+2}{k}\left(\frac{\lambda_n}{10n+2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{10n+2}\right)^{10n+2-k} = \frac{\lambda_n^k}{k!}\cdot\frac{(10n+2)(10n+1)\cdots(10n+2-k+1)}{(10n+2)^k}\left(1-\frac{\lambda_n}{10n+2}\right)^{10n+2-k}$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{10n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{10n+2}\right)\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda_n}{10n+2}\right)^{10n+2}}{\left(1-\frac{\lambda_n}{10n+2}\right)^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot e^{-\lambda}$$

ינאי גונצ'רובסקי

תרגול יום א' 13-16

(4|4)

- תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 7

1) בתנאי השאלה: א) יהי ... $v \in \mathbb{R}$, אזי: (נסמן את מרחב ההסתברות המקורי: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$)

$F_Y(v) = P_Y((-\infty, v]) = P(Y^{-1}((-\infty, v])) = P(\{w \in \Omega \mid Y(w) \le v\}) =$

$= P(\{w \in \Omega \mid \alpha X(w) + \beta \le v\}) = P(\{w \in \Omega \mid \alpha X(w) \le v - \beta\})$

אם $\alpha > 0$: $F_Y(v) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) \le \frac{v-\beta}{\alpha}\}) = P(X^{-1}((-\infty, \frac{v-\beta}{\alpha}])) = P_X((-\infty, \frac{v-\beta}{\alpha}]) = F_X(\frac{v-\beta}{\alpha})$

אחרת $\alpha < 0$: $F_Y(v) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) \ge \frac{v-\beta}{\alpha}\}) = P(X^{-1}([\frac{v-\beta}{\alpha}, \infty))) = P_X([\frac{v-\beta}{\alpha}, \infty)) =$

$= P_X((-\infty, \frac{v-\beta}{\alpha})^c) = 1 - P_X((-\infty, \frac{v-\beta}{\alpha})) = 1 - P_X((-\infty, \frac{v-\beta}{\alpha}]) - P_X(\frac{v-\beta}{\alpha}) = 1 - F_X(\frac{v-\beta}{\alpha}) + P_X(\frac{v-\beta}{\alpha})$ ✓

ב) בהמשך הסימונים: נסמן: $S_Z = \{F_X(v) \mid v \in S_X\}$

לא סופית אלא בת-מניה. X בדיד $\Leftarrow$ S_X סופית $\Leftarrow$ ~~...~~

S_Z סופית. נסמן $\mathcal{F}_Z = 2^{S_Z}$. נגדיר כעת את

Z - מ"מ כבשאלה: $Z: \Omega \to S_Z : Z(w) = F_X(X(w))$. (לכל $w \in \Omega$ יש $X(w) \in S_X$ ולכן $F_X(X(w)) \in S_Z$)

ויהי $F \in \mathcal{F}_Z$, אזי: $Z^{-1}(F) = X^{-1}(F_X^{-1}(F))$ ✓

~~נראה כי~~ $F_X^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$

~~כל ... $\mathcal{F}_Z = 2^{S_Z}$ ...~~

מכיוון ש $\{v \in S_X \mid F_X(v) \in F\} \subseteq S_X$, אזי $\{v \in S_X \mid F_X(v) \in F\} \in \mathcal{F}_X$ ולכן $F_X^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$ ולכן

כי X מ"מ $Z^{-1}(F) = X^{-1}(F_X^{-1}(F)) \in \mathcal{A}$

~~נסכם~~ יהי $v \in S_X$. מכיוון ש F_X מונוטונית, $S_X \subseteq \mathbb{R}$.

~~ונסמן ... $v' \in S_X$ ...~~

~~סופית~~. $F_X(v)$ מונוטונית $\Leftarrow$ ... מאורע

$F_X(v')$ מונוטונית $\Leftarrow$ $S_X \cap (-\infty, v']$ מאורע $\Leftarrow$ $S_X \cap (v', \infty)$.

אם: $S_X \cap [v, \infty) = S_X \cap (v', \infty)$ מהמשלים, v'; אזי: מאורעות

σ-אלגברה סגורה לחיתוך $\{v\} = (S_X \cap [v, \infty)) \cap (S_X \cap (-\infty, v])$ - מאורע.

אזי לכל $v \in S_X$, $\{v\}$ מאורע, אזי מאוחדות σ-אלגברה

סגירות, כל ~~...~~ תת של S_X היא מאורע $\Leftarrow$ $\mathcal{F}_X = 2^{S_X}$.

יהי $v \in \mathbb{R}$, אזי: $F_Z(v) = P_Z((-\infty, v]) = P(Z^{-1}((-\infty, v])) = P(\{w \in \Omega \mid F_X(X(w)) \le v\})$

שים לב - אפשר לסדר יותר!

3) כי ההתפלגות מוגדרת באמצעות א"ש חלש: $\le$, ע"כ ~~...~~ רציפות מימין

לכל $v \in \mathbb{R}$: $\lim_{v' \to v^+} F_X(v') = \lim_{v' \to v^+} P_X((-\infty, v']) \stackrel{*}{=} P_X(\lim_{v' \to v^+} (-\infty, v']) = P_X((-\infty, v]) = F_X(v)$ ✓

* רציפות יורדת

אבל בגלל של הא"ש החלש, אם נחשב $\lim_{v' \to v^-} F_X(v')$ נקבל $P_X((-\infty, v))$ (פתוח!)

ואם $P_X(v) \neq 0$ אזי הגבול הזה שונה מ- $F_X(v)$ ולכן F_X לא רציפה כזה

משמאל ב- v.

3) יהי $v\in\mathbb{R}$, אם $v<-1$: $F_Y(v)=P_Y((-\infty,v])=P(\{w\in\Omega|Y(w)\le v\})=P(\{w\in\Omega|\sin X(w)\le v\})=P(\emptyset)=0$

אם $v\ge 1$: $F_Y(v)=P_Y((-\infty,v])=P(\{w\in\Omega|Y(w)\le v\})=P(\{w\in\Omega|\sin X(w)\le v\})=P(\{w\in\Omega|X(w)\in\mathbb{R}\})=P(\Omega)=1$

אחרת $-1\le v<1$, קיים $-\frac{\pi}{2}\le a\le\frac{\pi}{2}$ כך ש: $\sin a=v$

$$F_Y(v)=P_Y((-\infty,v])=P(\{w\in\Omega|Y(w)\le v\})=P(\{w\in\Omega|\sin X(w)\le v\})=$$
$$=P(\{w\in\Omega|\exists z\in\mathbb{Z}: (2z-1)\pi-a\le X(w)\le 2\pi z+a\})=$$
$$=P\Big(\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}\{w\in\Omega|(2z-1)\pi-a\le X(w)\le 2\pi z+a\}\Big)=\sum_{z\in\mathbb{Z}}P(\{w\in\Omega|(2z-1)\pi-a\le X(w)\le 2\pi z+a\})=$$
$$=\sum_{z\in\mathbb{Z}}P_X([(2z-1)\pi-a,2\pi z+a])=\sum_{z\in\mathbb{Z}}\big(F_X(2\pi z+a)-F_X((2z-1)\pi-a)+P_X((2z-1)\pi-a)\big)$$

4) ~~[illegible]~~ יהי $1\le R\le 5n-7$ מס' חנות שירות.

נגדיר מ"מ: N_R – מס' הלקוחות שפנו לחנות שירות זו.

~~[illegible]~~

ההסתברות שלקוח מסוים יפנה לחנות זאת היא:

$$P(\{\text{הלקוח פנה לשירות ובחר בחנות זו}\})=P(\{\text{הלקוח פנה לשירות}\})P(\{\text{בחר בחנות זו}|\text{הלקוח פנה לשירות}\})=\alpha\frac{1}{5n-7}=\frac{\alpha}{5n-7}$$

ובאופן בלתי תלוי באחרים, כלומר N_R הוא מס' ההצלחות מבין $10n+2$ נסיונות שבכל אחד הסתברות $\frac{\alpha}{5n-7}$, באופן בלתי תלוי בשאר הנסיונות, כלומר $N_R\sim B(10n+2,\frac{\alpha}{5n-7})$, אזי,

$$P_n(k)=P_{N_R}(k)=\binom{10n+2}{k}\left(\frac{\alpha}{5n-7}\right)^k\left(1-\frac{\alpha}{5n-7}\right)^{10n+2-k}=\binom{10n+2}{k}\left(\frac{\alpha}{5n-7}\right)^k\left(\frac{5n-7-\alpha}{5n-7}\right)^{10n+2-k}=\binom{10n+2}{k}\frac{\alpha^k\cdot(5n-7-\alpha)^{10n+2-k}}{(5n-7)^{10n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+2)!}{k!(10n+2-k)!}\frac{\alpha^k(5n-7-\alpha)^{10n+2-k}}{(5n-7)^{10n+2}}=$$

$$\frac{\alpha^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{(5n-7-\alpha)^{10n+2}}{(5n-7)^{10n+2}}\cdot\frac{(10n+2)!}{(10n+2-k)!}\cdot\frac{1}{(5n-7-\alpha)^k}=\frac{\alpha^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{5n-7}\right)^{10n+2}\cdot\frac{(10n+2)!}{(10n+2-k)!(5n-7-\alpha)^k}=$$

$$\frac{\alpha^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\left(1-\frac{\alpha}{5n-7}\right)^{5n-7}\right)^2\cdot\left(1-\frac{\alpha}{5n-7}\right)^{16}\cdot\frac{10n+2}{5n-7-\alpha}\cdot\frac{10n+1}{5n-7-\alpha}\cdots\frac{10n+2-k+1}{5n-7-\alpha}\right]$$

$$=\frac{\alpha^k}{k!}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{5n-7}\right)^{5n-7}\right)^2\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{5n-7}\right)\right)^{16}\prod_{i=0}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10n+2-i}{5n-7-\alpha}\right)=\frac{\alpha^k}{k!}(e^{-\alpha})^2\cdot1\cdot\prod_{i=0}^{k-1}2=$$

$$=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-2\alpha}2^k=\frac{(2\alpha)^k}{k!}e^{-2\alpha}$$

כלומר כאשר $n\to\infty$, N_R מתפלג פואסונית עם פרמטר 2α.

(5) בתנאי השאלה:

יהיו n,m טבעיים,

אזי:

$$P_{X_1,X_2}(n,m) = P(\{w\in\Omega \mid X_1(w)=n \wedge X_2(w)=m\}) =$$

$$P\left(\left\{\begin{matrix}\text{ניסויים } 1,\dots,n-1 \text{ נכשלו} \\ \text{ניסוי } n \text{ הצליח} \\ \text{ניסויים } n+1,\dots,n+m-1 \text{ נכשלו} \\ \text{ניסוי } n+m \text{ הצליח}\end{matrix}\right\}\right) \overset{\text{ניסויים בת"ל}}{=} \prod_{i=1}^{n-1} P(\{\text{ניסוי } i \text{ נכשל}\})\, P(\{\text{ניסוי } n \text{ הצליח}\}) \prod_{i=n+1}^{n+m-1} P(\{\text{ניסוי } i \text{ נכשל}\})\, P(\{\text{ניסוי } n+m \text{ הצליח}\}) =$$

$$= (1-p)^{n-1}\, p\, (1-p)^{m-1}\, p = (1-p)^{n+m-2}\, p^2$$

חישבתי את ההתפלגות לכל יחידון, אזי ההתפלגות מוגדרת באופן יחיד:

$$\forall R \subseteq \mathbb{N}^2 : P_{X_1,X_2}(R) = \sum_{r\in R} P_{X_1,X_2}(r_1,r_2) = \sum_{r\in R} (1-p)^{r_1+r_2-2}\, p^2$$

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון תרגילים 8

1. $X:(\Omega,\mathcal{F},P)\to(S,\mathcal{F}_S,P_X)$ מ"מ. הוכיחו כי האוסף $\sigma(X):=\{X^{-1}(A):A\in\mathcal{F}_S\}$ הוא σ-אלגברה המוכלת ב- $\mathcal{F}$.

2. הוכיחו כי שני מ"מ X,Y ב"ת אם"ם לכל $A\in\mathcal{F}_X$, ולכל $B\in\mathcal{F}_Y$, $P_{X,Y}(A\times B)=P_X(A)P_Y(B)$, כאשר $X\to(S_X,\mathcal{F}_X,P_X)$ וכנ"ל ל- Y.

3. הוכיחו / הפריכו: לכל שני מ"מ מתקיים $\sum_{x\in S_X}p_{X|Y}(x|y)=1$, $\sum_{y\in S_Y}p_{X|Y}(x|y)=1$.

4. במשרד הדואר שלושה דלפקים A,B,C. הפקידה בדלפק A מקבלת בממוצע 2 לקוחות בשעה, והפקידות ב- B ו- C מקבלות 3 לקוחות בשעה בממוצע. נניח כי ההספק של פקידה אינו תלוי בהספק של האחרות. מירי הגיעה לדואר. לפניה עומדים 4 אנשים בתור המשותף לכל הלקוחות. מה ההסתברות שהיא תצטרך לחכות יותר מ- 45 דקות? הניחו התפלגות פואסון לפקידות, עם הצדקה לכך.

5. יהיו $X\sim B(5,\frac{1}{2})$, $Y\sim B(3,\frac{1}{2})$, $Z\sim B(2,\frac{1}{2})$.
   א. אם X,Y,Z ב"ת חשבו את $P(\{\omega:X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)=5\})$.
   ב. האם ייתכן $P(\{\omega:X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)=5\})=0$?
   ג. האם ייתכן $P(\{\omega:X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)=5\})=1$?

6. מטילים שתי קוביות הוגנות. מצא את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y וציין אם הם ב"ת או לא בכל אחד מהמקרים הבאים:
   א. $X=$ "הערך הגבוה ביותר שהופיע בין שתי הקוביות", $Y=$ "סכום הערכים שהופיעו על שתי הקוביות".
   ב. $X=$ "הערך על הקוביה הראשונה", $Y=$ "הערך הגבוה בין שתי הקוביות".
   ג. $X=$ "הערך הגבוה מבין שתי הקוביות", $Y=$ "הערך הנמוך מבין שתי הקוביות".

7. יהי X מ"מ ויהיו f,g שתי פונקציות ממשיות. הוכיחו כי

$$E[f(X)g(X)]\le\Big(E[f^2(X)]E[g^2(X)]\Big)^{1/2}$$

8. יהיו X,Y שני מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות ותהי $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. הוכיחו את חוק הסטטיטי-קאי חסר ההכרה:

$$E[g(X,Y)]=\sum_{x,y}g(x,y)p_{X,Y}(x,y)$$

תורת ההסתברות תשס"ו - פתרון לגליון 8.

1. $\sigma(X)$ σ-אלגברה: (i) $S\in\mathcal{F}_S$, $\Omega=X^{-1}(S)$, לכן $\Omega\in\sigma(X)$; (ii) יהי $B=X^{-1}(A)$

אז $A\in\mathcal{F}_S \Rightarrow A^c\in\mathcal{F}_S \Rightarrow B^c=X^{-1}(A^c)\in\sigma(X)$. (iii) יהיו $\{B_n=X^{-1}(A_n)\}$

B_n זרים $\Leftarrow$ A_n זרים $\Leftarrow$ $\bigcup A_n\in\mathcal{F}_S$ $\Leftarrow$ $\bigcup B_n=X^{-1}(\bigcup A_n)\ni\sigma(X)$.

X מ"מ $\Leftarrow$ $\sigma(X)\subset\mathcal{F}$.

2. (1) X,Y ב"ת $\Longleftrightarrow$ (2) $\forall (A,B)\in\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y\quad P_X(A)P_Y(B)=P_X(A)P_Y(B)$.

<u>הוכחה (2) $\Leftarrow$ (1)</u>: מספיק להוכיח כי $\sigma(X)$ ו- $\sigma(Y)$ σ-אלגבראות ב"ת:

לכל $(A',B')\in\sigma(X)\times\sigma(Y)$ מתקיים $P_{X,Y}(A',B')=P_X(A')P_Y(B')$, נסמן ב- $(\Omega,\mathcal{F},P)$

המרחב המקורי, כלומר שעליו מוגדרים X,Y. משאלה 1, ראינו כי $\sigma(X),\sigma(Y)\subset\mathcal{F}$.

לכן אם (2) מתקיים, אז בפרט הוא נכון לכל $(A,B)\in\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y$ כנדרש.

הכיוון השני היה בכיתה.

3.

$$\sum_{x\in S_X}p_{X|Y}(x|y)=P_{X|Y}(S_X|y)=\frac{P_{X,Y}(S_X,y)}{P_Y(y)}=\frac{P_Y(y)}{P_Y(y)}=1$$

באופן דומה,

$$\sum_{y\in S_Y}p_{X|Y}(x|y)=P_{X|Y}(x|S_Y)=\frac{P_{X,Y}(x,S_Y)}{P_Y(S_Y)}=p_X(x)$$

וזה לא חייב להיות שווה 1.

7. לפי חוק הסטטיסטיקאי חסר ההכרה:

$$E[f(X)g(X)]=\sum_{x\in S_X}f(x)g(x)p_X(x)$$

X מ"מ בדיד: לכן $S_X=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\}$ $\Leftarrow$

$$E[f(X)g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)g(x_i)p_X(x_i)$$

נסתכל על

$$E_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)g(x_i)p_X(x_i)\overset{(p_X\geq 0)}{=}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{f(x_i)\sqrt{p_X(x_i)}}_{a_i}\,\underbrace{g(x_i)\sqrt{p_X(x_i)}}_{b_i}$$

ונשתמש בא"ש קושי שוורץ:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}$$

<u>לכן</u>:

$$|E_n|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}f^2(x_i)p_X(x_i)\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}g^2(x_i)p_X(x_i)\right)^{1/2}\leq E[f^2(X)]^{1/2}\cdot E[g^2(X)]^{1/2}$$

הא"ש שווה נכון לכל $n\in\mathbb{N}$, לכן נכון גם בגבול של E_n כאשר $n\to\infty$:

$$E[f(X)g(X)]\leq|E[f(X)g(X)]|\leq E[f^2(X)]^{1/2}E[g^2(X)]^{1/2}$$

8 נסמן:

$$Y:(\Omega,\mathcal{F},P)\to(S_Y,\mathcal{F}_Y,P_Y),\quad X:(\Omega,\mathcal{F},P)\to(S_X,\mathcal{F}_X,P_X)$$

אז $Z=g(X,Y):\Omega\times\Omega\to S_Z=g(S_X,S_Y)$ מ"מ.

ההתפלגות של Z היא:

$$\forall A\subset S_Z,\quad P_Z(A)=P\{\omega:\ g(X(\omega),Y(\omega))\in A\}$$

על פי ההגדרה:

$$E[g(X,Y)]=\sum_{z\in S_Z} z\cdot P_Z(z)=\sum_{z\in S_Z} z\ P\{\omega:\ g(X(\omega),Y(\omega))=z\}$$

$$=\sum_{g(x,y)\in S_Z} g(x,y)\cdot P\{\omega:(X(\omega),Y(\omega))=(x,y)\}=\sum_{g(x,y)\in S_Z} g(x,y)\ P_{X,Y}(x,y)=$$

$$=\sum_{\substack{x\in S_X\\ y\in S_Y}} g(x,y)\,P_{X,Y}(x,y)\ .$$

1. נגדיר מ"מ X,Y,Z להיות מס' האנשים שהפקידות A,B,C מקבלות (בהתאם) תוך 45 דקות. אז $X \sim Poi(\frac{3}{2})$, $Y,Z \sim Poi(\frac{9}{4})$. נתון כי X,Y,Z מ"מ ב"ת, לכן $X+Y+Z \sim Poi(\frac{3}{2}+2\frac{9}{4}) = Poi(6)$.
לכן

$$F_{X+Y+Z}(4) = e^{-6}\Big(1+6+\frac{6^2}{2}+\frac{6^3}{6}+\frac{6^4}{24}\Big) \simeq 0.28$$

2. א. אם X,Y,Z ב"ת אז $X+Y+Z \sim Binom(10,\frac{1}{2})$, לכן $p_{X+Y+Z}(5) = \binom{10}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{10} \simeq 0.24$

ב. כן. המ"מ לאו דווקא ב"ת. אם למשל $X = Y+Z$, אז תמיד $X+Y+Z$ הוא זוגי, ולכן $P(\{\omega : X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)=5\}) = 0$. לדוגמא מטילים מטבע 5 פעמים, ו- X הוא מס' הפעמים שיצא ראש, Y הוא מס' הפעמים שיצא ראש בשלוש ההטלות הראשונות, ו- Z מס' הפעמים שיצא ראש בשתי ההטלות האחרונות.

ג. כן. ניתן למשל להגדיר $X = 5-Y-Z$, אז בוודאי מתקיים $P(\{\omega : X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)=5\}) = 1$.

3. א. X = "הערך הגבוה ביותר שהופיע בין שתי הקוביות", Y = "סכום הערכים שהופיעו על שתי הקוביות".

S_X, S_Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$p_{X,Y}(5,7) = \frac{2}{36}$, אבל $p_X(5)p_Y(7) = \frac{3}{2}\frac{1}{36}$ לכן X,Y לא ב"ת.

ב. X = "הערך על הקוביה הראשונה", Y = "הערך הגבוה בין שתי הקוביות".

S_X, S_Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

$p_{X,Y}(3,6) = \frac{1}{36}$ אבל $p_X(3)p_Y(6) = \frac{1}{36}\frac{11}{36}$. לכן X,Y לא ב"ת.

ג. X = "הערך הגבוה מבין שתי הקוביות", Y = "הערך הנמוך מבין שתי הקוביות".

S_X, S_Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$p_{X,Y}(4,3) = \frac{2}{36}$, אבל $p_X(4)p_Y(3) = (\frac{7}{36})^2$ לכן X,Y לא ב"ת.

ינאי גונצ'רובסקי
תרגיל יום ג' 546

4/4

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון תרגילים 8

(1) בתנאי השאלה. (א) יהי $S\in\sigma(X)$, אזי קיים $A\in F_S$ כך ש $S=X^{-1}(A)$. X מ"מ $\Leftarrow X^{-1}(A)\in F \Rightarrow S\in F$
אזי $\sigma(X)$ מוכלת ב- F.

(ב) יהי $S\in\sigma(X)$ אזי קיים $A\in F_S$ כך ש $S=X^{-1}(A)$.

$S^c=\Omega\setminus S=\Omega\setminus X^{-1}(A)=\{w\in\Omega \mid X(w)\notin A\}=\{w\in\Omega \mid X(w)\in A^c\}=X^{-1}(A^c)$.

F_S σ-אלגברה $\Rightarrow A^c\in F_S \Rightarrow X^{-1}(A^c)\in\sigma(X)$.

(ג) יהיו $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\in\mathbb{N}$: $S_i\in F_S$, אזי קיימים $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך שלכל $i\in\mathbb{N}$: $S_i=X^{-1}(A_i)$, אזי:
$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{w\in\Omega \mid X(w)\in A_i\}=\{w\in\Omega \mid X(w)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\}=X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)$

F_S σ-אלגברה $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in F_S \Rightarrow X^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\in\sigma(X)$,

(3) F_S σ-אלגברה, $\Rightarrow \emptyset\in F_S \Rightarrow X^{-1}(\emptyset)\in\sigma(X)$
אבל $X^{-1}(\emptyset)=\{w\in\Omega \mid X(w)\in\emptyset\}=\emptyset \Rightarrow \emptyset\in\sigma(X)$.

(4) F_S σ-אלגברה $\Rightarrow S\in F_S \Rightarrow X^{-1}(S)\in\sigma(X)$
אבל $X^{-1}(S)=\{w\in\Omega \mid X(w)\in S\}=\Omega \Rightarrow \Omega\in\sigma(X)$

אזי $\sigma(X)$ היא σ-אלגברה המוכלת ב- F.

(2) (א) אם X,Y מ"מ בת"ל אזי לכל $a\in S_X$ ולכל $b\in S_Y$: $P_{X,Y}(a,b)=P_X(a)P_Y(b)$ יהיו (נניח $F_X=2^{S_X}$, $F_Y=2^{S_Y}$) $A\in F_X$, $B\in F_Y$, אזי:

עדיף לא להוכיח בווינגייט היחידות, כי זה רלוונטי רק לתרגיל הבא.

$$P_{X,Y}(A\times B)=\sum_{(a,b)\in A\times B}P_{X,Y}(a,b)=\sum_{a\in A}\sum_{b\in B}P_{X,Y}(a,b)\underset{\text{בת"ל}}{=}\sum_{a\in A}\sum_{b\in B}P_X(a)P_Y(b)=$$

$$=\left(\sum_{a\in A}P_X(a)\right)\left(\sum_{b\in B}P_Y(b)\right)=P_X(A)P_Y(B)$$

גע'ת. (ב) אם X,Y מ"מ (נניח גם כאן $F_X=2^{S_X}$, $F_Y=2^{S_Y}$) כך שלכל $A\in F_X$, $B\in F_Y$ מתקיים: $P_{X,Y}(A\times B)=P_X(A)P_Y(B)$:
יהיו $a\in S_X$, $b\in S_Y$, אזי (מההנחה על F_X,F_Y): $\{a\}\in F_X,\{b\}\in F_Y$
ומהגדרת P,p: $p_{X,Y}(a,b)=P_{X,Y}(\{a\}\times\{b\})=P_X(\{a\})P_Y(\{b\})=p_X(a)p_Y(b)$

3) א) כן. יהיו $X:(\Omega,F,P)\to(S_X,F_X,P_X)$, $Y:(\Omega,F,P)\to(S_Y,F_Y,P_Y)$ מ"מ

כך ש $F_X=2^{S_X}$, $F_Y=2^{S_Y}$ אזי:

יהי $b\in S_Y$ כך ש $P_Y(b)\neq 0$ אזי:

$$\sum_{a\in S_X}P_{X|Y}(a|b)=\sum_{a\in S_X}\frac{P_{X,Y}(a,b)}{P_Y(b)}=\frac{\sum_{a\in S_X}P_{X,Y}(a,b)}{P_Y(b)}=\frac{\sum_{a\in S_X}P_{X,Y}(\{a\},\{b\})}{P_Y(\{b\})}=$$

$$=\frac{P_{X,Y}(\bigcup_{a\in S_X}\{a\},\{b\})}{P_Y(\{b\})}=\frac{P_{X,Y}(S_X,\{b\})}{P_Y(\{b\})}=\frac{P_Y(\{b\})}{P_Y(\{b\})}=1$$

■

ב) יהיו $Y\sim B(1,\frac{1}{2})$, $X\sim B(1,1)$ ב"ת. $1\in S_X$.

$$\sum_{b\in S_Y}P_{X|Y}(1|b)=\sum_{b\in S_Y}\frac{P_{X,Y}(1,b)}{P_Y(b)}=\sum_{b\in S_Y}\frac{P_X(1)P_Y(b)}{P_Y(b)}=\sum_{b\in S_Y}P_X(1)=P_X(1)\cdot|S_Y|=$$

$$=1\cdot 2=2\neq 1$$

אזי הטענה איננה נכונה לכל שני מ"מ.

■

4) אח"כ

5) א) במקרה כזה: (נסמן $A=\{(a,b,c)\mid 0\le a\le 5, 0\le b\le 3, 0\le c\le 2, a+b+c=5\}$)

$$P(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)+Y(\omega)+Z(\omega)=5\})=P\Big(\bigcup_{(a,b,c)\in A}\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=a\wedge Y(\omega)=b\wedge Z(\omega)=c\}\Big)=$$

$$=\sum_{(a,b,c)\in A}P(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)=a\wedge Y(\omega)=b\wedge Z(\omega)=c\})=\sum_{(a,b,c)\in A}P_{X,Y,Z}(a,b,5-a-b)\overset{\text{אי-תלות}}{=}\sum_{(a,b,c)\in A}p_X(a)p_Y(b)p_Z(c)=$$

$$=\sum_{(a,b,c)\in A}\binom{5}{a}\frac{1}{2}^{a}\frac{1}{2}^{5-a}\binom{3}{b}\frac{1}{2}^{b}\frac{1}{2}^{3-b}\binom{2}{c}\frac{1}{2}^{c}\frac{1}{2}^{2-c}=\sum_{(a,b,c)\in A}\binom{5}{a}\binom{3}{b}\binom{2}{c}\cdot 2^{-10}=2^{-10}\Big(\sum_{(a,b,c)\in A}\binom{5}{a}\binom{3}{b}\binom{2}{c}\Big)=$$

מכפלה ב"ת כך ש- X+Y+Z ...

$$\boxed{A=\{(0,3,2),(1,2,2),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,3,0),(3,0,2),(3,1,1),(3,2,0),(4,1,0),(4,0,1),(5,0,0)\}}$$

$$=2^{-10}\Big(\binom{5}{0}\binom{3}{3}\binom{2}{2}+\binom{5}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{2}+\binom{5}{1}\binom{3}{3}\binom{2}{1}+\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{2}+\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{5}{2}\binom{3}{3}\binom{2}{0}+\binom{5}{3}\binom{3}{0}\binom{2}{2}+\binom{5}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{3}\binom{3}{2}\binom{2}{0}+\binom{5}{4}\binom{3}{1}\binom{2}{0}+\binom{5}{4}\binom{3}{0}\binom{2}{1}+\binom{5}{5}\binom{3}{0}\binom{2}{0}\Big)=$$

$$=2^{-10}(1\cdot1\cdot1+5\cdot3\cdot1+5\cdot1\cdot2+10\cdot3\cdot1+10\cdot3\cdot2+10\cdot1\cdot1+10\cdot1\cdot1+10\cdot3\cdot2+10\cdot3\cdot1+5\cdot3\cdot1+5\cdot1\cdot2+1\cdot1\cdot1)=$$

$$=2^{-10}(1+15+10+30+60+10+10+60+30+15+10+1)=2^{-10}(252)=\frac{252}{1024}=\frac{63}{256}$$

ב) נגדיר Y,Z כנ"ל וב"ת ונגדיר $X=Y+Z$.
הראינו בכיתה שסכום משתנים בינומיים ב"ת
עם אותו p ועם מס' ניסויים n ו-m מתפלג
בינומית עם הסת' p ומס' ניסויים $n+m$
$\Longleftarrow$ במקרה זה אכן $X\sim B(5,\frac{1}{2})$ כנדרש.
יהי $w\in\Omega$ אזי: $X(w)+Y(w)+Z(w)=2(Y(w)+Z(w))\equiv 0 \mod 2$
ובפרט $X(w)+Y(w)+Z(w)\neq 5$ כי $5\equiv 1 \mod 2$.
אזי, כנדרש, $P(\{w\in\Omega \mid X(w)+Y(w)+Z(w)=5\})=P(\emptyset)=0$

ג) נגדיר Y,Z כנ"ל וב"ת ונגדיר $X'=Z+Y$ $\Longleftarrow$ כפי
שהראיתי, $X'\sim B(5,\frac{1}{2})$. נגדיר כעת: $X=5-X'$.
$S_{X'}=\{0,\dots,5\} \Longleftarrow S_X=\{0,\dots,5\}$. X הוא הפעלת פונק' מקומית על X' (הוא $g(a)=5-a$), אזי X מ"מ.
$\forall 0\le a\le 5: P_X(a)=P_{X'}(5-a)=\binom{5}{5-a}\frac{1}{2}^{5-a}\frac{1}{2}^{5-(5-a)}=\binom{5}{a}\frac{1}{2}^{a}\frac{1}{2}^{5-a} \Rightarrow X\sim B(5,\frac{1}{2})$
כנדרש.
יהי $w\in\Omega$ אזי: $X(w)+Y(w)+Z(w)=5-Y(w)-Z(w)+Y(w)+Z(w)=5$
אזי, כנדרש, $P(\{w\in\Omega \mid X(w)+Y(w)+Z(w)=5\})=P(\Omega)=1$

~~ה) נגדיר ... a ... אזי:~~

~~$P_{X,Y}(a,b)=P(w\in ...)$~~
נבחר סטנדרטי שאלה זו, אוסמן: $\Omega=\{(a,b) \mid a,b\in\{1,\dots,6\}\}$, $F=2^\Omega$, $P:F\to[0,1]; P(A)=\frac{|A|}{36}$ מרחב ההסתברות הוא
(Ω,F,P). כאשר $(a,b)\in\Omega$ משמעו שהקוביה הראשונה
הראתה a ועל השניה b.

אלה מצוין את התשובה בסוף מסובך בשעתו להגדיר שאלה...

לבלוק ההתפלגויות השולי עבור א, ב, ג התפלגויות מוגדרות מה ... באינו בשאלה ... $P_{X,Y}(A,B)=\sum P_{X,Y}(x,y)$ ... התפלגויות ...

ד) יהי $X\in\{1,\dots,6\}$, $Y\in\{2,3,\dots,12\}$ אזי:
$P_{X,Y}(x,y)=P(\{(a,b)\in\Omega \mid X(a,b)=x, Y(a,b)=y\})=$
$=P(\{(a,b)\in\Omega \mid Max\{a,b\}=x \wedge a+b=y\})=\frac{|\{(a,b)\in\Omega \mid Max\{a,b\}=x \wedge a+b=y\}|}{36}$
בפרט: $P_{X,Y}(2,2)=0$ לא ייתכן שסכום שתי ההטלות יהיה 2 בזמן מקסימום
אך מצד שני $P_X(2)>0$ (מתקיים לדוגמא עבור $(2,2)\in\Omega$)
וכן $P_Y(2)>0$ (מתקיים עבור $(1,1)\in\Omega$)
אזי $P_{X,Y}(2,2)\neq P_X(2)P_Y(2)$ אזי X,Y תלויים.

ה) יהיו $X,Y\in\{1,\dots,6\}$ אזי:

$$p_{X,Y}(x,y)=P(\{(a,b)\in\Omega \mid a=x \wedge \max\{a,b\}=y\})=\frac{|\{(a,b)\in\Omega \mid a=x\wedge \max\{a,b\}=y\}|}{36}$$

בפרט: לא ייתכן שהערך של קוביה 1 גדול מהמקס' ולכן: $p_{X,Y}(2,1)=0$

אך מצד שני $p_X(2)>0$ (מתקיים לדוגמא עבור $(2,2)\in\Omega$)

וכן $p_Y(1)>0$ (מתקיים עבור $(1,1)\in\Omega$)

אז' $p_{X,Y}(2,1)\neq p_X(2)p_Y(1)$ אזי X,Y תלויים.

ו) יהיו $X,Y\in\{1,\dots,6\}$ אזי:

$$p_{X,Y}(x,y)=P(\{(a,b)\in\Omega \mid \max\{a,b\}=x \wedge \min\{a,b\}=y\})=\frac{|\{(a,b)\in\Omega \mid \max\{a,b\}=x\wedge \min\{a,b\}=y\}|}{36}$$

בפרט: לא ייתכן שהערך המינ' גדול מהמקס' ולכן: $p_{X,Y}(1,2)=0$

אך מצד שני $p_X(1)>0$ (מתקיים ~~לדוגמא~~ עבור $(1,1)\in\Omega$)

וכן $p_Y(2)>0$ (מתקיים לדוגמא עבור $(2,2)\in\Omega$)

אז' $p_{X,Y}(1,2)\neq p_X(1)p_Y(2)$ אזי X,Y תלויים.

7) בתנאי השאלה:

[illegible]

$$\left|E[f(X)g(X)]\right| = \left|\sum_{x\in S_X} f(x)g(x)p_X(x)\right| \overset{\forall x\in S_X: p(x)\geq 0}{=} \left|\sum_{x\in S_X}\left(f(x)\sqrt{p_X(x)}\right)\left(g(x)\sqrt{p_X(x)}\right)\right| \overset{\text{קושי}}{\leq}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{x\in S_X}\left(f(x)\sqrt{p_X(x)}\right)^2 \cdot \sum_{x\in S_X}\left(g(x)\sqrt{p_X(x)}\right)^2} = \sqrt{\left(\sum_{x\in S_X} f^2(x)p_X(x)\right)\left(\sum_{x\in S_X} g^2(x)p_X(x)\right)} \overset{\text{שוויון קושי, מסק' הרצאה}}{=}$$

$$= \sqrt{E[f^2(X)]\,E[g^2(X)]}$$

✓

8) יהי נתון מרחב הסתברות ושני מ"מ X,Y בעלי התפלגות נקודתית המוגדרים עליו. תהא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

ונגדיר $Z=g(X,Y) \Longrightarrow S_Z=\{g(x,y)\mid x\in S_X, y\in S_Y\}$.

יהא $z\in S_Z$

$$p_Z(z)=P(\{w\in\Omega \mid Z(w)=z\})=P(\{w\in\Omega \mid g(X(w),Y(w))=z\})=$$

$$P(\{w\in\Omega \mid (X(w),Y(w))\in g^{-1}(z)\})=\sum_{(x,y)\in g^{-1}(z)} p_{X,Y}(x,y)$$

נגדיר: $g^{-1}:S_Z\to 2^{S_X\times S_Y}$: $g^{-1}(z)=\{(x,y)\in S_X\times S_Y \mid g(x,y)=z\}$

ולכן:

$$E[Z]=\sum_{z\in S_Z} z\,P_Z(z)=\sum_{z\in S_Z} z\sum_{(x,y)\in g^{-1}(z)}P_{X,Y}(x,y)=\sum_{z\in S_Z}\sum_{(x,y)\in g^{-1}(z)} z\,P_{X,Y}(x,y)=$$

$$=\sum_{z\in S_Z}\sum_{(x,y)\in g^{-1}(z)} g(x,y)\,P_{X,Y}(x,y)=\sum_{(x,y)\in S_X\times S_Y} g(x,y)\,P_{X,Y}(x,y)$$

✓

$\boxed{\text{יהיו } z_1,z_2\in S_Z,\ z_1\neq z_2 \text{ אזי } g^{-1}(z_1)\cap g^{-1}(z_2)=\emptyset}$

$\boxed{\bigcup_{z\in S_Z} g^{-1}(z)=S_X\times S_Y}$

ק) נבחר בהקצבה מסויימת. אם נחלק את הזמן לפרקי זמן קטנים ε (ביחידות של שעה נניח) ונגדיר הכל פרק זמן כניסוי: האם הפקידה לסיים לטפל בלקוח? (כי לא נערך שעה מס' הלקוחות יהיה ∞) נקבל הסתברות הצלחה של $\varepsilon\cdot 3$. נבחר לכן שגודל ε קטן כה שלא יקרה מקרה בו שהפקידה תסיים לטפל בשני לקוחות באותו

ר) נבחר בפקידה מסויימת ויהי N מספר טבעי. אם נחלק ~~[illegible]~~ שעה הנ"ל ל-N פרקי זמן, ותהי p ההסתברות שבפרק זמן מסויים הפקידה סיימה לטפל בלקוח, נקבל, אם נניח ~~[illegible]~~ שבכל פרק זמן הפקידה לא סיימה לטפל ביותר מלקוח אחד, שמס' הלקוחות שהפקידה טיפלה בהם במהלך השעה מתפלג $B(N,p)$. נזכור שהתוחלת תהיה X (תלוי פקידה) $\Longrightarrow Np=X \Longrightarrow p=\frac{X}{N}$.

כדי לדאוג לדיוק לכך שבכל פרק זמן הפקידה לא סיימה לטפל ביותר מלקוח אחד, ניקח N גדול ומאוד מאוד - ∞, ואז נקבל התפלגות הגבולית עבור מס' הלקוחות עם פרמטר X, כי: $B(N,\frac{X}{N})\xrightarrow[N\to\infty]{} Poi(X)$ משפטיינו להצדיק התפלגות פואסון לפקידות על פי להתכוון השאלה:

הערה: למען הנוחות, במקום יחידות זמן של שעה, נעבוד עם יחידות זמן [illegible] לכן ~~[illegible]~~ ממוצע מס' הלקוחות לפקידות "המהירות": $3\cdot\frac{5}{4}$. לאיטיות: $3\cdot\frac{3}{4}$.

נסמן: A,B,C - מס' הלקוחות מהן הפקידה ~~[illegible]~~ בדלפק
A,B,C תהיינה לטפל ב-45 הדק' הקרובות (בהתאמה).
כפי שהראינו: $A\sim Poi(\frac{3}{2})$, $B\sim Poi(\frac{9}{4})$, $C\sim Poi(\frac{9}{4})$.
נתון שהמספקים ב"ת ⟸ A,B,C ב"ת
⟸ נסמן $D=A+B+C$ - מס' הלקוחות ~~[illegible]~~
שיסתיים הטיפול בהם ב-45 הדק' הקרובות
אזי מא' תכונות ~~[illegible]~~, $D\sim Poi(2\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2})$
⟸ $D\sim Poi(6)$.

אם ב-45 הדק' הקרובות יסתיים הטיפול ב-4 אנשים בדיוק, מירי ~~[illegible]~~ תהיה ראשונה בתור בתום זמן זה. אם יסתיים הטיפול ביותר - היא תחכה פחות מ-45 דק'. אם יסתיים הטיפול בפחות - עדיין יהיה תור לפניה (כי באותה העת שיסתיים הטיפול בלקוח ה-7 אחרי כניסתה יתחיל הטיפול ~~[illegible]~~ הראשון בתור וכו'..)
מכל זאת, נקבל כי ההסתברות שתיאלץ לחכות יותר מ-45 דק' היא:
$$P(D\le 4)=P_D(\{1,2,3,4\})=e^{-6}\left(\frac{6^0}{0!}+\frac{6}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}+\frac{6^4}{4!}\right)\approx 0.285$$

ד)

x\y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2	2	2	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2	2	2	2	1	0	0
6	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	1

ג) ~~[illegible]~~ עבור 6 ~~[illegible]~~ הערכים בכל [illegible] (x,y) במקום [illegible] הוא $\cdot 36$ [illegible]

זה צ"ל הפוך.

ב)

x\y		2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	1	1	1	1
3	0	0	3	1	1	1
4	0	0	0	4	1	1
5	0	0	0	0	5	1
6	0	0	0	0	0	6

ג)

x\y	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0
3	2	2	1	0	0	0
4	2	2	2	1	0	0
5	2	2	2	2	1	0
6	2	2	2	2	2	1

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון 9

1. הראו על ידי דוגמא נגדית למה הנחת האי-תלות בין המאורעות היא הכרחית בלמה השנייה של בורל-קנטלי.

2. חישבו את השונות של מ"מ פואסוני עם פרמטר λ ע"י חישוב ישיר. השוו לגבול של השונות של מ"מ בינומי $B(n,p)$ עם $\lambda = np$, כאשר $n \to \infty$, $p \to 0$.

3. הוכיחו כי לכל אוסף של מ"מ $X_1, .., X_n$ מתקיים:

$$Var\Big[\sum_{j=1}^{n} X_j\Big] = \sum_{j=1}^{n} Var[X_j] + 2\sum_{i<j} Cov[X_i, X_j]$$

4. נניח כי $X_1, .., X_n$ מ"מ בעלי אותה התפלגות. נסמן $\mu = E[X]$, $\sigma^2 = Var[X]$. חישבו את התוחלת ואת השונות של הממוצע האמפירי $S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

5. בתוך קופסא יש N כדורים לבנים ו- M כדורים שחורים. מוציאים באקראי n כדורים מהקופסא. מה התוחלת של מס' הכדורים הלבנים שהוצאו? רמז: השתמשו באדיטיביות של התוחלת.

6. בעית סנקט-פטרסבורג: במשחק השחקן מטיל מטבע הוגן עד להופעת "זנב". השחקן אז מרוויח סכום של a^k ש"ח והולך הביתה, כאשר k הוא מס' הראשים שהופיעו לפני שיצא זנב. ($a > 0$ קבוע מראש). מה לדעתכם יהיה תשלום הוגן ע"מ להשתתף במשחק? (תשלום נקרא הוגן אם הוא שווה לתוחלת הרווח של השחקן).

7. אם 10 זוגות יושבים ליד שולחן עגול, חשבו את התוחלת ואת השונות של מספר הנשים היושבות ליד בני זוגן.

תורת ההסתברות תשס"ו - פתרון לגליון 9

1 יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות ונניח כי קיים ב- $\mathcal{F}$ מאורע A בעל הסתברות $\frac{1}{2}$. אז ניקח $A_n = A$, $n = 1, 2, \dots$. ברור כי $\{A_n\}$ אינם ב"ת. מתקיים

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k = A$$

ולכן $P(\limsup A_n) = P(A) = \frac{1}{2} \neq 1$, למרות ש- $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

2 נניח $X \sim Poi(\lambda)$. כבר חישבנו כי $EX = \lambda$. לחישוב השונות:

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(k\lambda^{k-1}) \cdot \lambda}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda^k)'}{k!} = \quad \begin{pmatrix}\text{נגזרת} \\ \text{לפי } \lambda\end{pmatrix}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda^k)'}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right]' = \lambda e^{-\lambda} \left[\lambda e^{\lambda} \right]' =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \right) = \lambda + \lambda^2$$

לכן: $\mathrm{Var}\, X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda$.

ונשווה לגבול של השונות של מ"מ בינומי $Y \sim B(n,p)$ עם $\lambda = np$, כאשר $n \to \infty$, $p \to 0$:

$$\mathrm{Var}\, Y = np(1-p) \longrightarrow \lambda .$$

3 (נזכיר כי $X_1, \dots, X_n$ לא בהכרח ב"ת.)

$$\left(E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k \right] \right)^2 \underset{\text{לינאריות } E}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} EX_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} (EX_k)^2 + 2 \sum_{k<j} EX_k EX_j$$

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)^2 \right] = E \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + E\, 2 \sum_{k<j} X_k X_j = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 + 2 \sum_{k<j} E[X_k X_j]$$

לכן:

$$\mathrm{Var} \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \left[(EX_k)^2 - E(X_k^2) \right] + 2 \sum_{k<j} \left[EX_k EX_j - E[X_k X_j] \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_k + 2 \sum_{k<j} \mathrm{Cov}[X_k, X_j]$$

(הערה: $\mathrm{Cov}[X,Y] = E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY - YEX - XEY + EX \cdot EY]$

EX, EY הם קבועים, ומכיוון ש- $E[c \cdot X] = c \cdot EX$, נקבל

$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - 2EYEX + EXEY = E[XY] - EX \cdot EY$).

(המשך שאלה 3: $\boxed{4}$

$$\mathrm{Var}\, S_n = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^n \mathrm{Var} X_i + 2\sum_{i<j}\mathrm{cov}[X_i,X_j]\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 + 2\sum_{i<j} E[(X_i-\mu)(X_j-\mu)]\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + 2\sum_{i<j} E[X_iX_j - \mu X_j - \mu X_i + \mu^2] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + 2\sum_{i<j}\left(E[X_iX_j] - \mu^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} - 2\binom{n}{2}\cdot\mu^2 + 2\sum_{i<j}E[X_iX_j]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} - n(n-1)\mu^2 + 2\sum_{i<j}E[X_iX_j]$$

$\boxed{5}$ נניח שהכדורים ממוספרים מ- 1 עד $N+M$. נגדיר $N+M$ מ"מ ברנולי:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{אם כדור } \# i \text{ לבן} \\ 0 & \text{אם כדור } \# i \text{ שחור} \end{cases} \qquad i=1,\dots,N+M$$

מכיוון שבוחרים את הכדורים באקראי, המ"מ $\{X_i\}$ הם ב"ת. הוצאת n כדורים מהקופסא מתפרש כביצוע n ניסויי ברנולי ב"ת, וסכום מ"מ הברנולי שווה למספר הכדורים הלבנים שהוצאו. כלומר:

$$\sum_{i=1}^n X_i = \text{מס' הכדורים הלבנים שהוצאו בבחירת } n \text{ כדורים מתוך הקופסא.}$$

לכן:

$$E\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n EX_i = n\cdot EX_i$$

נחשב EX_i: ההתפלגות של כל X_i היא:

$$P\{X_i = 1\} = P\{\text{הוצאת לבן}\} = \frac{N}{N+M}$$

$$P\{X_i = 0\} = P\{\text{הוצאת שחור}\} = \frac{M}{N+M}$$

לכן

$$EX_i = 1\cdot\frac{N}{N+M} + 0\cdot\frac{M}{N+M} = \frac{N}{N+M}$$

ולכן

$$E\sum_{i=1}^n X_i = n\cdot\frac{N}{N+M}.$$

6 נגדיר מ"מ : מס' הראשים לפני זנב ראשון. (X לא גיאומטרי). לכן:

$$P_X(k) = P\{\text{ } k \text{ ראשים ואז זנב אחד }\} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

הרווח של השחקן הוא $g(k) = a^k$ לכן

$$E[g(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\, P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^k$$

אם $a<2$, נקבל $E[g(X)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{2}} = \frac{1}{2-a}$, וזהו התשלום למשחק הוגן.

אם $a \geq 2$, $E[g(X)]$ מתבדר ל- ∞ , כלומר תוחלת הרווח של השחקן אינסופית, ולא רק לכל ג"ס מותר להשתתף במשחק.

7. נגדיר מ"מ $X_i \sim Bernoulli(p)$ עבור $i = 1, .., 10$, כאשר $X_i = 1$ אם האישה מס' i יושבת ליד בעלה. אז $p = \frac{2}{19}$. יהי $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ אז $E[X] = \sum_i E[X_i] = 10\frac{2}{19}$, כלומר $E[X] \simeq 1.05$. לחישוב השונות: $cov(X_1, X_2) = E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = \frac{17!2!2!}{19!} - (\frac{2}{19})^2 \simeq 6.1E-4$.

$Var[X] = \sum_i Var[X_i] + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j) = 10\frac{2}{17}\frac{17}{19} + 2\binom{10}{2}cov(X_1, X_2) \simeq 0.99$.

4|4

ינאי בן ברודמן

תורת ההסתברות תשס"ו - גליון 9

(1) יהי (Ω, F, P) מרחב הסתברות שקיים בו מאורע בעל הסת' חיובית $\neq 1$ (לדוגמא $\Omega=\{0,1\}$, $F=2^{\Omega}$, $(P:F\to[0,1];\ P(\cdot)=\frac{1}{2})$) - נסמנו A (בדוגמא $A=\{0\}$). נגדיר סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ בך שלכל n טבעי: $A_n=A$. $\{A_n\}$ סדרה קבועה ולכן $\limsup_{n\to\infty} A_n = A$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (טור קבוע חיובי) אינו בעל איבר כללי השואף ל-0 (בחרנו A כך ש $P(A)>0$) ולכן מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$. אך $P(A)\neq 1$ (מבחירת A) $\Leftarrow$ $P(\limsup_{n\to\infty} A_n)\neq 1$ כלומר ערכנו מקרה בו לא מתקיים תנאי הלמה של אי-תלות בין המאורעות ואכן מסקנת הלמה אינה מתקיימת. ∎

(2) יהי $X\sim Poi(\lambda)$ (במרחב הסתברות כלשהו) עבור $\lambda>0$ ממשי, אזי:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=0}^{\infty}p_X(k) = \lambda\cdot 1 = \lambda$$

$$E[X^2] = E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2\cdot 1+\lambda$$

אזי:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda$$

אם בנוסף, לכל n טבעי יהי $Y_n\sim B(n,\frac{\lambda}{n})$, אזי (לכל n טבעי נסמן: $p_n=\frac{\lambda}{n}$):

$$\lim_{n\to\infty} Var[Y_n] = \lim_{n\to\infty} np_n(1-p_n) = \lim_{n\to\infty}\lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = \lambda\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = \lambda\cdot\left(1-\lambda\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \lambda(1-\lambda\cdot 0) = \lambda\cdot 1 = \lambda$$

(3) נוכיח באינדוקציה על n טבעי: יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ במרחב הסתברות כלשהו, אזי:

$$Var\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} Var[X_j] + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov[X_i,X_j]$$

בסיס: $n=1$:

$$Var\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = Var[X_1] = Var[X_1] + 2\cdot 0 = \sum_{j=1}^{n} Var[X_j] + 2\underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} Cov[X_i,X_j]}_{\text{סכום ריק!}}$$

__צעד:__ ~~[illegible]~~ יהי n טבעי ונניח נכונות הטענה עבור n-1, אזי:

הראינו בכיתה

$$Var\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = Var\left[X_n+\sum_{j=1}^{n-1} X_j\right] \overset{\downarrow}{=} Var[X_n]+Var\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]+2Cov\left[X_n,\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right] =$$

[illegible]

$$= Var[X_n]+Var\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]+2\left(E\left[X_n\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]-E[X_n]E\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]\right) =$$

ליניאריות התוחלת

$$= Var[X_n]+Var\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]+2\left(E\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_nX_j\right]-E[X_n]\sum_{j=1}^{n-1}E[X_j]\right) =$$

$$= Var[X_n]+Var\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]+2\left(\sum_{j=1}^{n-1}E[X_nX_j]-\sum_{j=1}^{n-1}E[X_n]E[X_j]\right) =$$

הראינו בכיתה

$$= Var[X_n]+Var\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(E[X_jX_n]-E[X_j]E[X_n]\right) =$$

[illegible]

$$= Var[X_n]+Var\left[\sum_{j=1}^{n-1}X_j\right]+2\sum_{j=1}^{n-1}Cov[X_j,X_n] =$$

$$= Var[X_n]+\sum_{j=1}^{n-1}Var[X_j]+2\sum_{1\le i<j\le n-1}Cov[X_i,X_j]+2\sum_{j=1}^{n-1}Cov[X_j,X_n] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}Var[X_j]+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov[X_i,X_j]$$

מנכונות הבסיס והצעד ומעקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

(4) בסימוני השאלה:

$$E[S_n]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{j=1}^{n}X_j\right]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E[X_j]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu=\mu \quad \checkmark$$

$$Var[S_n]=Var\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right]=\frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{j=1}^{n}X_j\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}Var[X_j]+\frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}Cov[X_i,X_j]=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2+\frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}Cov[X_i,X_j]=\frac{1}{n^2}n\sigma^2+\frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}Cov[X_i,X_j]=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}Cov[X_i,X_j]$$

אם $X_1,\dots,X_n$ ב"ת (אוסף בלתי תלויים ~~[illegible]~~ בזוגות) אזי לכל $1\le i<j\le n$ מתקיים $Cov[X_i,X_j]=0$

ולכן:

$$E[S_n]=\frac{\sigma^2}{n}$$

(5) תרגום השאלה: נמספר את הכדורים שהוצאנו(1) ע"פ סדר הוצאתם ~~[illegible]~~.

נגדיר מ"מ X_i בצורה הבאה: לכל $\omega\in\Omega$ בו הכדור ה-i היה לבן: $X_i(\omega)=1$. לכל $\omega\in\Omega$ אחר: $X_i(\omega)=0$.

נסמן את מס' הכדורים הלבנים שהוצאנו: S_n

לכל $\omega\in\Omega$: $S_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)$. מלינאריות התוחלת:

$$E[X_1]=0\cdot P_{X_1}(0)+1\cdot P_{X_1}(1)=P_{X_1}(1)=\frac{N}{M+N}$$

$$E[S_n]=E\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_i}_{\text{לינאריות התוחלת}}\Big]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X_1]=n\cdot\frac{N}{M+N}$$

[illegible] $P_{\dots}(x_1,\dots,x_n)=P_{X_1,\dots,X_n}(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$ [illegible] $X_1,\dots,X_n$ [illegible]

(6) תרגום השאלה

מס' ההטלות עד להופעת זנב מתפלג גיאומטרית עם הסתברות הצלחה $p=\frac{1}{2}$. נסמנו X וכאמור $X\sim G(\frac{1}{2})$.

נסמן Y - הרווח (בש"ח).

$$E[Y]=E[a^{X-1}]\overset{\text{סטטיסטיקאי חסר הכרה}}{=}\sum_{x=1}^{\infty}a^{x-1}p_X(x)=\sum_{x=1}^{\infty}a^{x-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^{x-1}=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^{x}$$

* אם $a\geq 2$ ⇐ $\frac{a}{2}\geq 1$ ⇐ הטור מתבדר (טור גיאומטרי עם מנה ≥ 1) ⇐ $E[Y]$ לא מוגדרת כלומר אין סכום תשלום שיהיה הוגן. *תוחלת הרווח אינסופית.

* אם $a<2$:

$$E[Y]=\frac{1}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2-a}{2}}=\frac{1}{2-a}$$

במקרה זה התשלום ההוגן להשתתפות במשחק יהיה $\frac{1}{2-a}$ ש"ח.

(7) ~~[illegible]~~ נמספר את הנשים בסדר כלשהו. לכל $1\leq i\leq 10$ נגדיר מ"מ X_i: לכל $\omega\in\Omega$ בו האישה ה-i יושבת ליד בן זוגה: $X_i(\omega)=1$. לכל $\omega\in\Omega$ אחר: $X_i(\omega)=0$. נסמן את מס' הנשים היושבות ליד בני זוגן S. לכל $\omega\in\Omega$: $S(\omega)=\sum_{i=1}^{10}X_i(\omega)$

לכל $1\leq i\leq 10$:

$$E[X_i]=0\,p_{X_i}(0)+1\,p_{X_i}(1)=P_{X_i}(1)=\frac{2\cdot 18!}{19!}=\frac{2}{19}$$

[illegible]

מלינאריות התוחלת:

$$E[S]=E\Big[\sum_{i=1}^{10}X_i\Big]=\sum_{i=1}^{10}E[X_i]=10\cdot\frac{2}{19}=\frac{20}{19}$$

לכל $1 \le i \le 10$:

$$E[X_i^2] = 0^2 \cdot p_{X_i}(0) + 1^2 p_{X_i}(1) = p_{X_i}(1) = \frac{2}{19}$$

[illegible]

לכל $1 \le i < j \le 10$:

$$E[X_iX_j] = 0 \cdot p_{X_iX_j}(0) + 1 \cdot p_{X_iX_j}(1) = p_{X_iX_j}(1) = p_{X_i,X_j}(1,1) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 17!}{19!} = \frac{4}{18 \cdot 19} = \frac{2}{171}$$

[illegible]

$$Var[S] = Var\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{10} Var[X_i] + 2\sum_{1\le i<j\le 10} Cov[X_i, X_j] =$$

$$= \sum_{i=1}^{10}\left(E[X_i^2] - E^2[X_i]\right) + 2\sum_{1\le i<j\le 10}\left(E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j]\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{2}{19} - \frac{4}{361}\right) + 2\sum_{1\le i<j\le 10}\left(\frac{2}{171} - \frac{4}{361}\right) = 10 \cdot \frac{34}{361} + 2\binom{10}{2}\left(\frac{2}{171} - \frac{4}{361}\right) =$$

$$= \frac{340}{361} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2}\left(\frac{2}{171} - \frac{4}{361}\right) = \frac{340}{361} + \frac{180}{171} - \frac{360}{361} = \frac{-20}{361} + \frac{20}{19} = \frac{380-20}{361} = \frac{360}{361}$$

■

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון תרגילים 10

1. יהיו X, Y מ"מ בדידים.

   א. תהא g פונקציה. הראו כי:
   $$E[g(X)] = E[E[g(X)|Y]]$$

   ב. נגדיר $Var[X|Y] = E[X^2|Y] - (E[X|Y])^2$. הראו כי
   $$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

2. נתון מרחב ההסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ כאשר $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (אוסף התת-קבוצות של Ω), $P(\{k\}) = 2^{-k}$. נגדיר מ"מ X, Y על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ כך ש- $X(k) = k$, $Y(k) = (-1)^k$, עבור $k = 1, 2, ..$. חישבו את $E[X|Y]$.

3. מס' התאונות במפעל בשבוע מתפלג לפי $Poi(\lambda)$. מס' הנפגעים בתאונה כלשהי ב"ת בתאונות אחרות, ובכל התאונות מספר זה בעל אותה התפלגות, עם תוחלת μ ושונות σ^2. בהנחה שמספר הנפגעים בתאונה לא תלוי במספר התאונות, חשבו את התוחלת ואת השונות של מספר הנפגעים בשבוע.

4. מס' השגיאות שעושה קלדנית בעמוד אחד הוא מ"מ $Poi(\lambda)$, והוא ב"ת עבור עמודים שונים. מאמר באורך 3 עמודים הוקלד ע"י אחת מ- 4 קלדניות. ידוע שלקלדניות אלה פרמטרי פואסון 4,3,2,1 בהתאם. הקלדנית נבחרה בצורה אחידה מבין הארבע. מהי תוחלת מס' השגיאות בכל המאמר?

5. מטילים שתי קוביות. חשבו את הפונקציה יוצרת המומנטים של סכום התוצאות בכל הטלה. ע"י גזירה, קבלו את התוחלת ואת השונות.

6. הפונקציה יוצרת המומנטים של X נתונה ע"י $\phi_X(t) = \exp(2e^t - 2)$, ושל Y ע"י $\phi_Y(t) = ((\frac{1}{4})^{10}(3e^t + 1)^{10}$. אם X, Y ב"ת, מה הם

   א. $p_{X+Y}(2)$

   ב. $p_{XY}(0)$

   ג. $E[XY]$

   (השתמשו בטבלה).

7. יהא X מ"מ. אם $Y = aX + b$ כאשר a, b קבועים, בטא את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y בעזרת הפונקציה יוצרת המומנטים של X.

8. חישבו את המומנטים $M_X(0)$, $M'_X(0)$, $M''_X(0)$ עבור $X \sim Poi(\lambda)$.

הסתברות : פתרון גליון טו

2 עבור $j\in\{\pm1\}$, $k\in\mathbb{N}$:
$$P_{X|Y}(k|j) = \frac{P_{X,Y}(k,j)}{P_Y(j)}$$

$$P_Y(1) = P\{k \text{ זוגי}\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{1}{3}$$

$$P_Y(-1) = P\{k \text{ אי זוגי}\} = 1 - P\{k \text{ זוגי}\} = \frac{2}{3}$$

$$P_{X|Y}(k|j=1) = \frac{P\{k \text{ זוגי}, X=k\}}{\frac{1}{3}} = \begin{cases} 0 & k \text{ אי זוגי} \\ 3\cdot 2^{-2n} & k=2n,\ n=1,2,\dots \end{cases}$$

$$P_{X|Y}(k|j=-1) = \begin{cases} 0 & k \text{ זוגי} \\ \frac{3}{2}\cdot 2^{-(2n+1)} & k=2n+1,\ n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

ולכן:
$$E[X|Y=1] = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\cdot P_{X|Y}(2n|1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\cdot 3\cdot 2^{-2n} = \frac{8}{3}$$
$$E[X|Y=-1] = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\cdot P_{X|Y}(2n+1|-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,\frac{3}{2}\,2^{-(2n+1)} = \frac{5}{3}$$

ולכן
$$E[X|Y](k) = \begin{cases} \frac{8}{3} & k \text{ זוגי} \\ \frac{5}{3} & k \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

4 נגדיר מ"מ Y המפולג אחיד על $\{1,2,3,4\}$ באופן הבא:
אם נבחרה הלבנייה מס' i , $Y(\omega)=i$. כמובן $i=1,\dots,4$, $P_Y(i)=\frac{1}{4}$.
נגדיר מ"מ X - מס' השגיאות בעמוד אחד של המאמר.
$X|Y=i$ הוא בעצם מ"מ פואסוני $\sim Poi(i)$, אז $E[X|Y=i] = i\ (=Y)$
אז
$$EX = E[E[X|Y]] = E[Y] = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4}\cdot i = \frac{5}{2}$$

במאמר שלושה עמודים, לכן התוחלת של מס' השגיאות במאמר כולו היא $3\cdot EX = \frac{15}{2}$.

$$\phi'_X(t) = \frac{1}{18}\sum_{j=1}^{6}\exp(tj)\sum_{k=1}^{6}k\exp(tk) \Rightarrow E[X] = \phi'_X(0) = 7$$

באותו אופן נחשב את השונות ונקבל $Var[X] = \frac{35}{6} \simeq 5.83$.

6. $Y \sim Binom(10, \frac{3}{4})$,$X \sim Poi(2)$.

א.

$$p_{X+Y}(2) = P\{X=2\}\cap\{Y=0\}) + P\{X=1\}\cap\{Y=1\}) + P\{X=0\}\cap\{Y=2\})$$

$$= \frac{e^{-2}}{4^{10}}\Big(\binom{10}{2}3^2 + 2\binom{10}{1}\cdot 3 + 2\Big) \simeq 6.83E-5$$

ב. באותו אופן $p_{XY}(0) = e^{-2} + \frac{1}{4^{10}} - \frac{e^{-2}}{4^{10}} \simeq 0.13$

ג. $E[XY] = 15$

7.

$$\phi_Y(t) = e^{bt}E[e^{atx}] = e^{bt}\phi_X(at)$$

$\boxed{8}$ $X \sim Poi(\lambda)$. הפונקציה יוצרת המומנטים היא $\phi(t) = Ee^{tX}$

(לכל t עבורו התוחלת קיימת). לכן

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^t}$$

$$\phi(0) = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

$$\phi'(t) = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}\cdot\lambda e^t \quad , \quad \phi'(0) = \lambda$$

$$\phi''(t) = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}e^t(\lambda e^t + 1) \quad , \quad \phi''(0) = \lambda(\lambda+1)$$

ינאי בן צמרת

תרגול יום א' 15-16

4/4

תורת ההסתברות תשע"ו - גליון תרגילים 10

1) א' הנוסחה: נסמן: S_X, S_Y - הערכים האפשריים ל-X,Y בהתאמה:

$$E(g(X)) \overset{\text{סח"ב}}{=} \sum_{x\in S_X} g(x)p_X(x) = \sum_{x\in S_X} g(x)\Big(\sum_{y\in S_Y} p_{X|Y}(x|y)p_Y(y)\Big) =$$

$$= \sum_{y\in S_Y}\Big(\sum_{x\in S_X} g(x)p_{X|Y}(x|y)\Big)p_Y(y) = \sum_{y\in S_Y} E[g(X)|Y=y]\,p_Y(y) =$$

$$= E[E[g(X)|Y]]$$

ב)

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[E[X^2|Y]] - E[E[X|Y]]^2 =$$

$$= E[E[X^2|Y]] - E[E[X|Y]^2] + E[E[X|Y]^2] - E[E[X|Y]]^2 =$$

$$= E\big[E[X^2|Y] - E[X|Y]^2\big] + Var[E[X|Y]] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

2) ב' הנוסחה:

$$E[X|Y=-1] = \sum_{x\in\mathbb{N}} x\,p_{X|Y}(x|-1) = \cancel{\sum_{x\in 2\mathbb{N}} x p_{X|Y}(x|-1) + \sum_{x\in 2\mathbb{N}-1} x p_{X|Y}(x|-1)}$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{N}} x\frac{p_{X,Y}(x,-1)}{p_Y(-1)} = \frac{1}{p_Y(-1)}\sum_{x\in\mathbb{N}} x\,p_{X,Y}(x,-1) =$$

$$= \frac{1}{P(\{\omega\in\Omega \mid Y(\omega)=-1\})}\Big(\sum_{x\in 2\mathbb{N}} x p_{X,Y}(x,-1) + \sum_{x\in 2\mathbb{N}-1} x p_{X,Y}(x,-1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{P(2\mathbb{N}-1)}\Big(\sum_{x\in 2\mathbb{N}} x\cdot 0 + \sum_{x\in 2\mathbb{N}-1} x\,p_{Y|X}(-1|x)p_X(x)\Big) = \frac{1}{\sum_{\omega\in 2\mathbb{N}-1} P(\omega)}\Big(\sum_{x\in 2\mathbb{N}-1} x\cdot 1\cdot p_X(x)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sum_{\omega\in 2\mathbb{N}-1} 2^{-\omega}}\sum_{x\in 2\mathbb{N}-1} x\cdot P(\{x\}) = \frac{1}{\sum_{\omega=1}^{\infty} 2^{-(2\omega-1)}}\sum_{x=1}^{\infty}(2x-1)\,2^{-(2x-1)} =$$

$$\cancel{\frac{2}{3}\left(\frac{d}{dx}\sum_{x\in 2\mathbb{N}} 2^{-x} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{d}{dx}\right.}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-1)}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-1)} = \frac{1}{2} + \cancel{\sum_{x=2}(2x-3)\cdot 2^{-(2x-3)}}$$ [illegible]

$$= \frac{1}{2} + \sum_{x=2}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot \sum_{x=2}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-3)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\left[\sum_{x=2}^{\infty} 2\cdot 2^{-(2x-3)} + \sum_{x=2}^{\infty} (2x-3)\cdot 2^{-(2x-3)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\sum_{x=1}^{\infty} 2\cdot 2^{-(2x-1)} + \sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(4\sum_{x=1}^{\infty} 2^{-(2x)} + \sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\left(\sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)\cdot 2^{-(2x-1)}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{4}\sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)2^{-(2x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Longrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} (2x-1)2^{-(2x-1)} = \frac{20}{18}$$

$$\Longrightarrow E[X|Y=-1] = \frac{3}{2}\cdot\frac{20}{18} = \cancel{\frac{40}{24} = \frac{20}{12}}\ \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$ ✓

$$\forall x\in\mathbb{N}: p_X(x) = 2^{-x} \Longrightarrow X \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow E(X) = 2$$

$$2 = E[X] = E\left[E[X|Y]\right] = E[X|Y=-1]\cdot P_Y(-1) + E[X|Y=1]\cdot P_Y(1)$$

$$\Longrightarrow E[X|Y=1] = \frac{2 - E[X|Y=-1]\cdot P_Y(-1)}{1-P_Y(-1)} = \frac{2 - \frac{10}{6}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2-\frac{20}{18}}{\frac{1}{3}} =$$

$$= \cancel{6 - \frac{40}{24} = \frac{122}{24}}\ 6 - \frac{20}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$ ✓

(3) נסמן: M - מס' התאונות בשבוע. $M\sim Poi(\lambda)$

נסמן לכל $i\in\mathbb{N}$: N_i - מס' הנפגעים בתאונה ה-i

בשבוע (או 0 אם היו פחות מ-i תאונות השבוע) (∞)

נסמן: N - מס' הנפגעים בשבוע. נשים לב: $N=\sum_{i=1}^{\infty} N_i$

[illegible] $E[N_i]=2$ [illegible]

M(ω) [illegible]

$$E[N]=E[E[N|M]]=\sum_{m=0}^{\infty}E[N|M=m]P_M(m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}E[N_i|M=m]\right)P_M(m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{m}E[N_i|M=m]+\sum_{i=m+1}^{\infty}E[N_i|M=m]\right]P_M(m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{m}2+\sum_{i=m+1}^{\infty}0\right]P_M(m)=\sum_{m=0}^{\infty}m\,2P_M(m)=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}mP_M(m)=2E[M]=2\lambda$$

$$Var[N]=\cancel{E[(N-E[N])^2]=E[(N-2\lambda)^2]}=$$

$$\cancel{=E\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}N_i-2\lambda\right)^2\right]=E\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}N_i\right)^2-2\sum_{i=1}^{\infty}N_i\,2\lambda+(2\lambda)^2\right]}$$

$$=E[N^2]-E[N]^2=E\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}N_i\right)^2\right]-(2\lambda)^2=$$

$$=E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}N_i\right)^2\Big|M\right]\right]-(2\lambda)^2=\sum_{m=0}^{\infty}E\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}N_i\right)^2\Big|M=m\right]P_M(m)-(2\lambda)^2$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}E\left[\left(\sum_{i=1}^{m}N_i\right)^2+2\left(\sum_{i=1}^{m}N_i\right)\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}N_i\right)+\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}N_i\right)^2\Big|M=m\right]P_M(m)-(2\lambda)^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(E\left[\left(\sum_{i=1}^{m}N_i\right)^2\Big|M=m\right]+E\left[2\left(\sum_{i=1}^{m}N_i\right)\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}N_i\right)+\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}N_i\right)^2\Big|M=m\right]\right)P_M(m)-(2\lambda)^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(E\left[\sum_{i=1}^{m}N_i^2+2\sum_{1\le i<j\le m}N_iN_j\Big|M=m\right]+0\right)P_M(m)-(2\lambda)^2=$$

ליניאריות
התוחלת ו
~~מן~~ הכפלה של
שתי תוחלות ב"ת

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m}E[N_i^2 \mid M=m]+2\sum_{1\le i<j\le m}E[N_i\mid M=m]\,E[N_j\mid M=m]\right)p_M(m)-(\mu\lambda)^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(m\cdot S+2\binom{m}{2}\mu^2\right)p_M(m)-(\mu\lambda)^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(m(\sigma^2+\mu^2)+m(m-1)\mu^2\right)p_M(m)-(\mu\lambda)^2=$$

$$=\sigma^2\sum_{m=0}^{\infty}m\,p_M(m)+\mu^2\sum_{m=0}^{\infty}m^2p_M(m)-(\mu\lambda)^2=$$

$$=\sigma^2E[M]+\mu^2E[M^2]-(\mu\lambda)^2=$$

$$=\sigma^2\lambda+\mu^2\left(E[M^2]-E[M]^2\right)=$$

$$=\sigma^2\lambda+\mu^2\,\mathrm{Var}[M]=\sigma^2\lambda+\mu^2\lambda$$

4. נסמן: T - מס' הקלפנית שנבחרה (עבור קלפנית מס' t כמות הפעמים להצלחה היא t)
N - מס' הפעמים שיצאה אות במאמר
N_i - מס' הפעמים שיצאה אות במטבע ה-i $(1\le i\le 3)$

$$E[N]=\sum_{t=1}^{4}E[N\mid T=t]\,p_T(t)=\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4}E[N\mid T=t]=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4}E[N_1+N_2+N_3\mid T=t]=\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4}\sum_{p=1}^{3}E[N_p\mid T=t]=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4}\sum_{p=1}^{3}t=\frac{1}{4}\cdot 3\sum_{t=1}^{4}t=\frac{1}{4}\cdot 3\cdot 10=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$$

5. נסמן: X - המס' על הקוביה ה-I, y - על ה-II. נניח כי ההטלות ב"ת.

$$\Phi_{X+Y}(t)=E\left[e^{(X+Y)t}\right]=\cancel{\sum_{z\in S_{X+Y}}e^{zt}p_{X+Y}(z)=\sum\sum}\overset{\text{סח"ה}}{=}\sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y}e^{(x+y)t}p_{X,Y}(x,y)\overset{\text{ב"ת}}{=}$$

$$=\sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y}e^{(x+y)t}p_X(x)p_Y(y)=\cancel{\frac{1}{36}\sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y}e^{xt}e^{yt}=\frac{1}{36}\left(\sum_{x\in S_X}e^{xt}\right)\left(\sum_{y\in S_Y}e^{yt}\right)}$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} e^{(x+y)t}$$

$$E[X+Y] = \Phi'_{X+Y}(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{36} \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x+y)\, e^{(x+y)t}\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{1}{36} \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x+y) = 7$$

$$E\left[[X+Y]^2\right] = \Phi''_{X+Y}(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{36} \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x+y)^2 e^{(x+y)t}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x+y)^2 = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}$$

$$\Longrightarrow Var[X+Y] = E\left[(X+Y)^2\right] - E[X+Y]^2 =$$

$$\frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}$$

[illegible] $\frac{329}{6}$ 13

תרג' 6

$$\Phi_Y(t) = E\left[e^{Yt}\right] =$$ 7

$$= E\left[e^{(aX+b)t}\right] =$$

$$E\left[e^{aXt} e^{bt}\right] = e^{bt} E\left[e^{aXt}\right] = \quad V$$

$$e^{bt} E\left[e^{X(at)}\right] = e^{bt} \Phi_X(at)$$

$X \sim Po(\lambda)$ תר' 8

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} p_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\Rightarrow M_X(0) = e^{\lambda(e^0-1)} = e^{\lambda\cdot 0} = 1$$

$$M_X'(0) = \frac{d(e^{\lambda(e^t-1)})}{dt}\Big|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)}\cdot\frac{d(\lambda(e^t-1))}{dt}\Big|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)}\cdot\lambda\cdot\frac{d(e^t-1)}{dt}\Big|_{t=0} =$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)}\cdot\lambda\cdot e^t\Big|_{t=0} = e^{\lambda(e^0-1)}\cdot\lambda\cdot e^0 = 1\cdot\lambda\cdot 1 = \lambda$$

$$M_X''(0) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(e^t-1)}\cdot\lambda\cdot e^t\right)\Big|_{t=0} = \lambda\cdot\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(e^t-1)}\cdot e^t\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \lambda\left[\frac{d(e^{\lambda(e^t-1)})}{dt}\cdot e^t + e^{\lambda(e^t-1)}\cdot\frac{d(e^t)}{dt}\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= \lambda\cdot\left[e^{\lambda(e^t-1)}\cdot\lambda\cdot e^t\cdot e^t + e^{\lambda(e^t-1)}\cdot e^t\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= \lambda\left[e^{t+\lambda(e^t-1)}\cdot(\lambda e^t+1)\right]\Big|_{t=0} = \lambda\cdot e^{t+\lambda(e^t-1)}(\lambda e^t+1)\Big|_{t=0} =$$

$$= \lambda\cdot e^{0+\lambda\cdot 0}(\lambda\cdot e^0+1) = \lambda^2+\lambda$$

(ב)

$$\Phi_X(t) = e^{2e^t-2} = e^{2(e^t-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt}\cdot e^{-2}\frac{2^k}{k!} \Rightarrow X\sim Poi(2)$$

$$\Phi_Y(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}(3e^t+1)^{10} = \left(\frac{3}{4}e^t+1-\frac{3}{4}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} e^{kt}\binom{10}{k}\frac{3}{4}^k\left(1-\frac{3}{4}\right)^{10-k} \Rightarrow Y\sim B\left(10,\frac{3}{4}\right)$$

אי תלות

$$P_{X+Y}(2) = P_{X,Y}(0,2)+P_{X,Y}(1,1)+P_{X,Y}(2,0) = P_X(0)P_Y(2)+P_X(1)P_Y(1)+P_X(2)P_Y(0) = \text{(ג)}$$

$$= e^{-2}\cdot\binom{10}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^8 + 2e^{-2}\binom{10}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^9 + 2e^{-2}\binom{10}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = e^{-2}\left(45\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{1}{4^8}+20\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4^9}+2\cdot\frac{1}{4^{10}}\right) =$$

$$= e^{-2}\cdot\frac{1}{4^{10}}(45\cdot 9+20\cdot 3+2) = e^{-2}\cdot\frac{467}{4^{10}} \approx 0.00006$$

$$P_{XY}(0) = P(\{w\in\Omega \mid X(w)Y(w)=0\}) = P(\{w\in\Omega \mid X(w)=0\}\cup\{w\in\Omega \mid Y(w)=0\}) =$$

$$= P_X(0)+P_Y(0)-P_{XY}(0,0) = P_X(0)+P_Y(0)-P_X(0)P_Y(0) = e^{-2}+\frac{1}{4^{10}}-\frac{e^{-2}}{4^{10}} \approx 0.135$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 2\cdot 10\cdot\frac{3}{4} = 15$$

(ד) X,Y בלתי תלויים כמשתנים מקריים ולכן:

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון 11

1. צפיפות ההסתברות של X, אורך החיים של שבב אלקטרוני בשעות, נתונה ע"י

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

א. חשבו את $F_X(20)$.

ב. מהי פונקצית ההתפלגות של X?

ג. מה ההסתברות שמתוך שישה שבבים כאלה, לפחות שלושה יפעלו למשך 15 שעות לפחות? מה ההנחות שלכם?

2. בשני המקרים הבאים, חשבו את f_Y:

א. $X \sim U(0, \pi)$, ונגדיר $Y = \sin(X)$.

ב. Y הוא השורש המקסימלי של המשוואה הריבועית $t^3 - 9t - X$, כאשר $X \sim Exp(\lambda)$.

3. (א) יהי $Z \sim N(0,1)$. חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{P_Z([x+a/x,+\infty))}{P_Z([x,+\infty))}$, עבור $a \in \mathbb{R}$ קבוע. (ב) הראו כי פונקצית הצפיפות של מ"מ נורמלי $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ היא אכן מנורמלת.

4. יהי T אורך החיים של מערכת מסוימת (בשעות). נניח כי פונקצית ההתפלגות של T נתונה ע"י $F_T(t) = 1 - e^{G(t)}$ ל- $t > 0$ עבור $G(t)$ פונקציה גזירה, ובעלת הנגרת $G'(t) = g(t)$. הוכיחו כי עבור $0 < s, t$ מתקיים: g יורדת ממש $\Leftarrow P(\{T > s + t\}|\{T > s\}) < P(\{T > t\})$

g קבועה $\Leftarrow P(\{T > s + t\}|\{T > s\}) = P(\{T > t\})$

g עולה ממש $\Leftarrow P(\{T > s + t\}|\{T > s\}) > P(\{T > t\})$

בכל אחד מהמקרים, מה זה אומר על המערכת?

5. א. כמות הגשמים השנתית בקליפורניה (בסמ"ק) מתפלגת נורמלית עם $\mu = 40$, $\sigma = 4$. מה ההסתברות לכך שהחל מהשנה הנוכחית, ייקח לפחות 10 שנים עד שבשנה נתונה יירדו מעל 50 סמ"ק? מה ההנחות שלך?

ב. הזמן (בשעות) שנדרש למירי לתקן את הטוסטוס שלה הוא מ"מ אקספוננציאלי עם פרמטר $\lambda = 0.5$. מה ההסתברות שהתיקון ייקח מעל שעתיים? מה ההסתברות המותנית שהתיקון יסתיים אחרי 10 שעות, בהינתן שהוא כבר נערך 9 שעות?

6. נגדיר לכל a, b, c:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{ay-bx} & 0 < y < x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור אלו ערכים של a, b קיים $c > 0$ כך שזו תהיה פונקצית צפיפות של וקטור מקרי (X, Y)? במקרה זה, האם (X, Y) ב"ת?

תורת ההסתברות תשס"ו- פתרון לגליון 11

1. א.

$$F_X(20) = \int_{10}^{20} \frac{10}{x^2} dx = ... = \frac{1}{2}$$

ב.

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{10}^{x} \frac{10}{t^2} dt = 1 - \frac{10}{x} & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

ג. ההסתברות לכך ששבב יפעל לפחות 15 שעות היא $p = 1 - F_X(15) = 1 - (1 - 10/15) = 2/3$. נגדיר עבור $i = 1, .., 6$ מ"מ ברנולי כאשר $X_i = 1$ בהסתברות p ו- $X_i = 0$ בהסתברות $1 - p$. יהי $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ כלומר מס' השבבים עם אורך חיים לפחות 15 שעות. נניח אי-תלות בין השבבים, אז $Y \sim Binom(6, p)$, לכן

$$P_Y(\{3,4,5,6\}) = 1 - P_Y(\{0,1,2\}) = 1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^6 + 6\frac{2}{3^6} + 15\frac{4}{3^6}\right) \simeq 0.89$$

2. א. שימו לב לכך ש- $\sin x$ אינה חח"ע בתחום שלנו. לכן:

$$F_Y(y) = P\{\sin X \leq y\} = 2P\{0 \leq X \leq \arcsin y\} = 2\int_0^{\arcsin y} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \arcsin y$$

ולכן עבור $y \in (0,1)$:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1 - y^2}}$$

ב. כמובן המשוואה ריבועית: $t^2 - 9t - X = 0$. השורש המקסימלי הוא $Y = \frac{9+\sqrt{81+4X}}{2}$. נגדיר $y = \frac{9+\sqrt{81+4x}}{2} = g(x)$, ל- $x > 0$. אז g מונוטונית עולה. לכן על פי נוסחת שינוי המשתנה:

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y)) \ , \ y > 0$$

$$g^{-1}(y) = (y - 4.5)^2 - \frac{81}{4}$$

$$f_Y(y) = 2(y - 4.5)\lambda e^{-\lambda(y-4.5)^2 - \lambda\frac{81}{4}} \ , \ y > 0$$

3. יש לחשב את $\lim_{x\to\infty}\frac{P_Z([x+a/x,+\infty))}{P_Z([x,+\infty))}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x+a/x}^{\infty}f_Z(x)dx}{\int_{x+a/x}^{\infty}f_Z(x)dx}$. המונה והמכנה שואפים שניהם ל- 0 כאשר x שואף לאינסוף, שניהם גזירים, לכן נחשב את הגבול של מנת הנגזרות:

$$\frac{-f_Z(x+a/x)(1-a/x^2)}{-f_Z(x)}=(1-\frac{a}{x^2})\exp(-a-\frac{a}{2x^2})\longrightarrow_{x\to\infty}\exp(-a)$$

ע"פ כלל לופיטל, גבול זה שווה לגבול הראשון.

4. נוכיח רק את המקרה הראשון, שני המקרים הנותרים דומים. יהיו $s,t>0$:

$$P(\{T>s+t\}|\{T>s\})=\frac{P\{T>s+t,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}=\frac{e^{G(s+t)}}{e^{G(s)}}$$
$$=e^{G(s+t)-G(s)}=e^{\int_s^{s+t}g(x)dx}<e^{\int_0^t g(x)dx}=e^{G(t)-G(0)}=P(\{T>t\}|\{T>0\})=P\{T>t\}$$

(במעבר האחרון השתמשנו בכך ש- $T>0$). פרוש האי שוויון : המערכת מתעייפת עם הזמן. במקרה ש- g קבועה, המערכת לא מתעייפת, ובמקרה ש- g עולה, המערכת מתחזקת עם הזמן.

5. א. נעיר תחילה כי כמות הגשמים אינה באמת מ"מ נורמלי כי היא תמיד אי-שלילית, ואילו מ"מ נורמלי אמיתי יכול להיות שלילי. בכל זאת, קירוב זה נחשב מספיק טוב כי התרומה של הזנב השלילי של הגאוסיאן במקרה שלנו הוא $1-\Phi(10)$ וזה לא יותר גדול מ- 10^{-4}, ולכן נחשב זניח לצורך הענין. ובכן: $X\sim N(40,16)$ היא כמות הגשמים השנתית, ו- $Y\sim Geom(p)$ מציין את השנה הראשונה בה יירדו מעל ל- 50 סמ"ק. נחשב את p:

$$p=P_X([50,\infty))=1-P\Big\{\frac{X-40}{4}\le\frac{50-40}{4}\Big\}=1-\Phi(2.5)\simeq 1-0.9938\simeq 0.0062$$

לכן ההסתברות המבוקשת היא

$$P_Y(\{10,11,..\})=(1-p)^9\simeq 0.94$$

השתמשנו כאן בהנחה שכמות הגשמים בשנה מסוימת ב"ת בשנים האחרות.

ב. $X\sim Exp(0.5)$. ההסתברות שהתיקון ייקח מעל שעתיים:

$$P_X([2,\infty))=1-F_X(2)=1-(1-e^{-2\frac{1}{2}})=e^{-1}\simeq 0.37$$

ההסתברות המותנית שהתיקון יסתיים אחרי 10 שעות, בהינתן שהוא כבר נערך 9 שעות (נשתמש בכך שמ"מ אקספ' הוא חסר זיכרון):

$$P(\{X\ge 10\}|\{X\ge 9\})=P\{X\ge 1\}=1-F_X(1)=e^{-\frac{1}{2}}\simeq 0.61$$

6.

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{ay-bx} & 0<y<x \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נקבל תנאים על הקבועים מהתנאי $\int_0^\infty\int_y^\infty f(x,y)dxdy=1$. מקבלים $0<b$, $a<b$. קבוע הנרמול הוא $c=b(b-a)$. נחשב את ההתפלגויות השוליות ונקבל

$$f_X(x)=\int_0^x f(x,y)dy=...=ce^{-bx}\frac{e^{ax}-1}{a}$$

$$f_Y(y)=\int_y^\infty f(x,y)dx=...=\frac{ce^{ay}}{b}$$

יש נקודות בהן לא מתקיים $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, למשל ב- $x=y=0$.

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון 12

1. במפעל פריגת, יש מכונה הממלאת בקבוקים בשרשרת, כאשר כמות המיץ הנכנס לבקבוק הוא מ"מ המתפלג $\mathcal{N}(1000, 20^2)$ (ביחידות של סמ"ק). כל בקבוק בעל נפח של 1010 סמ"ק.

   א. מה ההסתברות שמיץ יישפך מבקבוק?

   ב. לאחר המילוי, הבקבוקים עוברים ביקורת. בקבוק המכיל פחות מ- 970 סמ"ק לא יוצא לשוק. מה התוחלת של מספר הבקבוקים שלא יוצאים לשוק מתוך 1000 בקבוקים שעברו ביקורת?

2. בדיקת מעבדה מורכבת משלושה שלבים, אחד אחרי השני, שמשך זמן כל אחד (בדקות) מתפלג נורמלית כדלקמן: $\mu_1 = 3.6$, $\sigma_1 = 0.2$, $\mu_2 = 2.5$, $\sigma_2 = 0.1$, $\mu_3 = 3.9$, $\sigma_3 = 0.2$. בין השלב השני לשלישי צריכים לחכות בדיוק 2 דקות. מה ההסתברות לכך שהבדיקה כולה תיערך פחות מ-12 דקות? (הניחו כי זמני ההמתנה ב"ת).

3. הוכיחו כי אם X מ"מ רציף בעל צפיפות f_X, ו- $E[e^X]$ קיימת, אזי $\lim_{x\to+\infty} e^x P_X([x, +\infty)) = 0$.

4. נקודה נבחרת באקראי בצורה אוניפורמית בריבוע בעל שטח 1 ועם קדקדים $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. יהיו X, Y הקואורינטות של הנקודה.

   א. מצאו את ההתפלגויות השוליות של X, Y.

   ב. האם X, Y ב"ת?

   ג. מצאו את ההסתברות לכך שהמרחק מ- (X, Y) אל מרכז הריבוע יהיה גדול מ- $\frac{1}{4}$.

5. טרנספורמצית Box-Muller: אלגוריתם יודע לייצר סדרות של וקטורים דו-מימדיים (X_1, X_2), כך ש- $X_1, X_2 \sim U(0,1)$ ו- X_1, X_2 ב"ת. על מנת לייצר סדרות של וקטורים המפולגים נורמלית, נגדיר

$$Y_1 = \sqrt{-2\ln X_1}\cos(2\pi X_2)$$
$$Y_2 = \sqrt{-2\ln X_1}\sin(2\pi X_2)$$

   הראו כי $Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$ וב"ת.

6. בקזינו מתנהל המשחק הבא: שחקן משלם 120 ש"ח כדי להשתתף. יש לו סיכוי $p = 0.2$ לזכות בסכום של 1200 ש"ח וסיכוי 0.8 לא לזכות. בכל מקרה בסוף המשחק הוא הולך הביתה. ביום הכי עמוס, הגיעו 1000 שחקנים. הניחו כי השחקנים ב"ת ותנו הערכה מספרית להסתברות שהקזינו יפסיד סכום של כסף הקטן מ-12000 ש"ח. מה דעתכם על מנהל הקזינו?

7. יהיו $X_1, .., X_n$ מ"מ ב"ת המתפלגים $Exp(\lambda)$. הגדירו $Y = \max\{X_1, .., X_n\}$ ו- $Z = \min\{X_1, .., X_n\}$. חישבו את F_Y, F_Z.

נגדיר מ"מ $X_i = \begin{cases} 1200 & p=0.2 \\ 0 & 1-p=0.8 \end{cases}$ $i=1,\dots,1000$ $\{X_i\}_{i=1}$ ב"ת.

והרווח של הקזינו $= \quad Y = -1000 \cdot 120 + \sum_{i=1}^{1000} X_i$

$$EX_i = 0.2 \cdot 1200 = 240 = \mu$$

$$Var\, X_i = 0.2 \cdot 1200^2 - 240^2 = 230400 = \sigma^2$$

$$P\{Y \le 12000\} = P\left\{\sum_{i=1}^{10000} X_i - 120000 \le 12000\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{10000} X_i - 10000 \cdot \mu}{\sqrt{10000}\sqrt{\sigma^2}} \le \frac{132000 - 10000\mu}{\sqrt{10000\sigma^2}}\right\}$$

De Moivre-Laplace

$$\simeq \Phi\left(\frac{132000 - 10000\mu}{\sqrt{10000\sigma^2}}\right) = \Phi(-47.25) \simeq 0$$

$\boxed{\text{פתרון תרגיל 12}}$

1. יהי $X \sim N(1000, 20^2)$ כלומר כמות המיים הנכנסים לבקבוק (ביחידות של סמ"ק).

א. $P\{X > 1010\} = 1 - P\{\frac{X-1000}{20} \le \frac{10}{20}\} = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 \simeq 0.3085$

ב. נגדיר $Y =$ "מספר הבקבוקים שלא יוצאים לשוק", אזי $Y \sim Binom(1000, p)$. חישוב p:
$p = P\{X \le 970\} = P\{\frac{X-1000}{20} \le \frac{-30}{20}\} = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 \simeq 0.0668$. מה שהתבקשתם לחשב הוא בעצם $E[Y] = 1000p \simeq 67$. זהו מס' הבקבוקים מתוך 1000 שלא יוצאים לשוק בממוצע.

2. נגדיר $X = X_1 + X_2 + X_3 + 2$ אז היות ו- X_1, X_2, X_3 ב"ת, X מ"מ נורמלי. הפרמטרים שלו נתונים ע"י:
$E[X] = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + 2 = 12$, $Var[X] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 0.09$. לכן: $F_X(12) = 0.5$.

3. $E[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^t f_X(t)dt < \infty$ לכן בפרט $\lim_{x\to\infty} \int_x^{\infty} e^t f_X(t)dt = 0$. לכן:

$$e^x P_X([x, +\infty)) = e^x \int_x^{\infty} f_X(t)dt \le \int_x^{\infty} e^t f_X(t)dt \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$$

$\boxed{4}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C & (x,y)\in D \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad D = \text{הריבוע בעל הקדקודים } (0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$$

על ידי חישוב $1=\int_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$, נקבל $C=1$.

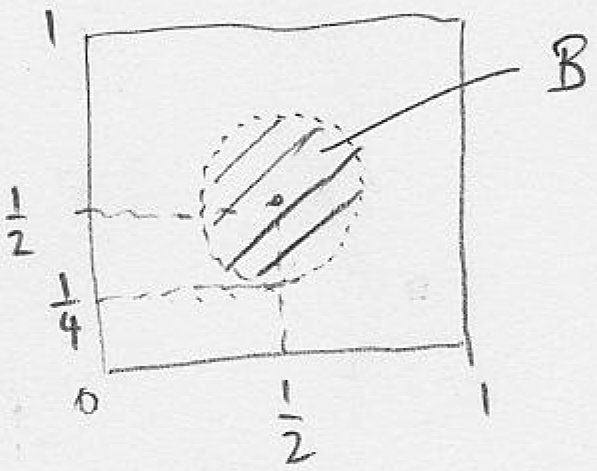
א.

$$0<x<1:\quad f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = 1$$

בדומה, $f_Y(y)=1$, $0<y<1$.

ב. לכל (x,y) מתקיים $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ ולכן X,Y ב"ת.

ג.



השאלה המקורית היא השאלה כי המרחק מ- (X,Y) אל מרכז הריבוע $\geq \frac{1}{4}$.

לכן

$$P\left\{\text{המרחק בין } (X,Y) \text{ אל מרכז הריבוע לפחות } \tfrac{1}{4}\right\} = \int_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy - \int_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= 1-\pi\cdot\frac{1}{16} \simeq 0.80$$

$\boxed{5}$ נזכיר

$$(Y_1,Y_2)=(g_1(X_1,X_2),\ g_2(X_1,X_2)) = \left(\sqrt{-2\ln X_1}\cos(2\pi X_2),\ \sqrt{-2\ln X_1}\sin(2\pi X_2)\right)$$

$$(X_1,X_2)=(h_1(Y_1,Y_2),\ h_2(Y_1,Y_2)) = \left(\exp\left(\frac{-Y_1^2-Y_2^2}{2}\right),\ \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)\right)$$

מכאן עולה כי תחום הערכים של $(Y_1,Y_2) = \mathbb{R}^2$.

נשים לב לכך שהטרנספורמציה ההפוכה h מוגדרת היטב עבור $Y_1\neq 0$ ועבור $\frac{Y_2}{Y_1}\neq k\frac{\pi}{2}$. קבוצות אלה של נקודות הן בעלות מידה אפס ב- $\mathbb{R}^2$, לכן אפשר להשתמש בטרנספורמציה זו.

הנוסחה של הנ"ל:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} f_{X_1,X_2}(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))\ |\det J(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|, & (y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאן:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1,x_2)\in[0,1]^2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן:

$$J(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)) = \begin{bmatrix} -y_1 e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} & -y_2 e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} \\ \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2}\cdot\left(\frac{-y_2}{y_1^2}\right) & \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2}\cdot\frac{1}{y_1} \end{bmatrix}$$

$$|\det J(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}$$

ולכן:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} \quad : (y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 .$$

Y_1,Y_2 ב"ת: כי חישוב ההתפלגויות השוליות, נותן

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{e^{-\frac{y_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad ; \quad f_{Y_2}(y_2) = \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

כלומר, Y_1,Y_2 ב"ת, ונורמליים $Y_1,Y_2 \sim N(0,1)$.

$\boxed{7}$

$$F_Y(a) = P\{\max\{X_1,\dots,X_n\}\le a\} = P\{X_1\le a,\dots,X_n\le a\} \overset{\text{ב"ת}}{=} F_{X_1}(a)\cdot F_{X_2}(a)\cdot\ldots\cdot F_{X_n}(a) = (1-e^{-\lambda a})^n$$

$$F_Z(a) = P\{\min\{X_1,\dots,X_n\}\le a\} = 1 - P\{\min\{X_1,\dots,X_n\}>a\} =$$
$$= 1 - P\{X_1>a,\dots,X_n>a\} = 1-(1-F_{X_1}(a))\cdot\ldots\cdot(1-F_{X_n}(a))$$
$$= 1-(e^{-\lambda a})\cdot\ldots\cdot(e^{-\lambda a}) = 1-e^{-n\lambda a}.$$

תורת ההסתברות תשס"ו- גליון 13

1. הוכח: אם קיים $M > 0$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $E|X^k| \leq M$, אז $P\{|X| > 2\} = 0$.

2. יהי X מ"מ אי שלילי בעל תוחלת 25. מה ניתן לומר על הביטויים הבאים: א. $E[X^2]$ ב. $E[\sqrt{X}]$ ג. $E[\ln X]$ ד. $E[e^{-X}]$

3. מטילים קוביה 100 פעמים. יהי X_i הערך המתקבל בהטלה מס' i. תנו חסם ל- $P\{\prod_{i=1}^{100} X_i \leq a^{100}\}$ עבור $1 < a < 6$.

4. יהיו $X_1, X_2, ..$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות עם $EX_1, EX_1^2 < \infty$. נגדיר $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. הוכיחו את הגרסה הבאה של חוק המספרים הגדולים (החלש): לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{ES_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

5. תנו הערכה להסתברות שמספר הראשים שהתקבלו ב- 10000 הטלות ב"ת של מטבע הוגן יהיה שונה מ- 5000 בפחות מאחוז אחד. לשם כך, השתמשו קודם באי-שוויון צ'בישב ואז במשפט הגבול המרכזי, והשוו בין התוצאות. תנו הערכה להסת' שמס' הראשים יעלה על 5100.

6. תהא $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מ"מ, יהי $c \in \mathbb{R}$ קבוע, ותהא $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו:

   א. $X_n \xrightarrow{D} c$ אז $X_n \xrightarrow{P} c$

   ב. אם $X_n \xrightarrow{P} X$ אז $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ (אין להשתמש בסעיף הבא).

   ג. אם $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אז $g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X)$

7. רשות יהיו $X_1, X_2, ...$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות פואסונית עם פרמטר 1. בעזרת משפט הגבול המרכזי, חישבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} e^{-n} \frac{n^n}{n!}$$

(רמז: על פי המשפט, תקבלו התכנסות של פ' ההתפלגות להתפלגות הנורמלית, ותוכלו להסיק את הגבול של הנגזרת של פ' ההתפלגות - אין צורך להצדיק החלפת סדר בין לקיחלת גבול לגזירה). האם הגבול מוכר לכם?

תורת ההסתברות תשס"ו- פתרון לגליון 13

1. נקבל באינדוקציה, ועל פי אי-שוויון מרקוב: לכל $1 \le k$

$$P\{|X| \ge 2\} = P\{|X^k| \ge 2^k\} \le \frac{E|X^k|}{2^k} \le \frac{M}{2^k}$$

צד שמאל אינו תלוי ב -k, ולכן $P\{|X| \ge 2\} = 0$.

2. תרגיל זה מתבסס על אי-שוויון ינסן . נשים לב כי אם g קעורה, אז $-g$ קמורה. לכן:

   א. $E[X^2] \ge (E[X])^2 = 625$

   ב. $E[\sqrt{X}] \le \sqrt{E[X]} = 5$

   ג. $E[\ln X] \le \ln E[X] \simeq 1.6$

   ד. $E[e^{-X}] \ge e^{-E[X]} \simeq 0.007$

3. המ"מ X_i ב"ת וש"ה, לכן נסמן $E[X_i] = E[X_1] = \frac{7}{2}$. $\ln$ פונקציה עולה, ונשתמש באי-שוויון מרקוב ($1 < a$ לכן $0 < \ln a$, $0 \le \ln X_i$):

$$P\{\prod_{i=1}^{100} X_i > a^{100}\} = P\{\ln \prod_{i=1}^{100} X_i > \ln a^{100}\} \le \frac{E[\ln \prod_{i=1}^{100} X_i]}{\ln a^{100}} = \frac{100 E[\ln X_1]}{100 \ln a} = \frac{E[\ln X_1]}{\ln a}$$

$\ln -$ קמורה, לכן:

$$P\{\prod_{i=1}^{100} X_i \le a^{100}\} = 1 - P\{\prod_{i=1}^{100} X_i > a^{100}\} \ge 1 - \frac{E[\ln X_1]}{\ln a} \ge 1 - \frac{\ln E[X_1]}{\ln a} = 1 - \frac{\ln(7/2)}{\ln a}$$

$$> 1 - \frac{\ln(7/2)}{\ln 6} \simeq 0.3$$

6. א. נכתוב את פונקצית ההתפלגות של מ"מ קבוע:

$$F_c(x) = \begin{cases} 1 & x \ge c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

יהי $\varepsilon > 0$. אז מכיוון שלכל x, $F_{X_n}(x) \to F_c(x)$:

$$P\{|X_n - c| \le \varepsilon\} = P\{X_n \le c + \varepsilon\} - P\{X_n < c - \varepsilon\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_c(c+\varepsilon) - P\{c < c - \varepsilon\} = 1 - 0 = 1$$

ולכן לכל $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - c| > \varepsilon\} = 0$, כנדרש.

ב. סעיף זה קשה (החומר הזה לא למבחן). הקושי כאן הוא שלכל $\varepsilon > 0$ נוכל למצוא $\delta > 0$ כך שאם $|X(\omega) - X(\omega)| \le \delta$ אז
$|g(X(\omega)) - g(X(\omega))| \le \varepsilon$ אבל δ יהיה תלוי ב- ω ותהיה לנו בעיה כשנסתכל על קבוצות של ω - לא יהיה δ שהוא טוב לכולם . לכן נרצה להשתמש ברציפות במדה שווה. נכתוב לכל $k > 0$:

$$\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\} \subset \{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon, |X| \le k\} \cup \{|X| > k\}$$

f רציפה לכן היא רציפה במ"ש על כל קטע סגור וחסום. יהי $\varepsilon > 0$ נתון, אז קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in [-k, k]$, אם $|x - y| \le \delta$ אז $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$. לכן

$$\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon, |X| \le k\} \subset \{|X_n - X| > \delta, |X| \le k\} \subset \{|X_n - X| > \delta\}$$

לכן

$$\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \delta\} \cup \{|X| > k\}$$

נשתמש בתכונה $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$:

$$P\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\} \le P\{|X_n - X| > \delta\} + P\{|X| > k\}$$

אבל כאשר k גדל, $P\{|X| > k\} \to 0$. לכן יהי $\gamma > 0$, ונבחר k כך ש- $P\{|X| > k\} < \gamma$. אזי

$$\lim_{n\to\infty} P\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\} \le \lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \delta\} + \gamma = \gamma$$

זה נכון לכל γ לכן גמרנו.

ג. נסמן $A = \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$, $B = \{\omega : \lim_{n\to\infty} g(X_n(\omega)) = g(X(\omega))\}$. יהי $\omega \in A$. אזי $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, לכן ומרציפות g, $\lim_{n\to\infty} g(X_n(\omega)) = g(X(\omega))$, כלומר $\omega \in B$, לכן $A \subset B$, ולכן $P(A) \le P(B)$. מהנתון, $P(A) = 1$, לכן סיימנו.

4 $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ אז $ES_n = nEX_1$. יש כאן הנחה סמויה

כי $EX_1 \neq 0$, אחרת אין משמעות לביטוי:

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{ES_n}-1\right|\geq \varepsilon\right\} = P\left\{|S_n-ES_n|\geq \varepsilon|ES_n|\right\} = P\left\{|S_n-ES_n|\geq n\varepsilon|EX_1|\right\}$$

לפי צ'בישב

$$\leq \frac{\operatorname{Var} S_n}{n^2\varepsilon^2(EX_1)^2} = \frac{n\operatorname{Var} X_1}{n^2\varepsilon^2(EX_1)^2} \leq \frac{EX_1^2+(EX_1)^2}{n\varepsilon^2(EX_1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(הוכחנו קודם).

5

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{יצא ראש} \quad p=\frac{1}{2} \\ 0 & \text{יצא זנב} \quad 1-p=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$i=1,\dots,10000$ וה-X_i-ים ב"ת.

מס' הראשים ב-10 000 הזריקות $= \sum_{i=1}^{10000} X_i = S_n$. לכן

$$ES_n = 10000\,EX_1 = 5000$$
$$\operatorname{Var} S_n = 10000\operatorname{Var} X_1 = 2500$$

מחפשים הערכה ל:

$$P\left\{|S_n-5000| \leq \underbrace{0.01\cdot 10000}_{100}\right\}$$

(i) לפי צ'בישב:

$$P\{|S_n-5000|\leq 100\} = 1-P\{|S_n-5000|>100\} \geq 1-\frac{\operatorname{Var} S_n}{100^2}$$

$$= 1-\frac{2500}{10^4} = 0.75$$

(ii) לפי מ.ג.מ.:

$$P\{|S_n-5000|\leq 100\} = P\{-100\leq S_n-5000\leq 100\} =$$

$$= P\left\{\frac{-100}{\sqrt{2500}} \leq \frac{S_n-5000}{\sqrt{2500}} \leq \frac{100}{\sqrt{2500}}\right\}$$

$$\overset{\text{מ.ג.מ.}}{\simeq} \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2)-1 \simeq 0.9544$$

$$P\{S_n\geq 5100\} = P\left\{\frac{S_n-5000}{\sqrt{2500}} \geq \frac{100}{\sqrt{2500}}\right\} \simeq 1-\Phi(2) \simeq 0.0228$$