לוגיקה של מבנים מתמטיים

סיכומי הרצאות

סוכם ע"י יוני בן-ארצי ע"פ הרצאותיו של פרופ' הרושובסקי

אוניברסיטה עברית
תשס"ו

31.10.05 שיעור 1

מבנה הקורס:

I) חשיבה בסמלים.

II) חשיבה בביטויים בשפה.

הפסקה.

⟸ מתי. 12/12/05.

III) משפט השלמות.

IV) מבוא למתמטיקה מול חשיבה ביטויים.

ספרים:

1) לוי.

2) Enderton

3) Johnstone

www.mathhuji.ac.il/~ehud/Logic/

היסטוריה...

אריסטו, שאב 4 קטגוריות. נסה את הביטויים הבאים:

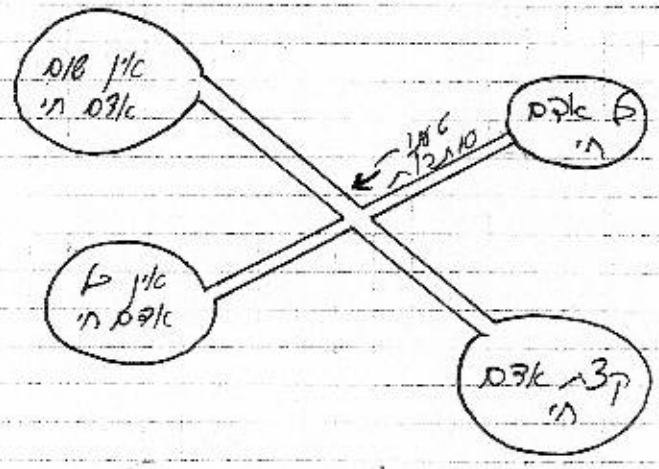
$(\forall x)(H(x) \to (\neg A(x))$

$\neg (\exists x)(H(x) \wedge A(x))$

$(\forall x)(\neg (H(x) \wedge A(x)))$

$\neg (\forall x)(H(x) \Rightarrow A(x))$

$(\exists x)(H(x) \wedge \neg A(x))$



$(\forall x)(H(x) \Rightarrow A(x))$

אדם חי

$(\exists x)(H(x) \wedge A(x))$

סילוגיזם (היקש):

כל אדם חי.

סוקרטס אדם (סוקרטס יומן מ-c): $H(c)$

⟸ סוקרטס חי.

3.11.05

תחשיב הפסוקים

נגדיר הגדרות באופן: 1. ...; 2. ...; 3. ...; אם ... אז ...

(44 Enderton , 29 עמ' k-1) **תרגיל:**

מנים:

אנו נשתמש בסימן כסוף, אמונים (ב-Enderton): $L = \{A_1, A_2, \dots\}$.
סימן כסוף הוא סימן אשר מגדיר אינטלו כסוף, עשוי להיות אות או שדה

ישנם סימנים לוגיים: $\perp$

$\neg$	שלילה
$\wedge$	קונג'ונקציה
$\vee$	דיסג'ונקציה
$\rightarrow$	אימפליקציה
$\leftrightarrow$	אינדיקציה דו-כיוונית

סימנים תחביריים: ( ) .

הגדרה:

<u>קבוצת הנוסחאות של תחשיב הפסוקים</u> (מעל L) היא הקבוצה הקטנה ביותר S_L כך ש:

1) $L \subseteq S_L$.
2) אם $s_1, s_2 \in S_L$ אז $(s_1 \square s_2) \in S_L$, כאשר $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
3) אם $s \in S_L$ אז $(\neg s) \in S_L$.
4) $\perp \in S_L$.

הסבר: S_L הוא הקבוצה הטובה ביותר במובן שלא קבוצה אחרת אליה מקיימת את הסגירות הללו, מכילה את S_L.

יחידות הקבוצה S_L בכיוון: אם גם S' מקיימת אותם תנאים, אז בפרט S' מקיימת את 1-4 ולכן $S_L \subseteq S'$, ולהפך $S' \subseteq S_L$, נובע $S_L = S'$.

קיום הקבוצה S_L: תהי W קבוצה המשתנות כלשהי-בגודל עם הסימנים $L \cup \{(,),\to,\leftrightarrow,\vee,\wedge,\neg,\bot\}$.
כדור ש- W מקיימת את 1-4.

נגדיר: $S = \bigcap \{W' : W' \text{ מקיים את } 1\text{-}4\} =$
$= \{a \in W : a \text{ נמצא בכל } W' \text{ המקיים } 1\text{-}4\}$

טענה:

א. S מקיימת 1-4.

ב. S הקטנה ביותר המקיימת 1-4.

הוכחה:

א. **בסיס:** $L \subseteq S$: אם $L \subseteq W'$ לכל W' המקיימת 1-4
לכן: $L \subseteq \bigcap_{W' \text{ מקיים } 1\text{-}4} W'$.

צעד: $S_1, S_2 \in S \Leftarrow (S_1 \to S_2) \in S$: אם S_1, S_2 שלמים
לכל W' מקיים 1-4, $S_1, S_2 \in W'$.
$(S_1 \to S_2) \in W'$ לכן: $(S_1 \to S_2) \in \bigcap W'$. כנדרש לפי הקשרים

הגדרה:

<u>סדרת יצירה</u> (עבור s) היא סדרת הנוסחאות $s_1, s_2, \dots, s_n$ כך ש:

* $s_n = s$
* לכל $i \le n$, אם: $s_i \in L$
  אז קיימים $1 \le j, j' < i$ כך ש:

$$s_i = (s_j \to s_{j'})$$
$$(s_j \wedge s_{j'})$$
$$(s_j \vee s_{j'})$$

אז קיים $j < i$ כך ש:

$$s_i = (\neg s_j)$$

אז

$$s_i = \bot$$

מה נמצא עבור i?

s_1 $\bot$

s_2 P

s_3 $(\bot \to \bot)$

s_4 $(\bot \wedge P)$

s_5 $((\bot \to \bot) \vee (\bot \wedge P))$

טענה:

$s \in S_L$ (s נוסחא) $\iff$ קיימת סדרת יצירה עבור s.

הוכחה:

נסמן G = קבוצת הנוסחאות של עבורן סדרת יצירה.

כדי להראות ש- $G = S_L$ צ"ל: (i) G מקיים 1-4. ($S_L \subseteq G$ $\Leftarrow$)

(ii) אם W' מקיים 1-4, אז $G \subseteq W'$

($G \subseteq S_L$ $\Leftarrow$)

נראה את (ii): יהי $s \in G$. יש עבור s סדרת יצירה $s_1, \dots, s_m$.

נראה באינדוקציה על i ש- $s_i \in W'$.

עושים זאת לפי הגדרת סדרת יצירה ושימוש בתכונות 1-4 של W'.

לכן $s_m \in W'$ אבל $s_m = s$

(מעט פורמלי לאינדוקציה: בשלב i, אין יותר אינדקסים שלא $j, j' < i$

אז $s_j, s_{j'} \in W'$ ולכן, מכוון ש- W' מקיים 1-4,

$(s_j \to s_{j'})$ ובמיוחד נמצאים ב- W',

אך זה בדיוק דורש מs_i מהגדרת סדרת יצירה.

נראה את (i): נראה ש- G סגורה ל- $\vee$ שמתלת:

יהיו $s, s' \in G$, $\underline{\text{ב}}$: $(s \vee s') \in G$.

$s \in G \Leftarrow$ יש סדרת יצירה $s_1, \dots, s_n$ עבור s.

$s' \in G \Leftarrow$ יש סדרת יצירה $s'_1, \dots, s'_{n'}$ עבור s'.

נשקול סדרת יצירה $s''_1, s''_2, \dots, s''_{n+n'+1}$:

$$s''_i = \begin{cases} s_i & i \le n \\ s'_{i-n} & n < i \le n+n' \\ s \vee s' & i = n+n'+1 \end{cases}$$

<u>טענה</u>: זהו סדרת יצירה עבור $(s \vee s')$.

<u>הוכחה</u>: תרגיל. (יש להראות לכל $i \le n+n'+1$ שמקיים הנאמר בהגדרת

סדרת יצירה. נסביר מדוע: $i \le n$, $n \le i \le n+n'$

ו- $i = n+n'+1$. במקרה האחרון, אין עניין:

$j = n$

$j' = n+n'$).

איך נבנה את S_L בצורה מדויקת?

* $L \subseteq S_L$
* נגדיר פונקציות $S_L^m \longrightarrow S_L$: $(0 \le m \le 2)$

$F_\wedge, F_\vee, F_\to, F_\leftrightarrow : S_L^2 \longrightarrow S_L$ פעולות דו-מקומיות

$F_\neg : S_L \longrightarrow S_L$ פעולה חד-מקומית

$F_\perp \in S_L$ פעולה אפס-מקומית

אמת:

$F_\vee(s, s') = (s \vee s')$

$F_\neg(s) = (\neg s)$

$F_\perp = \perp$

בהמשך הפורמליזציה (שלנו לא יהיה אף מקום כזה, למשל לא מקיים כזה!):

$F_\to(F_\to(x,y), z) \overset{?}{=} F_\to(x, F_\to(y,z))$ לא נכון!

$\Leftarrow$ נבנה מבנה: <u>כל אלגברה יצירה חופשית</u> (אמרנו קודם)

אלגברה: קבוצה S עם מספר פונקציות נגדיר $S \to S^m$.

יצירה: $\Leftarrow$ תת-קבוצה של S המכילה את L וסגורה תחת $F_\wedge, F_\to, \dots$

שלה S - L כולה

T סגורה תחת F, G: $t_1, \dots, t_m \in T \Rightarrow F(t_1, \dots, t_m) \in T$, G.

מה הבעיה שלנו אלגברה יצירה <u>חופשית</u>?

אם $s = F_\square(s_1, s_2)$ ו $s = F_\diamond(s_1', s_2')$

אז $\square = \diamond$, $s_1 = s_1'$, $s_2 = s_2'$

למשל $(\mathbb{Z}, +)$ אינה מקיימת את הדרישה הזו: $1+3 = 2+2$ מספרים שונים

$2+2 = 2 \cdot 2$ פעולה שונה...

בשביל פונקציות בוליאניות עבור הסימנים הבאים:

ערכי אמת: $\{F,T\}$ (או $\{0,1\}$).

פונקציה בוליאנית: $\alpha : \{F,T\}^n \longrightarrow \{F,T\}$

דוגמאות:

$t_\wedge : \{F,T\}^2 \longrightarrow \{F,T\}$

$t_\wedge$	F	T
F	F	F
T	F	T

$t_\vee$	F	T
F	F	T
T	T	T

$t_{\to}$ (P \ Q)	F	T
F	T	T
T	F	T

$t_{\leftrightarrow}$	F	T
F	T	F
T	F	T

$t_\neg$	F	T
	T	F

$\bot$	F

סיכום: $F_{\to}$ נוצר בפונקציה

$t_{\to}$ נוצר לגמרי מלא בפונקציה שמקבלת ל $F_{\to}$

7.11.05 שבוע 2

הגדרה:

L – קבוצת סימני הסוגר.

$\mathbb{W}$ – שרשראות מעל L. $\mathbb{W} = \{ "a_1 \dots a_n" : a_1, \dots, a_n \in L \}$

פעולות: $\mathbb{W}^2 \to \mathbb{W}$: $F_\wedge, F_\vee, F_\to, F_\leftrightarrow$

$\mathbb{W} \to \mathbb{W}$: $F_\neg$

$F_\perp \in \mathbb{W}$

S_L האלגברה הנוצרת ע"י L.

טענה: S_L חופשית ("קריאה יחידה"):

אם $\bar{x} = x_1, \dots, x_m \in S_L$ וגם $\bar{y} = y_1, \dots, y_{m'} \in S_L$ $F_i(\bar{x}) = F_{i'}(\bar{y})$

אז $i = i'$, $m = m'$, $\bar{x} = \bar{y}$. (כאשר: $i, i' \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \neg, \perp\}$)

kk נוכיח את הטענה (בתרגיל).

וריאנט: אנו נשתמש במושג המתאים של **צוג סדור**.

(x,y) צוג סדור של שני אובייקטים x, y.

תכונה: $(x,y) = (u,v) \iff x = u,\ y = v$

אז, **נוכל לבנות:** $F_i(u,v) = (i, (u,v))$

בנוסף לו, **טענה** הקריאה הייחודית מתקיימת: $F_i(\bar{x}) = F_{i'}(\bar{y})$

$\Rightarrow (i, \bar{x}) = (i', \bar{y})$

$\iff i = i',\ \bar{x} = \bar{y}$

② הערכות:

הגדרה:

הערכה היא פונקציה $v: L \longrightarrow \{F,T\}$. (אבל לא, לפי, עכ"פ "מבנה").

דוגמא: אם $L=\{P,Q\}$ אז נוכל לבנות את הטבלאות:

P	Q
F	F
F	T
T	F
T	T

הגדרה:

בהינתן הערכה v, נגדיר **הרחבה של v** ופונקציה:

$$\bar{v}: S_L \longrightarrow \{F,T\}$$ שמוגדרת ... מיד...

יש חופש רב בהרחבה, אך נראה כאן שאם חושב בדיוק $\bar{v}$.

הגדרה: מבקשים ה: $(s,s',s'' \in S_L)$.

אם $s \in L$: $\bar{v}(s) = v(s)$ 1)

אם $s = F_\neg(s')$: $\bar{v}(s) = \begin{cases} F & \bar{v}(s')=T \\ T & \bar{v}(s')=F \end{cases}$ 2)

אם $s = F_\square(s',s'')$: $\bar{v}(s) = t_\square(\bar{v}(s'), \bar{v}(s''))$ 3)

כאשר $t_\square : \{F,T\}^2 \longrightarrow \{F,T\}$ נתון בטבלה הקודמת.

אם $s = \bot$: $\bar{v}(s) = t_\bot = F$ 4)

דוגמא:

P	Q	$(Q \to P)$	$(P \to (Q \to P))$
F	F	T	T
F	T	F	T
T	F	T	T
T	T	T	T

$\Rightarrow \bar{v}((P \to (Q \to P))) = T$

טאוטולוגיה: אינה תלויה במשתנים הפסדיים P ו Q, נקרא אינדיפנדנטי

לכן עדיין $\bar{v}$ מגדיר אותה

אין צורך בהגדרה הקודמת של $\bar{v}$ הוא מתבסס על מ"ס ולא לגבי תופעה

למשל, אילו היינו מגדירים ל $\mathbb{Z}$ $\omega(x+y) = \omega(x)/\omega(y) - 1$ מתקיים $\omega(1) = 2$

אז נוכל לבנות בביטוי יחיד $\omega(3)$: $\omega(2+1) \neq \omega(1+2)$

טענה:

הפונ' $\bar{v}$ מוגדרת היטב.

הוכחה:

הוכחת הייחודיות: נניח ש- $\bar{v}, \bar{v}'$ מקיימות את התנאים

$\exists$: $\bar{v} = \bar{v}' \iff \bar{v}(s) = \bar{v}'(s)$ לכל $s \in S_L$.

נגדיר: $S' = \{s \in S_L : \bar{v}(s) = \bar{v}'(s)\}$ אזי:

אין צורך

* S' מכיל את L.
* S' סגור תחת $F_\wedge, F_\vee, \dots$

$\exists$: $s_1, s_2 \in S' \Rightarrow F_\square(s_1, s_2) \in S'$.

אזי: $F_\square(s_1, s_2) \in S' \iff \bar{v}(F_\square(s_1, s_2)) = \bar{v}'(F_\square(s_1, s_2))$

$\bar{v}(F_\square(s_1, s_2)) = t_\square(\bar{v}(s_1), \bar{v}(s_2))$

$\bar{v}'(F_\square(s_1, s_2)) = t_\square(\bar{v}'(s_1), \bar{v}'(s_2))$

מהנחת המרכזית:

10.11.05

הגדרה:

רמת **CPL**: בהינתן $v: L \to \{F,T\}$ ניתן שיעריך את ערכיה $\bar{v}: S_L \to \{F,T\}$ ל φ:

(1) $v \subseteq \bar{v}$

(2) $\bar{v}(F_i(s_1,\dots,s_{m_i})) = t_i(\bar{v}(s_1),\dots,v(s_{m_i}))$

כאשר: $m_k = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$k \in \{\bot, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

הגדרות:

① נאמר $\varphi \in S_L$ ערך **טאוטולוגיה** או **אמת לוגית** אם לכל $v: L \to \{F,T\}$ $\bar{v}(\varphi) = T$.

נמק: לכל $P \in L$,

$$\bar{v}((P \to P)) = \bar{v}(F_\to(P,P)) = t_\to(\bar{v}(P), \bar{v}(P)) = t_\to(v(P), v(P)) = \begin{cases} T \\ T \end{cases}$$

② נאמר $\varphi \in S_L$ ערך **סתירה לוגית** אם לכל $v: L \to \{F,T\}$ $\bar{v}(\varphi) = F$.

נמק:

$$\bar{v}((P \to \bot)) = \bar{v}(F_\to(P,\bot)) = t_\to(\bar{v}(P), \bar{v}(\bot)) = t_\to(v(P), v(\bot)) = t_\to(v(P), F) = \text{הפוך מ-}v(P)$$

③ $\varphi \in S_L$, $\Gamma \subseteq S_L$. נאמר ש- φ **נגזרת לוגית** מ- Γ, ונסמן $\Gamma \models \varphi$, כאשר לכל $v: L \to \{F,T\}$,

$\forall \alpha \in \Gamma \quad \bar{v}(\alpha) = T \implies \bar{v}(\varphi) = T$.

מסקנה: טאוטולוגיה תמיד ע"י $\phi \models \varphi$.

טענה:

אם $\Gamma \models \varphi$ ו- $\Gamma \subseteq \Gamma'$ אז $\Gamma' \models \varphi$

הוכחה:

בגלל ההנחה $\Gamma' \models \varphi$ עבור כל $v: L \to \{F,T\}$ ש- $\bar{v}(\varphi) = T$
עבור כל $\alpha \in \Gamma'$. בפרט, $\bar{v}(\alpha) = T$ עבור כל $\alpha \in \Gamma$
לכן $\bar{v}(\varphi) = T$, מ.ש.ל.

דוגמא: מודוס פונס MP

$P, Q \in L$ $\quad \Gamma = \{P, (P \to Q)\} \models Q$

$\alpha, \beta \in S_L$ $\quad \{\alpha, (\alpha \to \beta)\} \models \beta$

הוכחה:

תהי $v: L \to \{F,T\}$. אם $\bar{v}(\alpha) = F$ או $\bar{v}(\alpha \to \beta) = F$
אין מה להוכיח. לכן, נניח ש: $\bar{v}(\alpha) = T$, $\bar{v}(\alpha \to \beta) = T$
נראה ש- $\bar{v}(\beta) = T$. נתבונן בהגדרת הפונקציה הבולאנית $f_\to$:

$$\bar{v}(\alpha \to \beta) = f_\to(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)) = \begin{cases} F & \bar{v}(\alpha) = T \quad \bar{v}(\beta) = F \\ T & \bar{v}(\alpha) = T \quad \bar{v}(\beta) = T \end{cases}$$

אך $\bar{v}(\alpha) = T$, $\bar{v}(\alpha \to \beta) = T$ ולכן $\bar{v}(\beta) = T$.

טענה: $\{P, \neg P\} \models \alpha$ (לכל α שהוא).

כי עבור כל נוסחא בקבוצה ובפרט

14.11.05 שבוע 3

הגדרות:

מודל של φ הוא הערכה v כך ש: $\bar{v}(\varphi) = T$.

מודל של קבוצת נוסחאות Γ = הערכה v כך ש: $\bar{v}(\varphi) = T$ לכל $\varphi \in \Gamma$

Γ **ספיקה** (Satisfiable) אם יש לה מודל.

φ **טאוטולוגיה** אם לכל הערכה v, $\bar{v}(\varphi) = T$

טענה: φ איננה טאוטולוגיה אם ורק אם $(\neg\varphi)$ ספיקה.

דוגמא: $\Gamma = \{(P \to Q), (\neg Q)\}$

	P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$
v_1	F	F	T	T
v_2	F	T	T	F
v_3	T	F	F	T
v_4	T	T	T	F

v_1 מודל של Γ.

הוכחה:

φ איננה טאוטולוגיה $\iff$ $\bar{v}(\varphi) = F$ עבור איזשהי הערכה v

$\iff$ $\bar{v}((\neg\varphi)) = T$ עבור איזשהי הערכה v.

$\iff$ $(\neg\varphi)$ ספיקה.

משפט:

קיים אלגוריתם שבהינתן נוסחא φ, מכריע אם φ טאוטולוגיה או לא.

(שם: בדיקת ריקות האמת)

דוגמא:

$L = \{P, Q\}$

$\varphi = ((P \to Q) \to ((\neg P) \to (\neg Q)))$

P	Q	$(P \to Q)$	$\to$	$((\neg P)$	$\to$	$(\neg Q))$
F	F	F T F	T	T F	T	T F
F	T	F T T	F	T F	F	F T
T	F					
T	T					

φ אינה טאוטולוגיה. (בשורה האמצעית קבלנו F).

נשאלת שאלה: נקבל שורה לכל הערכה אפשרית של סימני הפסוק המופיעים ב-φ.
נחשב את $\bar{v}(\varphi)$ בהתאמה לאותה הערכה φ.
(נניח בדר"כ נשאל מספר יותר גדול מכל φ, $\{\varphi_n\}$, ונחשב את $\bar{v}(\varphi_i)$ באינדוקציה על i).
נעשה כל עצמו ל v אקראי.

בסוף נבדוק: האם מופיע בעמודה T בעמודה $\bar{v}(\varphi)$ עבור כל v?

אם כן: φ טאוטולוגיה.

אם לא: φ אינה טאוטולוגיה.

הערה: ⊛ בדומה נוכל לבדוק שקילות בין שתי נוסחאות רגילות φ_1, φ_2.
⊛⊛ ובכלל, נוכל לבדוק האם $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$ כאשר $\psi, \varphi_n, \dots, \varphi_1$ רגילות.

הערה לגבי יעילות: כמה סימנים (בערך) נצטרך לחשוב בכדי להכריע אם φ טאוטולוגיה?
כולל ל-φ n סימני פסוק, ואורכה N?

2^n שורות. בכל שורה יש לנו בערך $N+n$ סימנים. בסוף צריך לעבור על
הטור המתקבל ולראות אם הכל שם T. מקבלים: $2^n(N+n)$ ועוד 2^n בסוף.

בכל מקרה שקול מאוד, ואני יכול בקלות לשנות כולם לומר לך אם יש טאוטולוגיה או לא.
אין סיבה לבלבל אל.

הגדרה: פונקציה אמת הינו פונקציה $f: \{F,T\}^n \longrightarrow \{F,T\}$.

בהינתן סימן פסוקי $P_1, \dots, P_n$ והבינתים לפסוק φ, נגדיר את פונקציה האמת f_φ של φ $f_\varphi(v) = \bar{v}(\varphi)$

(כאשר מציבים את $v \in \{F,T\}^n$ על בהתאמה $P_i \longmapsto v_i$)

P_1	P_2	φ
F	F	?
F	T	?
T	F	?
T	T	?

$$\underbrace{\{F,T\}^2}_{} \longrightarrow \underbrace{\{F,T\}}_{}$$

17.11.05

סיכום:

$$(\neg\psi) = \psi^F \quad ; \quad \psi = \psi^T \qquad (*)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{4} \psi_i = (((\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3) \wedge \psi_4) \qquad (*)$$

$$\bigvee_{i=1}^{4} Q_j = (((Q_1 \vee Q_2) \vee Q_3) \vee Q_4) \qquad (*)$$

אם יש לנו Q_i $i \in I$, I בגודל סופי, אזי נסמן בסמן:

$\bigvee_{i \in I} Q_i := \bigvee_{k=1}^{m} Q_{i_k}$, כאשר $I = \{i_1, \dots, i_m\}$.

אם $I = \phi$, $\bigvee_{i \in I} Q_i := \bot$.

נשים לב שהבינתים הנ"ל v, $\bar{v}(\bigvee_{i \in I} Q_i) = T \iff$ קיים איבר $i \in I$ כך ש: $\bar{v}(Q_i) = T$.

במקרה ש: $I = \phi$ נגדיר: $\bar{v}(\bigvee_{i \in I} Q_i) = F$.

17.11.05

תרגיל:

הפונקציה $\varphi \longmapsto mod\varphi$, כאשר $mod(\varphi) = \{V : \bar{V}(\varphi) = T\}$

מעבירה $\vee$ אל $\cup$ (איחוד)

ומעבירה $\wedge$ אל $\cap$ (חיתוך).

דוגמאות:

① הפונקציה הקבועה לא ערך F הוא $t_\perp$.

② הפונקציה הקבועה T הוא $t_\top$ כאשר $\top$ טאוטולוגיה.

③ נתן אובר $u \in \{F,T\}^n$. נגדיר פסוק g_u המוגדר:

$$g_u := \begin{cases} g_u(u) = T \\ g_u(u') = F \quad \forall u' \neq u \end{cases}$$

אז מתקבלת הטבלה:

$\{F,T\}^n$	g_u
F . . . TF . F	F
	F
	⋮
כל השורה המתאימה ל-u	T
	F
	⋮
	F

טענה:

$g_u = t_\varphi$, כלומר: g_u הוא פונ' אמת φ אקראי ולכן φ,

כאשר:

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} (p_i^{u(i)})$$

הוכחה:

יש להראות ש: $t_\varphi(V) = g_u(V)$ לכל הערכה V. כלומר: $\bar{V}(\varphi) = g_u(V)$.

נחשב את $\bar{V}(\varphi)$. נבחן לשני מקרים:

k $u = V$: $\bar{V}(p_i) = V(p_i) = u(p_i) = u(i)$

$$\bar{V}(p_i^{u(i)}) = \begin{cases} u(i) = T & T^T = T \\ u(i) = F & F^F = F \end{cases}$$

$$\bar{V}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{u(i)}\right) = T = g_u(V)$$

ב. $u \neq v$: קיים לפחות לפחות אחד של i, נניח i_0, φ ש:
$v(p_{i_0}) \neq u(p_{i_0})$ ויקבל שמתאים גם ש: $\bar{v}(p_i) = v(p_i)$.

$$\bar{v}\left(p_{i_0}^{u(i_0)}\right) = \bar{v}\begin{pmatrix} p_{i_0} & u_{i_0}=T \\ (\neg p_{i_0}) & u_{i_0}=F \end{pmatrix} = \begin{cases} F & u(i_0)=T \\ \bar{v}(\neg p_{i_0}) = F & \end{cases} \equiv F$$

$$\Leftarrow \quad \bar{v}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{u(i)}\right) = F = g_u(v).$$

משפט:

יהי $g: \{F,T\}^n \to \{F,T\}$ פונ' בוליאנית:

① $g = t_\varphi$ עבור אינטרפרטציה לסמל ש.

② אחרת, ניתן לרשום $\bigvee_{u \in I} \bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{u(i)}$ באשר:

$$I = \{u \in \{F,T\}^n : g(u) = T\}$$

הערות:

① המשפט נכון גם לגבי קבוצות בוליאניות. לדוגמה: כל פונקציה אמת ניתן לבטא ע"י קבוצת הקשרים שהתבלו. בפרט, ניתן לקבל כל פונקציה אמת ע"י הקשרים $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

② לא נדרוש מכך שלאחר של קבוצה קשרים אחרת, לפחות $\{\bot, \rightarrow\}$.

הבאה: בנוסף שקיבלנו את $\{\bot, \neg, \wedge, \vee\}$ אנו יכולים לבטא את $\wedge, \vee$ בעזרת $\bot, \rightarrow$.

$\Leftarrow$ מכאן ואילך, נוכל לבטא את המבנה לדורה פונקציות ולהסתפק ב- $\{\bot, \rightarrow\}$.

DNF

CNF

הוכחה:

יהי $v \in \{F,T\}^n$. עלינו להראות: קיימת φ כך ש: $t_\varphi(v) = g(v)$.

$$t\left(\bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{u(i)}\right)(v) = \begin{cases} T & u=v \\ F & u\neq v \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$t_\varphi(v) = \begin{cases} T & \text{אם } v=u \text{ עבור } u\in I \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} T & v\in I \\ F & v\notin I \end{cases} \iff \begin{cases} T & g(v)=T \\ F & g(v)\neq T \end{cases} \iff g(v)$$

דוגמא:

$n=2$, ונגדיר $g = t_{\leftrightarrow}$. אזי:

$$g\left(\begin{Bmatrix} F & F \\ F & T \\ T & F \\ T & T \end{Bmatrix}\right) = \begin{Bmatrix} T \\ F \\ F \\ T \end{Bmatrix}$$

שלב (1): לחשב כאן אינטואיציה מדוע שמגדיר $(t_{\leftrightarrow})$:

נוכל לראות את שלב (2): נגדיר $I = \{FF, TT\}$.

$$\varphi = (((\neg P_1)\wedge(\neg P_2)) \vee (P_1 \wedge P_2))$$

נוודא שזה מתאים:

P_1	P_2	$P_1 \leftrightarrow P_2$	$(\neg P_1)\wedge(\neg P_2)$	$(P_1\wedge P_2)$	$\vee$
F	F	T	T	T	F
F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F
T	T	T	F	T	T

אלה אותם מתאימים ל $I=\{FF, TT\}$ $\Rightarrow$

בעזרת את φ לפי I. אם הוא לא עוד אותנו (למשל (T,F)) הוא מתאים לתנאי את φ.

מסקנה:

יהי $n>1$. אזי כל פונ' אמת הוא גם מגדרת t_ψ כאשר:

$$\psi = \bigwedge_{f\in\Sigma}\bigvee_{i=1}^{n} p_i^{f(i)}$$ ($f(i)$ הוא פונ').

נקיים לפי פה-מוכן:

נקיים אם $t_{\neg\psi}$: $t_{\neg\psi} = t(\bigvee_{u\in\Sigma}\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{u(i)})$

$$\neg\bigvee_{u\in\Sigma}\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{u(i)} \equiv \bigwedge_{u\in\Sigma}\neg\bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{u(i)} \equiv \bigwedge_{u\in\Sigma}\bigvee_{i=1}^{n}(\neg p_i^{u(i)}) \equiv$$

$$\equiv \bigwedge_{u\in\Sigma}\bigvee_{i=1}^{n} p_i^{u'(i)}$$

כאשר:
$$u'(i) = \begin{cases} F & u(i)=T \\ T & u(i)=F \end{cases}$$

21.11.05 שבוע 4

כמה שאר נוסחאות DNF שרצינו: (לפי 2 נוסחאות)

כל נוסחא φ שקולה לוגית לנוסחא ψ ב- DNF

אם $t_\psi = t_\varphi$, כלומר $\bar{v}(\psi) = \bar{v}(\varphi)$ לכל v, כלומר ψ, φ שקולות לוגית.

הנוסחאות הם כך לא נוסחאות סופיות, גם לא הלפה אינסופיות.

משפט: משפט הקומפקטיות לחשבון הפסוקים

L = אוסף נוסחים, לאו דווקא סופי.

Γ = קבוצת נוסחאות של L

1. **משפט:** תהי סוף של גרפה לוגית בחשבון הפסוקים

אם $\Gamma \models \varphi$, אז קיימת תת-קבוצה סופית $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$

כך ש: $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \models \varphi$.

הגדרה:

(Γ ספיקה $\iff$ קיים מודל של Γ)

Γ <u>ספיקה סופית</u> (Finitely Satisfiable) אם לכל תת-קבוצה סופית

Δ של Γ קיים מודל V_Δ של Δ.

ברור ש- Γ ספיקה $\longleftarrow$ Γ ספיקה סופית.

2. **משפט:** אוסף סופי של ספיקות

Γ ספיקה סופית $\Longleftarrow$ Γ ספיקה.

הגדרה:

Γ ספיקה סופית נאמר ש- Γ <u>שלמה</u> אם לכל נוסחת φ של L

אז $\varphi \in \Gamma$ או $(\neg\varphi) \in \Gamma$.

הכרחי למשפט 2:

למה 1:

אם Γ מסקנה סופית, קיימת $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ כך ש- Γ_0 מסקנה סופית ושלמה. (תרגיל)

למה 2:

אם Γ מסקנה סופית ושלמה, אזי יש Γ - Γ מודל (יחיד).

בהינתן שתי הלמות נוכל למשפט:

תהי Γ מסקנה סופית. לפי למה 1 יש $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ מסקנה סופית ושלמה, לפי למה 2 יש מודל V של Γ_0. ברור ש- V גם מודל של Γ, ולכן Γ מסקנה.

(לא)

הכרחי למה 2:

צריך למצוא $V: L \to \{F,T\}$ כך ש- $\bar{V}(\varphi) = T$ לכל $\varphi \in \Gamma$.

נגדיר:

$$v(p) = \begin{cases} T & p \in \Gamma \\ F & p \notin \Gamma \end{cases} \qquad p \in L$$

תהי $\varphi \in \Gamma$. $\underline{\exists}$: $\bar{V}(\varphi) = T$.

φ משתמשת במספר סופי של סימני פסוק מ- L, נאמר $p_1, \dots, p_n$.

נבנה כל p_i, השאלה של Γ אומרת: $p_i \in \Gamma$ או $\neg p_i \in \Gamma$.

בפי מקרה: $p_i^{v(p_i)} \in \Gamma$.

נגדיר: $\Delta = \{\varphi, p_1^{v(p_1)}, \dots, p_n^{v(p_n)}\}$

Δ הוא תת קבוצה סופית של Γ.

$\Leftarrow$ יש $\models$ - Δ מודל V'.

טענה: $V(p_i) = V'(p_i)$ לכל $i \in \{1, \dots, n\}$.

הוכחה: $p_i^{v(p_i)} \in \Delta$ ו- V' מודל של Δ, $\bar{V}'(p_i^{v(p_i)}) = T$

$\Leftarrow$ $\bar{V}'(p_i) = V(p_i)$.

מכיוון שסימני הפסוק היחידים המופיעים ב-φ הם $p_1, \dots, p_n$ נקבל: $\bar{V}(\varphi) = \bar{V}'(\varphi)$

(אם צד מורכב באופן אינדוקטיבי, בתרגיל 4).

אם $\bar{v}'(\varphi)=T$ (מכיוון ש- $\varphi \in \Delta \models v'$).

ולכן: $\bar{v}(\varphi)=T$.

∎ למה 2

24.11.05

טענה ג':

אם $\Delta=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ ו- $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$ קבוצות נוסחאות L

ואם כל Δ_n ספיקה סופית, אז גם Δ.

הוכחת הטענה:

בגלל שאם F תת קבוצה סופית של Δ (נסמן: $F \underset{\text{סופית}}{\subseteq} \Delta$)

אז F ספיקה, כלומר יש מודל של F.

טענה: קיים n כך ש- $F \subseteq \Delta_n$.

הוכחה: $F=\{f_1,\dots,f_n\}$. כל איבר f_i נמצא ב- Δ ולכן נמצא

ב- Δ_{n_i} עבור איזשהו n_i. יהי $n=\max n_i$.

$f_i \in \Delta_{n_i} \subseteq \Delta_n$ ולכן $F \subseteq \Delta_n$.

Δ_n הינו ספיקה סופית, ו- F הינו סופית של Δ_n, ולכן יש מודל v של F.

∎

טענה ב':

יהי Δ ספיקה סופית, ויהי φ נוסחא.

אז לפחות אחת מהקבוצות $\Delta\cup\{\varphi\}$, $\Delta\cup\{\neg\varphi\}$ ספיקה סופית.

הוכחת הטענה: בשלילה

נניח שלא! אז גם $\Delta\cup\{\varphi\}$ וגם $\Delta\cup\{\neg\varphi\}$ אינן ספיקות סופית.

אז יש $F \underset{\text{סופית}}{\subseteq} \Delta\cup\{\varphi\}$, $F' \underset{\text{סופית}}{\subseteq} \Delta\cup\{\neg\varphi\}$

v מודל של F ומודל של F'.

נגדיר: $F_0=(F\cap\Delta)\cup(F'\cap\Delta)$. אז $F_0 \underset{\text{סופית}}{\subseteq} \Delta$.

Δ ספיקה סופית, ולכן יש מודל v של F_0.

מה הערך של $\bar{v}(\varphi)$?

אם $\bar{v}(\varphi)=T$ אז φ נספק ב-F מקבלת ערך אמת T ב-v
(כי φ נספק ב-F נמצאת ב-F_0 או שווה ל-φ).

אם $\bar{v}(\neg\varphi)=T$ אז φ נספק ב-F' מקבלת ערך אמת T ב-v

לכן: v מוגדר ל F או ל F' ואין מקבלים סתירה!

$\blacksquare$

<u>הוכחת למה 1:</u>

(אם נשתמש בלמה זו כדי (לקבל Γ מקסימלית בתיס רחב) ובמילים שרשאו דשיון,
אינו רבות שנו מיד...)

נשתמש בכך שקבוצת σ הפרמלאות הוא בת-מניה: לכן ניתן למנות בלמה
$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ של σ נוסחאות L.

נגדיר אינדוקטיבית קבוצות $\Delta_0=\Delta \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \dots$ כך:

בהינתן Δ_n נגדיר:
$$\Delta_{n+1}=\begin{cases}\Delta_n\cup\{\varphi_n\} & \text{אם } \Delta_n\cup\{\varphi_n\} \text{ סיפוקי סופית}\\ \Delta_n\cup\{\neg\varphi_n\} & \text{אחרת}\end{cases}$$

<u>טענה:</u> כל Δ_n ספיקה סופית.

<u>הוכחה:</u> $n=0$: הנחה. $n+1$: בעזרת אינדוקציה אם טענה כ'.

לכן, לפי טענה א', $\bar{\Delta}:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ ספיקה סופית.

נותר לראות ש-$\bar{\Delta}$ שלמה: תהי φ נוסחא של L. אז קיים n
כך ש- $\varphi=\varphi_n$. לכן, לפי הגדרת Δ_{n+1}, $\varphi\in\Delta_{n+1}$ או $(\neg\varphi)\in\Delta_{n+1}$.
בפרט $\varphi\in\bar{\Delta}$ או $(\neg\varphi)\in\bar{\Delta}$.

$\blacksquare$

נראה שאם קבוצה היא בת-מנייה:

יהי A אל"מ-בת, מן מנייה: $A=\{a_1,a_2,\dots\}$

תהי III קבוצה כל הסדרות הסופיות מעל A

איבר של III הוא מהצורה $(a_{m_1},\dots,a_{m_n})$.

נגדיר פונ' $III \longrightarrow N$

$(a_{m_1},\dots,a_{m_n}) \xmapsto{h} 2^{m_1}3^{m_2}\cdots p_n^{m_n}$ כאשר p_i ראשוני.

לכל שילוב יחיד ראשוניים, h חח"ע.

כעת, תהי S תת קבוצה כלשהי של III. נגדיר את איבר S:

$S=S_k$ אם $h(S)$ הוא האיבר ה-k בקבוצה $h(S)$.

תרגיל:

$$\Gamma\models\varphi \iff \Gamma\cup\{\neg\varphi\} \text{ אינה ספיקה}$$

הוכחה משפט 1:

$\Gamma\models\varphi \Rightarrow \Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ אינה ספיקה $\Rightarrow$ אינה סופית.

כלומר: קיימת $\Gamma_0 \underset{\text{סופית}}{\subseteq} \Gamma$ כך ש

$\Gamma_0\cup\{\neg\varphi\}$ אינה ספיקה.

לפי הגדרה: $\Gamma_0\models\varphi$.

$\blacksquare$

משפט הקומפקטיות בשני סוגים: מבנים סופיים ואינסופיים:

משפט q מבנים אינסופיים ⟷ משפט q מבנים סופיים

q בת מישורי סופי ⟷ q בת מישורי

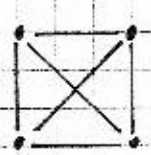
ניתן לצבוע ב-4 צבעים. ניתן לצבוע ב-4 צבעים

הגדרה:

צביעה של n-יה בקבוצה X היא פונ' C מ-$X^{[n]}$ אל קבוצה סופית

כאשר: $X^{[n]} = \{u \subseteq X : |u| = n\}$

דוגמא: $n=2$:



ממדגים את $X^{[2]}$ אלו הן הקשתות.

הגדרה:

קבוצה $Y \subseteq X$ נקראת **המונוכרומטית** אם $|C(Y^{[n]})| = 1$.

משפט: רמזי (אינסופי)

לכל צביעה C של $N^{[n]}$ ל $Y \supseteq N$ המונוכרומטית אינסופית.

משפט: רמזי (סופי)

לכל צביעה סופית של $\{1,\dots,N\}^{[n]}$ ל $Y \supseteq \{1,\dots,N\}$ גדולה המונוכרומטית.

מה הכוונה "גדולה"? נגיד יודע, נגיד, ש-Y מגדל 1000, כתוצאה ש-N מספיק גדול.

נראה שמשפט רמזי האינסופי גורר את משפט רמזי הסופי:

נניח (לשם פשטות בהוכחה), $n=2$, $C = \{B, W\}$.

נבנה קבוצה נוספת Γ, עם שני המאפיינים: • מוכלים ב Γ

לכן: • צביעה כל קבוצה המונוכרומטית בגודל 1000.

נגדיר: $L = \{ P_u : u \in N^{[2]} \}$

אינטואיציה: נתבונן ב P_u כמקרה $C(u) = B$.

מודל של ϕ $\iff$ במודל של $\mathbb{N}^{[2]}$ כל. בקיים.

לכל $w \in \mathbb{N}^{[1000]}$ נגדיר נוסחא φ_w (שאומר, אינטואיטיבית, שה "w אינו מאוחדים"):

$$\varphi_w = \varphi_w^B \wedge \varphi_w^W$$

אינטואיטיבית: φ_w^B אומר "w אינו כולו לבן"

φ_w^W אומר "w אינו כולו שחור"

$$\varphi_w^B = \neg \bigwedge_{u \in w^{[2]}} P_u$$

$$\varphi_w^W = \neg \bigwedge_{u \in w^{[2]}} (\neg P_u)$$

מודלים של $\Gamma = \left\{ \varphi_w : w \in \mathbb{N}^{[1000]} \right\}$.

עובדה: משפט המודלים אומר שלכל מודל של Γ.

משפט הקומפקטיות $\Leftarrow$ קיים תת קבוצה $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ שאינה סופית

Γ_0 מגדירה את P_u עבור מספר סופי של u בלבד, ולכל u שאינו

בה מות בין $\{1, \dots, N\}$ עבור איזשהו N.

נבחר אז שם שבה יש רק P_u עבור $u \subseteq \{1, \dots, N\}$.

Γ_0 סופית סתירה $\Leftarrow$ אין בחירה של $\{1, \dots, N\}$ שלא תן המודלים בעזרת סופית.

28.11.05 שבוע 5

תחשיב היחסים

לפי ת'-יא'

דוגמא:

"כל שני עולמות אחר יש."

P I L

$$(\forall x)(\forall y)\Big((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (\exists z)\big(L(z) \wedge (I(x,z) \wedge I(y,z))\big)\Big)$$

L – יש

P – עולם

I – היחס שמקיים עולם אחר יש.

אוצר מלים		משתנים	סימנים לוגיים
סימני יחס			
חד-מקומי	דו-מקומי		
P, L	I	x, y	∃, ∀, (,)

∀ – הכמת הכלל. ∃ – הכמת הפרט.

תרגום הנוסחה:

לכל x ולכל y, אם x ו-y עולמות, אז קיים z כך ש-z יש, ו-z אחר כל כך x וגם y.

הגדרה:

אוצר מילים L

לכל n, אוסף $REL_n^{(L)}$ של "סימני יחס n-מקומיים"

סימן קבוע, $Const^{(L)}$: $\{c_1, c_2, \dots\}$ (קבוצה אולי ריקה).

(ובנוסף, סימני פונקציה, אותם נראה בהמשך).

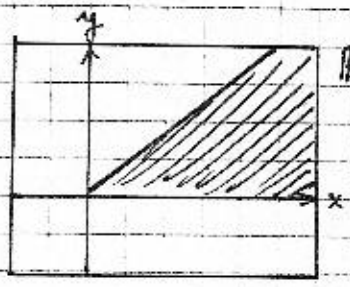
הערה: אם $Const = \phi$ וגם $REL_n = \phi$ לכל $n \geq 1$,

נאבדו בכלל כל תחשבי הפסוקים

מבנה עבור L

- קבוצה A שנקראת העולם (מניחים ש- $A \neq \phi$).
- עבור כל $R \in REL_n^{(L)}$, תת-קבוצה של A^n שאותן R^A.
- עבור כל $c \in Const^{(L)}$, איבר של A שיסומן c^A.

לדוגמא: $\mathbb{R}^2$ = עולם



הקבוצה שאותה באדום היא גם תת-קבוצה של $\mathbb{R}^2$, אך היא גם יחס: כל זוג שנמצא ליד באדום...

דוגמא:

$$L = \{\underbrace{P, E}_{REL_1}, \underbrace{I}_{REL_2}, \underbrace{O}_{Const}\}$$

מבנה כשהוא: $\underline{A}$: העולם: A = קבוצת הנקודות במישור $\cup$ קבוצת הישרים.

$$(A, P^{\underline{A}}, E^{\underline{A}}, I^{\underline{A}}, O^{\underline{A}}) = \underline{A}$$

קבוצת הנקודות קבוצת הישרים

$I^{\underline{A}} = \{(a,b) : a$ נמצא ליד $b\}$ $O^{\underline{A}} = (0,0) \in A$

מבנה שני: $\underline{B}$ תחום: B = קבוצה b איברים.

$$(B, P^{\underline{B}}, E^{\underline{B}}, I^{\underline{B}}, O^{\underline{B}}) = \underline{B}$$

אנשים, נשים, שדרים

$I^{\underline{B}} = \{(a,b) : a$ הורה של $b\}$

$O^{\underline{B}}$ = אדם רשע

x, y בני אדם: $(\exists w)(\exists v)(\exists u)(I(x,w) \wedge I(y,v) \wedge I(u,w) \wedge I(v,u))$

תאור: יש שרוא סבא/סבתא של x ושל y.

דרך הפוך שלו הדרה משמעות...

תאור: $\neg(x \approx y) \wedge \neg(u \approx v) \wedge$ לפי:

1.12.05

תזכורת: הסימנים הלוגיים:

) ($\rightarrow$ $\top$ $\forall$ $\exists$ $\approx$ משתנים

הגדרה: נוסחאות של L

שמות עצם הם או קבועים או משתנים. (אין נוסחאות).

נוסחאות אטומיות: שרשרת מהצורה $R(t_1, \dots, t_n)$ כאשר R סימן יחס n-מקומי של L, $t_1, \dots, t_n$ שמות עצם של L,

או ל- R סימן $\approx$, $n=2$, t_1, t_2 שמות עצם.

$\bot$ הוא נוסחא.

φ נוסחא אאז הוא נוסחא.

אם φ_1, φ_2 נוסחאות אז גם $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ נוסחא.

אם φ נוסחא ו- x משתנה, אז $(\exists x)\varphi$ ו- $(\forall x)\varphi$ נוסחאות.

תאור אחר של נוסחא:

אלגברת הנוסחאות S_L מעל L היא האלגברה הנוצרת חופשית ע"י הנוסחאות האטומיות, בעזרת הפעולות $\bot f$, $\rightarrow f$, ולכל משתנה x, פעולה 1-מקומית $\exists x f$ ופעולה $\forall x f$.

דוגמא: N. $(\exists x)(\exists y)((x \approx y) \rightarrow \bot)$

קיצור: נכתוב $\varphi \rightarrow \bot$ במקום $(\bot \rightarrow \varphi)$

נכתוב $\neq$ במקום $\neg(x \approx y)$. $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$

בדומה, נכתוב $\wedge, \vee$ כקיצורים.

איך יודעים שזו נוסחא? (i) $(x \approx y)$ נוסחא אטומית, לכן נוסחא.

(ii) $\bot$ היא נוסחא.

(iii) $(\bot \rightarrow (x \approx y))$ היא נוסחא.

(iv) $(\bot \rightarrow (x \approx y))(\exists y)$ היא נוסחא.

(v) $(\bot \rightarrow (x \approx y))(\exists y)(\exists x)$ היא נוסחא.

I. $(\exists x)(\exists y)(x \approx y)$

נוסחא I היא "אמת לוגית", תמיד נכונה, לעומת N שיכולה להיות נכונה (באולם א' אור אחד)

בפעם שעברה הגדרנו את $L = \{P, E, I\}$ ורשמנו את הנוסחא "פרק מס' שתי קדקודים אדום ישר".

עכשיו נכתוב את הנוסחא "פרק שני קדקודים עוברים בדרך ישר אחד".

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\left((P(x_1) \wedge P(x_2)) \rightarrow a\right)$$

כאשר a מגדיר: "פרק x_1 ו-x_2 עוברים בדרך ישר אחד":

$$(\exists y)\left(E(y) \wedge (I(x_1, y) \wedge I(x_2, y)) \wedge b\right)$$

באשר $\mathcal{L}$ מגדיר: "אין שני נשא דרך x_1, x_2":

$$(\forall z)\Big(\big(E(z) \wedge (I(x_1,z) \wedge I(x_2,z))\big) \longrightarrow (z \approx y)\Big)$$

יש כאן טעות! הייתי צריכים לדרוש ש- $x_1 \not\approx x_2$. בהתאם היינו צריכים לרשום:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\Big((x_1 \not\approx x_2) \wedge (P(x_1) \wedge P(x_2))\Big) \quad \cdots\cdots$$

הגדרה:

נגדיר פונקציה: $FV: \{\text{נוסחאות } L\} \longrightarrow \{\text{קבוצות סופיות של משתנים}\}$

$FV(\varphi)$ תקרא <u>קבוצת המשתנים החופשיים של φ</u>

(1) אם φ נוסחא אטומית, אז $FV(\varphi)$ היא קבוצת המשתנים המופיעים ב-φ.

כלומר: $\varphi = R(t_1,\dots,t_n)$; R סימן יחס, $t_1,\dots,t_n$ שמות עצם (הם משתנים ואין שום קבוע) $\Leftarrow$ $FV(\varphi) = \{t_i : t_i \text{ משתנה}\}$

(2) $FV(\bot) = \phi$

(3) $FV((\varphi_1 \to \varphi_2)) = FV(\varphi_1) \cup FV(\varphi_2)$

(4) $FV((\exists x)\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

(5) $FV((\forall x)\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

הגדרה:

<u>פסוק</u> של L הוא נוסחא של L ללא משתנים חופשיים.

φ פסוק $\Longleftrightarrow$ φ נוסחא; ו- $FV(\varphi) = \phi$.

בעיה: אין בשפה הלוגית של פסוקים.

פתרון: נסתכל בפסוק שהיינו רוצים: "בין 2 שני עולמות..."

נוסחא		FV
1	$E(z)$	z
2	$I(x_1, z)$	x_1, z
3	$I(x_2, z)$	x_2, z
4	$(I(x_2, z) \wedge I(x_1, z))$	x_1, x_2, z
5	$z \approx y$	z, y
6	$(4 \rightarrow 5)$	x_1, x_2, z, y
7	b	x_1, x_2, y
8	a	x_1, x_2
9	ת. הפסוק ------	ϕ

גם אוסף הדרישות הלוגיות לא הרבה יותר, כך בסך הכל אין לנו כלום שווה.

השמות:

שונקציה המקבלת משתנים ומחזירה: הקבוצה לא מבנה נתון.

השמה עבור φ הינו פונ' שמתאימה לה כל איבר ב $FV(\varphi)$.

מבינים: $\underline{A}$ - מבנה עבור L, $\underline{S}$ - נוסחא φ, $\underline{S}$ - השמה עבור φ

נסמן את ערך האמת של φ במבנה $\underline{A}$ בהשמה S:

$$V(\varphi, S; \underline{A})$$

נמוך הרכיבים:

א. φ נוסחא אטומית מהצורה $R(t_1,\dots,t_m)$, R סימן יחס אי-שוויוני ב-L.

נגדיר:

$$t_i^{\underline{A},s} = \begin{cases} s(t_i) & \text{משתנה } t_i \\ c^{\underline{A}} & \text{סימן קבוע } t_i = c \end{cases}$$

$$V(\varphi, s; \underline{A}) = \begin{cases} T & (t_1^{\underline{A},s},\dots,t_m^{\underline{A},s}) \in R^{\underline{A}} \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב. φ מהצורה $(t_1 \approx t_2)$:

$$V(\varphi, s; \underline{A}) = \begin{cases} T & t_1^{\underline{A},s} = t_2^{\underline{A},s} \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

ג. $\varphi = \bot$: $V(\varphi, s; \underline{A}) = F$

ד. $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$: $V(\varphi, s; \underline{A}) = \underline{t}_{\to}\big(V(\varphi_1, s; \underline{A}), V(\varphi_2, s; \underline{A})\big)$

ה. $\varphi = (\forall x)\psi$: בהינתן איבר d של העולם A, נגדיר השמה חדשה s_d, כך:

$$s_d(y) \doteq \begin{cases} s(y) & y \neq x,\ y \in dom(s) \\ d & y = x \end{cases}$$

אז $V(\psi, s_d; \underline{A})$ מוגדר.

נגדיר:

$$V(\varphi, s; \underline{A}) = \begin{cases} T & \text{אם לכל } d \in A \quad V(\psi, s_d; \underline{A}) = T \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

ו. $\varphi = (\exists x)\psi$: כמו למעלה בהגדרה זהה (רק $\exists$ במקום $\forall$) למעלה.

$$V(\varphi, s; \underline{A}) = \begin{cases} T & \text{אם קיים } d \in A \quad V(\psi, s_d; \underline{A}) = T \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$$

5.12.05 שבוע 6

בוחן משבוע הבא: יום חמישי 15.12.05

* הגדרת האמת בתחשיב הפסוקים (מה זה שנשתמש בלשון שאבר, Tarski).
* תחשיב המסמכים:
  - למות אמת
  - נאמר.
  - טאוטולוגיה, שקילות לוגית
* משפט הקומפקטיות (לא נדרש לדעת את ההוכחה, רק הניסוח)

דוגמא: קבוצה "גדולה" (בשביל של Paris–Harrington).

$K =$ הקבוצה המקיימת $W \subseteq \mathbb{N}$ ש של $a \in W$ ו- $|W| \geq a$

אז B קבוצה $\infty \subseteq \mathbb{N}$ אז B מכילה קבוצה ב- K.

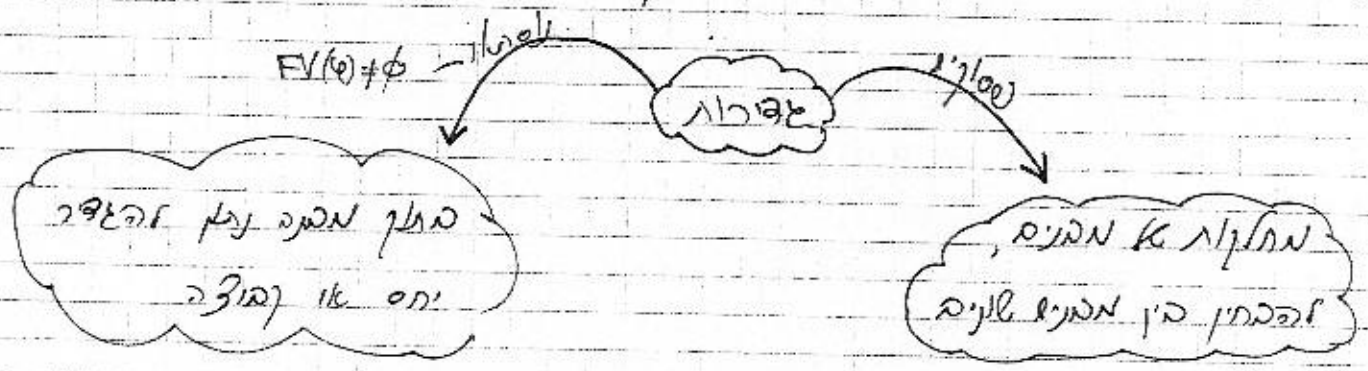
הוכחה:

B אינסופית בפרט $\neq \emptyset$ נתבונן $a \in B$.

B אינסופית לכן יש בה לפחות a איברים שונים $b_1, \dots, b_a$.

נגדיר: $W = \{b_1, \dots, b_a\}$ $|W| = a$, $W \in K$, $W \subseteq B$

נסתכל על מה שלמדנו בפרק שנגמר משהו קצת מבלבל.



למשל: מחלקה המבודלת, מחלקה השלמה...

אחרי נתן להבחין בין שדות (ומא) שונים:
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

דוגמא: חוגים

נגדיר שפה אשר מאומה לחוגים:

$$L = L_{\text{חוגים}} = \{ \underbrace{\overset{\text{חיבור}}{P}, \overset{\text{כפל}}{M}}_{\text{סימני יחס בינאריים}}, \underbrace{0, 1}_{\text{סימני קבוע}} \}$$

$P(x,y,z) \Leftrightarrow x+y=z$

$M(x,y,z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$

נשים לב שהרי הגדרת מבנה...

השם מאוד להבדיל בין שפה ובין מבנה. כדי לקבל את השם המלא של Tarski, צריך עוד ועוד!

נגדיר מבנה (ש"ל מינ' אקסיומות) ל- L:

א. איבר יחיד $A = \{*\}$. כמה אקסיומות יש ל- A?

$0^A = *$

$1^A = *$

$P^A \subseteq \{(*,*,*)\}$ → $\emptyset$, $\{(*,*,*)\}$

$M^A \subseteq \{(*,*,*)\}$ → $\emptyset$, $\{(*,*,*)\}$

רק אחת מ- 4 האקסיומות היא אכן חוג.

ב. הערה: למעשה האקסיומה היא ∞ ולא 4, מכיוון שיש ∞ אקסיומות לחילוק $*$.

ג. אבל, מכיוון שגם מעבר לזה הכפל שבין $*$ לבין $\square$ או $\diamond$, בעצם יש 4.

8.12.05

ד. כמה מבנים יש ל-L שאינם $\{1,2\}$?

יש שתי אפשרויות לפרש את 0 (ב-L).

יש שתי אפשרויות לפרש את 1 (ב-L).

כמה אפשרויות יש עד כה ביחד? 4

כמה אפשרויות יש לפרש את P? P^M תת-קבוצה של $\{1,2\}^3$

שגודלה 8. סה"כ, 2^8 אפשרויות.

בדומה, עבור M יש 2^8 אפשרויות.

סה"כ יש לנו: $2\cdot 2\cdot 2^8\cdot 2^8$ אפשרויות.

ה. נניח L הפך עץ שקול עם אינדוקס R כלפי.

כמה מבנים יש שאינם $\{a,b\}$?

$\{a,b\}^2$ = ארבעת האיברים.

R^M = תת-קבוצה של $\{a,b\}^2$.

רק $\cdot\longrightarrow\cdot$ אם $(a,b)\in R^M$.

$R^M=\emptyset$	$\overset{a}{\cdot}\quad\overset{b}{\cdot}$
$R^M=\{(a,b)\}$	$\cdot\longrightarrow\cdot$
$R^M=\{(b,a)\}$	$\cdot\longleftarrow\cdot$
$R^M=\{(a,b),(b,a)\}$	$\cdot\longleftrightarrow\cdot$
$R^M=\{(a,a)\}$	$\cdot\circlearrowleft\cdot$

יש סה"כ 16 אפשרויות.

סה"כ לכל מבנה עץ מינימלי שאינו מתאים לבעיה! מינימלי!

פסוקים: איך נבדיל בין המבנים הללו בפורמאלי ה'?

φ	מודלים של φ מתוך $M_1, \dots, M_5$
$(\exists x)(x \approx x)$	כולם
$(\exists x)(\exists y)(R(x,y))$	$M_2, \dots, M_5$
$(\exists x)(\exists y)(R(x,y) \wedge \neg(x \approx y))$	M_2, M_3, M_4
$(\exists x)(\exists y)(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$	M_1, M_2, M_3, M_4, M_5
$(\forall x)(\forall y)(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$	M_4, M_4, M_5

כי נתן לפרש את x, y בכל אחד מ-3 שקרא $F \to T$ ו-2 נתנים T

אנחנו מסוגלים להפריד בין 5 שני פסוקים, אבל בין M_2 ובין M_3 כי יהיו מבנים שהם איזומורפיים (אנחנו נצטרך מבנים כללים).

בחזרה לגרפים הסופיים: אקסיומות

0) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(M(x,y,z) \wedge (\forall t)(M(x,y,t) \longrightarrow (z \approx t)))$

בשפה עבור P. כך אנו מגדירים את האקסיומה: M, P סוג 2-מקומי.

א) $(\forall x)(P(x,0,x) \wedge P(0,x,x))$; $(\forall x)(\exists y)(P(x,y,0) \wedge P(y,x,0))$

קיומן עשוי ש: P גם מ-0 בחזרה אז איבר יחידה 0 (תכונה חלוקה)

בנוסף, נדרוש: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y,z) \longrightarrow P(y,x,z))$

או מעולה: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,y,z) \wedge P(y,x,z))$

שני פסוקים אלה אינם שקולים אך בקונקרט שאנו מדברים הם נותנים את אותה הסגלה.

ב) בתוך הפיסרבוטיבי: הגיון רגשי: "$(x+y)z = xz + yz$" $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$

$(M,M,P) \wedge (M(z,y,M) \vee (M(z,x,M)) \wedge (M(z,t,M) \vee (M(x,y,P)) \Rightarrow (\exists M)(\exists M)(\exists z)(\forall y)(\forall x)$

בקונטקסט נישטה: ב) בתוך פיסרבוטיבי מינון ומשתנה איבר נוסף 1.

כדי להפוך לשפה:

ב) הופכים נוסחא: $(\forall x)(\exists y)(\neg(x \approx 0) \longrightarrow (M(x,y,1) \wedge M(y,x,1)))$

בעזרת דרך אפשרי: $\neg(1 \approx 0)$

כדי אפשרי שזה מתקיים: $(\forall x)(\forall y)(M(x,y,0) \longrightarrow ((y \approx 0) \vee (x \approx 0)))$

הגדרה:

נוסחה φ של L נקרא <u>לוגית</u> מקבוצת הנוסחאות Γ אם לכל מבנה $\underline{M}$,

אם $\underline{M} \models \alpha$ לכל $\alpha \in \Gamma$

אז $\underline{M} \models \varphi$ כאשר $v(\varphi;\underline{M}) = T \equiv \underline{M} \models \varphi$

אם $\phi \models \varphi$ נאמר ש- φ <u>אמת לוגית</u>.

הסימון $\models$:

נוסחה $\underline{M} \models \varphi$ ← מבנה, מאמר $v(\varphi;\underline{M}) = T$

נוסחה $\Gamma \models \varphi$ ← נקבל הגדרה: לכל $\underline{M}$, אם

$\underbrace{\underline{M} \text{ מקיים את כל } \alpha \in \Gamma}_{\text{נוכל לקבל אם כל הנוסחאות:}}$, אז $\underline{M} \models \varphi$.

$\underline{M} \models \Gamma$

דוגמא:

אין מודל אפס $\models$ {הקבוצה אמת בשפות}

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \rightarrow P(y,z)) \not\models$ {אבל הנ"ל: התלוי}

לוגיות

הגדרה:

תהי L שפה, ויהיו $\underline{N}$ ו- $\underline{M}$ מבנים ל- L.

<u>איזומורפיזם</u> מ- $\underline{M}$ ל- $\underline{N}$ הוא פונ' $f: M \longrightarrow N$ המקיימת:

לכל סימן קבוע c של L, $f(c^{\underline{M}}) = c^{\underline{N}}$,

ולכל סימן יחס n-מקומי R של L ולכל $(a_1,\dots,a_n) \in M^n$

$$(a_1,\dots,a_n) \in R^{\underline{M}} \iff (f(a_1),\dots,f(a_n)) \in R^{\underline{N}}$$

<u>דוגמה:</u> M = המודל של $\underline{M}$. N = המודל של $\underline{N}$.

<u>סימון:</u> $a = (a_1,\dots,a_n)$, $f(a) = (f(a_1),\dots,f(a_n))$

ואז $a \in R^{\underline{M}} \iff f(a) \in R^{\underline{N}}$.

$$R^{\underline{M}} = f^{-1}(R^{\underline{N}})$$

הגדרה:

$\underline{M},\underline{N}$ <u>איזומורפיים</u> אם קיים איזומורפיזם מ- $\underline{M}$ ל- $\underline{N}$.

למה:

① אם f איזומורפיזם מ- $\underline{M}$ ל- $\underline{N}$ אז f^{-1} איזומורפיזם מ- $\underline{N}$ ל- $\underline{M}$.

② אם f מ- $\underline{M}$ ל- $\underline{N}$ איזומורפיזם, g מ- $\underline{N}$ ל- $\underline{P}$ איזומורפיזם, אז $g \circ f$ מ- $\underline{M}$ ל- $\underline{P}$ איזומורפיזם.

③ הפונ' id $\underline{M}$ הוא איזומורפיזם.

טענה:

יהי φ פסוק של L, $\underline{M}$, $\underline{N}$ מבנים איזומורפיים של L.

אז $\underline{M} \models \varphi \iff \underline{N} \models \varphi$.

הוכחה:

תהי $f: M \longrightarrow N$ איזומורפיזם. רוצים להראות: $v(\varphi,\underline{M}) = T \iff v(\varphi,\underline{N}) = T$

$$v(\varphi,\underline{N}) = v(\varphi,\underline{M})$$

לא ניתן לדרוש את הטענה בהכלה, כי φ נוסחא מורכבת אם לא מקיים אוטומט, אך לא מקיים אותו בבניה.

לכן, נצטרך לבטא את הטענה על שהיא תבנה φ השמות:

טענה: (חזקה יותר, אך קל יותר להוכחה)

לכל נוסחא φ, וכל השמה $s: FV(\varphi) \longrightarrow M$

$$v(\varphi, s; M) = v(\varphi, s'; N)$$

כאשר: $s' = f \circ s$

12.12.05 שעור 7

משפט:

יהי $f: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ איזומורפיזם.

לכל נוסחא φ והשמה s עבור φ: $v(\varphi, s: \underline{A}) = v(\varphi, f \circ s; \underline{B})$

מסקנה:

אם $\underline{A} \cong \underline{B}$ ו- φ משפט, אז $\underline{A} \models \varphi \iff \underline{B} \models \varphi$

סכמת הבנייה:

אינדוקציה על בניית φ.

φ אטומי – נשתמש בהגדרה איזומורפיזם ≅ f חח"ע

סגור יחס f שמרה מקיים

$\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$ – לפי הנחת האינדוקציה והגדרת השמה עבור →

$\varphi = \bot$ – – –

$\varphi = (\forall x)\psi$ – – (בדיר.)

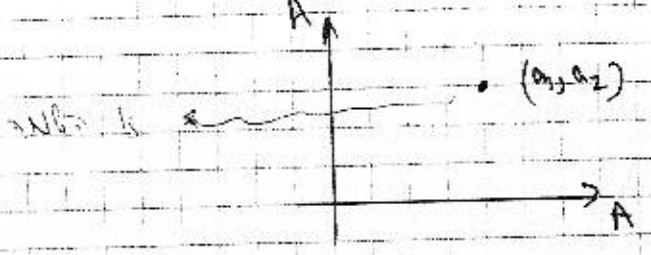
הגדרה:

תהי φ נוסחא, ויהיו $x_1, \dots, x_n$ משתנים כך ש: $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, $\underline{A}$ מבנה

אז, יש לה השמה חח"ע מן:

- קבוצת ההשמות $s: \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow A$
- A^n

למשל: $n=2$:



כל מאפשר לחשוב על הסמלים של φ ב-A בעל מבנה A^2, ומגדיר:

$$\{s : v(\varphi, s; \underline{A}) = T\}$$

$$s : \{x_1, x_2\} \longrightarrow A$$

(בהמשך הקורס, כמו בספרות הרלוונטית, כל לאו דווקא 2, אלא n משתנים).

דוגמא:

$$L = L_{\text{חוגים}} = \{P, M, O, I\}$$

נתבונן: $\underline{\mathbb{R}}$ אזי $\mathbb{R}$

$$P^{\underline{\mathbb{R}}} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b=c\}$$

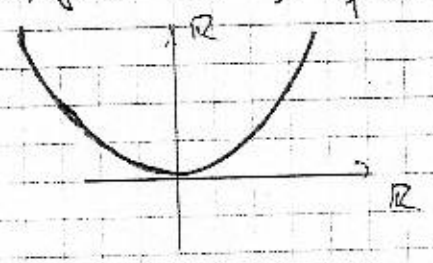
$$M^{\underline{\mathbb{R}}} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a \cdot b = c\}$$

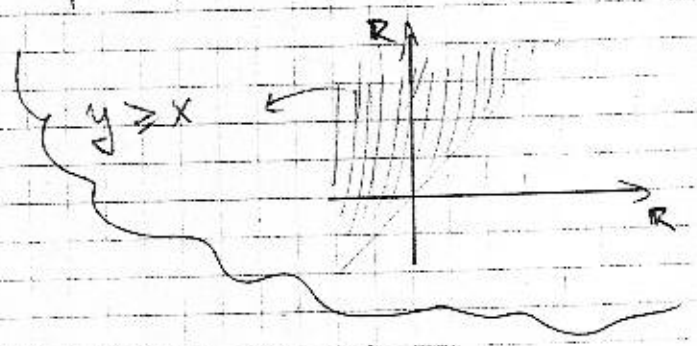
$$O^{\underline{\mathbb{R}}} = 0$$

$$I^{\underline{\mathbb{R}}} = 1$$

למשל, אין לנו שום יחס $<$, אך כן נוכל לכתוב נוסחא:

$\varphi_1 = M(x,x,y)$ נתבונן בנוסחא:





אזי בן אותו הנוסחא: (a,b), $s(x)=a$, $s(y)=b$

$$v(M(x,x,y), s; \mathbb{R}) = T \iff (a,b) \in \text{פרבולה}$$

$\Leftarrow$ הפרבולה נשמרת, והיא מוגדרת ע"י φ_1

נבדוק את הנוסחאות הבאות:

$\varphi_2 = (\exists x)\, M(x,x,y)$ $\qquad$ $\varphi_3 = (\exists y)\, M(x,x,y)$

$FV(\varphi_2) = \{y\}$ $\qquad$ $FV(\varphi_3) = \{x\}$

פירוש φ_2:

$$\{s:\{y\}\to\mathbb{R} : v(\varphi_2, s; \mathbb{R}) = T\} =$$

$$= \left\{ s:\{y\}\to\mathbb{R} : \begin{array}{l} \text{קיים } s'\text{ מעל } \mathbb{R} \\ s'(y) = s(y) \\ v(\varphi_1, s'; \mathbb{R}) = T \end{array} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$\Leftarrow$ המודל הוא-שלילי הוא בדיוק

והוא מוגדר ע"י φ_2.

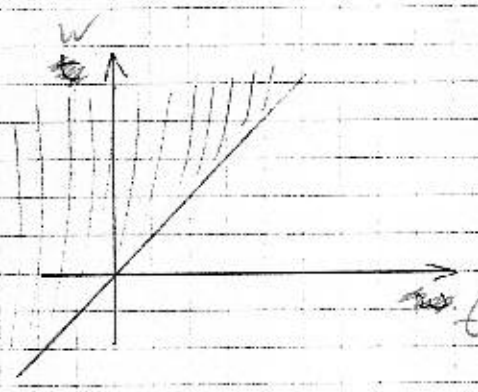
עכשיו אין נדבר בהגדרה את הביטוי $>$ או $<$:

$$\varphi_4(t,u,w) = \varphi_2(u) \wedge P(t,u,w)$$

$$\varphi_5 = (\exists u)\, \varphi_4$$

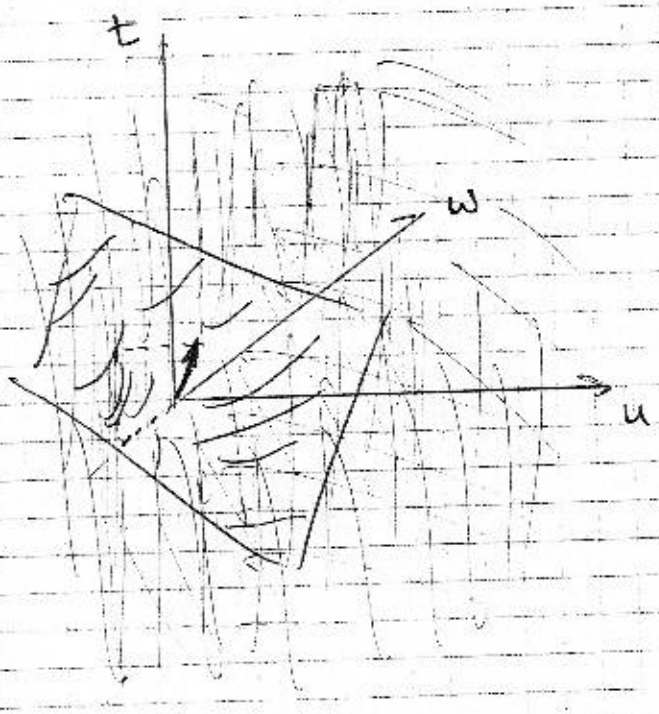
$t+y=u$

הוא



איך מגדירים את $\varphi_2(u)$ בעזרת המבנה $\{u, t, w\}$?

תת-מבנה $U_2(t,w,u) = \{(t,w,u) : u \geq 0\}$



איך מגדירים את $P(t,u,w)$?

כך המשוואה $t + u = w$

$$(a,b) \in \varphi_5 \iff \overset{t}{\downarrow}\ \overset{w}{\downarrow}$$

כלומר יש c כך ש:

$$(a,b,c) \in (\varphi_2(u) \wedge P(t,u,w))^{\mathbb{R}}$$

$$\overset{t}{\downarrow}\ \overset{w}{\downarrow}$$

$$b \geq a \qquad b-a \geq 0 \qquad c \geq 0 \qquad a+b+c$$

הערה:

יהי $L = \{P, Q\}$, $\underline{A} = (\mathbb{R}, Q, +)$

אזי אינומורפיזם אחד $\underline{B}$ - $\underline{B} = (\mathbb{R}, Q, +)$, הוא $f(x) = x$

אך גם $g(x) = -x$.

במקרה כזה לא ניתן להבדיל את המספרים הטבעיים

מכיוון שאולי הם אינומורפיזם אזי לא ניתן ליצור מעבר אחד מהם אחר.

15.12.05

דוגמא:

שפה: M – יחס 3-מקומי, 1 – קבוע.

מבנים: $\underline{A}$: A – מספרים טבעיים. $1^{\underline{A}} = 0$; $M^{\underline{A}}$ – יחס שלישי כל.

$\underline{B}$: B – מספרים טבעיים $0 \neq$; $M^{\underline{B}}$ – יחס שלישי כל. $1^{\underline{B}} = 1$

$\underline{C}$: C – מספרים טבעיים $\neq 0$; $M^{\underline{C}}$ – יחס שלישי כל. $1^{\underline{C}} = 1$

בסעיף שאינו ב-$\underline{A}$ אך כן ב-$\underline{C}$:

$$\varphi_1 = (\exists x)(\exists y)\, M(x,y,1)$$

השמה: $s(x) = -2$, $s(y) = 2$

$$\begin{cases} v(M(x,y,1), s; \underline{A}) = T \\ v((\exists y) M(x,y,1), s; \underline{A}) = T \\ v(\varphi_1; \underline{A}) = T \end{cases}$$

אבל φ_1 אינו אמת ב-המבנה.

$$\varphi_2 = (\exists x)(M(x,x,1) \wedge \neg(x \approx 1))$$

בכל ב-$\underline{A}$ וב-$\underline{C}$: $M(x,x,1)^{\underline{C}} = \{1,-1\}$

$= \{$השמות s, עם $s(x)=1$ או $s(x)=-1\}$

$\neg(x \approx 1)^{\underline{C}} = C \setminus \{1\}$

$M(x,x,1) \wedge \neg(x \approx 1)^{\underline{C}} = \{-1\}$

לכן

$v(\varphi_2; \underline{C}) = T$ ישנה השמה (-1) שלמענה אמת ולכן.

$M(x,x,1)^{\underline{A}} = \{0\}$

$\neg(x \approx 1)^{\underline{A}} = A \setminus \{0\}$

$M(x,x,1) \wedge \neg(x \approx 1) = \emptyset$

$v(\varphi_2; \underline{A}) = \emptyset$

לא נתן לבדוק כי A ו-B: נצטרך להראות שהמבנים המתאימים לא בהכרח אוטומורפיזם למבנים המתאימים ל-A לא בכלל.

הרעיון ש- $\underline{A} \cong \underline{B}$: נגדיר $f: A \longrightarrow B$

$f(x) = e^x$

$g: B \longrightarrow A$

$g(y) = \log(y)$

$f \circ g = id_B$

$g \circ f = id_A$

נצטרך לוודא שיש הקבוע 1, ושיש עוד M שמאמר.

$f(\underset{0}{1^{\underline{A}}}) = \underset{1}{1^{\underline{B}}}$

$(a,b,c) \in M^{\underline{A}} \iff (f(a), f(b), f(c)) \in M^{\underline{B}}$

טענה:

קבוצת הטבעיים אינה קבוצה שווה ב- $\underline{A}$.

הוכחה: בעזרת אוטומורפיזם.

נתבונן באוטומורפיזם $\underline{A} \to \underline{A}$:

$f: A \longrightarrow A$

$f(x) = -x$

נבין לוודא: f חח"ע ועל.

f שומר סדר- נבדוק: $f(1^{\underline{A}}) = f(0) = -0 = 0 = 1^{\underline{A}}$

$(a,b,c) \in M^{\underline{A}} \overset{?}{\iff} (f(a), f(b), f(c)) \in M^{\underline{A}}$

$a+b=c \overset{?}{\iff} -a+(-b) = -c$

$\Leftarrow$ f אוטומורפיזם.

נניח בשלילה שקיים מספר אי-טבעי. $\exists x(x) = \{x\}$ (זה מאוד הגיוני כי $\mathbb{R}^+$ כמו גם $\mathbb{R}^1$).

ולכן זה שקול לטענה ב,

$$v(\varphi, f\circ s; \underline{A}) = v(\varphi, s; \underline{A})$$

$\Leftarrow$ $s(x)$ תובע $\Leftrightarrow$ $v(\varphi, s(x); \underline{A}) = T$

$\Leftrightarrow$ $v(\varphi, f\circ s; \underline{A}) = T$

$\Leftrightarrow$ $f(s(x)) = -s(x)$ תובע. $\times$

סתירה:

נבחר $a > 0$ ונגדיר $s(x) \equiv a$ (תובע) $a > 0 \Leftrightarrow a > -a$ סתירה!

דוגמא:

שפה: $<$, P — חד מקומי.

מבנה: $\underline{D}$ עולם: המספרים.

הפירוש הרגיל $<^{\underline{D}}$

$P^{\underline{D}}$ = מי שגדול

לכאורה נוסחא אשר מגדירה את מספרי ה P. (אמורה להראות שהמספר בדד).

מתבלבל נוסחא ש המתייחסת אל x (כי זו תכונה של R).

כלומר, עלינו ל-P שמתאים:

$$(\forall x)\Big(P(x) \to (\exists y)(\exists z)\,(y<x \wedge x<z) \wedge (\forall w)\big((y<w \wedge w<z) \to P(w)\big)\Big)$$

אם המספר של P יהיה המספר של הפונ' של המספר של P.

19.12.05 שבוע 8

כאן את המושג של אמת לוגית בקבוצה לוגית,
אך לא ברור איך בודקים אם פסוק הוא אכן כזה.

גלה כך מכניסים את המושג של **מערכת הסק**
ונעבר אקסיומות לוגיות.

(כך יסי בלשה של Enderton לא עובדת לי.)

נניח אלה בשימוש של אקסיומות לוגיות:

א. **כל האוטולוגיות**, כאשר מותר להציב φ פסוק P_i בפסוק φ_i.

למשל: $(\varphi \to \varphi)$

שאינו להיות: $\forall x R(x,x) \longrightarrow \forall x R(x,x)$

אשר מתקבל מ- $P \to P$ ע"י הצבת P ב- $\forall x R(x,x)$

מצד מותר להציב P ב- $\forall x R(x,x)$? אין לנו יודעים את ערך האמת של $\forall x R(x,x)$, אך אנו יודעים שכל מקרה (T או F), ערך האמת של $\varphi \to \varphi$ ע"י שלה לעולם האמת יהיה T.

הערה: הדבר משפר הגדרה אשר לעשות במספר סופי של אוטולוגיות
כי נוכל מכך שכל השאר נמצאים מהן.
(אך אנו, עכשיו, לא לקחים מספר סופי, אלא את כל האוטולוגיות באשר הן
אוטולוגיות, לא אפילו זה שום רעיון!).

ב. כל נוסחא מהצורה: $(\forall x)\varphi \longrightarrow \varphi_x^c$, כאשר φ_x^c הוא הנוסחא
המתקבלת מ- φ כאשר מחליפים כל מופע חופשי של x ב- c.

למשל: $((\forall x)R(x,x) \longrightarrow R(c,c))$

בתרגיל אל נכון נאר:

לעתים נרצה להסיק לאור דוגמא שאם $(\forall x)R(x,x)$ אז $R(c,c)$

אלא שאם $(\forall x)R(x,x)$ אז, למשל, $R(y,y)$ לאינטרה משתנה y.

$\Leftarrow$ נגדיר נוסחאות שאינן פסוקים:

אם φ נוסחא $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$

הפסוק $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\varphi$ נקרא בקצר את הנוסחא φ.

נאמר ש:

φ אמת לוגית $\Longleftrightarrow$ $(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\varphi$ אמת לוגית.

הגדרה מדויקת של נכונה לוגית

בהינתן קבוצת נוסחאות Γ, ונוסחא φ, נאמר ש- $\Gamma \models \varphi$

אם לכל מבנה $\underline{A}$ וכל השמה s עבור כל המשתנים המופיעים ב- Γ וב- φ,

אם: $V(\gamma, s; \underline{A}) = T \quad \forall \gamma \in \Gamma$

אז: $V(\varphi, s; \underline{A}) = T$

נכונה לוגית

(בראש הדף הנה, ראינו מקרה פרטי, שבו $\Gamma = \phi$)

עכשיו נרצה לבטא את כ' מן בעזרת הקשר לנוסחאות:

ראשית, אסור להחליף באופן הזה את x: $(\forall x)R(x,x) \longrightarrow R(x,c)$

מה שקבלנו סה אינו אמת לוגית לפי הגדרה אמת לוגית של נוסחא.

אבל, אם y משתנה, אז נרצה להחיב את הפעולה מעמ' קיום ל:

$$(\forall x)\varphi \longrightarrow \varphi_x^y$$

כאשר φ_x^y מתקבלת מ- φ ע"י הצבת y מופע חופשי של x ב- φ

בפעולה! (כלומר, אין בעיה כאשר $\forall y$ או $\exists y$ לא מופיעים בנוסחא).

דוגמא: $(\forall x)\ (R(x,y)) \longrightarrow R(y,y)$

כי אמת לוגית, והתאמנו פה x ב-y, למרות ש-y משתנה חופשי אז לא.

ב. כל כללי אקסיומה לוגית מתאימים שם הם לאקסיומה לוגית.

אם φ אקסיומה לוגית אז גם $(\forall x)\varphi$ אקסיומה לוגית לכל x עבור כל משתנה x.

חוק הסיק:

Modus Ponens: α ו-, $\alpha \to \beta$ ו-, נסיק β

אם אין, אז הוא חוק הסיק תיאורי.

הגדרה:

הסיק הוא סדרה סופית של נוסחאות $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך שלכל α_i הוא

או אקסיומה לוגית, או נמצא בעזרת MP מאיברים קודמים, כלומר:

יש $k,l < i$ כך ש- $\alpha_k = (\alpha_l \to \alpha_i)$, ובנוסף α_l, ונקבל α_i.

הסיק יתפס לקבוצת הנחות:

הסיק מ- Γ:

סדרה סופית של נוסחאות $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, כך שלכל α_i או אקסיומה לוגית

או איבר ב- Γ, או נבע בעזרת MP מקודמיו.

כלומר: α_i $\Longrightarrow$ $\alpha_k \to \alpha_l$, α_k.

נאמר ש- φ יבוא מ- Γ ונסמן $\Gamma \vdash \varphi$

אם קיים הסיק $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ מ- Γ כך ש- $\varphi = \alpha_n$.

מקרה פרטי: $\Gamma = \phi$, אזי נסמן: $\vdash \varphi$, φ יבוא בעזרת הסיק.

22.12.05

סיכום:

$\varphi \models \Gamma$ יש מקרה שלא המודל...

$\varphi \vdash \Gamma$ קיים הסק של φ מ-Γ.

מערכת הסק:

כלל הסק: MP: $\dfrac{\alpha \to \beta,\ \alpha}{\beta}$

(הוא ג'ר מופס אותה, שלא נשתמש בו: $\dfrac{\neg\beta,\ \alpha \to \beta}{\neg\alpha}$).

אקסיומות:

1. הכללה של טאוטולוגיות.

2. הכללה של לוגיקה מבדדת: $(\forall x\varphi) \longrightarrow \varphi^t_x$

כל - x מתפנים, t שם עצם כשר לרבדה.

משפט: נאותות

אם $\varphi \vdash \Gamma$ אז $\varphi \models \Gamma$

משפט: שלמות, גדל 1930 ~

אם $\varphi \models \Gamma$ אז $\varphi \vdash \Gamma$.

דוגמאות:

$((\forall x)\ R(x)) \longrightarrow R(c)$ לא אקסיומה

$((\forall x)(\exists y)\ R(x,y)) \longrightarrow ((\exists y)\ R(y,y))$ לא גם אקסיומה

סוג נוסף של אקסיומה:

ב. $\varphi \longrightarrow (\forall x)\varphi$ (בהנחה של גב)

כאשר φ נוסחא, ו- $x \notin FV(\varphi)$.

ג. $(\forall x)(\alpha \to \beta) \longrightarrow ((\forall x)\alpha \longrightarrow (\forall x)\beta)$ (בהנחה של גב)

כאשר α, β נוסחאות. כמו מעין MP שמוגבל, אך אינו לא יכולים לגזור בלי ע - MP.

לא כל האקסיומות כפולות אם לא מתמלאים בסימן שוויון.

אקסיומות - שוויון:

ב' = $x \approx x$ (אקסיומה אחת עבור כל משתנה x)

ג' = $x \approx y \longrightarrow (\alpha \to \alpha')$ כאשר α נוסחא אטומית

ו- α' מתקבלת מ- α ע"י החלפה מופע חופשי של x ב- y

מתמלא על אלה

דוגמא:

$(\forall y)\big((x \approx y) \longrightarrow (R(x,x) \longrightarrow R(x,y))\big)$ אקסיומה מלא ג'=

טענות:

ב' - ג', ד', ה' : כל האקסיומות הללו כן אמיתיות לוגיות.

הוכחה: (נראה את ג').

הגדרה: נראה שאם φ נוסחא, ו- $x \notin FV(\varphi)$ אז: $\models (\varphi \longrightarrow (\forall x)\varphi)$.

טענה שנראה: אם $\underline{A}$ מבנה, s, s' שתי השמות כך ש: $s|_{FV(\varphi)} = s'|_{FV(\varphi)}$

אז $V(\varphi, s, \underline{A}) = V(\varphi, s', \underline{A})$.

הוכחה: נבנה באינדוקציה על בניית φ.

סה"כ, עבור כל הנחה לגבי φ:

יהי $\underline{A}$ מבנה ו- s השמה.

ב"מ: $v(\varphi \to (\forall x)\varphi, s; \underline{A}) = T$

נבדוק מה- $v(\varphi, s; \underline{A})$ ומה- $v((\forall x)\varphi, s; \underline{A})$

אם $v(\varphi, s; \underline{A}) = F$ אז $v(\varphi \to \text{מגוון}, s; \underline{A}) = T$

לפי הגדרת ערך האמת של $\to$

נניח להיפך ש- $v(\varphi, s; \underline{A}) = T$.

בהי s'_a השמה כך ש- $s'_a(y) = s(y)$ כאשר $y \neq x$

$s'_a(x) = a$ כאשר a איזשהו איבר ב- $\underline{A}$.

לפי הטענה הקודמת, מאחר ו- $x \notin FV(\varphi)$:

$$v(\varphi, s'_a; \underline{A}) = v(\varphi, s, \underline{A}) = T$$

וזה בדיוק אומר ש- a דם, ערך האמת של φ הוא T עבור כל s', כלומר:

$$v((\forall x)\varphi, s; \underline{A}) = T$$

ולכן: $v(\varphi \to (\forall x)\varphi, s; \underline{A}) = T$, מ.ש.ל.

■

נמשיך לדוגמה מ=:

$$\underbrace{\models (x \approx y) \to (R(x,y,c) \to R(y,y,c))}_{\text{נסמן } \alpha}$$

יהי $\underline{A}$ מבנה ו- s השמה.

$v(R(x,y,c), s; \underline{A}) = T \iff (s(x), s(y), c^{\underline{A}}) \in R^{\underline{A}}$

$v(R(y,y,c), s; \underline{A}) = T \iff (s(y), s(y), c^{\underline{A}}) \in R^{\underline{A}}$

$(s(x), s(y)) \in \approx^{\underline{A}} = \{(a,a) : a \in A\} \iff s(x) = s(y) \iff v(x \approx y, s; \underline{A}) = T$

אם:

$$v((x \approx y), s; \underline{A}) = F$$

אז

$$v(\alpha, s; \underline{A}) = T$$

לכן יש לבנות ש-

$$v((x \approx y), s; \underline{A}) = T$$

$$\Leftarrow \quad s(x) = s(y)$$

אך

$$v(R(x,y,c), s; \underline{A}) = F$$

אז ... לפי הנחת הגדרה בעזרת איך הוא לפי ←

יש לבנות:

$$v(R(x,y,c), s; \underline{A}) = T$$

לכן:

$$(s(x), s(y), c^{\underline{A}}) \in R^{\underline{A}}$$

אבל $s(x) = s(y)$, לכן: $(s(y), s(y), c^{\underline{A}}) \in R^{\underline{A}}$

$$\Leftarrow \quad v(R(y,y,c), s; \underline{A}) = T$$

ובמילים אחרות, שוב לא מקיים הוא ש ←

∎

טענה: $\models (\forall x)\alpha \Leftarrow \models \alpha$

הוכחה:

יהי $\underline{A}$ מבנה, s השמה. צ.ל.: $v((\forall x)\alpha, s; \underline{A}) = T$

ב.ל.: לכל s' המהווה מפנים α ב $FV(\alpha)$, ו-x לעצם אינשהו $a \in A$

$$v(\alpha, s'; \underline{A}) = T$$

אבל α אמת לכל $v(\alpha, s', \underline{A}) = T$ לכל s'.

∎

טענה: (שרשור)

אם $V(\alpha \to \beta, s; \underline{A}) = T$ ואם $V(\alpha, s; \underline{A}) = T$

אז $V(\beta, s; \underline{A}) = T$

טענה:

אם $\Gamma \models (\alpha \to \beta)$ ו-$\Gamma \models \alpha$

אז $\Gamma \models \beta$.

הוכחה:

יהי $\underline{A}$ מבנה ו-s השמה. $\underline{B}$: $V(\beta, s; \underline{A}) = T$ אם $V(\gamma, s; \underline{A}) = T$ $\forall \gamma \in \Gamma$

נניח ש: $V(\alpha \to \beta, s; \underline{A}) = T$, $V(\alpha, s; \underline{A}) = T$

ולכן: $V(\beta, s; \underline{A}) = T$

מכיוון ש- $\underline{A}$, s שרירותיים, נסיים. ∎

משפט: נאותות (Soundness)

אם $\Gamma \vdash \varphi$ אז $\Gamma \models \varphi$.

הוכחה:

$\Gamma \vdash \varphi$. יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הסדר ל- Γ מ- φ;

- $\alpha_n = \varphi$
- α_i נמצא ב- Γ, או אקסיומה לוגית, או נגזר מקודמיו ע"י MP.

נראה באינדוקציה על i ש: $\Gamma \models \alpha_i$.

אם $\alpha_i \in \Gamma$: $\Gamma \models \alpha_i$ מכיוון שכל מבנה ושמה במסקנה כל נוסחא ב- Γ, בפרט מסקנים (מאמינים) את α_i.

אם α_i אקסיומה לוגית: מהגדרה קודמת, אפילו $\models \alpha_i$.

אז α_i נבנית ב- MP מ- α_j, α_k $(j,k<i)$:

לפי הנחת האינדוקציה $\Gamma \vDash \alpha_j$, $\Gamma \vDash \alpha_k$

$$\alpha_j = (\alpha_k \to \alpha_i)$$

$$\Gamma \vDash (\alpha_k \to \alpha_i)$$

לפי הגדרה שמתקיים: $\Gamma \vDash \alpha_i$

בפרט: $\Gamma \vDash \alpha_n \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$ ■

נוכל לנסח את המשפט אחרת:

"אם יש מודל של Γ שאינו מודל של φ, אז אפשר להסיק את φ מ- Γ."

בניסוח הזה, זה נראה פחות מובן מאליו.

טענה: לכל הנסחים

אם $\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$ אז $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$ (הכיוון השני נכון ופשוט)

הוכחה:

יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הסק של φ מ- $\Gamma \cup \{\gamma\}$. $\alpha_n = \varphi$.

נראה באינדוקציה: $\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha_i)$.

מקרה α_1: α_i אקסיומה לוגית: $\vdash (\gamma \to \alpha_i)$:α_i

כלומר $\alpha_i \to (\gamma \to \alpha_i)$ אקסיומה לוגית (מהסוג של טאוטולוגיה).

α_i גם אקסיומה לוגית

$\Rightarrow \vdash (\gamma \to \alpha_i)$ לפי MP

מקרה α_2: $\alpha_i \in \Gamma$:α_i $\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha_i)$

אותו בהוכחה, כך שפה α_i לא אקסיומה לוגית, אלא הנחה.

מקרה α_3: $\alpha_i = \gamma$:α_i $\Gamma \vdash (\gamma \to \gamma)$

אבל יש הסק $\vdash (\gamma \to \gamma)$ ... !

מקרה ג': α נבע ע"י MP מקדמים α_k, α_j.

אזי הנחת האינדוקציה:

$\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha_k)$

$\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha_j)$

צ"ל: $\Gamma \vdash (\gamma \to \alpha)$

טענה: אם $\Gamma \vdash (\gamma \to (\varphi \to \psi))$ ו- $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$

אז $\Gamma \vdash (\gamma \to \psi)$

הוכחה:

נשים לב ש: $A = (\gamma \to (\varphi \to \psi)) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\gamma \to \psi))$

טאוטולוגיה (אקסיומה מסוג א') (בדק יבש).

יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הסדר מ- Γ ל $\gamma \to (\varphi \to \psi)$

יהי $\beta_1, \dots, \beta_m$ הסדר מ- Γ ל $\varphi \to \gamma$

נתבונן: $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m, A, (\gamma \to \varphi) \to (\gamma \to \psi), \gamma \to \psi$

הסדר כאורך $n+m+3$.

טאוטולוגיה — MP על אינדקסים $n, n+m+1$ — MP על אינדקסים $n+m, n+m+2$

$\blacksquare$

26.12.05 שבוע 9

טענה: למת הכללה

אם $\Gamma \vdash \alpha$, ו- x משתנה שאינו מופיע חופשי ב- Γ

אז $\Gamma \vdash (\forall x)\alpha$.

הוכחה:

א. אם x אינו חופשי ב- α אז יש לנו אקסיומה מאותה צורה כזו:

$\alpha \longrightarrow (\forall x)\alpha$ זו אקסיומה (רק בצורה כזו!).

אם: אם $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הסך של α מ- Γ,

אז $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \alpha \to (\forall x)\alpha$ הסך של $(\forall x)\alpha$ מ- Γ.

(בגלל האחרון הוא מתקבל מ- MP על $\alpha \to (\forall x)\alpha$, בגלל ש $\varphi_n = \alpha$).

ב. יהי $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ הסך של α מ- Γ. נראה באינדוקציה על $i \le n$ ש- $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi_i$.

- נניח שהוכחנו כל עבור $j < i$ ונתבונן ב- φ_i.

(i) $\varphi_i \in \Gamma$: לפי הנחה x אינו חופשי ב- φ_i, ואם כן סגרנו ב- $\forall$.

(ii) φ_i אקסיומה: אזי גם $(\forall x)\varphi_i$ הוא אקסיומה לוגית.

(iii) φ_i מתקבלת מ- MP: קיימים $j, k < i$ והשיטה לפיה $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

לפי הנחת האינדוקציה: $\Gamma \vdash (\forall x)(\varphi_j \longrightarrow \varphi_i)$, $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi_j$

לכל עצם הלמה באקסיומה ד': $(\forall x)(\varphi_j \to \varphi_i) \longrightarrow (\forall x\, \varphi_j \longrightarrow \forall x\, \varphi_i)$

יהי $\beta_1, \dots, \beta_m$ הסך של $\forall x \varphi_j$ מ- Γ.

יהי $\beta'_1, \dots, \beta'_k$ הסך של $(\forall x)(\varphi_j \to \varphi_i)$ מ- Γ.

מה משמעות כזה? למשל, באינפי נתנו $\varepsilon > 0$ כלשהו,

עושים בו מיני דברים ומקבלים $\delta(\varepsilon)$ $\therefore$

בשפה אומרים ש- ε שרירותי, ולכן $(\forall \varepsilon > 0)\ \delta(\varepsilon)$

אין מתפיים מאיזשהו קבוצת הנחות Γ.

זה מקביל: $\Gamma \cup \{\varepsilon > 0\} \vdash \delta(\varepsilon)$

עושים: למה הסך נשאר ש $\Gamma \vdash (\varepsilon > 0) \to \delta(\varepsilon)$

ε אינו מופיע חופשי ב- Γ

טענה: הסדרה הבאה היא הסק מ- Γ את $(\forall x)\varphi_i$:

$$\beta_1, \dots, \beta_m, \beta'_1, \dots, \beta'_{m'}, A, (\forall x)\varphi_j \to (\forall x)\varphi_i, (\forall x)\varphi_i$$

כאשר: $A = (\forall x)(\varphi_j \to \varphi_i) \to (\forall x \varphi_j \to \forall x \varphi_i)$ אקסיומה לוגית.

הוכחה: עד מקום m לפי הנחה $\Gamma - \{\beta_k\}$.

ומקום $m+1$ עד מקום $m+m'$ לפי הנחה ש- $\{\beta'_k\}$.

A אקסיומה לוגית.

שני האיברים האחרונים הם MP.

$\blacksquare$

עכשיו נוכיח את הלמה:

$$\Gamma \vdash (\forall x)\varphi_j, (\forall x)(\varphi_j \to \varphi_i), A$$

טענה: $\Gamma, \underset{\text{א'}}{(\forall x)\varphi_j}, \underset{\text{ב'}}{(\forall x)(\varphi_j \to \varphi_i)} \vdash (\forall x)\varphi_i$

מקום לבנות הסק: הנחה א', הנחה ב', A, $(\forall x)\varphi_j \to (\forall x)\varphi_i$, ומסקנה!

כולן קבועה

הגדרה:

נאמר ש- Γ **עקבית** אם אין הסק ש- $\bot$ מ- Γ

(לא נכון ש: $\Gamma \vdash \bot$).

29.12.05

טענה: לגבי ההכללה (ביחס לסמני קבוע)

אם $\Gamma \vdash \varphi_x^c$ ו-c אינו מופיע בשום נוסחא ב-Γ או ב-φ,

אז $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$.

הוכחה:

יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הסדר מ-Γ עם φ_x^c

נראה באינדוקציה על i ש: $\Gamma \vdash (\forall z)(\alpha_i)_c^z$

נפרק למקרים:

(i) $\alpha_i \in \Gamma$: אזי c לא מופיע ב-α_i ואז: $\alpha_i = (\alpha_i)_c^z$ ונשתמש באקסיומה הלוגית:

$\alpha_i \longrightarrow (\forall z)\alpha_i$ (בתנאי ש-z לא מופיע ב-α_i).

ולכן, בעזרת MP, מקבלים: $\Gamma \vdash (\forall z)\alpha_i$.

(ii) α_i אקסיומה לוגית: אזי גם $(\forall z)(\alpha_i)_c^z$ אקסיומה לוגית

(iii) α_i התקבל ע"י MP: אותה הוכחה שראינו פעם שעברה: משתמשים באקסיומה:

$(\forall x)(\alpha \to \beta) \longrightarrow ((\forall x)\alpha \longrightarrow (\forall x)\beta)$

<u>בלי לוותר בתנאי שהמשתנה z לא מופיע בשום α_i.</u> (מאוד חשוב להבהיר כאן)

מסקנה: $\alpha_n = \varphi_x^c$, $(\alpha_n)_c^z = \varphi_x^z$ $\Leftarrow$ $\Gamma \vdash (\forall z)\varphi_x^z$

(רציונאלי: במקום להכליל $\Gamma \vdash (\forall x)R(x,x)$ הרעיון $\Gamma \vdash (\forall z)R(z,z)$).

עוד להכליל: **טענה:** $(\forall x)\varphi \vdash (\forall z)\varphi_x^z$

הוכחה:

$(\forall z)\varphi_x^z \longrightarrow (\varphi_x^z)_z^x$ אקסיומה לוגית (בדיקה: דרך לוודא ש-x טוב להצבה במקום z בנוסחא φ_x^z; תמיד ש-z אינו נכנס לשם כמו את המשך נוסחא גם, ולכן התקנו את x ב-z בנוסחא φ כך במקומות הרלוונטיים לא "יתקן מצב כזה: $(\forall x)(\dots z \dots)$ כי הוא יכול להיות רק מהצורה $(\forall x)(\dots x \dots)$ z_x אך כאן x אינו מופיע חופשי).

אבל: $(\varphi_x^z)_z^x = \varphi$, ולכן: $(\forall z)\varphi_x^z \longrightarrow \varphi$ הוא אקסיומה

ולכן, בעזרת MP: $(\forall z)\varphi_x^z \vdash \varphi$

קיבלנו, אם כן: $\varphi \vdash \varphi_x^z(z)$

אך x אינו מופיע חופשי בכל שמאל? ולכן, לפי חוק ההכלה (אבל משתנים)

אנו מקבלים:

$$\varphi(x) \vdash \varphi_x^z(z)$$

■ זאת

■ זאת

משפט: משפט השלמות

יהיו Γ ו- φ קבוצת נוסחאות ונוסחה בשפה L.

אם $\Gamma \models \varphi$ אז $\Gamma \vdash \varphi$

מקרה פרטי: $\Gamma = \phi$, אזי אם φ אמת לוגית, אז $\vdash \varphi$.

משפט: משפט קיום המודל (גרסה נוספת למשפט השלמות)

אם Γ עקבית, אז קיים מודל של Γ, כלומר קיים מבנה $\underline{A}$ כך ש:

$V(\gamma, \underline{A}) = T$ לכל $\gamma \in \Gamma$. (כלומר מודל של Γ).

<u>הוכחת משפט השלמות ממשפט קיום המודל:</u>

בהנחה, נניח ש- $\varphi \notin \Gamma$ ונראה שאז נקבל ש: $\Gamma \models \varphi$.

טענה: $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ עקבית.

בהינתן הטענה, לפי משפט קיום המודל, יש מודל $\underline{A}$ של $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

$V(\varphi, \underline{A}) = F$ אולם $V(\gamma, \underline{A}) = T$ לכל $\gamma \in \Gamma$

$\leftarrow$ $\therefore$ φ לא נכונה לוגית מ- Γ.

<u>הוכחת הטענה:</u>

נניח, בשלילה, ש- $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ אינה עקבית, כלומר: $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$.

לפי חוק הכפל: $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \bot)$

אולם: $(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$ היא טאוטולוגיה ולכן אקסיומה לוגית,

ולכן באמצעות MP נובע ש: $\Gamma \vdash \varphi$.

(נזכרת מהלוגיקה: יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הסך מ- Γ כך $\alpha_1 \to (\neg\varphi)$; יהי $\alpha_{n+1} = \varphi \to (\bot \to \varphi)$, $\alpha_{n+2} = \varphi$

אז $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ הוא הסך של φ מ- Γ).

סמנטיקה		תחביר
$\underline{A}$ מבנה		Γ קבוצת נוסחאות
$\underline{A} \models \varphi$ (לאמר: $v(\varphi;\underline{A}) = T$)	נוסחת אטום	$\Gamma \vdash \varphi$
$\underline{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	פסוקית-וגם	$\Gamma \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
אז $\underline{A} \models \varphi_1$ וגם $\underline{A} \models \varphi_2$		אז $\Gamma \vdash \varphi_1$ וגם $\Gamma \vdash \varphi_2$
$\underline{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)$	פסוקית-או	$\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ (ב)
אז $\underline{A} \models \varphi_1$ או $\underline{A} \models \varphi_2$		לא נדרש: $\Gamma \vdash \varphi_1$ או $\Gamma \vdash \varphi_2$
אם $\underline{A} \models \forall x \varphi$ אז $\underline{A} \models \varphi_x^c$	פסוקית-לכל	אם $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ אז $\Gamma \vdash \varphi_x^c$
אם $\underline{A} \models (\neg\forall x)\varphi$ אז $v(\neg\varphi, s; \underline{A}) = T$ לסוגים המשמר	פסוקית-יש	(ג) אם $\Gamma \vdash (\neg\forall x)\varphi$ אז לכל קבוע c דו"מ $\Gamma \vdash \neg\varphi_x^c$

Γ – קבוצת נוסחאות, φ נוסחה, φ_1, φ_2 נוסחאות. (כל הנוסחאות אין פרמטרים)

הגדרה:

נאמר ש- Γ בעלת הגדרה אם לכל נוסחא φ ש: $FV(\varphi)=\{x\}$,

אם $\Gamma \vdash (\exists x)\varphi$ אז $\Gamma \vdash \varphi_x^c$

עבור סימן קבוע כלשהו c.

c נקרא עד (או עד הגדרה).

דוגמא:

$L=\{R\}$, ונסתכל בפסוק: $\varphi = (\exists x)(\forall y)\neg R(y,x)$

מודל	סמנטיקה
"סדר לינארי", אי אפשר לבנות מספר לא אפשרי	$\underline{A}=(\mathbb{N},<)$ $R^{\underline{A}}=\{(m,n): m<n\}$
לא נמצא כאן, אפילו אם φ נמצא ב- Γ אין עד הגדרה, כי אין לנו דרך להבדיל את איבר מינימלי ואמר שהוא קיים פחות	אבל אם נקבל ∞ שם איברים.
	כאן אכן מתקיים: $\underline{A} \models (\exists x)(\forall y)\neg R(y,x)$
	עבור הפשמה $s(x)=0$ ואז: $(\forall y \neg R(y,x), s; \underline{A}) = T$

הוכחת משפט קיום המודל:

מבנה ההוכחה:

נתון: Γ עקבית.

א. נמצא $L \subseteq L'$ וקבוצה $\Gamma' \supseteq \Gamma$ כך ש- Γ' עקבית, בעלת תכונת הגדרה וגדרתית.
אם היא דדוקטיבית כזה ⓘ מספר. אם היא בעלת תכונת הגדרה כזה ⓐ מספר.

ב. בהינתן Γ' עקבית דדוקטיבית, הגדרה, נמצא מודל $\underline{A}$ של Γ'.
נשתמש בסימני הקבוע בכדי לבנות את $\underline{A}$.

ג. נגדיר מבנה $\underline{A}$ עבור L ע"י הצמצום = הצמצום של $\underline{A}$
ולכל סימן R של L, $R^{\underline{A}} = R^{\underline{A}}$. $\underline{A}$ הוא המצמצום של $\underline{A}$ לשפה L.

למה:

יהי נוסחא φ של L ויהי השמה s, $v(\varphi, s; \underline{A}) = v(\varphi, s; \bar{A})$, ובכך נסיים $\square$

את הלמה נוכיח באינדוקציה, ונשתמש בכך שהגדרת השמה של φ כ- $\underline{A}$ תמיד s משתנים רק בסמנים המופיעים ב- φ הם מקבלים אותו ערך כ- $\underline{A}$ וכ- $\bar{A}$.

בפרט, אם $\Gamma \subseteq \varphi$ אז $\Gamma \models \varphi$ ולכן $\varphi \models \underline{A}$, לכן $\varphi \models \underline{A}$.

תזכורת: שבוע 10 2.1.06

משפט השלמות

$\Uparrow$

משפט קיום המודל

$\Uparrow$

א' + ב'

ב. Γ תורת הטקין $\Leftarrow$ קיים מודל של Γ. (דוגמה)

א. הוכחה לתורת הטקין שאי אפשר לדמיין.

טענה ג':

תהי Γ קבוצת נוסחאי עקבית של L. ויהי φ: $\Gamma \vdash (\forall x)\neg\varphi$

יהי c סימן קבוע $c \notin L$ (לא נוסחא של L, $FV(\varphi) = \{x\}$).

אז $\Gamma \cup \{\neg\varphi_x^c\}$ עקבית.

נשים לב ש $\neg\varphi_x^c$ הוא נוסחא של השפה $L \cup \{c\}$ ולא של השפה L בלבד.

לכן ניתן מחודש של לגמרי המשלב בגרסה של סמני קבוע.

הוכחה:

בשלילה, ויהי ש- $\Gamma \cup \{\neg\varphi_x^c\}$ אינה עקבית. נסמן $L(c) = L \cup \{c\}$.

אזי: $\Gamma \models \neg\varphi_x^c$. מדפדוק אין מקבלו: $\Gamma \vdash \varphi_x^c$.

c אינו מופיע ב- Γ או ב- φ ולכן לפי לגמרי ההשלמה, $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$. אך נתון לנו

ש: $\Gamma \vdash (\forall x)\neg\varphi$, ולכן $\Gamma \vdash \bot$ בסתירה לכך ש- Γ עקבית.

$\blacksquare$

הגדרה: "למת הכללה הסמנטית"

אם $\Gamma \models \varphi_x^c$ כאשר c סימן קבוע מתוך L, אז $\Gamma \models (\forall x)\varphi$

הוכחה:

יהי $\underline{A}$ מודל של Γ. $\underline{\exists}$: $V(\forall x\varphi; \underline{A}) = T$.

כלומר, $\underline{\exists}$: $V(\varphi, s; \underline{A}) = T$ עבור כל השמה $s: \{x\} \to \underline{A}$.

נגדיר את $\underline{A}$ למבנה $\underline{A'}$ (שהוא ב-L) עבור $L(c)$:

$A' = A$; $R^{\underline{A'}} = R^{\underline{A}}$ לכל R ב-L; $c^{\underline{A}} = s(x)$.

$\varphi \in \Gamma$ הוא פסוק של L, ולכן מקבל אותו גם ב-$\underline{A}$ וגם ב-$\underline{A'}$

לכן $\underline{A'}$ מודל של Γ. לפי מה שהנחנו: $V(\varphi_x^c; \underline{A}) = T$

ולכן: $V(\varphi_x, s; \underline{A}) = T$.

טענה ה:

נניח ש: $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ נוסחאות, $FV(\varphi_i) \subseteq \{x_i\}$, $\Gamma \vdash \neg(\forall x_i)\varphi_i$

יהיו $c_1, \dots, c_m$ סימני קבוע שונים זאת מזאת ולא ב-L

אז $\Gamma \cup \{\neg\varphi_{x_1}^{c_1}, \dots, \neg\varphi_{x_m}^{c_m}\}$ עקבית.

הוכחה:

באינדוקציה על m. נגדיר: $\Gamma_i = \Gamma\{\neg\varphi_{x_1}^{c_1}, \dots, \neg\varphi_{x_i}^{c_i}\}$.

אז: $\Gamma_i \vdash \neg(\forall x_{i+1})\varphi_{i+1}$

Γ_i עקבית. פסוקיו בשפה $L_i = L(c_1, \dots, c_i)$, ו- $c_{i+1} \notin L_i$.

לכן, לפי טענה א', (באינדוקציה - Γ_i עקבית) אינו מוכלל ב- Γ_{i+1} עקבית.

∎

טענה ג':

יהי Γ קבוצת פסוקים עקבית של L. יהיו $\{c_i\}_{i\in I}$ חדשים של L כמשתנה חופשי אחד, נניח x_i.

יהי c_i סימן קבוע, כך ש- $c_i \neq c_j$ אם $i \neq j$, ו- $c_i \notin L$.

נגדיר: $L' = L \cup \{c_i\}_{i\in I}$. $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\varphi_{i\,x_i}^{c_i} : \Gamma \vdash \neg(\forall x_i)\varphi_i\}$.

אז Γ' עקבית.

הוכחה:

בשלילה, אם קיים הסק של $\bot$ מ- Γ'. הסק זה הוא סופי (משתמש במספר סופי של הנחות, שכן מתוך Γ, אלו, נאמר $\neg\varphi_{1\,x_1}^{c_1}, \dots, \neg\varphi_{n\,x_n}^{c_n}$)

לכן אותו הסק הוא גם הסק של $\bot$ מ- $\Gamma \cup \{\neg\varphi_1^{c_1}, \dots, \neg\varphi_n^{c_n}\}$

אך זה סותר את טענה ב'. ∎

למה ג':

אם Γ עקבית, ו- φ סגור ב- L,

אז $\Gamma \cup \{\varphi\}$ עקבית או $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ עקבית.

הוכחה:

בשלילה: אין מ- $\Gamma \cup \{\varphi\}$ וגם $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ $\vdash \bot$

$\Rightarrow$ $\Gamma \vdash (\neg\varphi)$ וגם $\Gamma \vdash \varphi$

ומקבלים: $\Gamma \vdash \bot$, בסתירה לכך שהנתון ש- Γ עקבית.

הלמה של Zorn:

יהי $\mathcal{P}$ אוסף של תתי קבוצות של קבוצה Y. נניח ש- $\mathcal{P} \neq \emptyset$, ואם $S \subseteq \mathcal{P}$ סדרה לינארית תחת הכלה אז קיים $Y \in \mathcal{P}$ כך שלכל $S \in S$, $S \subseteq Y$

אזי קיים איבר מירבי ב- $\mathcal{P}$: לכל קיים $Y \in \mathcal{P}$ כך שאם $Y' \in \mathcal{P}$, $Y \subseteq Y'$, אז $Y = Y'$.

5.1.06

טענה ד:

נניח ש- Γ קבוצת פסוקים (של L) עקבית ומרבית בכל, אז Γ דאגית.

הוכחה:

יהי ψ פסוק כלשהו: $\psi \in \Gamma$ או $\neg\psi \in \Gamma$.

אם למשל $\Gamma \cup \{\psi\}$ ו- $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ עקביות,

אז Γ מרבית ולכן:

$\Gamma \cup \{\psi\}$ עקבית $\Leftarrow$ $\Gamma \cup \{\psi\} = \Gamma$ $\Leftarrow$ $\psi \in \Gamma$.

$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ עקבית $\Leftarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\psi\} = \Gamma$ $\Leftarrow$ $\neg\psi \in \Gamma$.

$\blacksquare$

תרגיל:

להראות שאם Γ עקבית, אז: Γ עקבית מרבית $\Leftrightarrow$ Γ דאגית.

טענה ה:

נניח ש- Γ_i קבוצת פסוקים עקבית $(i \in I)$ ושל- $\{\Gamma_i\}$ היא שרשרת ביחס ל- $\subseteq$

כלומר לכל i,j $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ או $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$.

אז $\Gamma := \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ עקבית.

הוכחה:

בשלילה: אם $\Gamma \vdash \bot$, אז יש הסק של $\bot$ מ- Γ: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

מאחר ש- $\{\alpha_i\}$ תלוי בן בנתונים (כלומר מאחר ש- P), נסמן $\beta_1, \dots, \beta_k$

כל הנתונים β_j נמצאים בכל אחד מ- Γ_i.

הקבוצה $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_k}$ סופית לכן קיימת בתת הקבוצה: אחת מהן מכילה את כולן.

נניח ש: $\Gamma_{i_1} \subseteq \Gamma_{i_2} \subseteq \dots \subseteq \Gamma_{i_k}$ (*)

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 \in \Gamma_{i_1} \subseteq \Gamma_{i_k} \\ \vdots \\ \beta_k \in \Gamma_{i_k} \subseteq \Gamma_{i_k} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

לכן $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הסק של $\bot$ מ- Γ_{i_k}

כלומר Γ_{i_k} אינו עקבית בסתירה להנחה.

$\blacksquare$

טענה 1:

אם Γ עקבית, קיימת $\bar{\Gamma} \supseteq \Gamma$, $\bar{\Gamma}$ עקבית מירבית (לשון: בדיונית).

הוכחה:

מיקס מהלמה של Zorn:

Ψ = קבוצת הנוסחאות של L.

$\mathcal{P} = \{\Gamma' : \Gamma \subseteq \Gamma' \subseteq \Psi$, Γ' עקבית$\}$

$\Gamma \in \mathcal{P}$, לכן $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

הראנו סדר חלקי $\mathcal{P}$ שרשראות, ולפי Zorn קיימת Γ' ב-$\mathcal{P}$ שהיא מירבית.

$\blacksquare$

טענה: מתפשט $\hat{\Gamma} \supseteq \Gamma$, $\hat{\Gamma}$ עקבית, הקיים, דיאגונלית.

ראינו: לכל Γ עקבית קיימת $\bar{\Gamma} \supseteq \Gamma$ עקבית בשם 1-$\bar{L} \supseteq L$,

לשם $\bar{L}$ קיים שלם $\Phi_1(L) \ni \varphi$ אם $\Gamma \ni \psi(\forall x)$ אז קיים סימן קבוע c

כך ש: $\Gamma \ni \psi(c)$.

הגדרה:

מבנה A יקרא **שלם** אם כל איבר ב-A הוא מפורש c^A עבור איזשהו סימן קבוע c.

הגדרה:

L שפה $\Phi_1(L)$ = קבוצת הנוסחאות במשתנה חופשי אחד של L.

אם $\varphi \in \Phi_1(L)$, $FV(\varphi) = \{x\}$, אזי הנוסחא המתקבלת מ-φ ע"י החלפת כל מופע חופשי של x בסימן יחס c תסומן $\varphi(c)$ (בדיון) φ^x_c, כשמור שפה, כלומר, φ^x_c).

טענה ב:

אם Γ רכ' סופית עקבית של L, קיימת $\hat{L} \supseteq L$, $\hat{\Gamma} \supseteq \Gamma$, $\hat{\Gamma}$ רכ' בת מנייה סופית עקבית של $\hat{L}$ מקסימלית והנקין.

הוכחה:

נגדיר בהדרגה שפות L_n, ורכ' סופיות Γ_n של L_n, Γ_n עקבית, $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \dots$

* $\Gamma_0 := \Gamma$

* בהינתן Γ_n: אם n זוגי: $\Gamma_{n+1} = \overline{\Gamma_n}$, $L_{n+1} = L_n$ (לפי למה H).

אם n אי-זוגי: $\Gamma_{n+1} \supseteq \Gamma_n$, Γ_{n+1} מקסימלית, $L_{n+1} = L_n$.

כמה שהם זוגי משפרים בדרגה הנקין.

כמה שהם אי זוגי משפרים מקסימליות.

סימון: $\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$, $\hat{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$

א. $\hat{\Gamma}$ עקבית: נובע מטיעון שבדר הוכחה ✓

ב. $\hat{\Gamma}$ מקסימלית: יהי φ משפט של $\hat{L}$ קיים המופיע ב-φ שייך לאוגיות שפה L_n, ולכן φ משפט של L_N לשהו.

לכן φ משפט גם של L_{2N}, ובפרט ש: Γ_{2N} מקסימלית

ולכן $\varphi \in \Gamma_{2N}$ או $\neg\varphi \in \Gamma_{2N}$

ולכן $\varphi \in \hat{\Gamma}$ או $\neg\varphi \in \hat{\Gamma}$.

ג. תכונת הנקין: יהי $\varphi \in \Phi_1(\hat{L})$ אז $\varphi \in \Phi_1(L_n)$ לאינשהו n.

עבור משתנה חופשי x, נניח ש: $(\forall x)\varphi \in \hat{\Gamma}$.

אז $(\forall x)\varphi \in \Gamma_N$ עבור אינשהו $N \geq n$, N זוגי.

לכן: קיים סימן קבוע d ב L_{N+1} כך ש: $\varphi(d) \in \overline{\Gamma_N}$

אך: $\Gamma_N = \Gamma_{N+1} \subseteq \hat{\Gamma}$.

∎

הגדרה 1: אם Γ עקבית דדוקטיבית, φ נסמן $\varphi \in \Gamma$ $\iff$ $\Gamma \vdash \varphi$

(הערה: אם $\varphi \notin \Gamma$ אזי $\psi \in \Gamma$ הוא יחיד ש- $\Gamma \vdash \psi$ אבל $\Gamma \vdash \bot$)

הגדרה 2: אם $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \vdash \bot$ אזי קיים n כך ש: $\Gamma_n \vdash \bot$ ובהסתכלות ב- L_n

דומה: אם מתקיים הסתכלות $\bot$ מ- $\bigcup \Gamma_n$ אז קיים n כך ש- $\alpha_i \in L_n$ (תלוי נוסחא מ- L_n) ובהסתכלות, הוא מ- Γ_n.

דוגמא: מושג אשר מתקבל אחרת

$L = \{<, c, c_0, c_1, \dots\}$ נאמר ש- Γ סופיה ב- $\mathbb{N}$ אם קיים מבנה $\underline{A}$ שעונה $\mathbb{N}$,

ושם הסמל של $<$ הוא הסמל הרגיל; $c_n^{\underline{A}} = n \in \mathbb{N}$

ו- $\underline{A} \models \Gamma$.

אם $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \dots$ סופיות ב- $\mathbb{N}$, האם $\bigcup \Gamma_n$ סופי ב- $\mathbb{N}$?

לא!

נגדיר אינדוקטיבית:

$\Gamma_0 = \phi$

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{c > c_n\}$

Γ_n סופיה ב- $\mathbb{N}$, $c^{\underline{A}} = n+1$

אך $\bigcup \Gamma_n$ אינו סופי ב- $\mathbb{N}$: אם $\underline{A} \models \bigcup \Gamma_n$ מהסלף הנ"ל $c^{\underline{A}} = m$.

$v(c > c_m ; \underline{A}) = F$.

(לא מספר טבעי יותר גדול מכל המספרים הטבעיים).

סימון: נקבע מערכת של- Γ בתוך סמלים של L שהיא

עקבית, דדוקטיבית, הסגורה. כולם מתבטא מתוך Γ

שאלה 1: מתבטא מבנה $\underline{A}$: ① $\underline{A}$ שמו: לכל $a \in A$ קיים סימן בתוך $c \in L$ כך ש: $c^{\underline{A}} = a$.

② לכל סמל אחר R ב- L, $R(c_1, \dots, c_n)$, $v(R(c_1, \dots, c_n); \underline{A}) = T$ $\iff$ $R(c_1, \dots, c_n) \in \Gamma$

אזי: $(c_1^{\underline{A}}, \dots, c_n^{\underline{A}}) \in R^{\underline{A}} \iff R(c_1, \dots, c_n) \in \Gamma$.

מקרה פרטי: $n=2$, R הוא $\approx$: $c_1^{\underline{A}} = c_2^{\underline{A}} \iff (c_1 \approx c_2) \in \Gamma$

הגדרה:

תהי $S \neq \emptyset$ קבוצה, ו- E יחס שקילות על S. אזי S כיחס ל- E הינו קבוצה M יחד עם פונ' $S \xrightarrow{\varphi} M$: m ש.

$$(s,s') \in E \iff m(s) = m(s').$$

למה: איך קיימת אכן.

הוכחה: $M :=$ קבוצת המחלקות שקילות של E. $m(x) = \{y \in S : (x,y) \in E\}$

m על, $m(x) = m(y) \iff (x,y) \in E$

נישם את לשאיפה 1 ② מאמר קודם, אבל מ:

נסמן: $C =$ קבוצת הקבועים של L.

נגדיר: $E = \{(c_1,c_2) \in C^2 : (c_1 \approx c_2) \in \Gamma\}$. E יחס שקילות. (לבדוק)

נשים: $A =$ אזי של C ע"י E. $c^A = m(c)$

הבאה: שאיפה 1 מתקיימת באופן הפשוט הבא.

שבוע 11 9.1.06

איך נכשלו הוכחתנו: יש Γ עקבית, נניח $\Gamma \subseteq \bar{\Gamma}$ עקבית (בשפה גדולה יותר)

φ ש- $\bar{\Gamma}$ דאמיר + הינקין.

מה נעשה הום?

טענה 1:

תהי Γ עקבית ודאמיר. נניח שב- L יש לפחות סימן קבוע אחד.

אז קיים מבנה שהי $\underline{A}$ כך שלכל יחס R וסימני קבוע $c_1,\dots,c_n$

$$(c_1^A,\dots,c_n^A) \in R^{\underline{A}} \iff R(c_1,\dots,c_n) \vdash \Gamma.$$

הגדרה:

נגדיר: $\sim$ יחס על C = קבוצת הקבועים של L ע"י:

$$\Gamma \vdash c_1 \approx c_2 \iff (c_1, c_2) \in \sim$$

טענה: $\sim$ יחס שקילות.

שקילות: $\exists$ רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי...

ובנוסף: אם $c_1 \sim d_1, \dots, c_n \sim d_n$ ו- R סימן יחס n-מקומי:

אז $\Gamma \vdash R(c_1, \dots, c_n) \iff \Gamma \vdash R(d_1, \dots, d_n)$

הוכחה:

נניח ל: $\Gamma \vdash R(c_1, \dots, c_n)$ ו- $c_1 \sim d_1$. אז $\Gamma \vdash c_1 \approx d_1$

נשתמש באקסיומה: $\Gamma \vdash (\forall x_1)(\forall y_1)(x_1 \approx y_1 \to (R(x_1, c_2, \dots, c_n) \to R(y_1, c_2, \dots, c_n)))$

ובאקסיומה: $\Gamma \vdash ((c_1 \approx d_1) \to (R(c_1, c_2, \dots, c_n) \to R(d_1, c_2, \dots, c_n)))$

$\Leftarrow$ מקבלים: $\Gamma \vdash R(d_1, c_2, \dots, c_n)$

באופן דומה, גם עבור c_2 ו- d_2 וכן הלאה... בסוף נקבל: $\Gamma \vdash R(d_1, \dots, d_n)$

הוכחה השלמה:

תהי $m: C \twoheadrightarrow \bar{C}$ פ ל: $m(c) = m(c')$ אם $c \sim c'$. (למה)

ונסמן: $\bar{c} = m(c)$.

נגדיר: $A = \bar{C} = \{\bar{c} : c \in C\}$ $\quad c^A = \bar{c}$

$$R^A = \{(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) : \Gamma \vdash R(c_1, \dots, c_n)\}$$

בדיקה: * A שלם לפי הגדרתו (כל איבר ב- A הוא מהצורה $c^A = \bar{c}$, c סימן קבוע).

* לפי מה שהגדרנו, אם $\Gamma \vdash R(c_1, \dots, c_n)$ אז $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) \in R^A$ $(c_1^A, \dots, c_n^A)$.

לעומת זאת, אם $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) = (c_1^A, \dots, c_n^A) \in R^A$ אז יש סימן קבוע $d_1, \dots, d_n$ פ ל: $\Gamma \vdash R(d_1, \dots, d_n)$ ו- $(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) = (\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n)$.

אז: $\bar{c}_i = \bar{d}_i \Rightarrow m(c_i) = m(d_i) \Rightarrow c_i \sim d_i \Rightarrow \Gamma \vdash R(c_1, \dots, c_n)$. $\square$

טענה 2:

נניח ש- Γ עקיבה, דוגמה והנחון, ו- A מבנה שהוא גם שלם סמן יחס R
ומספר קבוע $c_1, \dots, c_n$, $(c_1^A, \dots, c_n^A) \in R^A \iff \Gamma \vdash R(c_1, \dots, c_n)$

אזי: A מודל של Γ.

הוכחה:

נראה שלכל נוסחה φ, $A \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$ באינדוקציה על φ.

בס. φ אטומית: מוגדר בשאלה הקודמת.

בס. i. $\varphi = \bot$: ברור.

ii. $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$:

$v(\varphi; A) = t_{\to}(v(\varphi_1; A), v(\varphi_2; A))$

לפי הגדרת ערך האמת ב- A ל- φ.

$\Gamma \vdash \varphi \iff (\Gamma \nvdash \varphi_1$ או $\Gamma \vdash \varphi_2)$

מכוון ש- Γ דוגמה ועקבית

ג. $\varphi = \forall x \psi$: $\circledast$ נניח ש: $\Gamma \vdash \forall x \psi$.

אז $\Gamma \vdash \psi(c)$ לכל סמן קבוע c.

לפי הנחת האינדוקציה $A \models \psi(c)$, לכל סמן קבוע c.

יהי x המשתנה של ψ. תהי s השמה כלשהי $s(x) \in A$.

A שמה $\iff$ $s(x) = c^A$ עבור איזשהו סמן קבוע c.

$v(\psi, s; A) = v(\psi(c); A) = T$

s שרירותית, לכן: $v(\forall x \psi; A) = T$.

$\circledast$ נניח ש: $\Gamma \nvdash \forall x \psi$.

בגלל דוגמה, נובע ש: $\Gamma \vdash \neg \forall x \psi$

לכן: קיים סמן קבוע c כך ש: $\Gamma \vdash \neg \psi(c)$ (לפי תכונת הקיום)

לפי הנחת האינדוקציה $A \not\models \psi(c)$ ולפי הגדרת ערך האמת של $\forall x \psi$:

$A \not\models \forall x \psi$

12.1.06

סיכום מה שראינו עד כה:

משפט (שלמות+נאותות): (יהי סמן ו-Γ קבוצת פסוקים ב-L)

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

ההוכחה עברה דרך **משפט קיום המודל**: בהינתן Γ קבוצה, הבנו את L של Γ ומצאנו $\bar{\Gamma}$ עקבית, דיאלקטית, המקיים. מצאנו מודל של $\bar{\Gamma}$ ובמצאנו מודל של Γ.

מסקנות:

⊛ **משפט הקומפקטיות**: אם $\Gamma \models \varphi$ אז קיימת תת קבוצה סופית $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ כך ש: $\Gamma_0 \models \varphi$.

הוכחה: אם $\Gamma \models \varphi$ אז קיים הסק $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ של φ מ-Γ, ולכן אם Γ_0 הוא קבוצת הנחות שבהסק זה, כלומר: $\Gamma_0 = \{\alpha_i : \alpha_i \in \Gamma\}$ אז $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ הסק מ-Γ_0, ולכן: $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

אולם: $\Gamma \models \varphi \Longleftarrow \Gamma \vdash \varphi$

$\Gamma_0 \models \varphi \Longleftarrow \Gamma_0 \vdash \varphi$ $\square$

⊛ **משפט Loewenheim Skolem** (הורדה):

תהי L שפה סופית או בת-מנה, Γ קבוצת פסוקים אז: אם יש מודל של Γ, אז קיים גם מודל בן-מנייה של Γ.

גרסה חלשה: יהי $\underline{M}$ מבנה ל-L. אז קיים מבנה $\underline{N}$ עם תחום N בן-מנייה אם סופי, כך ש: $Th(\underline{M}) = Th(\underline{N})$ כאשר:

$$Th(\underline{M}) = \{\varphi : \underline{M} \models \varphi \text{ ו } \varphi \text{ פסוק של } L\}$$

הוכחה שהגרסה השני נובעת מהראשון: נניח $\Gamma = Th(\underline{M})$ אז קיים מודל $\underline{N}$ בן-מנייה של Γ ולכן: $Th(\underline{M}) \subseteq Th(\underline{N})$. אבל $Th(\underline{M})$ מקסימלי ו- $Th(\underline{N})$ עקבי ולכן אם $\varphi \notin Th(\underline{M})$ אז $\neg\varphi \in Th(\underline{M})$

ולכן: $\varphi \in Th(\underline{N})$ ונקבל: $\varphi \notin Th(\underline{N})$

וקיבלנו: $Th(\underline{M}) \subseteq Th(\underline{N})$

ומלא: $Th(\underline{M}) = Th(\underline{N})$.

<u>הערה המשפט:</u> נניח לכן שבכל מקרה אנו את ההוכחה. הראשון נעסה בניסוח טיפה שונה של משפט קיום המודל (ובקרוב L בר מניה):

"אם Γ עקבית, יש ל-Γ מודל בן-מניה."

הגרסה הבאה מיוחסת מעבודה של משפט Loewenheim-Skolem:

מאחר שיש מודל של Γ, אז Γ עקבית, ולפי משפט קיום המודל יש ל-Γ מודל בן-מניה. $\square$

(נבין מזה, למשל, שאם סדרות (שאין יחידות שלה) של $\mathbb{R}$ בשדות ב-$\mathbb{C}$ יש גם שדה בן-מניה שלה יש זו שדות.)

⊛ <u>משפט Loewenheim-Skolem (בעלייה):</u>

תהי Γ קבוצת פסוקים. אם יש ל-Γ מודל אינסופי, אז יש ל-Γ מודל שאינו בן-מניה.

<u>הוכחה:</u> תהי $L^* = L \cup \{c_i\}_{i\in I}$, c_i סימן קבוע חדש לכל $i \in I$ כאשר I קבוצה שאינה בת מניה.

ונגדיר: $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\neg(c_i \approx c_j) : i \neq j \in I\}$

<u>טענה:</u> קיים מודל M^* של Γ^*.

<u>הוכחה:</u> (פה אין את הפרטים: זה נמצא בחוברת 11).

נתון מודל $\underline{M}$ של Γ. לכל תת-קבוצה סופית $I_0 \subseteq I$ $(|M|=\infty)$

ניתן להרחיב את $\underline{M}$ למודל $\underline{M}_{I_0}$ של

$\Gamma \cup \{\neg(c_i \approx c_j) : i \neq j \in I_0\}$

לכן, כל תת קבוצה סופית של Γ^* סופיקת, ולכן Γ^* עקבית

ויש ל-Γ^* מודל, שנסמן $\underline{N}^*$.

יהי $\underline{N}$ הצמצום של $\underline{N}^*$ לשפה L (אומרים שזו אותו, ואותו סימן של סימני L).

$\Gamma \models \underline{N}$. העולם של $\underline{N}$ אינו בן-מניה כי השוויון

$$i \longmapsto c_i^{\underline{N}^*}$$

הינו 1-1, כי $\neg(c_i \approx c_j) \models \underline{N}^*$ אם $i \neq j$. $\square$

⊛ **משפט:** (סקולם) קיים מודל κ $Th(\underline{N})$ שאינו איזומורפי ל- $\underline{N}$. $\underline{N} = (N, +, \cdot, 0, 1)$

הוכחה א': לפי משפט Loewenheim-Skolem העליה.

הוכחה ב': יש גם מודל בן-מניה κ $Th(\underline{N})$ שאינו איזומורפי ל- $\underline{N}$. מדוע?

יהי c סימן קבוע חדש, $\Gamma^* = Th(\underline{N})$, ובנוסף $\Gamma^* \subseteq [(c \neq 0) \cup (c \neq 1) \cup \dots]$

טענה: Γ^* עקבית (משפט סופיות).

הוכחה: בהינתן קבוצה סופית $F \subseteq \Gamma^*$,

$F \subseteq \Gamma \cup \{c \neq 0, c \neq 1, \dots\}$

תהי $\underline{A}$ הפשטה של $\underline{N}$ המקיימת $c^{\underline{A}} = n+1$.

לפי משפט הקומפקטיות קיים מודל $\underline{M}^*$ של Γ^*.

יהי $\underline{M}$ הצמצום ל- $\{+, \cdot, 0, 1\}$.

טענה: $\underline{M}$ מודל של $Th(\underline{N})$ אינו שווה, וקיים איבר של $\underline{M}$

שאינו סמל של L (אינו $1+1$, $1+1+1$, ...)

הוכחה: תרגיל! (רמז: אין איזומורפיזם בין $\underline{N}$ לבין $\underline{M}$.

מדוע? נניח ש- $f: \underline{M} \to \underline{N}$ איזומורפיזם.

אזי מהו $f(c^{\underline{M}^*})$? אינו 0, אינו 1, 2, ...

חייב להתקיים $f(c^{\underline{M}^*}) \in N$, כלומר: $f(c^{\underline{M}^*}) = n \in N$

אבל: $n = (1+1+\dots+1)^{\underline{N}}$

מכיוון ש- f איזומורפיזם, $f((1+\dots+1)^{\underline{M}}) = (1+\dots+1)^{\underline{N}}$

$\Leftarrow$ $f(c^{\underline{M}^*}) = f((1+\dots+1)^{\underline{M}}) = f((1+\dots+1)^{\underline{M}^*})$

$c^{\underline{M}^*} = (1+\dots+1)^{\underline{M}^*}$

$\underline{M}^* \models c \approx (1+\dots+1)$

אך גם מתקיים: $\underline{M}^* \models c \not\approx (1+\dots+1)$

וקיבלנו סתירה.

⊛ משפט (בדיקת חלבית של משפט הדדיבה הלוגית):

קיים אלגוריתם המקבל בתור קלט פסוקים סופיים Γ ופסוק φ,
ק"ל: אם $\Gamma \models \varphi$ אז האלגוריתם יעצור ויחזיר משפט שהוא
סופי ויכריע: "$\Gamma \models \varphi$", ובכך אז!

(לפי משפט הגדל: הרי כפי שהוכרר נבוא לשלב בכדי לעבור על כל המודלים מה הוא המודל,
ובאן הוא מה שאנו אמרנו $\Gamma \models \varphi$, אז בזמן סופי אנחנו נגלה שלא. אבל מצד שני
נמצאנו את כל המודלים ואילו בזמן-מעיה.
הבעיה היא שלא נוכל לדעת מה φ, כי אין אלגוריתם אם אומר בזמן סופי "$\Gamma \models \varphi$"
לא לא אומר ש- $\Gamma \not\models \varphi$)

הכתבה: נראה שלא עבור $\Gamma \vdash \varphi$

אלגוריתם: נעבור בספר מילון על כל הסדרות האפשרות של סימנים בשפה L
(שהיא קבוצת הסימנים המופיעים ב- Γ וב- φ), יחד עם הסימנים הלוגיים
וסגירים ",".

בשלב זה, נתבונן בסדרה הבאה:

* האם זו סדרת פסוקים (המופרדים ע"י ",")?

(כלומר, האם קיבלנו: ..... , פסוק א , פסוק ב , פסוק ג)

אם לא, אז ממשיכים לעבור בספר המילון הזה ← עוברים לסדרת סימנים חדשה
ועושים את הבדיקה.

אם כן: * האם זה הסוף של Γ?

(עשו בדיק לבדוק: (i) האם יש שם אקסיומות? (בדיקה לוגית-שלמה)
(ii) האם יש שם MP?)

* האם הפסוק האחרון זהה ל- φ?

בכל שלב, אם התשובה היא "לא", אז ממשיכים בספר המילון...
אם עברנו "כן" על הכל, אז מודיעים ואומרים "$\Gamma \not\vdash \varphi$".

ההכרעה הינו מסתמכת על משפט השלמות.

"כן אבל" מסתמך על משפט הנאותות.

16.1.06 שבוע 12

האינו שאם φ נכון בכל מבנה, גם נגזרת אם באמצעות אים על נוסחה

אמת במבנה ספציפי

למשל, גם נשאל האם φ מסוים נכון ב- $(\mathbb{N},+,\cdot)$, או $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ או $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$?

בפה הבנה שסדר אלגברי בלי שנוכל לא שלה לו עבור $\mathbb{N}$, עם $+,\cdot$.

גילוי כלכלי הוכחה בלא עבור $\mathbb{Q}$, עם $+,\cdot$.

מה עם $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$? עלה שבמקרה הזה מצבר לא הכרחה מאוד דברים מסוב בגם ומתר,

מאוד, למשל, סמלים שאומרים ב- $\mathbb{R}^n$.

משפט (Tarski): לא אלגוריתם המכריע בהינתן סמל φ האם $\underline{\mathbb{R}} \models \varphi$.

בהמשך הקורס אנו נראה דוגמא המשפט זה

משפט המשפטים יתקיים (לא תלוסקי, ולא גדל), אנו מסיקים שאין נוסחא ב- $(\underline{\mathbb{R}},+,\cdot,<)$ המגדרת את $\mathbb{N}$.

המבנה שאנו מעוניינים בו הוא $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$:

טענה:

תהי Γ קבוצת סמלים, $\hat{\Gamma}$ קבוצת הנוסחאות הסגורות של Γ: $\hat{\Gamma}=\{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$ תהי

נניח ש- $\hat{\Gamma}$ עקבית ורקורסיבית אז קיים אלגוריתם המקבל סמל φ

ומכריע האם $\varphi \in \hat{\Gamma}$.

(המשפט גם נאמר ש- Γ קבוצת סמלים בעלת אלגוריתם. כלומר:

קיים אלגוריתם A המכריע אם $\varphi \in \Gamma$

המסקנה הא שקיים אלגוריתם $\hat{A}$ המכריע אם $\varphi \in \hat{\Gamma}$)

תרגיל

הוכחה:

תיאור הבעיה (תיאור $\hat{N}$):

$\hat{N}$ יעבור על כל הפסוקים הסופיים של שאילתות בשפת מספרים, ויבדוק:

האם זה הסך מ- Γ?

אם לא, עובר לפסוק הבא.

אם כן, האם זהו הסך של φ?

אם כן, אז האלגוריתם יעצור, ויאמר ש- "φ נכון לגבי מ- Γ".

אם לא, האם זהו הסך של $\neg\varphi$?

אם כן, אז האלגוריתם יעצור, ויאמר ש- "φ לא נכון לגבי מ- Γ".

אם האלגוריתם עובר על "כל" אז יש הסך של φ מ- Γ.

אם האלגוריתם עובר על n "לא" אז יש הסך של $\neg\varphi$ מ- Γ ולכן ש- Γ עקבי.

אין הסך של φ מ- Γ.

מכיוון ש- $\hat{\Gamma}$ רגיונית, $\varphi + \Gamma$ או $\neg\varphi + \Gamma$, אחד האלגוריתם יעצור

כאשר יגיע לסך הראשון מתוך זה.

$\blacksquare$

אנו שואפים לבנות את המשפט של טארסקי:

כלומר, אנו נבדיק האם קבוצת אקסיומות עבור $\underline{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$

אנו נקבל תורה של שדות סדורים סגורים ממש - RCF.

<u>שדות סדורים, OF:</u> (האקסיומות של תורה 4 מושלמת בתרגיל #12).

- שדה.
- $+, \cdot$ אסוציאטיבי, חילופי, חוק דיסטריבוטיבי.
- איבר הנגדי חיובי.
- $(\forall x)\ (x \neq 0 \rightarrow (\exists y)\ x \cdot y = 1)$

• $<$ סדר לינארי.

• $x<y \Rightarrow x+z < y+z$

• $x<y,\ 0<c \Rightarrow x\cdot c < y\cdot c$

19.1.06

$\underline{R} = (\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ מ

יש קבוצה אקסיומה RCF

ואין מספר מוגבל של RCF.

קבוצת האקסיומות שלנו תהיה:

שדות סגורים OF: ראינו בשיעור שעבר.

IV_n $n\in\mathbb{Z}$: משפט ערך הביניים עבור פולינום מדרגה n:

"לכל פולינום מדרגה n, f, מעל הישר, ולכל $a<b$,
אם $f(a)<0<f(b)$ אז קיים שורש ל-f בין a ל-b."

$$\forall u_0\forall u_1\cdots\forall u_n\left(u_n\neq 0 \longrightarrow \forall x\forall y\left([x<y \wedge \sum_{i=0}^{n} u_i x^i<0 \wedge \sum_{i=0}^{n} u_i y^i>0] \rightarrow \exists z\,[x<z \wedge z<y \wedge \sum_{i=0}^{n} u_i z^i=0]\right)\right)$$

IV'_n $n\in\mathbb{Z}$: לכל פולינום מדרגה n, f, ולכל $a<b$, אם $f'(x)>0$ לכל $x\in(a,b)$
אז $f(a)\le f(b)$.

$$\forall u_0\forall u_1\cdots\forall u_n\left(u_n\neq 0 \longrightarrow \forall x\forall y\left([x<y \wedge \sum_{i=0}^{n} u_i x^i>\sum_{i=0}^{n} u_i y^i] \rightarrow \exists z\ \sum_{i=0}^{n} i u_i z^{i-1}<0\right)\right)$$

סימון: $IV_{\le n} := IV_1 \wedge \cdots \wedge IV_n \wedge IV'_n \wedge \cdots \wedge IV'_n$

זה כך הישנו לא קבוצת האקסיומות של RCF.

למה: (ללא הוכחה) $\underline{R} \models RCF_{IV}$

RCF_N = קבוצת הנוסחאות הנכונות של הקבועים: OF,

IV_n, IV'_n — $n=1,2$

מטרה: • RCF_N שלמים. (לא זה מוכן אלא אלגוריתם לפתור שקילות).

• RCF_N מתוקן כמתים

הגדרה:

תהי T מתוקן כמתים אם לכל נוסחא φ קיימת נוסחא ψ בלתי מכמתת

המשתנים $x_1, \dots, x_n$ כך ש: $T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \leftrightarrow \psi)$

(מומר: הן נוסחאות שקולות) ו- ψ חסרת כמתים.

דוגמא:

$$\varphi = (\exists z)(x+z\cdot z=y)$$

$$\psi = (x \le y)$$

$$RCF \models \forall x \forall y (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

נראה זאת: לא נוכיח, למשל, $\psi \to \varphi \models$, מומר ל- ψ נובעת לוגית מ- φ,

מכיוון שהאחרונה אין קשר בין $\le$ לבין $+, \cdot$

לעומת זאת, אם ניקח נוסחת מ OF ונאמר ש: $OF \models \varphi \to \psi$

(זה מופיע בתרגיל 12). איך מוכיח זאת?

בגלל שקיים סדר, אם יש איבר c, $c^2 \ge 0$ (בגלל הגדרה)

אז יש a, $a+c^2 \ge a$.

עתה: האם $OF \models \psi \to \varphi$? לא, למשל $\underline{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$ אזי

מקיים זאת: למשל: $\underline{Q} \models 0 < (1+1)$ אך $\underline{Q} \not\models (\exists z)(z^2 = (1+1))$

לעומת זאת: $OF + IV_2 \models \psi \to \varphi$

איך מוכיח זאת?

יהי $E \models OF + IV_2$ ויהי $a \le b$ ב- E, $(a,b) \in <^E$ או $a=b$.

ג': יש $c \in F$ כך ש: $F \models a + c^2 = b$

נתבונן בפולינום: $f(x) = x^2 + (a-b)$

א. $f(0) = a - b \leq 0$

אם $f(0) = 0$ אז יש שורש ל-f.

אחרת $f(0) < 0$.

ב. $d = b - a$ ואז $f(d) = d^2 - d$.

אם $d \geq 1$, $f(d) \geq 0$

אם $d < 1$ $f(1) = 1 - d > 0$.

לכן IV_2 יש $c \in F$ כך ש: $F \models c^2 + (a-b) = 0$, $b = c^2 + a$.

הגדרה:

אם T מוגדר למחצה, אז בפרט, כל משפט שקול למשפט חסר כמתים.

אם, בנוסף, T דיסקרטי ביחס לפסוקים אטומיים, אז T רציונלי.

הערה:

φ פסוק, ויש ψ פסוק חסר כמתים: $T \models \varphi \Leftrightarrow \psi$

$T \models \psi$ או $T \models \neg\psi$

$T \models \varphi$ או $T \models \neg\varphi$.

טענה:

OF דיסקרטי ביחס לפסוקים חסרי כמתים.

אם נסתכל על המבנים, אז נקבל כך גיתן מתאור, ש $\mathbb{Z}$ הוא שלם.

הערה: מתחת שמש בשמת עדה המבנה ל" הרכבת סימן פונקציה.

הרצאה מעניינת:

1 **טענה:** לכל שדה סדור F ($F \models OF$)

קיים שיכון של $\mathbb{Q}$ לתוך F.

נראה כאן:

א. נגדיר הומומורפיזם: $h_0: \mathbb{Z} \longrightarrow F$

$$h_0(n) = \underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ פעמים}}, \quad h_0(0)=0, \quad h_0(-n) = -h_0(n)$$

בדיוק לוודא: h_0 הומומורפיזם של חוגים.

ב. נבנה את h_1 ל- $h_1: \mathbb{Q} \longrightarrow F$

$$h_1\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{h_0(a)}{h_0(b)} \qquad b \neq 0$$

נבדוק שזה אכן מוגדר היטב:

$$h_0(a)\cdot h_0(d) = h_0(b)\cdot h_0(c) \Leftarrow ad = bc \Leftarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Leftarrow \frac{h_0(a)}{h_0(b)} = \frac{h_0(c)}{h_0(d)}$$

הראשון זה כך ל- $0 < b \in \mathbb{Z}$, אז $h_0(b) \neq 0$.

בדיוק לוודא ש- h_1 הומומורפיזם מאם ל- $1, 0, +, <$.

אמשל: $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ ל- $\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{Q}$, אז $h_1\left(\frac{c}{d}\right) > h_1\left(\frac{a}{b}\right)$.

2 **טענה:**

תהי T תורה. נניח שקיים מבנה A הניתן לשיכון לתת מודל של T

אז T בדיוק מאם לסמן מסר מתים.

הוכחה:

יהי φ סמן מסר מתים, $f: A \longrightarrow B$ שיכון בין מבנים ל-L.

אז $v(\varphi, A) = v(\varphi, B)$.

מהות הלכתית כללית:

באינדוקציה על φ, שורות המציאות $V(\varphi,\underline{B})$, $V(\varphi,\underline{A})$

במקרה φ פסוק אטומי נקבע מציאות שלו. $\square$

הלכתית הטלה:

יהי φ פסוק תמיד במציאות. אזי $V(\varphi,\underline{A}) = T$ או F.

נניח ש: $V(\varphi,\underline{A})=T$: לכל מודל $\underline{B}$ של T, לפי הנחה $V(\varphi,\underline{B})=T$.

לכן: $T \models \varphi$.

נניח ש: $V(\varphi,\underline{A})=F$: לכל מודל $\underline{B}$ של T, לפי הנחה $V(\neg\varphi,\underline{B})=T$

לכן: $T \models \neg\varphi$. $\blacksquare$

הלכתה תחביבית:

כיצד נראה פסוק אטומי? סימני הפעם שלנו $<, \approx$: נרשום $t_1 < t_2$, $t_1 \approx t_2$

כאשר t_1, t_2 שמות עצם (אלו סמן מס').

אם נשתמש בסימן $=$ – בתור קיצור, נוכל לרשום: $t = t_2 - t_1$, ואם $t \geq 0$ או $t \approx 0$.

כיצד נראה שם עצם? נוכל לרשום ב-∞ דרכים: $x\cdot x + x\cdot x$, $x\cdot(x+x)$, $(x+x)\cdot x + 0$, ...

טאוטה: t שם עצם כמו t שקיים לאחר מהבטיחות $0, 1, 1+1, \ldots$ או $-1, -2, \ldots$

כאמר: $OF \models t \approx \underline{n}$ או $OF \models t + \underline{n} \approx 0$

הלכתה: באינדוקציה.

* עבור שם בסיס: ברור, יש רק $0, 1$.
* אינדוקציה: $t = t_1 + t_2$ או $t = t_1 \cdot t_2$. $\square$

נוכל להראות שלכל $m<n \in \mathbb{Z}$, $OF \models \underline{m} < \underline{n}$

למשל: $OF \models (1+1) < (1+1+1)$

מאחר ולא כל הפסוקים האטומיים, והיחס של אחד מהם או שלא נבעה מ- OF, נוכל להראות באינדוקציה שכל פסוק תמיד במציאות מוכרע ע"י OF (למשל $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$). $\blacksquare$

בהינתן שתורה T מוגדרת כראוי, פי להבחנה שלא נוסחא φ תסרה כראוי
במשתנים חופשיים $y_1, \dots, y_n, x$ קיימת נוסחא ψ כך ש: ψ תסרה כראוי

$$T \models (\forall y_1 \dots \forall y_n)(\forall x\, \varphi \leftrightarrow \psi) \; ; \; FV(\psi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$$

הוכחה:

באינדוקציה על φ, נראה ש-$\psi = \varphi$ שקולה ב-T ונוסחא תסרה כראוי.

* φ אטומית: תסרה כראוי.
* $\varphi = \bot$: תסרה כראוי
* $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$: יהי ψ_1 תנ"ל, ψ_2 תנ"ל,

$$T \models \varphi_1 \leftrightarrow \psi_1$$
$$T \models \varphi_2 \leftrightarrow \psi_2$$

ונקבל: $T \models (\varphi_1 \to \varphi_2) \leftrightarrow (\psi_1 \to \psi_2)$

(נניח שלא $FV(\theta) = \{z_1, \dots, z_n\}$, T לא בסתירה, $T \models \theta$
הוא מקיים ל- $T \models \forall z_1 \dots \forall z_n\, \theta$).

* $\varphi = \forall x \theta$: נבחר θ' תסרה כראוי, $T \models \theta \leftrightarrow \theta'$ (הנחת האינדוקציה).

$$T \models \varphi \leftrightarrow \forall x \theta'$$

לפי הנחת הגרירה כאמור יהיה קיים θ'' תנ"ל, כך ש:

$$T \models \forall x \theta' \leftrightarrow \theta''$$

ולכן:

$$T \models \varphi \leftrightarrow \theta''$$

■

23.1.06 שבוע 13

סט"ח מבוא: הבדל בין שפה עם סימני פונ' לבין שפה ללא סימני פונ'

שפה (ללא סימני פונ'): משתנה בפנים ← שם עצם (סימני פונ')
(עם סימני פונ')

↓

סימן יחס ← נוסחא אטומית

↓

נוסחא ⊆ פסוקים

משתנה חופשי, קשור

מבנה:

R סימן יחס n מקומי: $A^n \supseteq R^A$

F סימן פונ' n מקומי: $A^{n+1} \supseteq F^A$

גרף של פונ'

פרוש: לכל שם עצם t ולכל השמה s, נגדיר את t במבנה A עם ההשמה s: $t^{A,s}$

c קבוע ← $c^{A,s}$ נתון.

x משתנה ← $s(x) = x^{A,s}$

$t = F(t_1, \dots, t_n) \Leftarrow F^A(t_1^{A,s}, \dots, t_n^{A,s}) = t^{A,s}$ בצורה רקורסיבית

ערך אמת: הנוסחה φ $V(\varphi, s; A)$ אומר הנוסחה φ מתקיימת בפונ' כך שנציב אל תוך הנוסחה את שמות העצם.

המשך התומר שלנו:

הגדרה:

מבנה שני הוא מבנה A כך שלכל איבר $a \in A$ קיים שם עצם t כשהם, $FV(t) = \phi$

כך ל: $t^A = a$

(זה קצת שונה מההגדרה שאנו הגדנו, בגלל שהוספנו סימני פונ')

בכל מבנה A כשהם, יש תת-מבנה מינימלי יחיד שהוא התת מבנה השני היחיד,

ומסומן A_{min}.

$$A_{min} = \{t^A : \text{שם עצם כלשהו } t\}$$

אם L מכיל סימני יחס בלבד, אז כל תת-קבוצה לא ריקה של A הינו

עולם של תת-מבנה של A.

אם L מכיל סימני קבוע + פונ', $\phi \neq B \subseteq A$ הינו עולם של תת-מבנה אבל

הוא מכיל את כל הקבועים, וסגור תחת פעולות סימני הפונ'.

משפט:

$\underline{R} = (R, +, \cdot, 0, 1, <)$ בגיר $Th(\underline{R})$

הוכחה:

א. $RCF_{IV} \subseteq Th(\underline{R})$. (הפונ' אמיתי)

ב. RCF_{IV} שלם (בדיוק). (לכל משפט = ב-א').

יהי φ כך: RCF_{IV} מוכיח כמעט.

מדוע "יהי φ כך"?

הוכחה כמעט ← כל סגור שקול לסגור חסר כמתים

סגור חסר כמתים מוגדר כמו ע"י OF. $\varphi \models OF \iff v(\varphi; \emptyset) = T$ (מגדיר 6.12)

עדיין לא הוכחנו ש- RCF_{EV} מחוסל כמתים:

* קריטריון כללי לחיסול כמתים (בפרק 13, שאלה 3), שימוש במשפט הקומפקטיות.
* נוכיח שבקריטריון אכן תקף עבור RCF (לא נראה אלגברית, נשתמש בפורמולה בלשנית מיד)

(המתרגל שוב מאשים בך שעברנו מטשטוש אינטרפרטציה אחרת הלא שאת הלמה הבולבדית אינו נדרש לבוכה אלא נשתמש מעט כלי של RCF_{EV}, ולאו דווקא $\mathbb{Q}$.)

"הקריטריון":

הקריטריון מדבר על פסוק יש כשהוא $\exists x\varphi$, φ חסר כמתים.

כדי להשתמש בו, נרשה להוסיף לשפה סימני קבוע.

הקריטריון: בהינתן מבנה $\underline{A}$, ופסוק יש כשהוא φ ובהינתן שני שיכונים

$f_1 : \underline{A} \longrightarrow \underline{M}_1$, $f_2 : \underline{A} \longrightarrow \underline{M}_2$, $\underline{M}_1, \underline{M}_2 \models T$

אז $V(\varphi; \underline{M}_1) = V(\varphi; \underline{M}_2)$.

מסקנה פרטית: $T = RCF_{EV}$.

אז: $\underline{A}$ = שדה סדר, $\underline{M}_1, \underline{M}_2$, שדות סגורים המכילים את $\underline{A}$.

(הקריטריון אומר שמתנים המשתנה אחד $g_1, \dots, g_l \in A[x]$ ו- $f_1, \dots, f_k$

$$\varphi = \exists x \left(f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0 \ \wedge \ g_1(x), \dots, g_l(x) > 0 \right)$$
)

26.1.06

משפט: קומפקטיות לשקילות, לסמלים חסרי מאמרים

נתון: תורה T, פסוק ψ.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{לכל זוג מודלים } \underline{M},\underline{N}\models T \text{ כלשהי מתקיים}\\ \text{משמע, } \underline{M}\models\psi \iff \underline{N}\models\psi\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}\text{קיים פסוק חסר מאמרים}\\ \varphi \text{ כך ש: } T\models(\psi\leftrightarrow\varphi)\end{array}\right\}$$

בה מתקיים משמע: יש מבנה $\underline{A}$ ומבנה $\underline{M}$
$\underline{B}$ ומבנה $\underline{N}$

φ כך ש: $\underline{A}\cong\underline{B}$

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ נתון $T\models(\psi\leftrightarrow\varphi)$, φ חסר מאמרים.

הנתונים הבאים קולטים:

$\underline{M}\models\psi$

$\underline{M}\models\varphi$, $\underline{A}\models\varphi$ — φ חסר מאמרים, $\underline{A}$ מתאים

(כי הם באותו המבנה)

$\underline{B}\models\varphi$ (כי מכיוון ש- $\underline{A}\cong\underline{B}$)

$\underline{N}\models\varphi$

$\underline{N}\models\psi$

מודלים שם אין משתנים כיוון ש-φ פסוק חסר מאמרים

$$\begin{array}{ccc}\underline{M} & & \underline{N}\\ | & & | \\ \underline{A} & \xrightarrow{\sim} & \underline{B}\end{array}$$

$(\Rightarrow)$ נגדיר בקבוצה Σ המורכבת מכל אותם פסוקים חסרי מאמרים φ:

$$\Sigma := \left\{\varphi : \text{ חסר מאמרים } \varphi \quad T\models\varphi\to\psi\right\}$$

לפי אי

אז נקבל להפך שקיימים $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\Sigma$ כך ש: $T\models\psi\to(\varphi_1\vee\dots\vee\varphi_n)$ בלוגיקה

אז אולי נשפר $\varphi=(\varphi_1\vee\dots\vee\varphi_n)$, ואז: $T\models(\psi\leftrightarrow\varphi)$.

הערה: אם $\varphi_1,\varphi_2\in\Sigma$ אז גם $\varphi_1\vee\varphi_2\in\Sigma$, ולכן הנתון שלב הראשון שקול לטענה שקיים $\varphi\in\Sigma$ כך ש: $T\models\psi\to\varphi$.

(אי אפשר לכתוב)

נניח בשלילה שעבור אין נתון אז לכל $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\Sigma$ $T\not\models\psi\to(\varphi_1\vee\dots\vee\varphi_n)$

לומר $T,\psi\not\models\varphi_1\vee\dots\vee\varphi_n$, לומר $T,\psi,\neg\varphi_1,\dots,\neg\varphi_n\not\models\bot$.

(לדוגמה: יש מבנה $\underline{C}$ כך ש: $\underline{C} \models T, \psi$, $\underline{C} \models \neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n)$).

אז נטען ש: $T \cup \{\psi, \neg\varphi_1, \dots, \neg\varphi_n\}$ ספיק. (נקבוע)

גם משפט הקומפקטיות $T \cup \{\psi\} \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \Sigma\}$ ספיק: יש לו מודל $\underline{M}$

$\underline{M}$ מראה כלומר שיש מין ψ לכן כל $\varphi \in \Sigma$

אז יש מבנה $\underline{N}$ כך ש:

ⓐ יש ל-$\underline{M}$ ו-$\underline{N}$ תת-מבנה משותף

ⓑ $\underline{N} \models \neg\psi$

ⓒ φ אין נקבע סתירה.

טענה: ⓐ שקולה ל- ⓑ הכוונה: $Th_{qf}(\underline{M}) = Th_{qf}(\underline{N})$ (אותם תנאים בתנאים שווים)

אומר: לכל פסוק חסר כמתים φ, $\underline{N} \models \varphi \iff \underline{M} \models \varphi$.

אחת מוכיח, לעצמה, כך הכוונה ⓑ ⇐ ⓐ.

הוכחה: נשים $\underline{A} := \underline{M}_{min}$, $\underline{B} := \underline{N}_{min}$, תת מבנים שווים (יחידים) מינימליים.

ראינו כבר:

$$Th_{qf}(\underline{M}) = Th_{qf}(\underline{A})$$

$$Th_{qf}(\underline{N}) = Th_{qf}(\underline{B})$$

אז מנחה ⓐ גורם ⇐ $Th_{qf}(\underline{A}) = Th_{qf}(\underline{B})$ אותם תנאים חסרי כמתים

ואם $\underline{A}$, $\underline{B}$ שווים, גורם $\underline{A} \cong \underline{B}$. □

נניח לעומת $\underline{N}$ כזה:

לכן, נמשיך לעומת מודל $\underline{N}$ המקיים את ⓐ ואת ⓒ, נאמר: $T, Th_{qf}(\underline{M}), \neg\psi \models \underline{N}$

יש מבנה $\underline{N}$ כזה:

לפי משפט הקומפקטיות נמשיך עבור כל קבוצה סופית של הפסוקים חסרי כמתים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

ב- $Th_{qf}(\underline{M})$ הראנו ש: $T \cup \{\neg\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ספיק.

אם לא, אז כל מודל של $T \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ מקיים ψ: $T \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \models \psi$

$\varphi = (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)$: $T \models \varphi \to \psi$, נאמר $\varphi \in \Sigma$

מודל, לכל מבנה שקיים אותה תורה חסרת כמתים Th_{qf}

לכן $\psi \models \underline{M}$, אומר: $a_1, \dots, a_n \models \underline{M}$, סיימנו!

(השפה של M שאינה Σ) לצד + האופרטור הארכימדי ב-M = $\mathbb{C}$).

$\blacksquare$

<u>פסוק יש פשוט ב- RCF_{EV} + נמוגים:</u>

$$\tilde{\Psi} = (\exists x)\left(f_1(x) = 0 \ \wedge \ f_2(x) > 0 \ \wedge \ f_3(x) < 0\right)$$

3"ל:

אם $\underline{M}, \underline{N} \models RCF_{EV}$, $\underline{A}$ תת-מבנה של $\underline{M}, \underline{N}$ (משותף)

אז $\underline{M} \models \psi \iff \underline{N} \models \psi$. ($\psi$ פסוק יש פשוט, ומלא $\tilde{\Psi}$).

טענה: (חשוב מאוד)

תהי $S \subseteq A[x]$ נמוגה סופית של פולינומים $(\neq 0)$.

נסמן שורשים של איברי S ב- $\underline{M}$: $b_1 < \dots < b_n$ ב שורשים

נסמן שורשים של איברי S ב- $\underline{N}$: $c_1 < \dots < c_{n'}$ ב שורשים

אז: $n = n'$, ולכל $f \in S$, הסימן של f ב c_i זהה ל b_i שוב,

ולכל i (b_i, b_{i+1}) ב- M הסימן של f נמוך
ולכל i (c_i, c_{i+1}) ב- N הסימן של f נמוך
זהה שוב

הוכחה: נסמן בקצרה מלאכת c_1 - b_1 ומאמן ל c_n - b_n

אומר: הפולינומים "נראים דומה" גם ב- $\underline{M}$ וגם ב- $\underline{N}$...

אם $f(b_2) \le 0$, $f(b_1) < 0$ אין ל-f שורש כלשהי בקטע

אם $f(b_1) < 0$, $f(b_2) > 0$ אז (לפי הנחת האינדוקציה) $f(c_1) < 0 < f(c_2)$

אז יש שורש $b_{\frac{1}{2}}$ של f ב- $(b_1, b_2)^M$

ויש שורש $c_{\frac{1}{2}}$ של f ב- $(c_1, c_2)^N$

הוא מוכיח (לפי הנחת השורש של הקצוות).

המרחק של f בשלושת ה- c עכשיו כקטע $(b_1, b_{\frac{1}{2}})$, $(b_{\frac{1}{2}}, b_2)$

וגם $b_{\frac{1}{2}}$.