

⑥ $gR_k + X$

② $3x + x$

⑦ $(y+x)^2 = y^2 + x^2$ אמת הקוטר השני של המלבן הוא היתר במثل ישר הזווית.

⑧★ F.S. Shoenfield, Mathematical Logic : 10/20

סדרה זריזת, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}$ מתכנסת

Enderton, A Mathematical Introduction to Logic

(34) $\gamma \geq x \vee \gamma \leq x \leftrightarrow \gamma \geq x$

אם לא למקרה וממטא? באמצע הממטא תיקרת את החטיבה.

$$x \rightarrow y \vee y = x \vee y \rightarrow x$$

חצים אדום כיצד מתקיימת התלכדות האטומים, מה זה? גשו חקרו

אתה בדרך האור ספציפי. (תשובה קל. תשובה - מתחילת פאליקה)

העמוד הראשון, המכונה "העמוד הראשון", נמצא בראשית הספר.

אם האנטיגן הוא תוקרן, אז צד המזויף? - במקום

השפה הראשונה באוזניך משתמשת בשפה פורמלית. השבנו אתה

מאזן של החליטה הממשלה - ממשלה של חלום

הוא לאו אמתיות - זהו מושג היטב, אין צורך להוסיף -

כמה שנים, נאמן, כמובן, יש לה ענין של כולל ביטוי. כלומר

שמות: א' יצחק (אברהם) יעקב (ישראל) ויהודה (יהוה)

על פי חוקי התכנון והבנייה, כל בנייה חדשה חייבת לעמוד בתקנים מסוימים, כגון:

[illegible]

והיחסים לאיים השלש הפורמליזם ואל אפלטון ו'צור מקנים חזלים וס'
 $1060: (v+x) \geq v+x$

מאבנים קיימים ואשר הם לקשר בין שני התחומים הנ"ל. וכן נכתב:

$$x_2 = 0 + x_1$$

כלומר: $x_2 = x_1$ (!) (המשוואה)

$(0+x) \leq x \leq 0+x$ (by b and a)

(5) $\mathbb{Q}((x+x^2)) = \text{Peano } \mathbb{Q}((x+x^2))$

אין אונזער יאָרס לערנענדיגס פארשטייט זיך אזאנאמאל ווי פיל קאמפאניעס זענען דא, וואס קאמפאניעס זענען דא, וואס קאמפאניעס זענען דא.

אנחנו ב"ס. יופי! אנחנו נסיק את כל האסטרטגיות...

① ১০০০

② S_x 是 X 的方差

$$x=y \quad \text{JK} \quad S_x=S_y \quad \text{NK} \quad (3)$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0$ (באמצעות חוק ל'הולנד' 0 $\cdot \infty$ (המיליון))

$S_y = X \cdot 0$ כן y נ"ק $X \neq 0$ לכל (5)

2

לדגול: $(x+y)x = x(y+x)$ משפט: $x+y = y+x$

הוכחה: (1) $x+0 = x = 0+x = 0 \cdot (y+x)$

$x+Sy = (Sy+x) = (x+y) = y+x = x+y$ (2) $x+y = y+x$

$(x+y)x + Sy = (x+y)Sx = S(x+y) = S(y+x) = Sy + x = x+y$

(3) $\square$ ושימו לב: הוכחה זו היא

לדגול: $5x + yx = (5+y)x$ משפט: $(x+y)+z = x+(y+z)$

הוכחה: (1) $(x+y)+0 = x+y = x+(y+0)$

$(x+y)+Sz = x+(y+Sz)$ (2) $(x+y)+z = x+(y+z)$

$(x+y)+Sz = S((x+y)+z) = S(x+(y+z)) = Sx + S(y+z)$

$x + S(y+z) = x + (y+Sz) = (x+y)+Sz$

(3) $\square$ ושימו לב: הוכחה זו היא

משפט: $0 \cdot x = 0$

הוכחה: (1) $0 \cdot 0 = 0$ (2) $0 \cdot x = 0$

$0 \cdot Sx = 0$ (3) $0 \cdot x = 0$

$0 \cdot Sx = 0 \cdot x + 0 = 0 + 0 = 0$

משפט: $Sx \cdot y = xy + y$

הוכחה: (1) $0 = Sx \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = 0$

$Sx \cdot Sy = x \cdot Sy + Sy$ (2) $Sx \cdot y = xy + y$

$Sx \cdot Sy = (Sx \cdot y) + Sx = (xy + y) + Sx = S((xy + y) + x)$

$x \cdot Sy + Sy = (x \cdot y + x) + Sy = S((xy + x) + y) = S(xy + (x+y))$

(3) $\square$ ושימו לב: הוכחה זו היא

משפט: $xy = yx$

הוכחה: (1) $0 = x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

$xSy = Syx$ (2) $xy = yx$

$x \cdot Sy = xy + x = yx + x = Sy \cdot x$

(3) $\square$ ושימו לב: הוכחה זו היא

אסוציאטיביות: $x + y = y + x$

אסוציאטיביות: $(xy)z = x(yz)$

הוכחה: $(xy) \cdot 0 = 0x = x \cdot 0 = x \cdot (y \cdot 0)$ (1)

$(xy)Sz = x(ySz)$ (2) $(xy)z = x(yz)$ (2)

$(xy)Sz \stackrel{(1)}{=} (xy)z + xy = x(yz) + xy = x(yz + y) = x(ySz)$

אז $(xy)Sz = x(ySz)$ (3)

אסוציאטיביות: $(x+y)+z = x+(y+z)$

אסוציאטיביות: $x(y+z) = xy+xz$

הוכחה: $x(y+0) = (x \cdot y) = xy + 0 = xy + x \cdot 0 = x(y+0)$ (1)

$x(y+Sz) = xy + xSz$ (2) $x(y+z) = xy + xz$ (2)

$x(y+Sz) \stackrel{(1)}{=} x(S(y+z)) \stackrel{(2)}{=} x(y+z) + x$

$= (xy + xz) + x = xy + (xz + x) = xy + xSz$

אז $x(y+Sz) = xy + xSz$ (3)

אסוציאטיביות: $0 = x \cdot 0$

המסקנה היא כי 0 הוא איבר נייטרלי במכונה M .

לכן 0 הוא איבר נייטרלי במכונה M .

$0 = 0 + 0 = 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$

$0 = 0 + 0 = 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$

0 קבוע = פונקציה 0 מקומית

אסוציאטיביות: $y + yx = y \cdot x^2$

S פונקציה חד למקומית

הוכחה: (1) $0 = 0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0$

$+$ פונקציה חד למקומית

(2) $x(y+yx) = x \cdot y^2 + (y+yx) \cdot x = x \cdot y^2 + y \cdot x^2 + y \cdot x^2 = x \cdot y^2 + y \cdot x^2$

סיום

אם הוכחנו זאת, המסקנה היא כי 0 הוא איבר נייטרלי במכונה M .

הוכחנו את הפונקציה 0 להיות איבר נייטרלי במכונה M .

אז 0 הוא איבר נייטרלי במכונה M .

קלטים 0 ו- 1 :

0 ו- 1

0 ו- 1

הוכחה: $x + y = y + x$

$x + y = y + x$ $xy = yx$ $x \cdot y^2 = y^2 \cdot x$

$(x+y)+z = x+(y+z)$ $(xy)z = x(yz)$ $x \cdot y^2 = y^2 \cdot x$

$a(x+y) = ax + ay$

אז $a(x+y) = ax + ay$ (3)

პირველი კონკრეტული პერიოდი "1991" (1991 წ. 7 დეკემბრიდან)

ביום 14 והריצאה אמורה לעבור לאולם כימיה 7

[illegible]

~~10:00~~ ~~(-x)~~ ? 10:00 2K 10:00 2M

בש"עור הק"א (הגדתי) אר אקטואל פאנו ורובתנו ש אין

החומר שיש לו צפיפות גבוהה יותר יצטמצם יותר.

und die eigene Zahl z : $\{1, \dots, z\}$:

מה היה לנו באקסיומות?

- קבוצה אסט (ט) : פונקציה ס-מקלואי

World Bank and UNICEF

פונקציות B וקואליציות $\left\{ \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right.$

'N/PN 13 ON' - 1 GT - < -

מה עוד צריך להוסיף במספר שומאים?

קטרים הוא"מ - אפר אהכניס לטוב אר 6 הקטרים הוא"מ

באפשיים אן לעפער צווייט איניאליסטס - צווייט און

שבת. ואם תלמוד פסוק. אה שלבנסון. (אז יל שם.

אפציות. כל (תחיים ממשק ב (הקורס)

יש קונצרט - שונות בס' מננים ושונים. יפה (ש' מננה)

disjunction

Conjunction

३३१॥०३

האניניקה

১৯৫৫ }

זרימה $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right.$ $\leftrightarrow$ שקילות $\left\{ \begin{array}{l} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \end{array} \right.$

ה'תשנ"ג, ח' שבט, יום קטנים 13 ח' א"ת.

שלמה הוא קיטר מוסיקלי

כלב) יש להם קשרים אולי - ס - מקומיים : רוב תמיד אמורים

אור אמת ה' עכ"ל.

T - תמיד מתמיד ערך "אמת" (נכון כי T זה כן True)

F - תמיד מתמיד ערך "שקר" (נכון כי F זה כן False)

בטבלה לשימוש: $P \rightarrow F$ - אם P אמת אז הביטוי שקרי
 $P \rightarrow T$ - אם P שקרי אז הביטוי אמת

על תמיד להשתמש ב- $P \rightarrow F$ כאשר P אמת. אנחנו נראה שאם ישאר הקשרים אפשר לבטא ע"י $\{ \rightarrow, \neg \}$:

- $P \vee Q$ מתמיד "אמת" נשלפתור את P ו- Q "אמת". במקרה היחיד שבו הוא מתמיד ערך "שקר" הוא כאשר שניהם "שקר".

$(\neg P) \rightarrow Q$ - אם $\neg P$ אמת ו- Q שקרי (קרי) שהביטוי הוא שקרי. בלשון אחרת, $P \vee Q = (\neg P) \rightarrow Q$

מתקיים ערך אמת, $P \vee Q = (\neg P) \rightarrow Q$

נעשה טבלה מסודרת כדי להבין:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(\neg P) \rightarrow Q$
אמת	אמת	אמת	שקר	אמת
אמת	שקר	אמת	שקר	אמת
שקר	אמת	אמת	אמת	אמת
שקר	שקר	שקר	אמת	שקר

* כל מה שכתבתי
 טבלת השוואה
 מתקבל

אז אנחנו רואים שהקשר המורכב $(\neg P) \rightarrow Q$ פועל בדיוק כמו הביטוי $P \vee Q$. וזהו ראשוני של $P \rightarrow Q$ (ניתן לכתוב $P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q$)

מה עם קוניוקציה? לפי חוקי זה-אוראן אפשר לכתוב $P \wedge Q = \neg((\neg P) \vee (\neg Q))$

ואם $(\neg)$ ו- $(\vee)$ הם הבסיסיים $\{ \rightarrow, \neg \}$.

אם היציאה עוד לא הוכחנו את חוקי זה-אוראן אז נעשה טבלה

4

$$P \wedge Q \stackrel{2}{=} ((P \rightarrow (P \vee (P \rightarrow Q))) \rightarrow Q)$$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$
אמת	אמת	אמת	שקר	שקר	שקר	אמת
שקר	אמת	שקר	אמת	שקר	אמת	שקר
אמת	שקר	שקר	שקר	אמת	אמת	שקר
שקר	שקר	שקר	אמת	אמת	אמת	שקר

$$\Rightarrow P \wedge Q = (((P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow (Q \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$$

במובן, אם זה מיועד לקרוא אנשים נשטלים מס'מ'ן. לא זה
אם יפיעים צריך להוכיח משפטם באינדוקציה על הנ"מ (המשפט)
ואם החיסכון הזה יונה לעצור.

הגדרה הדו-סטריה היא דבר פשוט: $P \leftrightarrow Q = P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$
ואנחנו יודעים להביע את $P \leftrightarrow Q$ ואת $P \leftrightarrow Q$.

הוכחנו שאפשר להביע את כל הקשרים באמצעות $\{\rightarrow, \perp\}$.

אסטרטגיה אחת: נציג את כל הקשרים באמצעות $\{\vee, \neg\}$.

$$P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q \quad \text{זריחה}$$

$$P \wedge Q = \neg((\neg P) \vee (\neg Q)) \quad \text{קניונקציה}$$

$$P \leftrightarrow Q = P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P \quad \text{שקילות}$$

אם אי אפשר להביע את הקשרים ההדו-מקומיים $\neg$ ו- $\perp$.
סביר שואל - מה עם $P \vee (\neg P)$. ברור שלה מחסור תמיד

עק אמת. אבל הביטוי $P \vee (\neg P)$ הוא פונקציה חד מקומית.
ואילו $\neg$, $\perp$ הם ס-מקומיים. הם מתצרים תשובה עוד לפני
ששואלים אותם! אז זה לא בדיוק אותו הדבר...

אנשים המציאו עוד קצת טיפים למקומי שלא נמצא פה -

או אקספ'רטיבי - (1)

$$P \mid Q \equiv \neg(P \leftrightarrow Q)$$

P	Q	$P \mid Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$
אמת	אמת	שקר	שקר
אמת	שקר	אמת	אמת
שקר	אמת	אמת	אמת
שקר	שקר	שקר	שקר

כאשר נאמר אמת או שקר, האם זה נכון או לא?

אם נאמר אמת, אז נאמר שקר. אם נאמר שקר, אז נאמר אמת. זה נקרא "הפך" או "נגד".

אם נאמר אמת, אז נאמר אמת. אם נאמר שקר, אז נאמר שקר. זה נקרא "אמת" או "שקר".

אם נאמר אמת, אז נאמר שקר. אם נאמר שקר, אז נאמר אמת. זה נקרא "הפך" או "נגד".

אם נאמר אמת, אז נאמר אמת. אם נאמר שקר, אז נאמר שקר. זה נקרא "אמת" או "שקר".

אמת: $P \mid Q = \neg(P \leftrightarrow Q)$

שקר: $\neg(P \mid Q) = P \leftrightarrow Q$

אמת: $P \mid Q = \neg(P \leftrightarrow Q)$

אם נאמר אמת, אז נאמר אמת. אם נאמר שקר, אז נאמר שקר. זה נקרא "אמת" או "שקר".

אם נאמר אמת, אז נאמר שקר. אם נאמר שקר, אז נאמר אמת. זה נקרא "הפך" או "נגד".

מטרת היום להגדיר פורמליזם של פורמליזם. אבל התעקבנו בדיון על קשרים לוגיים. היום נסיים את זה.

קשרים לוגיים

קשרים לוגיים הם תזק בינארית בין שני פורמליזם. אבל יש לנו חופש בהחלטה והקשרים.

$\perp, \top$ - קשרים לוגיים 0 - מקומיים

$\neg$ - קשר לוגי חד-מקומי

$\wedge, \vee, \rightarrow$ - קשרים לוגיים דו-מקומיים

אפשר להגדיר גם אחרים. הם סימנים בשפה, אבל ראינו ש- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ מספקים כדי לבטא את כל הקשרים הלוגיים האחרים. אם עוקחים את $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ אפשר לבטא את כל הקשרים תוך המקשרים הם-מקומיים.

קשרי מאפיינים ע"י ערכי האמת שלהם. אם שני קשרים מתאימים את אותם ערכי אמת נאמר שהקשרים שקולים.

נשתמש במשתנים בוליאניים $P_1, P_2, \dots$

אם משתנים שונים לקבלו או ערך אמת או ערך שקר. אנחנו נשתמש בע"כ ב- $\top$ לסמן אמת ו- $\perp$ לשקר. אפשר גם ב- 1 ו- 0 .

נסתכל על $f(P_1, P_2, P_3)$ - יש 8 אפשרויות למשתנים אלו f מוגדרת ע"

P_1	P_2	P_3	$f(P_1, P_2, P_3)$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

אפשר
להחליט
מה שכתבנו
עליו...

סעיף י"ט $2^8 = 256$ אפשרויות פונקציות בוליאניות של

3 משתנים - כי לכל אחד מ-8 אפשרויות הקלט יש 2

אפשרויות פונקציה. כל פונקציה בבאר אפשר לבטא ע"י קשרים
לוגיים. והאופן הבא:

משפט: כל פונקציה בוליאנית של n משתנים אפשר לבטא

באמצעות קשרים לוגיים.

דוגמה:

P_1	P_2	P_3	$f(P_1, P_2, P_3)$	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$	$P_1 \wedge (\neg P_2) \wedge (\neg P_3)$	$(\neg P_1) \wedge P_2 \wedge P_3$	$(\neg P_1) \wedge (\neg P_2) \wedge P_3$
אמת	אמת	אמת	אמת	אמת	שקר	שקר	שקר
אמת	אמת	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר
אמת	שקר	אמת	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר
אמת	שקר	שקר	אמת	שקר	אמת	שקר	שקר
שקר	אמת	אמת	אמת	שקר	שקר	אמת	שקר
שקר	אמת	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר
שקר	שקר	אמת	אמת	שקר	שקר	שקר	אמת
שקר	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר	שקר

אם מה יש לנו? יש לנו פונקציה אחת עם מקום שבו מתקבץ

הכל אמת ב- f . זה די חמניה למען האמת. ואם ערשיתנו (עולה)

היננום דיסיונקציה (קבוצה):

$$f(P_1, P_2, P_3) = (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge (\neg P_2) \wedge (\neg P_3)) \vee ((\neg P_1) \wedge P_2 \wedge P_3) \vee ((\neg P_1) \wedge (\neg P_2) \wedge P_3)$$

באר דוגמה ספציפית, אבל השיטה שבה צגנו פונקציה

בוליאנית של n משתנים.

משפט: כל פונקציה בוליאנית של n משתנים בוליאניים $f(P_1, \dots, P_n)$

אפשר לבטא כדיסיונקציה של קוניונקציות של המשתנים הבוליאניים

$P_1, \dots, P_n$ או של שלילותם $\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n$.

ההוכחה תיעשה באופן דומה למה שעשינו למעלה.

הגדרה פונקציה בוליאנית $f(P_1, \dots, P_n)$ של n משתנים בוליאניים נקראת טאוטולוגיה אם עבור כל זוגי $(P_1, \dots, P_n)$ היא מקבלת ערך אמת.

לדוגמה: $P_1 \vee (\neg P_1)$ - זהו ביטוי לטמית מתקבל אמת.

הצגה

עבור פונקציה אפשרי לבדוק אם היא טאוטולוגיה על ידי הצבה י"ב הקטעים האפשריים. יש לה תשיבוע מעשי כי עבור חיים לא גדולים מאוד אנחנו מקבלים הרבה מאוד אפשרויות, וזה צי חרא... אז איך הם לא אפשרי לבדוק אם פונקציה היא טאוטולוגיה? פתרון הוא שלב לא כל כך נוח לנו כי פה אנחנו מחזיקים שלב של לבדוק כל מספר סופי של ביטויים. אבל זאת בעיה של מופיעה בפרקטיקה אז חשוב לאמצא אלגוריתם מהיר. זאת בעיה NP-מלא מסובכת ובלתי ניתנת לפתרון, היא לא נפתרה לנו.

דיברנו על האריתמטיקה של פאנו. מה היה לנו למ? 0 קבוע S פונקציה 1- מקומית + - פונקציה 3- מקומית < = יחס 3- מקומיים

אנחנו נשתמש בקטעים הפעילים $V-1$. האינו שלבים להבין תוצאות או של הקטעים האחרים מלבד 1 ו- T .

השפה פורמלית של אם בחתום: $\exists x (x \neq x)$ - כח של קיום $(\exists x) x \neq x$ $\forall x (x = x)$ - כח כל $(\forall x) x = x$

נשים לב שזהו פורמלי קיים. זה כמו להגיד $\neg \forall x (x = x)$ - לא נכון שכל דברים שווים. באופן מלאי השבוע יד גשם = לא נכון שכל מי השבוע לא יד גשם.

כמו שעשינו עם הקשרים, לה אצבים לזמן שאם אנחנו יכולים
לחשוב בסוגים אלו של זהותם יק בכמה אחד.

לחיסוק בסיונים אפשר להשתמש רק בכמה אחת.

האנטיגן $A =$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ו- $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ הם מטריצות

בכל יום היה גשם = נכון שהיה יום שלא היה בו גשם

אנחנו נבחר זה שמתאים הכמות של היק"ם ונביא את הכסף. האמצעות.

השפה יש לה משתנים, סתם משתנים. $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, \dots$: כל המשתנים.

הליכה של מרחק 1038:

① בואו ללמוד ביחד

2) אם f היא פונקציה n -מקומית ו- $u_1, \dots, u_n$ הם מספרים

$(\eta=0 \text{ סדר נמוך}), \exists \delta > 0 \text{ כזה ש- } \forall u_1, u_2, \dots, u_n$

* הערה: (ש'ם לב שלל הכנסת סמכים לטובה ואם לא פטורים)

פירמה: 0 היא משתנה, S פונקציה חד מקומית $S_0 \Leftarrow S$ למצב

$$. \text{p3} \text{ } \text{pe} + \text{S}_0 \text{SS}_0 \rightleftharpoons \text{NIPN-N} + \text{p3} \text{ } \text{pe} \text{SS}_0 \rightleftharpoons$$

• 19. $\Delta = \text{הקוואל} + \text{סוססו סו} + \text{סל סזס} \cdot \text{לואר סנ"ה}$

רק (רסימיו של שמואל 38

၂။ အခွန်

10) $P(u_1, u_2, \dots, u_n)$ and $u_1, \dots, u_n$ independent on P (1)

נוסחה אטמית.

2) α , β וסתאות, γ , δ (נסתת) γ ו"ה ו"ה ו"ה

(2) אם a, b נוסתאות, abc Vab (נוסחה).
 (3) אם a נוסתה abc a (נוסחה).

(3) א פק א מוסיף סלע א פארוואנדלונג

④ a new 1.5 liter engine is available.

$$V < SSSO \quad S_0 = OS_0 \quad : \text{نقص}$$
$$\begin{array}{r} \overline{3} \quad \overline{1} \\ \overline{3 \quad 1} \quad \overline{0=1} \\ \overline{3 \quad 1} \end{array}$$

$0=1 \quad \vee \quad 3<1$ - זה כחובן מקבל לקר.

האם תמיד ניתן לשחזר את הביטוי אחורה חד ערכי? 2^2 בהמשך נניח שכן!

שאלות פורמליות

1. יש לתת מרכיבים של השפה:
 - משתנים
 - פונקציות
 - יחסים
 - קשרים
 - נכחים
2. לתת פונקציה מוגדרת מה מטה המקומות וכלל יחס A, B מה A ל B
3. אנוני נלמד לפי הסדר של A לעומת A והקשרים שלו $V, \neg$ מה V
4. והכמה לנשתמש בו יהיה $\exists$.

5. f מה פונקציה ח-מקומית: $a_1, a_2, \dots, a_n$ שמה $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ מה $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ הוא של $\exists$.
6. * אנוני ללא הגדרת סמלים ומה לא פסקים בשפה ולכן כתבים $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ אבל זה כאילו שהיה כתוב $f(a_1, \dots, a_n)$ אח"כ $\neg$ בסכמה נעבור לסמלים שהיו לנו ראוה אליהם אבל הם יבין רק קיומים של סמלים של השפה הפורמלית שהגדרנו למשל עבור תיבור נרשם $a_1 + a_2$ אבל זה בעצם $a_1 + a_2$.
7. * צריך להפוך את ההגדרה שלנו ללא מבינה לאמריקאית בקראתה של שמה בעצם וזה צריך שינסק אותנו להמשך.
8. * מקרה (ב) כולל בתוכו את המקרה של פונקציה ס-מקומית. $\neg$ אחר $\neg$ לא יופיעו משתנים ובה יוצא $\neg$ של $\exists$.

נוסחה אטומית =

 p יחס n -מקומי, $a_1, a_2, \dots, a_n$ שמו-צב SK $a_1 \dots a_n$

היא נוסחה אטומית.

 $\star$ אטומית כאן בחובן שאי אפשר לתקן אותה. זה גם הפירוש כי p
 $\neg$ ח"כ לקבלת משתנים $\Rightarrow$ לא יוכל להיות $a_1 \dots a_n$ ראש ח"כ.

סימני

נוסחה =

(1) נוסחה אטומית היא נוסחה

(2) אם A נוסחה SK $A \neg$ נוסחה(3) אם A, B נוסחות SK AB נוסחה(4) אם A נוסחה ו- x משתנה SK $\exists x A$ נוסחה

E. הישגיות

הערה: זהו ההיגיון בצמצום היסודי. למשל $\neg \exists x B = \forall x \neg B$ אבל מן הסתם $\forall x B$ נחשב יותר קריא לבני אדם. המוטיבציה של הצמצום היא ברק

שהרבה משפט נוכח באנציקלופדיה של בניית הנוסחה נא להצמצום

בזה דווקא יעצוב לנו. למשל, אם $\neg \exists x B$ אז $\forall x \neg B$ (א) $\neg \exists x B$ דוגמה: $V < S_{00} = S_0 S_{S_0}$ זה לא כל הרוחות (פרק א)

זה לחלקים.

0 שלם עצם כי זאת פונקציה 0-מקומית

 S_0 שלם עצם כי S פונקציה 1-מקומית $S S_0$ שלם עצם מאותה הסיבה $S_0 S S_0 = S_{00}$ נוסחה אטומית לפי ההצעה. הוא יחס 2-מקומי. $S_{00} < S_{00}$ נוסחה אטומית כי $<$ יחס 2-מקומי. $V < S_{00} = S_0 S_{S_0}$ נוסחה לפי (3) בהצעה נוסחה.

כאן לא נוסחה אטומית. נוסחה אטומית מתחילה ביחס. נוסחה

שמתחילה בקשר או משהו אחר היא לא נוסחה אטומית. זאת סתם

סיבה פורמלית.

אפשר לנסות לשים לפני 2 סוגי דברים ביניים: למשל α ו-

נוסחאות. אנחנו צריכים איזה נוסחה (למשל) למושל שכלל בתוכו את

למשל α ו- נוסחאות וזה הכל. מספר קראים לזה α בין α ו-

אבל זה אמר מדין של שדה. אז אנחנו נשתמש בהיגד

אז היגד זה או של שדה או נוסחה

כל ההיגדים שהוגדרו קודם, בין שהם שמוח דברים ובין שהם נוסחאות,

הוגדרו באותה מתכונת. כל מה שצריך להגיד זה שיש

אם V סוג של השפה $V_1, V_2, \dots, V_n$ היגדים (α) אז

$V_1, V_2, \dots, V_n$ היגד (קדם לצאות של כל ההיגדים מתאימה

למתכונת הנאות) מספר ההיגדים n (קבוע α). V

אם V משתנה מספר ההיגדים אחריו, הוא אפשר.

אם V פונקציה מספר ההיגדים הוא מספר המקומות הפונקציה

אם V יחס מספר ההיגדים הוא מספר המקומות היחס

אם V נגזרת α יהיו אחריו היגד אחד

אם V דיסטריבוציה V יהיו אחריו שלני היגדים

אם V כחלק קיים $\exists$ יהיו אחריו שלני היגדים

דוגמה: $\alpha = \alpha$ הוא לא היגד. אי אפשר להגיד לביטוי הזה

כל ההיגדים שישמנו. $\alpha = \alpha$ הוא דוגמא כן היגד. $\alpha = \alpha$ הוא

יחס דו-מקומי. אחריו שלני שמוח דברים, לומר שלני היגדים.

אם α הוא סוג n -מקומי. אנחנו מסתכלים על $\alpha, \alpha, \dots, \alpha$

אנחנו צריכים לבדוק ש- $\alpha, \dots, \alpha$ איננה מתחלק n -חלקים

ושכל חלק הוא היגד. אז האלמנטים שהוא זה:

- לבדוק אם α הוא α מקומי אז זה לא היגד.

- אם α n מקומי לבדוק אם $\alpha, \dots, \alpha$ הם האפשרויות שיש

n חלקים:

- עבור כל חלק לבדוק בעזרתה אם הוא היגד.

זה לא אלמנטים יחיד, אבל הוא עובד וזה גם לא הנושא שלנו.

נניח שיש לנו 2 אימים ואנחנו רוצים להפיק את אותה המידע והוא

התחלה של השנייה או שכן (כלל) לא קשורות. ייתכן.

המסקנה: אימים z_1, z_2 ניתנת להשוואה ראשונית

(1) z_1 התחלה של z_2 , או

(2) z_2 התחלה של z_1

המסקנה: אם z_1 ו- z_2 הם אימים, אז $z_1 \leq z_2$ או $z_2 \leq z_1$

אזכור: מילה היא רצף כלשהו של סימנים. במובן מילה היא

מילה-לחיות (ניצח). מילה זה הפוך הכי רחב שיהיה לחיות. יש לנו את

שפת הסימנים שהתחנה לחיות בשפה ומילה פשוט רצף של הסימנים האלה

למשל $0=0$ לא היא אלא לאת-גילה. (אנחנו מניחים)

סדרה: אם $z_1, \dots, z_n$ ו- $z'_1, \dots, z'_n$ הם אימים (האימים $z_1, \dots, z_n$

ו- $z'_1, \dots, z'_n$ ניתנת להשוואה. $z_1 = z'_1, z_2 = z'_2, \dots, z_n = z'_n$.

הוכחה: באינדוקציה על האורך של האימים. האימים בסדר (ניתנת להשוואה

ואכן זה החלקים ההתחלתיים שלהם ניתנים להשוואה.

לדוגמה z_1 ו- z'_1 ניתנים להשוואה. כל הוצא פותח בסוף מן השפה

והסוף הזה את מספר המקומות: $z_1 = u_1 u_2 \dots u_k$ $z'_1 = u'_1 u'_2 \dots u'_k$

$u_1 = u'_1, u_2 = u'_2, \dots, u_k = u'_k$ ניתנות להשוואה. לפי הנחת האינדוקציה

$z_2 = u_1 u_2 \dots u_k$ $z'_2 = u'_1 u'_2 \dots u'_k$ $z_1 = z'_1$ $z_2 = z'_2$ $z_3 = z'_3$ $z_4 = z'_4$ $z_5 = z'_5$ $z_6 = z'_6$ $z_7 = z'_7$ $z_8 = z'_8$ $z_9 = z'_9$ $z_{10} = z'_{10}$ $z_{11} = z'_{11}$ $z_{12} = z'_{12}$ $z_{13} = z'_{13}$ $z_{14} = z'_{14}$ $z_{15} = z'_{15}$ $z_{16} = z'_{16}$ $z_{17} = z'_{17}$ $z_{18} = z'_{18}$ $z_{19} = z'_{19}$ $z_{20} = z'_{20}$ $z_{21} = z'_{21}$ $z_{22} = z'_{22}$ $z_{23} = z'_{23}$ $z_{24} = z'_{24}$ $z_{25} = z'_{25}$ $z_{26} = z'_{26}$ $z_{27} = z'_{27}$ $z_{28} = z'_{28}$ $z_{29} = z'_{29}$ $z_{30} = z'_{30}$ $z_{31} = z'_{31}$ $z_{32} = z'_{32}$ $z_{33} = z'_{33}$ $z_{34} = z'_{34}$ $z_{35} = z'_{35}$ $z_{36} = z'_{36}$ $z_{37} = z'_{37}$ $z_{38} = z'_{38}$ $z_{39} = z'_{39}$ $z_{40} = z'_{40}$ $z_{41} = z'_{41}$ $z_{42} = z'_{42}$ $z_{43} = z'_{43}$ $z_{44} = z'_{44}$ $z_{45} = z'_{45}$ $z_{46} = z'_{46}$ $z_{47} = z'_{47}$ $z_{48} = z'_{48}$ $z_{49} = z'_{49}$ $z_{50} = z'_{50}$ $z_{51} = z'_{51}$ $z_{52} = z'_{52}$ $z_{53} = z'_{53}$ $z_{54} = z'_{54}$ $z_{55} = z'_{55}$ $z_{56} = z'_{56}$ $z_{57} = z'_{57}$ $z_{58} = z'_{58}$ $z_{59} = z'_{59}$ $z_{60} = z'_{60}$ $z_{61} = z'_{61}$ $z_{62} = z'_{62}$ $z_{63} = z'_{63}$ $z_{64} = z'_{64}$ $z_{65} = z'_{65}$ $z_{66} = z'_{66}$ $z_{67} = z'_{67}$ $z_{68} = z'_{68}$ $z_{69} = z'_{69}$ $z_{70} = z'_{70}$ $z_{71} = z'_{71}$ $z_{72} = z'_{72}$ $z_{73} = z'_{73}$ $z_{74} = z'_{74}$ $z_{75} = z'_{75}$ $z_{76} = z'_{76}$ $z_{77} = z'_{77}$ $z_{78} = z'_{78}$ $z_{79} = z'_{79}$ $z_{80} = z'_{80}$ $z_{81} = z'_{81}$ $z_{82} = z'_{82}$ $z_{83} = z'_{83}$ $z_{84} = z'_{84}$ $z_{85} = z'_{85}$ $z_{86} = z'_{86}$ $z_{87} = z'_{87}$ $z_{88} = z'_{88}$ $z_{89} = z'_{89}$ $z_{90} = z'_{90}$ $z_{91} = z'_{91}$ $z_{92} = z'_{92}$ $z_{93} = z'_{93}$ $z_{94} = z'_{94}$ $z_{95} = z'_{95}$ $z_{96} = z'_{96}$ $z_{97} = z'_{97}$ $z_{98} = z'_{98}$ $z_{99} = z'_{99}$ $z_{100} = z'_{100}$ $z_{101} = z'_{101}$ $z_{102} = z'_{102}$ $z_{103} = z'_{103}$ $z_{104} = z'_{104}$ $z_{105} = z'_{105}$ $z_{106} = z'_{106}$ $z_{107} = z'_{107}$ $z_{108} = z'_{108}$ $z_{109} = z'_{109}$ $z_{110} = z'_{110}$ $z_{111} = z'_{111}$ $z_{112} = z'_{112}$ $z_{113} = z'_{113}$ $z_{114} = z'_{114}$ $z_{115} = z'_{115}$ $z_{116} = z'_{116}$ $z_{117} = z'_{117}$ $z_{118} = z'_{118}$ $z_{119} = z'_{119}$ $z_{120} = z'_{120}$ $z_{121} = z'_{121}$ $z_{122} = z'_{122}$ $z_{123} = z'_{123}$ $z_{124} = z'_{124}$ $z_{125} = z'_{125}$ $z_{126} = z'_{126}$ $z_{127} = z'_{127}$ $z_{128} = z'_{128}$ $z_{129} = z'_{129}$ $z_{130} = z'_{130}$ $z_{131} = z'_{131}$ $z_{132} = z'_{132}$ $z_{133} = z'_{133}$ $z_{134} = z'_{134}$ $z_{135} = z'_{135}$ $z_{136} = z'_{136}$ $z_{137} = z'_{137}$ $z_{138} = z'_{138}$ $z_{139} = z'_{139}$ $z_{140} = z'_{140}$ $z_{141} = z'_{141}$ $z_{142} = z'_{142}$ $z_{143} = z'_{143}$ $z_{144} = z'_{144}$ $z_{145} = z'_{145}$ $z_{146} = z'_{146}$ $z_{147} = z'_{147}$ $z_{148} = z'_{148}$ $z_{149} = z'_{149}$ $z_{150} = z'_{150}$ $z_{151} = z'_{151}$ $z_{152} = z'_{152}$ $z_{153} = z'_{153}$ $z_{154} = z'_{154}$ $z_{155} = z'_{155}$ $z_{156} = z'_{156}$ $z_{157} = z'_{157}$ $z_{158} = z'_{158}$ $z_{159} = z'_{159}$ $z_{160} = z'_{160}$ $z_{161} = z'_{161}$ $z_{162} = z'_{162}$ $z_{163} = z'_{163}$ $z_{164} = z'_{164}$ $z_{165} = z'_{165}$ $z_{166} = z'_{166}$ $z_{167} = z'_{167}$ $z_{168} = z'_{168}$ $z_{169} = z'_{169}$ $z_{170} = z'_{170}$ $z_{171} = z'_{171}$ $z_{172} = z'_{172}$ $z_{173} = z'_{173}$ $z_{174} = z'_{174}$ $z_{175} = z'_{175}$ $z_{176} = z'_{176}$ $z_{177} = z'_{177}$ $z_{178} = z'_{178}$ $z_{179} = z'_{179}$ $z_{180} = z'_{180}$ $z_{181} = z'_{181}$ $z_{182} = z'_{182}$ $z_{183} = z'_{183}$ $z_{184} = z'_{184}$ $z_{185} = z'_{185}$ $z_{186} = z'_{186}$ $z_{187} = z'_{187}$ $z_{188} = z'_{188}$ $z_{189} = z'_{189}$ $z_{190} = z'_{190}$ $z_{191} = z'_{191}$ $z_{192} = z'_{192}$ $z_{193} = z'_{193}$ $z_{194} = z'_{194}$ $z_{195} = z'_{195}$ $z_{196} = z'_{196}$ $z_{197} = z'_{197}$ $z_{198} = z'_{198}$ $z_{199} = z'_{199}$ $z_{200} = z'_{200}$ $z_{201} = z'_{201}$ $z_{202} = z'_{202}$ $z_{203} = z'_{203}$ $z_{204} = z'_{204}$ $z_{205} = z'_{205}$ $z_{206} = z'_{206}$ $z_{207} = z'_{207}$ $z_{208} = z'_{208}$ $z_{209} = z'_{209}$ $z_{210} = z'_{210}$ $z_{211} = z'_{211}$ $z_{212} = z'_{212}$ $z_{213} = z'_{213}$ $z_{214} = z'_{214}$ $z_{215} = z'_{215}$ $z_{216} = z'_{216}$ $z_{217} = z'_{217}$ $z_{218} = z'_{218}$ $z_{219} = z'_{219}$ $z_{220} = z'_{220}$ $z_{221} = z'_{221}$ $z_{222} = z'_{222}$ $z_{223} = z'_{223}$ $z_{224} = z'_{224}$ $z_{225} = z'_{225}$ $z_{226} = z'_{226}$ $z_{227} = z'_{227}$ $z_{228} = z'_{228}$ $z_{229} = z'_{229}$ $z_{230} = z'_{230}$ $z_{231} = z'_{231}$ $z_{232} = z'_{232}$ $z_{233} = z'_{233}$ $z_{234} = z'_{234}$ $z_{235} = z'_{235}$ $z_{236} = z'_{236}$ $z_{237} = z'_{237}$ $z_{238} = z'_{238}$ $z_{239} = z'_{239}$ $z_{240} = z'_{240}$ $z_{241} = z'_{241}$ $z_{242} = z'_{242}$ $z_{243} = z'_{243}$ $z_{244} = z'_{244}$ $z_{245} = z'_{245}$ $z_{246} = z'_{246}$ $z_{247} = z'_{247}$ $z_{248} = z'_{248}$ $z_{249} = z'_{249}$ $z_{250} = z'_{250}$ $z_{251} = z'_{251}$ $z_{252} = z'_{252}$ $z_{253} = z'_{253}$ $z_{254} = z'_{254}$ $z_{255} = z'_{255}$ $z_{256} = z'_{256}$ $z_{257} = z'_{257}$ $z_{258} = z'_{258}$ $z_{259} = z'_{259}$ $z_{260} = z'_{260}$ $z_{261} = z'_{261}$ $z_{262} = z'_{262}$ $z_{263} = z'_{263}$ $z_{264} = z'_{264}$ $z_{265} = z'_{265}$ $z_{266} = z'_{266}$ $z_{267} = z'_{267}$ $z_{268} = z'_{268}$ $z_{269} = z'_{269}$ $z_{270} = z'_{270}$ $z_{271} = z'_{271}$ $z_{272} = z'_{272}$ $z_{273} = z'_{273}$ $z_{274} = z'_{274}$ $z_{275} = z'_{275}$ $z_{276} = z'_{276}$ $z_{277} = z'_{277}$ $z_{278} = z'_{278}$ $z_{279} = z'_{279}$ $z_{280} = z'_{280}$ $z_{281} = z'_{281}$ $z_{282} = z'_{282}$ $z_{283} = z'_{283}$ $z_{284} = z'_{284}$ $z_{285} = z'_{285}$ $z_{286} = z'_{286}$ $z_{287} = z'_{287}$ $z_{288} = z'_{288}$ $z_{289} = z'_{289}$ $z_{290} = z'_{290}$ $z_{291} = z'_{291}$ $z_{292} = z'_{292}$ $z_{293} = z'_{293}$ $z_{294} = z'_{294}$ $z_{295} = z'_{295}$ $z_{296} = z'_{296}$ $z_{297} = z'_{297}$ $z_{298} = z'_{298}$ $z_{299} = z'_{299}$ $z_{300} = z'_{300}$ $z_{301} = z'_{301}$ $z_{302} = z'_{302}$ $z_{303} = z'_{303}$ $z_{304} = z'_{304}$ $z_{305} = z'_{305}$ $z_{306} = z'_{306}$ $z_{307} = z'_{307}$ $z_{308} = z'_{308}$ $z_{309} = z'_{309}$ $z_{310} = z'_{310}$ $z_{311} = z'_{311}$ $z_{312} = z'_{312}$ $z_{313} = z'_{313}$ $z_{314} = z'_{314}$ $z_{315} = z'_{315}$ $z_{316} = z'_{316}$ $z_{317} = z'_{317}$ $z_{318} = z'_{318}$ $z_{319} = z'_{319}$ $z_{320} = z'_{320}$ $z_{321} = z'_{321}$ $z_{322} = z'_{322}$ $z_{323} = z'_{323}$ $z_{324} = z'_{324}$ $z_{325} = z'_{325}$ $z_{326} = z'_{326}$ $z_{327} = z'_{327}$ $z_{328} = z'_{328}$ $z_{329} = z'_{329}$ $z_{330} = z'_{330}$ $z_{331} = z'_{331}$ $z_{332} = z'_{332}$ $z_{333} = z'_{333}$ $z_{334} = z'_{334}$ $z_{335} = z'_{335}$ $z_{336} = z'_{336}$ $z_{337} = z'_{337}$ $z_{338} = z'_{338}$ $z_{339} = z'_{339}$ $z_{340} = z'_{340}$ $z_{341} = z'_{341}$ $z_{342} = z'_{342}$ $z_{343} = z'_{343}$ $z_{344} = z'_{344}$ $z_{345} = z'_{345}$ $z_{346} = z'_{346}$ $z_{347} = z'_{347}$ $z_{348} = z'_{348}$ $z_{349} = z'_{349}$ $z_{350} = z'_{350}$ $z_{351} = z'_{351}$ $z_{352} = z'_{352}$ $z_{353} = z'_{353}$ $z_{354} = z'_{354}$ $z_{355} = z'_{355}$ $z_{356} = z'_{356}$ $z_{357} = z'_{357}$ $z_{358} = z'_{358}$ $z_{359} = z'_{359}$ $z_{360} = z'_{360}$ $z_{361} = z'_{361}$ $z_{362} = z'_{362}$ $z_{363} = z'_{363}$ $z_{364} = z'_{364}$ $z_{365} = z'_{365}$ $z_{366} = z'_{366}$ $z_{367} = z'_{367}$ $z_{368} = z'_{368}$ $z_{369} = z'_{369}$ $z_{370} = z'_{370}$ $z_{371} = z'_{371}$ $z_{372} = z'_{372}$ $z_{373} = z'_{373}$ $z_{374} = z'_{374}$ $z_{375} = z'_{375}$ $z_{376} = z'_{376}$ $z_{377} = z'_{377}$ $z_{378} = z'_{378}$ $z_{379} = z'_{379}$ $z_{380} = z'_{380}$ $z_{381} = z'_{381}$ $z_{382} = z'_{382}$ $z_{383} = z'_{383}$ $z_{384} = z'_{384}$ $z_{385} = z'_{385}$ $z_{386} = z'_{386}$ $z_{387} = z'_{387}$ $z_{388} = z'_{388}$ $z_{389} = z'_{389}$ $z_{390} = z'_{390}$ $z_{391} = z'_{391}$ $z_{392} = z'_{392}$ $z_{393} = z'_{393}$ $z_{394} = z'_{394}$ $z_{395} = z'_{395}$ $z_{396} = z'_{396}$ $z_{397} = z'_{397}$ $z_{398} = z'_{398}$ $z_{399} = z'_{399}$ $z_{400} = z'_{400}$ $z_{401} = z'_{401}$ $z_{402} = z'_{402}$ $z_{403} = z'_{403}$ $z_{404} = z'_{404}$ $z_{405} = z'_{405}$ $z_{406} = z'_{406}$ $z_{407} = z'_{407}$ $z_{408} = z'_{408}$ $z_{409} = z'_{409}$ $z_{410} = z'_{410}$ $z_{411} = z'_{411}$ $z_{412} = z'_{412}$ $z_{413} = z'_{413}$ $z_{414} = z'_{414}$ $z_{415} = z'_{415}$ $z_{416} = z'_{416}$ $z_{417} = z'_{417}$ $z_{418} = z'_{418}$ $z_{419} = z'_{419}$ $z_{420} = z'_{420}$ $z_{421} = z'_{421}$ $z_{422} = z'_{422}$ $z_{423} = z'_{423}$ $z_{424} = z'_{424}$ $z_{425} = z'_{425}$ $z_{426} = z'_{426}$ $z_{427} = z'_{427}$ $z_{428} = z'_{428}$ $z_{429} = z'_{429}$ $z_{430} = z'_{430}$ $z_{431} = z'_{431}$ $z_{432} = z'_{432}$ $z_{433} = z'_{433}$ $z_{434} = z'_{434}$ $z_{435} = z'_{435}$ $z_{436} = z'_{436}$ $z_{437} = z'_{437}$ $z_{438} = z'_{438}$ $z_{439} = z'_{439}$ $z_{440} = z'_{440}$ $z_{441} = z'_{441}$ $z_{442} = z'_{442}$ $z_{443} = z'_{443}$ $z_{444} = z'_{444}$ $z_{445} = z'_{445}$ $z_{446} = z'_{446}$ $z_{447} = z'_{447}$ $z_{448} = z'_{448}$ $z_{449} = z'_{449}$ $z_{450} = z'_{450}$ $z_{451} = z'_{451}$ $z_{452} = z'_{452}$ $z_{453} = z'_{453}$ $z_{454} = z'_{454}$ $z_{455} = z'_{455}$ $z_{456} = z'_{456}$ $z_{457} = z'_{457}$ $z_{458} = z'_{458}$ $z_{459} = z'_{459}$ $z_{460} = z'_{460}$ $z_{461} = z'_{461}$ $z_{462} = z'_{462}$ $z_{463} = z'_{463}$ $z_{464} = z'_{464}$ $z_{465} = z'_{465}$ $z_{466} = z'_{466}$ $z_{467} = z'_{467}$ $z_{468} = z'_{468}$ $z_{469} = z'_{469}$ $z_{470} = z'_{470}$ $z_{471} = z'_{471}$ $z_{472} = z'_{472}$ $z_{473} = z'_{473}$ $z_{474} = z'_{474}$ $z_{475} = z'_{475}$ $z_{476} = z'_{476}$ $z_{477} = z'_{477}$ $z_{478} = z'_{478}$ $z_{479} = z'_{479}$ $z_{480} = z'_{480}$ $z_{481} = z'_{481}$ $z_{482} = z'_{482}$ $z_{483} = z'_{483}$ $z_{484} = z'_{484}$ $z_{485} = z'_{485}$ $z_{486} = z'_{486}$ $z_{487} = z'_{487}$ $z_{488} = z'_{488}$ $z_{489} = z'_{489}$ $z_{490} = z'_{490}$ $z_{491} = z'_{491}$ $z_{492} = z'_{492}$ $z_{493} = z'_{493}$ $z_{494} = z'_{494}$ $z_{495} = z'_{495}$ $z_{496} = z'_{496}$ $z_{497} = z'_{497}$ $z_{498} = z'_{498}$ $z_{499} = z'_{499}$ $z_{500} = z'_{500}$ $z_{501} = z'_{501}$ $z_{502} = z'_{502}$ $z_{503} = z'_{503}$ $z_{504} = z'_{504}$ $z_{505} = z'_{505}$ $z_{506} = z'_{506}$ $z_{507} = z'_{507}$ $z_{508} = z'_{508}$ $z_{509} = z'_{509}$ $z_{510} = z'_{510}$ $z_{511} = z'_{511}$ $z_{512} = z'_{512}$ $z_{513} = z'_{513}$ $z_{514} = z'_{514}$ $z_{515} = z'_{515}$ $z_{516} = z'_{516}$ $z_{517} = z'_{517}$ $z_{518} = z'_{518}$ $z_{519} = z'_{519}$ $z_{520} = z'_{520}$ $z_{521} = z'_{521}$ $z_{522} = z'_{522}$ $z_{523} = z'_{523}$ $z_{524} = z'_{524}$ $z_{525} = z'_{525}$ $z_{526} = z'_{526}$ $z_{527} = z'_{527}$ $z_{528} = z'_{528}$ $z_{529} = z'_{529}$ $z_{530} = z'_{530}$ $z_{531} = z'_{531}$ $z_{532} = z'_{532}$ $z_{533} = z'_{533}$ $z_{534} = z'_{534}$ $z_{535} = z'_{535}$ $z_{536} = z'_{536}$ $z_{537} = z'_{537}$ $z_{538} = z'_{538}$ $z_{539} = z'_{539}$ $z_{540} = z'_{540}$ $z_{541} = z'_{541}$ $z_{542} = z'_{542}$ $z_{543} = z'_{543}$ $z_{544} = z'_{544}$ $z_{545} = z'_{545}$ $z_{546} = z'_{546}$ $z_{547} = z'_{547}$ $z_{548} = z'_{548}$ $z_{549} = z'_{549}$ $z_{550} = z'_{550}$ $z_{551} = z'_{551}$ $z_{552} = z'_{552}$ $z_{553} = z'_{553}$ $z_{554} = z'_{554}$ $z_{555} = z'_{555}$ $z_{556} = z'_{556}$ $z_{557} = z'_{557}$ $z_{558} = z'_{558}$ $z_{559} = z'_{559}$ $z_{560} = z'_{560}$ $z_{561} = z'_{561}$ $z_{562} = z'_{562}$ $z_{563} = z'_{563}$ $z_{564} = z'_{564}$ $z_{565} = z'_{565}$ $z_{566} = z'_{566}$ $z_{567} = z'_{567}$ $z_{568} = z'_{568}$ $z_{569} = z'_{569}$ $z_{570} = z'_{570}$ $z_{571} = z'_{571}$ $z_{572} = z'_{572}$ $z_{573} = z'_{573}$ $z_{574} = z'_{574}$ $z_{575} = z'_{575}$ $z_{576} = z'_{576}$ $z_{577} = z'_{577}$ $z_{578} = z'_{578}$ $z_{579} = z'_{579}$ $z_{580} = z'_{580}$ $z_{581} = z'_{581}$ $z_{582} = z'_{582}$ $z_{583} = z'_{583}$ $z_{584} = z'_{584}$ $z_{585} = z'_{585}$ $z_{586} = z'_{586}$ $z_{587} = z'_{587}$ $z_{588} = z'_{588}$ $z_{589} = z'_{589}$ $z_{590} = z'_{590}$ $z_{591} = z'_{591}$ $z_{592} = z'_{592}$ $z_{593} = z'_{593}$ $z_{594} = z'_{594}$ $z_{595} = z'_{595}$ $z_{596} = z'_{596}$ $z_{597} = z'_{597}$ $z_{598} = z'_{598}$

* שפות פורמליות *

הפסד הקדמות:



אם $V_1, V_2, \dots, V_n$ הם $V_1', V_2', \dots, V_n'$ היגדים והנוסחים
 $V_1 V_2 \dots V_n$ ו- $V_1' V_2' \dots V_n'$ ניתנות להשוואה אם $V_1 = V_1', \dots, V_n = V_n'$

משפט: כל היגד נקבע באופן חד-ערכי.

זה משפט מאוד חשוב. זה אומר שכל היגד אפשר לקרוא, לומר, לפרש, בדיוק אחת ויחידה, ולכן אין דו-משמעות.

הוכחה: ההיגד צורתו $V_1 V_2 \dots V_n$ כאשר V סמל ו- n מספר הטקטורות

של V . הפרט אם $V_1 V_2 \dots V_n$ לזה $V_1' V_2' \dots V_n'$ אם

$V_1 V_2 \dots V_n$ לזה $V_1' V_2' \dots V_n'$ וכל פי טענה קודמת $V_1 = V_1', \dots, V_n = V_n'$.

מש"ל (ש)

→ הנני עומק שים: נוצים להראות שכל היגד ניתן לקרוא רק בדיוק אחת. אם V_1 ו- V_1' מסמלים שתי דרכים שונות לקרוא את ההיגד. ברור שלא הסמל V ניתן לקרוא רק כמה שהוא. מורשים אותו. אבל ההיגדים זהים ולכן ההיגד המשותף עליו תהי לזה להיגד המפורק וזו תהי נא משתמשים במשפט הקודם.

טענה: נניח ש- u היגד ו- v סמל המופיע בתוכו u . אם הופעה

של v ב- u בודדת הופעה של היגד ב- u .

היגד קטן V → היגד גדול

הוכחה: נוכח להניח את u בצורה $Z_1 Z_2 \dots Z_k$ כאשר Z סמל עם

k מקטורות ו- $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ היגדים. אם v (הוא Z , סמל, אחרת,

v מופיע בהיגד Z_i $1 \leq i \leq k$, ואז הדבר נובע מהנחת האינדוקציה.

מש"ל (ש)

→ הסבר והשלמות: בעצם דושים פה אינדוקציה על אורך ההיגד u , על

מספר ההיגדים בה. ואנחנו מניחים שהטענה נכונה לכל מספר קטן

יותר מהאורך של u .



היגד

משפט: נניח ש- $v_1, v_2, \dots, v_n$ ו- u סמל ח-אקואלי

1- $v_1, v_2, \dots, v_n$ היגד, ונניח ש- v היגד, אז הופעה של v ב- v_i

$v_1, v_2, \dots, v_n$ או כל $v_1, v_2, \dots, v_n$ או הופעה של v בתוך v_i

מסומן.

הערה: בעצם זה אומר שהיגד לא יוכל להתחלק בין היגדים שונים.

הוכחה: האמת הפותחת של היגד v - אי שיהא u או שיהא בתוך

v_i מסומן. אם היא בתוך v_i אז היא פותחת הופעה של היגד בתוך

v_i (לפי המשפט הקודם).

אם האמת הפותחת של v היא u אז $v = u v_1 v_2 \dots v_n$ (על)

סמך סמנו קודמנו, כיהם ניתנים להשוואה).

היגד w

המקרה בשני היא זשבת בתוך v_i

המפץ ב- v_i ופותר האמת האות. w ו- v ניתנים להשוואה ולכן $v=w$.

ולכן v זשה בתוך v_i .

אם כן

הערה למתקשים: יגיע ברגע שאני אפסיק להתקשט...

A נוסחה. x גשמה שמפץ בסמני אקואלי ב- A .

a שמפץ אם בסמני שבו יש x נתון אותו ב- a , האם נקבע

שוב נוסחה? ובכן, זה תלוי איפה אנחנו נוצרים אפץ את ה- a .

למשל אם יש נוסחה $\exists x B$ ופה נתון את x בש"ע - $\exists$

נקבע שום דבר האינו. $\exists$ ההופעה של x בתוך B קשורה ע"

הכמת בתוך הנוסחה $\exists x B$.

אם הופעה של משתנה בתוך נוסחה איננה קשורה ע"י כמת, אז

היא נקראת הופעה חופשית.

די האינו, שאי אפשר לזהות במקום משתנים שלא מופיעים חופשית.

אז אנחנו נדבר רק על המקרים שבהם המשתנים מופיעים בדירה חופשית.

לדא נצטרך למנות צדדים במשתנים שלא מופיעים חופשית.

$$V = xSS_0 \exists x = SxSS_0$$

$$(\underline{x=2}) \vee ((\exists x)(x+1)=2)$$

לא נוסח כי היא בנויה ע"י העלים של בניין נוסח
ויש בה גם משתנים שאופנים חדשים הם משתנים קשורים עכ"ל

3413

אבל זה משמעות המילה האחרת? קיים x יק $x=0$.

הקיים הטובות לא פועל על דבר קצת. זה יק, אפשר לרשום $\exists x=0$

כלומר קיים x יק $x=0$. אבל זאת בעזרתם...

$$\exists x = \underbrace{xx}$$

312

שנים רבות, אצלם ביהמ"ד מוטות.

אז נשאל יחד את השאלה המקורית: אם מצויים שם עצם במקום משתנה שמופיע תופעה, האם מתקבלת נוסחה?

דוגמה: אם β חזק, α חלש, ונקבל α שלם β שלם.

הוכחה: אם M ו- N זוגות שלמים אזי $\frac{M}{N}$ הוא מספר רציונלי.

පරිච්ඡේද 10

2) אם $b_1, b_2, \dots, b_n$ הם שלמות צמודים f -1 בעקבותיה חלקותיה של S

a_3 or a_n $b_1, b_2, \dots, b_n$

$$C=a \quad \text{sk} \quad b=x \quad p(x)$$

$c=y$ SK $x \neq y$, $b=y$ PK

אם $b_1, b_2, \dots, b_n$ אז x מופיע ב- b_i . לכן הנחה
 האינדוקציה (לשכונות לא באות הנחה) הצבת a במקום x בתוך
 b_1 נותנת שם עצם b'_1 ואז $b_1, b_2, \dots, b_n, c = f(b_1, b_2, \dots, b_n, c)$
 אש"ל (c)

טענה: אם נציב בנוסחה המקום הנכונה חופשיה של משתנה אז
 שם העצם נקבע טוב ונסתה.

הוכחה: נניח מה לה נוסחה

(c) נוסחה אטומית $b_1, \dots, b_n$

(b) $A = \neg b_1, \dots, b_n$

(c) $\forall x B$

(c) $\exists y B$

אם $b_1, \dots, b_n, A = p(b_1, \dots, b_n, x)$ מופיע באיזה b_i . אזי הטענה
 הקודמת בשלבים a ב- b_i נקבל שם עצם b'_i ואז נקבע
 נוסחה אטומית $b_1, \dots, b'_i, \dots, b_n, p(b_1, \dots, b'_i, \dots, b_n)$
 הנשאר מנחה האינדוקציה.

אם $A = \neg B$ אז לשי הנחה האינדוקציה הצבת a במקום x
 בתוך B נותנת נוסחה B' ואז במקום A נקבל $\neg B'$

אם $A = \forall x B$ אז x בתוך B נקבל $\forall x B'$

$\forall x B'$ x

אם $A = \exists y B$ אז נקבל $\exists y B'$

אש"ל (c)

לוגיקה

הצבה:

- יש כמה אינציות להפעה של משתנה בנוסחה:
- 1. הופעה חופשית של משתנה למשל $B = " = x x "$
- 2. הופעה של משתנה הקשורה בכמה $\exists x B$ כאן ה- x ים שבתוך B קשורים בכמה $\exists$.
- 3. הופעה של משתנה הוסמוכה לכמה $\exists x B$ ה- x שלכן $\exists$ B -ה הוא סמוך לכמה. אם נרצה, לאור הופעה קושרת. היא לא לקושרת אלא ה- x ים של B לכמה $\exists$.

* סדרים וקטגוריות:

$$\begin{matrix} x & y \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{matrix} <$$

$$\begin{matrix} \exists x & x & y \\ \textcircled{3} & \textcircled{2} & \textcircled{1} \end{matrix} <$$

הוכחנו עבור הופעה חופשית שלום מצביים שיש במקום המשתנה מתקבלת נוסחה. אפשר גם להוסיף את זה למקרה של הופעה קשורה, אבל אין צורך לעשות זאת כל פעם. לעזור כאן, אם מצביים שיש במקום משתנה סמוך למה לא מתקבל נוסחה, להוסיף אחרי כתיבת ציבורי להפעה משתנה!!

דוגמה: $\exists y = x + y + y$ $(\exists y)(x = y + y + y)$ (זוהי x)

כאן ההופעה של x חופשית (צביה במקום x את y)

$\Rightarrow$ נקבל $\exists y = y + y + y$ קיבלנו נוסחה אבל המשמעות

של המשתנה לא הוגדרה: $(y+1=y+y)(\exists y)$

ואם נציב במקום x את z נקבל $\exists y = z + z + z$

זוהי $(\exists y)(z+1=y+y)$ כאן המשתנה לא נשמתנה האופן

דומה: קיבלנו אותה שהיא במקור אבל עבור z במקום x .

לרוב נהיה מחנ"נים בהצבות כמו בקולמיה ובאחרונה, ש8א
משנה ממש עלינו את המשמעות.

אם ההבדל $\geq$ במקרה הראשון הצבנו במקום x שזו שמעצ
הי y וזה היא במקום y שהי x הלה יצא קשור עכבר.

הבחינה בהצבה נוצרה עקב כך שיש עצם a שהצבנו
במקום x מזה את המשמעות y וההופעה של x בנוסחה
שהי הצבנו נמצאת בתחום הפעולה של כחית הקושר משמעות y .
אנחנו כרגע נסכים שלא נבצע הצבות מסוג זה.

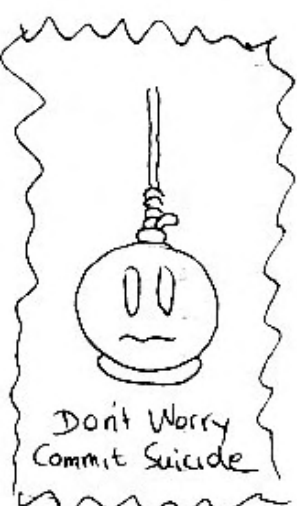
הערה: ההצבה של שם עצם a במקום הופעה חופשית של
משמעות x בנוסחה A נקראת חופשית כאשר a אינו מזה
משמעות y שנמצא בתחום הפעולה של כחית באותו מקום שמפיע x .

What goes around comes around : יש מחברי ספרים שמנעים את
כאב הראש מסוג זה ע"י שימוש במשתנים שונים למקרים השונים
שהצבנו. אדם אחד בהמשך הם נתקלים בדואר ראש מסוג אחר.
המסקנה: כאב ראש נקבל גם אופן, רק צריך לבחור האילו שנה.
אז החלטנו שתמיד נעשה רק הצבות מוצקות.

גדיר $A_x[a]$ כונוסחה שמתקבלת מנוסחה A ע"י הצבת a
בכל ההופעות החופשיות של x ואין משתמשים בה רק בתנאי
שכל ההופעות האלה מתבצעת הצבה אחת.
אם מצבים מספר שמה עצם (נשים)

$$A_{x_1, x_2, \dots, x_n} [a_1, \dots, a_n]$$

$$A[a_1, \dots, a_n] \quad \text{אם מובן הקונטקסט}$$



(B)

אנשים... היבון לראש חשב מאד :

משפחתנו את החלק הזה של החומר נצבור לשפה של בני אדם :

מקום $= \infty$ (רשום) $(0=0)$

מקום $< ab$ (רשום) $(a < b)$

מקום $f(a_1, \dots, a_n)$ (רשום) $f a_1 \dots a_n$

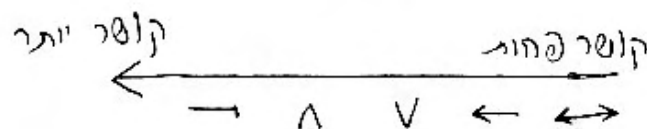
מקום $\forall AB$ (רשום) $A \vee B$

וכאן נפטיק עם המניחיסטיות ונשתמש בכל הקצרים וכו'

שהפעם קדם עי' $(\vee, \rightarrow)$: $\rightarrow, \wedge$, וכו'.

המאמר הוא שלם ננסה להוריד כמה שיותר טאבים ונקרא (אסתאור)

לפי הסדר הבא



משל, איך (קראי את $A \vee B \wedge C$?

$\wedge$ קושר יותר מ- $\vee$ $\Leftarrow$ זה כמו שמים אותה - $\wedge$ בטורים

$$A \vee (B \wedge C)$$

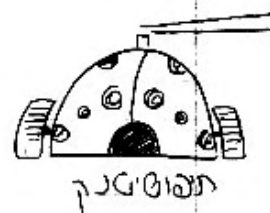
זה כמו סדר פעולות חשבון רק שקטרים.

אם יש מספר פעמים להורג אותה אחרי הנשיה זה כמו

טאבים שהוצבים מאין, ללא

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 = (A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee A_4)))$$

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 = (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow A_4)))$$





נניח שקבוצתו של L .

מבנה A כולל:

(א) קבוצה $|A|$ - הקבוצה של המבנה (זה מסומן בדרך כלל בעזרת $|A|$)

(ב) לכל פונקציה f ח-מקומית שבשפה L (כלומר הפעולה

$|A|^n \rightarrow |A|$ (כאשר $n=0$ קבוצה $f \in |A|$)

f פירושה של f במבנה A .

(ג) p חס ח-מקומי שנפרט אותו באופן הבא: $p_A: |A|^n \rightarrow \{T, F\}$

כלומר הוא פונקציה אחת ח-מקומית (אם $n=0$ אז p_A קבוצה -

או אמת או שקר - $p_A \in \{T, F\}$).

(ד) סאבוריטציה רק אפילו חלק מהמבנה או לא. אנוני (חידוש) L ע"י

הוספת קבוצים חדשים. לכל $a \in |A|$ נאפייר פונקציה ח-מקומית i_a

שנקראת השם של a ומקיימת $(i_a)_A = a$. כאן $a \neq b$ $i_a \neq i_b$.

את השפה המורחבת נסמן ב- $L(A)$.

במובן סאבוריטציה בסט לא $\emptyset$, אבל סאבוריטציה ב- $\emptyset$.

איך אנוני מפרשים שמות עצם ונוסחאות ב- $L(A)$?

שמות עצם

(א) קבוצה $c \in |A|$ היא שם

(ב) f פונקציה ח-מקומית. $b_1, \dots, b_n$ שם סאבוריטציה. אז

השם $f b_1 \dots b_n$ מתפרש כ- $f b_1 \dots b_n \in |A|$ $(f b_1 \dots b_n)_A = f_A b_{1A} \dots b_{nA}$

נוסחאות

(א) p חס ח-מקומי. $b_1, \dots, b_n$ שמות עצם של משתנים. אז

הנוסחה האמת $p b_1 \dots b_n$ מתפרשת $(p b_1 \dots b_n)_A = p_A b_{1A} \dots b_{nA} \in \{T, F\}$

אם שמות עצם $b_1, \dots, b_n$ מופיעים משתנים (אז $(p b_1 \dots b_n)_A = T$)

אם עבור כל הצבה של שמות האיברים i_a במקום המשתנים מקבלים יחס

אמת.

$$(\neg A)_{\mathcal{A}} = \neg(A)_{\mathcal{A}} \quad (b)$$

$$(VAB)_{\mathcal{A}} = VA_{\mathcal{A}} B_{\mathcal{A}} \quad (c)$$

$$\exists x B \quad \text{מה נס הכסף כמות?} \quad (3)$$

$$(\exists x B)_{\mathcal{A}} = T \quad \text{כאשר ק"מ } a \in |A| \text{ כך ש } (B_x[i_a])_{\mathcal{A}} = T$$

דוגמה

האקסיומה של פאנו. (סתם) האקסיומה הסטנדרטית: $\mathcal{N}$:

$$|\mathcal{N}| = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$0_{\mathcal{N}} = 0$$

$$n \in |\mathcal{N}|, i_n \in L(\mathcal{N}) \quad (i_n)_{\mathcal{N}} = n$$

$$S_{\mathcal{N}}: |\mathcal{N}| \rightarrow |\mathcal{N}|, \quad S_{\mathcal{N}}(n) = n+1$$

$$+_{\mathcal{N}}: |\mathcal{N}|^2 \rightarrow |\mathcal{N}| \quad (n, m) \mapsto n+m$$

$$\cdot_{\mathcal{N}}: |\mathcal{N}|^2 \rightarrow |\mathcal{N}| \quad (n, m) \mapsto n \cdot m$$

$$=_{\mathcal{N}}: |\mathcal{N}|^2 \rightarrow \{T, F\} \quad =_{\mathcal{N}}(m, n) = \begin{cases} T & m=n \\ F & m \neq n \end{cases}$$

$$<_{\mathcal{N}}: |\mathcal{N}|^2 \rightarrow \{T, F\} \quad <_{\mathcal{N}}(m, n) = \begin{cases} T & m < n \\ F & m \geq n \end{cases}$$

זה הפרש הסטנדרט של האקסיומה של פאנו.

מה שאנחנו עושים פה הוא שטוקחים (נוסחאות) ומכילים (ע"י) באקסיומות.

ואז מופשים אותה שבו הן מתפרשות כרעיונות. זה מה שנקרא

מציאת אובייקט של האקסיומות.

אם השאלה המשמעותית היא האם בהצגת אקסיומות קיים לפחות אובייקט?

(5)

24. 11. 05
למיקה

ע

שפות פורמליות ומבניות

תהי L שפה מבנה $\mathcal{A}$ כולל בתוכו- קבוצה $|A|$ - פונקציות n -מקומיות $f_{\mathcal{A}}: |A|^n \rightarrow |A|$ - קשרים n -מקומיים $P_{\mathcal{A}}: |A|^n \rightarrow \{T, F\}$ - $\mathcal{A} =$ מתפרש בשונין של איברים בתוך $|A|$

אחרי שהתפרשו הפונקציות והקשרים אנו חוזרים לפרש את שאר
 חלקי הנוסחאות.

שאר חלקי נוסח הפרש הם אין בהם משתנים ונוסחאות ראשיות
 (פרש ראשית עלא משתנים חופשיים ולעבור רק נרחים את הפרש
 הנוסחאות בלב).

אם לפני שאנו פרשים את $\mathcal{A}$, אנו חוזרים את השפה הפורמלית.
 על $|A|$ $a \in |A|$ גורמים i_a סמל של קבוצה, למשל, סמל של
 פונקציה 0-מקומית ונקרא לה השם של a .

אם אנו חוזרים מקבוצה שפה מורחבת $\mathcal{A}'$ הנוסחאות שאר i_a ונסמן
 אתה $L(\mathcal{A})$.

חשוב ישר ב $L(\mathcal{A})$ יותר אפשרויות להגדיר שאר חלקים
 ב L לחתום משתנים והפסקו עליהם פונקציות. ב $L(\mathcal{A})$ יש אפשרות
 נוספת של קבוצים אם יש יותר אפשרויות.

יהי $\mathcal{B}$ שפה חלק ב $L(\mathcal{A})$ עלא משתנים בפנים הקבוצות
 השתמשו בסמל $\mathcal{A}$ לפרש של $\mathcal{B}$ ב $\mathcal{A}$, אז מספר משתנים
 ב $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ אז זה את מה שאנו חוזרים נעשה. פירוט שאר חלקים:

$$a \in |A| \quad \mathcal{A}(i_a) = a$$

$$\mathcal{A}(f(b_1, \dots, b_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(b_1), \dots, \mathcal{A}(b_n))$$

מקרה ב' (כלל) המקרה של פונקציה 0-מקומית. במקרה שני קבוצים
 יחדים להתפרש באותו אופן ולא על ציבוק להפאוק.

נוסחאות אסמיות:

p יחס ח-מקומי. SK מפרשים

$$A(p b_1 \dots b_n) = P_A(A(b_1), \dots, A(b_n)) \in \{T, F\}$$

נוסחאות באופן כללי:

נניח $A(B)$ נוסחה כאשר B היא משתנים חופשיים

$$A(\neg B) = \neg(A(B))$$

$$A(B \vee C) = A(B) \vee A(C)$$

B נוסחה שאין בה משתנים חופשיים ששונים ל- x .

$$A(B[x i_a]) = T \text{ אם } a \in |A| \text{ קיים אבר } a \text{ כזה ש-} T = A(\exists x B)$$

אם נוסחה A מחזיקה משתנים חופשיים $x_1, \dots, x_n$ (אז A היא T)

$$A(A x_1, \dots, x_n [i_{a_1}, \dots, i_{a_n}]) = T : a_1, \dots, a_n \in |A|$$

אנחנו מפרשים נוסחה עם משתנים חופשיים באופן קטנוני את B

המשתנים החופשיים הם כחיתים של נעלם. אם יש אפילו בחירה אחת

של אברים שלא עובדים SC הנוסחה עם המשתנים החופשיים

תתפרש שקרית.

עד כאן נתנו פירוש לנוסחאות. אחז ציף לבדוק שקיבלנו את

מה שביצענו, סוגר של הקוראים, שעשנו קודם, להשלם ערעור,

קונ'נקציה מידה, מקבלים את אותו הפירוש במהרה שלנו.

28.11.05
logica

טענה: נניח ש- B נוסחה שאין בה משתנים חופשיים. אז
אם $A = A(-\exists x \neg B)$ אם ורק אם לכל איברי $a \in |A|$ מתקיים
 $A(B_x[a]) = \text{אמת}$

הוכחה: הטענה הפה אומרת שבכמה פהגלן אכן פיהם פה שמתבקש. שיהיו
דאטונים משפטי אמתה שאנחנו מציפים.
הוכחה: $A(-\exists x \neg B) = \neg(A(\exists x \neg B))$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \text{אמת} - A(-\exists x \neg B) \Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow A(\exists x \neg B) = \text{שקר} \\ & \Leftrightarrow \text{דאטונים} \Leftrightarrow \text{אמת} \Leftrightarrow A(-B_x[a]) = \text{אמת} \Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow A(B_x[a]) = \text{שקר} \\ & \Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow \neg A(B_x[a]) = \text{אמת} \Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow \neg A(B_x[a]) = \text{אמת} \Leftrightarrow \text{שקר} \\ & \Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow \neg A(B_x[a]) = \text{אמת} \Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow \neg A(B_x[a]) = \text{אמת} \Leftrightarrow \text{שקר} \end{aligned}$$

דאט נסיכה שבאמת ינענו עלהור את $\forall x B$ אם $\neg \exists x \neg B$
חשיו חשה אתו דדבר עליומם ואיו.

טענה: בלי- C נוסחאות עם משתנים חופשיים. אז $A(-\forall B \neg C) = \text{אמת}$
אם ורק אם $A(C) = \text{אמת}$ ו $A(B) = \text{אמת}$
הוכחה: $A(-\forall B \neg C) = \text{אמת} \Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow A(\forall B \neg C) = \text{שקר}$
 $\Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow A(B) = \text{שקר} \Leftrightarrow \text{אמת} \Leftrightarrow A(C) = \text{אמת}$
 $\Leftrightarrow \text{שקר} \Leftrightarrow A(C) = \text{אמת}$



טענה: אמת $A(B_1 \vee \dots \vee B_n)$ אם ורק אם קיים $1 \leq i \leq n$ כך
ש $A(B_i) = \text{אמת}$
הוכחה: תחילת (קד) נכחו ש-
 $B_1 \vee \dots \vee B_n = B_1 \vee (B_2 \vee (\dots))$

טענה: אמת $A(B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$ אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq n$ $A(B_i) = \text{אמת}$
הוכחה: ברור.

טענה: נניח ש- B שם שאין בו משתנים ונניח ש- C שם שם שם
הא משתנים חופשיים, אז $A(B) = a \in |A|$ אם $A(C_x[a]) = A(C_x[b])$
הוכחה: הטענה מראה עלן איה מתפרשת ההצבה של שם

$$C = +x \text{ } 550x \text{ } 55555550$$

פונקציה

$$b = 555550$$

מסתמים על האותיות של פאנו ואפרישים בסבבים

$$N(b) = 5 \Rightarrow C_x(b) = +x \text{ } 550 \text{ } 55555550 \text{ } 55555550$$

$$C_x(i_5) = +x \text{ } 550 \text{ } i_5 \text{ } 55555550$$

$$N(C_x(b)) = 2 \cdot 5 + 7 = 17 \in |N|$$

$$N(C_x(i_5)) = 2 \cdot N(i_5) + 7 = 2 \cdot 5 + 7 = 17 \in |N|$$

הנחת הסתנה: במקרה של C וקנייה של C .

$$\Leftarrow C_x[b] = b \quad \text{אם } C = x \quad \text{אם } C = x$$

$$A(C_x[b]) = A(b) = a = A(i_a) = A(C_x[i_a])$$

$$C_x[b] = f(C_x[b] \dots C_{n_x}[b]) \quad \text{אם } C = f(C_1 \dots C_n) \quad \text{אם } C = f(C_1 \dots C_n)$$

$$C_x[i_a] = f(C_x[i_a] \dots C_{n_x}[i_a])$$

$$A(C_x[b]) = A(f(C_x[b] \dots C_{n_x}[b])) = f(A(C_x[b]), \dots, A(C_{n_x}[b])) =$$

$$= f(A(C_x[i_a]), \dots, A(C_{n_x}[i_a])) =$$

$$= A(f(C_x[i_a] \dots C_{n_x}[i_a])) = A(C_x[i_a])$$

לפי הנחה
ההנחה של סבבים אחרים.
אבל היא אומרת
שהסבבים נכונים
על סבבים אחרים.
כלומר סבבים שלמה
בנוי C.

לפי: נניח ש C נוסחה שאין בה משתנים חופשיים, כלומר, x ו b הם

שאין בו משתנים. אם $A(b) = a \in (A)$ אז $A(C_x[b]) = A(C_x[i_a])$.

הערה: ההנחה בין סבבים זו עוסקת בקודמת היא שאין לה (וסתה) ויש לה שם, אבל כמובן במקרה זה משנה שאין משתנים ג-ב אלא ידוע שזה בסדר. זה מאידך דומה.

הוכחה: אם $C = p(C_1 \dots C_n)$ אז $C_x[b] = p(C_x[b] \dots C_{n_x}[b])$ ו $C_x[i_a] = p(C_x[i_a] \dots C_{n_x}[i_a])$

$$A(C_x[b]) = p(A(C_x[b]), \dots, A(C_{n_x}[b])) =$$

הנחה (פרט):

$$p(A(C_x[i_a]), \dots, A(C_{n_x}[i_a])) = A(C_x[i_a])$$

אנחנו נניח שההנחה נכונה לכל סבבים שלמה בנוי C.

$$C_x[b] = \neg(D_x[b]) \quad \text{אם } C = \neg D \quad \text{אם } C_x[i_a] = \neg(D_x[i_a])$$

$$A(C_x[b]) = \neg(A(D_x[b])) = \neg(A(D_x[i_a])) = A(\neg D_x[i_a]) = A(C_x[i_a])$$

$$C = VDE \quad \text{אם } C_x[b] = V D_x[b] E_x[b] \quad \text{אם } C_x[i_a] = V D_x[i_a] E_x[i_a]$$

בשורה הקודם נמצאנו לעצמנו את ההוכחה כי $\mathcal{L} \vdash \exists x \phi(x)$
אם נחזיר על זה קצת.

ב שלם עצם $a \in |A|$ משתנים $\mathcal{A}(b) = a \in |A|$

C נוסחה $\mathcal{A}$ משתנים חופשיים, a, b, x . $\mathcal{L}$ הוא $\mathcal{L}$ חופשי
ש- x יהיה שלם אבל הוא יותר $\mathcal{L}$ חופשי.

$$\mathcal{A}(C_x[a]) = \mathcal{A}(C_x[b]) \quad \text{עצמה:}$$

אם $b \neq a$ הנה שלם $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים

הקטע כאן הוא של a $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים

$a \neq b$. $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים
הוכחה:

$$\left\{ \begin{array}{l} (א) \text{ אם הנוסחה אטומית} \\ (ב) \text{ אם } C = \neg D \\ (ג) \text{ אם } C = \exists y D \end{array} \right. \quad \text{עצמו בשורה הקודם}$$

(ג) אם $C = \exists y D$ אם $x = y$ אז $C = D$ אין חופשיים

חופשיים של x ואז $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים

ומאותה סיבה בפיוק $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים

מהחזרה מילולית הוודאי שלם $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים

נניח של $y \neq x$ $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים

$\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים $\mathcal{A}$ חופשיים $\mathcal{L}$ חופשיים

ההוכחה נקראת:

$$\mathcal{A}(C_x[b]) = \text{אמת} \iff \mathcal{A}(\exists y D_x[b]) = \text{אמת} \iff$$

קיים $a' \in |A|$ כך של $\mathcal{A}(D_{xy}[b, a']) = \text{אמת}$

(הערה: הוכחנו $\mathcal{A}(\exists x B) = \text{אמת} \iff \mathcal{A}(B_x[a]) = \text{אמת}$ $a \in |A|$ קיים $a \in |A|$ כך של $\mathcal{A}(B_x[a]) = \text{אמת}$)

$$\mathcal{A}(D_{xy}[a, a']) = \mathcal{A}(D_{xy}[b, a']) \quad \text{ההוכחה}$$

$$\mathcal{A}(C_x[a]) = \text{אמת} \iff \mathcal{A}(\exists y D_x[a]) = \text{אמת} \iff$$

קיים הפיוק: $\mathcal{A}(\exists y D_x[a]) = \text{אמת} \Rightarrow \exists a'' \in |A| \cdot \mathcal{A}(D_{xy}[a, a']) =$

$$= \mathcal{A}(D_{xy}[b, a']) = \text{אמת}$$

האם יש נוסחאות שתמיד תתפרשנה בנוסחאות איתיות,
 ג'י.קש דמנה שבהן מפרשים אותן?
 אלה הן אקסיומות לוגיות וכן נכונות תמיד!

אקסיומות לוגיות

(א) Excluded Middle לה נקרא $A \vee (\neg A)$ A נוסחה

Tertium non datur

השליש הנמוך

ТРЕТЬЕ НЕ ДАНО

אקסיומת הכלכלה $A \rightarrow [b] \rightarrow \exists x A$

הא לאבסור כנגד אם גסור שיהיו ב. ב מלתיאיים
 תופשים, אז עולם הביטחון (ח'סלכק הדבר ידון לדיון
 שבעתיד נחלים את זה.

$x = x$ (ב)

$(x_1 = y_1) \rightarrow (x_2 = y_2) \rightarrow \dots \rightarrow (x_n = y_n) \rightarrow (f x_1 \dots x_n = f y_1 \dots y_n)$

$(x_1 = y_1) \rightarrow (x_2 = y_2) \rightarrow \dots \rightarrow (x_n = y_n) \rightarrow (p x_1 \dots x_n \leftrightarrow p y_1 \dots y_n)$ (ג)

* היה אפשר לפרש את זה עם סימן אינסוף. זה בדיוק
 אותו הדבר.

18) 5.12.05
Logica

אקסיומות וכללי ה'טק

יש נוסטואר שכן תמיד נכונה, על משנה באוצר מבנה אפרימי
איתן:

$$A \vee (\neg A) \quad \text{כל (נוסחה) } A \quad \text{C}$$

$$A \times [a] \rightarrow \exists x A \quad \text{C}$$

$$x = x \quad \text{C}$$

$$x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n) \quad \text{C}$$

$$x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow p(x_1, \dots, x_n) \rightarrow p(y_1, \dots, y_n)$$

כל פונקציה f ו- n מקומות, וכל p ו- n מקומות:

כל אקסיומות לא יור, הן נכונות בכל מבנה:

$$\mathcal{A}(B \vee \neg B) = \mathcal{A}(B) \vee \mathcal{A}(\neg B) = \quad \text{C}$$

$$* \quad = \mathcal{A}(B) \vee \neg \mathcal{A}(B) = \text{אמת}$$

$$\text{נניח בהוכחה השלימה } B \times [c] \rightarrow \exists x B \text{ כל מתקיימת במבנה } A. \quad \text{C}$$

לא קיימת הצבה שמתאימה לכל המקומות המשמשים

$$\text{התופשים רק שהנוסחה } B' \times [c] \rightarrow \exists x B' \text{ כל מתקיימת ב- } \mathcal{A}.$$

(B' - דקדקו את B המשמשים של B מלבד x והצבנו

בהם שמו של איברים, ככה נשאר B שיש בו רק משמשים חדשים x .)

$$a \in |\mathcal{A}| \text{ כל } \Leftrightarrow \mathcal{A}(\exists x B') = \text{שקר} \Leftrightarrow \mathcal{A}(B' \times [c']) = \text{שקר}$$

$$\text{שקר} = \mathcal{A}(B' \times [i_a]) \text{ . (אכן) } a = \mathcal{A}(c') \in |\mathcal{A}| \text{ דבר כל המשנה}$$

$$\text{הקדמנו } \mathcal{A}(B' \times [c']) = \mathcal{A}(B' \times [i_a]) = \text{שקר} \text{ סתירה!}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(B' \times [c] \rightarrow \exists x B') = \text{אמת} \Leftrightarrow \mathcal{A}(B \times [c] \rightarrow \exists x B) = \text{אמת}$$

* קריטריון ל'נא' זה נכון אם B אין משמשים חדשים.

אם יש משמשים חדשים נצב ככה שיש באופן שרירותי את נקודת

שלה נכון. אז אם הנוסחה נכונה לכל הצבה היא נכונה באופן כללי. 

© יהי $a \in |A|$ ונמא $ia = ia$ זה נכון לכל a

$$\mathcal{A}(ia = ia) = \text{אמת} \Leftrightarrow a = \mathcal{A}(ia) = \mathcal{A}(ia) = a$$

$$x = x \Leftrightarrow a \in |A| \text{ לכל } a = a \Leftrightarrow$$

© יהיו $a_j, b_j \in |A|$ ששומרים $i a_j = i b_j$

$$ia_1 = ib_1 \rightarrow ia_2 = ib_2 \rightarrow \dots \rightarrow f(ia_1, ia_2, \dots, ia_n) = f(ib_1, ib_2, \dots, ib_n)$$

נפרט את זה כ. $\mathcal{A}$: ברור שזה נכון בכל $\mathcal{A}$

$$(a_1 = b_1 \rightarrow a_2 = b_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n = b_n \rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = f(b_1, \dots, b_n)) = \text{אמת}$$

ואמתו אופן דבור היחס

$$(a_1 = b_1 \rightarrow a_2 = b_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n = b_n \rightarrow p(a_1, \dots, a_n) \rightarrow p(b_1, \dots, b_n)) = \text{אמת}$$

אם בוכחנו של הנוסחאות האלה מתקנות כל אחת מהן.

כשלי הישק

© $A \cdot n$ נובע BVA דרחה

© $A \cdot n$ AVA נובע A $3M3$

© $A \cdot n$ $AV(B \vee C)$ נובע $(A \vee B) \vee C$ אטוריטי

© $A \cdot n$ $A \vee B$ ו $(A \vee C) \vee B$ נובע $B \vee C$ חתך

© אם x אינו חופשי ב- B אז $A \rightarrow B$ נובע $\exists x A \rightarrow B$ (כנסת)

אנחנו מתארים כחץ את מה שנקרא תחשיב היחסים.

יש דרכי דרכים שונות לכתוב את האקסיומות הפורמליות ואת

כלים ההיסק. אנחנו מתכוונים שכתוב פורמלי וזה לא

שעושים בלתי פורמלי.

(19)

תפי' L של A הכוללת של אקסיומות L .
 M האנשים אשר מקיימים את האקסיומות A .
 T קבוצת הנוסחאות הנכונה של L אשר מתקיימות בכל
מבנה M . ברור ש $T \supseteq A$
 S קבוצת הנוסחאות שאפשר להסיק מ- A וכן
האקסיומות הוואריאנט באמצעות כללי הדיסק.
אנחנו נוכיח $T \supseteq A$
 $\forall \phi \in S$

למשפט $T = S$ אמרנו לא נוכיח את זה בצעד.
ההשעיה של זה הוא שבכל מבנה שבו מתקיימות אקסיומות
 A ניתן להסיק מבין S כללי הדיסק את T .

סיכום ביניים:

מבנים	רשימה
סמנטי	סמנטי
M	$T = S, A$
	$\downarrow$
	משפט השלמות של תחשיב הרצפים

(11)

לנויה ערעור את כללי הדיסק:

(1) $\mathcal{A}(B \vee A) = \text{אמת} \leftarrow \mathcal{A}(A) = \text{אמת}$

A' תוצאה של הרצפה ב- A של שניות איננים במקום אמתים
הפשיים. דוג' B' .

$\mathcal{A}(B' \vee A') : \mathcal{A}(B') \vee \mathcal{A}(A') = \text{אמת} \Leftarrow \mathcal{A}(A') = \text{אמת}$

(2) $\mathcal{A}(A) = \text{אמת} \Leftarrow \mathcal{A}(A \vee A) = \text{אמת}$ כאן $\mathcal{A}(A) = \text{אמת}$

$\mathcal{A}(A) = \text{אמת} \Leftarrow \mathcal{A}(A') = \text{אמת} \Leftarrow \mathcal{A}(A' \vee A') = \text{אמת}$

דוג' (3)

(3) ג'ון ל $\neg A(A \vee C) = \text{אמת}$, $\neg A(A \vee B) = \text{אמת}$
 דבר $\neg A(A' \vee B')$ ו $\neg A(\neg A' \vee C')$ הם הזכר של
 שמו איורים במקום משתנים חופשיים.

$\neg A(A') \vee \neg A(B') = \text{אמת}$ וכן $\neg A(C) = \text{אמת}$ ו $\neg A(A')$
 אם $\neg A(A') = \text{אמת}$ אז שקר $\neg A(A')$ וכן $\neg A(C) = \text{אמת}$
 וכן $\neg A(B' \vee C') = \neg A(B') \vee \neg A(C') = \text{אמת}$

אם שקר $\neg A(A')$ אז $\neg A(B')$ אמת ונרש $\neg A(B' \vee C') = \neg A(B') \vee \neg A(C')$
 $\neg A(C')$

(6) נניח בדבר השלישי שקיימת הזכרת שמו האחרים

במקום המשתנים החופשיים רק ל $(\exists x A') \rightarrow B'$

כלומר קיימת ב A נאמר $\neg A(\exists x A') = \text{אמת}$ ו

שקר $A(B) = \text{אמת}$. כלומר קיים $a \in |A|$ רק ש $\neg A(A_x[i_a]) = \text{אמת}$

אם נציב בנוסחה $A' \rightarrow B'$ את a במקום x

(נקב) נוסחה $B' \rightarrow A_x[i_a]$ (כי ב B אין x חפשי)

$\neg A(A_x[i_a] \rightarrow B') = \text{שקר}$ $\Leftarrow \neg A(B)$

אם נוסחה זו מרוקבת מנוסחה $A \rightarrow B$ הזכרת

שמו אכזרי במקום משתנים חופשיים.

זאת סתירה שהנחה כי $\neg A(A \rightarrow B) = \text{אמת}$

סוף (7)

(20) 8.12.55
עזריה

המבחן הסופי סיימנו להעביר את הנושא הפורמלי

הענינו - שפה פורמלית

- אקסיומות לוגיות רק צריך לכתוב משהו. אמרנו ש $\neg(A \vee B)$ היא
אקסיומה. נספר מחדש $\neg(A \vee B)$ וסא, זה לא אותו הדבר!
עוד לא הוכחנו שאין היא פעולה קומפטיבית.

זה גם לא מאט כרימאט. וצגת: $\neg A = B \Leftrightarrow A \cdot B$
 $\Leftrightarrow (\neg B) \vee A$ וזה אותו הדבר אבל זה לא כן.
כי זה מטבח על רק $\neg A = \neg(A \cdot B)$ אבל עוד לא הוכחנו
ש $\neg A = A \cdot \neg A$.

- אקסיומות אחרות אלה אקסיומות של אמת קבוצה
וסוגיות של נוסחאות ואמתות מעניינים. הצגת מה המכנים שלהם
האקסיומות האלה מתקיימות (כמו אקסיומות פסגו) יתנו עזרה
שלאן מכנים האלה זה משנה קצת את המשמעות הכוללת אקסיומה
אלה לא דברים שאין עליהם עוררין אלא נוסחאות שאנחנו רוצים
לדעת את הן נכונות.

- כללי הטיק: (א) כלל הרכבה: $A \cdot B$ נובע $B \vee A$ *

(ב) כלל צמצום: $A \cdot A$ נובע A

(ג) כלל אסוציאטיביות: $A \vee (B \vee C)$ נובע $(A \vee B) \vee C$

(ד) חתך: $A \vee B$ ו $\neg A$ נובע B

(ה) הכנסת $\exists$ - $A \rightarrow B$ נובע $\exists x A \rightarrow B$ כאשר x לא מופיע ב B .

* אם כן חשבה להבין שזה $B \vee A$ ו $\neg A$ נובע B (זה לא)

הוכחנו קומפטיביות.

הערה (חשובה): הסימון $\vdash A$ פירושו שניתן להסיק את הנוסחה

A מתוך האקסיומות הלוגיות עם כללי הטיק.

$\vdash A$ - ניתן להסיק את הנוסחה A מתוך האקסיומות של תיאוריה T .

* זה סימן מאוד חשוב שזה נמצא ספר המתיק שזה אפס בו הסימן הזה

נחשב: ספר שמופיע בו הסימן הזה הוא ספר המתיק.

תיאור של $\mathcal{A}$ האקסומות שקבענו בשפה - $\mathcal{L}$. זהו $\mathcal{L}$ -
 אם היא אקסומה האחרונה. כללי ההסקה הם תפריט קבוע - הם
 תמיד נכונים בכל שפה בכל מבנה. אבל מה שלד לא יהיה לאותו
 לוגיקים פה. היא אקסומה האחרונה לה לכל מה שבא לנו באות
 (למשל - אותן מוספים את זה עצמאית. $\mathcal{T}$ היא תיאוריה פיומית -
 מסדר ראשון (אין לי מושג מה זה אומר אבל נובע מזה שיש
 תיאוריה של מסדר ראשון).

$\mathcal{T}$ תיאוריה האם ניתן להסיק ב- $\mathcal{T}$ את הקונסטה $A \wedge (A \rightarrow B)$?
 לא זה אף פעם לא נכון! נפרט את זה. מילה מבנה $\mathcal{A}$.
 ונציג ב- $\mathcal{A}$ את כל המשחקים אסטרטגים $A' \wedge A'$ -
 וזהו אפשר להשתמש בהם באותו אופן של פעם לא
 נכון. $\Leftarrow A \wedge (A \rightarrow B)$ לא יכלה להיות נכון.

לוגיקה

משפט הטאוטולוגיה (פרק 3 בספר)



צברנו על אף פורמליזם - שפה ואקסיומות שונות. (מה שקטאנו לו תאוריה)
 תפי' ד' אף פורמליזם הוחננו שאם אפשר להפסיק נוסחה
 ממש אקסיומה אז היא תהיה נכונה בכל זמנה שלוק"מ
 אף האקסיומות האלה גם ההפך הוא נכון. אם (נוסחה
 נכונה בכל זמנה שלוק"מ אקסיומה מוסיומה אז
 אפשר להפסיק אף הנוסחה הזאת מהאקסיומות.

הזכרה נוסחאות אטומיות ונוסחאות $\exists$ ביתה וקראו נוסחאות
אולגנריות. זה מניח זמני לזכור הביון.

מה שמיא כמעט כונה לעשות, נניח להאזעוהו אופן יחסני, על
 הנוסחאות האולגנריות עקב זאת או שקר $V(A)$ הם שום
 התחשבות במבנה של הנוסחה, המשמעות שלה. זו סתם הגדרה
 שרירותית. הם קשר למציאות. במידע שנוסחאות האולגנריות
 קיבלו ערכים - אמת או שקר וניתן להרחיב את זה על
 הנוסחאות:

$$V(A \vee B) = V(A) \vee V(B)$$

$$V(\neg A) = \neg V(A)$$

הזכרה נניח ש $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ נוסחאות ונניח שלכל הערכה V שלוקחה
 אמת $V(A_1) = \dots, V(A_n) =$ אמת, אז גם $V(B) =$ אמת. במקרה
 זה קוראים ל-B טאטולוגיה של $A_1, \dots, A_n$.

למשל
$$\left. \begin{array}{l} A_1 = C_1 \\ A_2 = C_1 \rightarrow C_2 \\ B = C_2 \end{array} \right\}$$

 ואז ברור ש-B היא טאטולוגיה של A_1, A_2 .

הזכרה B וקראו טאטולוגיה אם היא מקבלת עקב אמת עבור
 כל הערכה V .

הצבה: B היא מילה טאוטולוגית של $A_1, \dots, A_n$
אם ורק אם $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ טאוטולוגיה
אין מילה ברושלה ברה.

הבהרה: V - (תנו זכרים רק לנוסחאות אלמנטריות.
הנוסחה B שאנחנו מציבים עליה פה היא לא אלמנטרית.
ההצבה שלנו V לא דיוקא לתייחסת למשמעות הדברים בעולם
האמיתי. נוסחה אלמנטרית בעולם לא יכולה להיות טאוטולוגיה
כי אנחנו יכולים להצמיד לה איזה זיק שנקבע.

נטען שיש אלגוריתם שמאפשר לקבוע אם נוסחה
אם היא טאוטולוגיה או לא.

טענה: לכל נוסחה A קיים תהליך סופי אשר מאפשר לקבוע האם
A טאוטולוגיה או לא.

הוכחה: בשלב הראשון נתבונן בנוסחאות ארציות
 $A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

כאשר B היא נוסחה אלמנטרית או שלילה של נוסחה
אלמנטרית. במקרה כה, אם קיימים ז'א' רק ש -



$A_i = \neg A_j$ אז בנוסחה הנל היא טאוטולוגיה. אחרת

היא לא טאוטולוגיה. אם A_i אלמנטרית נעזר: שקר $V(A_i)$

אם $A_i = B_j$ נעזר B_j אלמנטרית נעזר אמר $V(B_j)$ ואם

שקר $V(A_i) =$ אז גם באי"ש של A_i הוא נשקר

ולכן A לא יכולה להיות טאוטולוגיה.

אם לא כל A_i אלמנטריות או שלילה של אלמנטריות אז

A_i יכולה להיות אחת מהאופציות הבאות: $A_i = B \vee C$

$$A_i = B \vee C$$

$$A_i = \neg B$$

$$A_i = \neg(B \vee C)$$

(22)

המקרה $A_i = B \vee C$ נסתב A

$$A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee B \vee C \vee \dots \vee A_n$$

$$l(x) = \text{אורך הנוסחה } x \text{ כ-1}$$

$$l(A_i) = l(B) + 1 + l(C)$$

הוכחה: אנחנו עושים אינדוקציה על $\sum l(A_i)$ -
בזמן שאם סופרים את סימני האיחוד.

אם A_i המקור A_i הזכנו $B \vee C$ האורך יהיה

ב-1. $\Leftarrow$ אפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה

ואפשר לזרז אם לא טאטואיה או לא.

$$l(A_i) = 2 + l(B) \quad \text{אם } A_i = B \vee C$$

$$\sum l(A_i) \text{ ואם } \sum l(A_i) \text{ יורד ב-2 ב-1}$$

בהנחת האינדוקציה.

$$A_i \leftrightarrow (B \vee C) \quad \Leftarrow \quad A_i = B \vee C$$

$$(A_1 \vee \dots \vee A_i \vee B \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n) = A_1 \vee \dots \vee A_n$$

$$(A_1 \vee \dots \vee A_i \vee C \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n)$$

אם A טאטואיה אחר שתי הנסחאות לא הן טאטואיות

ולכן אחת מהם לפי הנחת האינדוקציה אפשר לקבוע אם

לא טאטואיה או לא.

מש"ל (23)

הזכנו הוכחנו בעבר שט נוסחה אפשר לרשום בצורה
של אינזים.

משפט הטאטואיה (Post) אם B היא אחרת טאטואיה

$$A_1, \dots, A_n \text{ אם } A_1, \dots, A_n \vdash B \text{ ואם } \vdash B$$

משפט: אם B טאטואיה, אם $\vdash B$.

הוכחה:

$$\vdash B \vee A \quad \text{אם } \vdash A \vee B$$

$$\vdash B \vee A \quad \Leftarrow \quad \vdash A \vee B, \text{ (אקסיומה)}$$



משפט הטאטולוגיה

אקסיומות אריות

- $\neg A \vee A$ א
- אקסיומת בצורה ב
- אקסיומת להיות ע
- אקסיומת שוויון ז

כללי היסק

- אם $\vdash B \vee A$ SK $\vdash A$ א א
- אם $\vdash A$ SK $\vdash A \vee A$ א ב
- אם $(A \vee B) \vee C$ SK $\vdash A \vee (B \vee C)$ ע
- חוק: אם $\vdash A \vee B$ SK $\vdash \neg A \vee C$ ז
- הכלל E $\vdash E$ ה

משפט הטאטולוגיה: אם הנוסחה B היא אידה טאטולוגית של

$A_1, \dots, A_n$ ואם $\vdash A_1, \dots, \vdash A_n$ SK $\vdash B$

הוכחה: הוכחה בשתמש רק באקסיומות הראשונה ובאידה כללית. זה סך הראשונים. ב הנושא של הכחה עבור ס' המשפט.

הוכחה: אם B טאטולוגית SK $\vdash B$

למה א: אם $\vdash A \vee B$ SK $\vdash B \vee A$

הוכחה: בעזרת חוק: $\vdash A \vee B$ אם $\vdash \neg A \vee A$ (כ' ו' אקסיומה)

$\vdash B \vee A$ (ב' היסק ז') (ט') *

כלל MP: אם $\vdash A$ ו $\vdash A \rightarrow B$ SK $\vdash B$

הוכחה: נ. $\vdash A$ נובע $\vdash B \vee A$ וכלי למה א $\vdash A \vee B$

$\vdash A \rightarrow B$ פירושו $\vdash \neg A \vee B$ לפי כלל החתך $\vdash B \vee B$

לפי כלל הצננים $\vdash B$ (ט')

* זהו משפט אידה טאטולוגית
אם $A_1, \dots, A_n$ ואם $\vdash A_1, \dots, \vdash A_n$ SK $\vdash B$

הסקנה: אם $\vdash A_1, \vdash A_2, \dots, \vdash A_n$ ו- $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ אז $\vdash B$.

הוכחה: שימוש ב- MP n פעמים. (י)

משפט הסאטורציה (ובעז אחריותה של למדף אם נוסחה סאטורטית ניתנת לפרסוק אז זה נכון).

B היא גורמה סאטורטית של $A_1, \dots, A_n$ אם ורק אם

$A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ היא סאטורטית. לפי התוצאה

$\vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ ואם נובע $\vdash B$ כנראה.

אז תרשו (תחוקה בהוכחת התוצאה).

תוצאה: אם B סאטורטית אז $\vdash B$

הוכחה: נניח A סאטורטית (ראה ש $\vdash A$)

אם אם A סאטורטית אז $\vdash A$ $\forall A$ סאטורטית (סאטורטיות).

אם נניח $\vdash A \vee A$ אז לפי דלם צמצום נקבל $\vdash A$.

למדף 2: אם $n \geq 1$ ו- $A_1, A_2, \dots, A_n$ סאטורטיות אז

$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$

דלם 1: אם $A_1, A_2, \dots, A_m$ אז $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$ מתקבל

לפאנפוקסיון $i_1, \dots, i_m$ כלליים בין המספרים $1, 2, \dots, n$.

דלם 2: אם $\vdash A \vee B$ אז $\vdash \neg A \rightarrow B$

דלם 3: אם $\vdash \neg A \rightarrow B$ ו- $\vdash \neg B \rightarrow C$ אז $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow C$

הוכחת למדף 2

מקרה 1: $\vdash A_i$ היא נוסחה אטומית או שלילת וצור

כאשר B, אטומית. אז נוסחה הנ"ל היא סאטורטית ואשר

קיימים נ"ל יק $\neg A_i = \neg A_j$ כי אז יהיה לנו $\vdash \neg A_i \vee A_i$

וכאקסמה מ"ע 1 נובע $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$

בה"כ נניח A_i לא אטומית או שלילתה (אפשר להניח

אז זה מ"ע 1)

(24)

אילו אילו $\neg \neg B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ע'מך $A_1 = \neg \neg B$ (2)

SK גם $B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ אילו אילו "ע'מך הנחת האינוקציה

$\vdash B \vee (A_2 \vee \dots \vee A_n)$ (כמו בשיעור הקודם)

פואר $\vdash (\neg \neg B) \vee (A_2 \vee \dots \vee A_n)$ 2 ע'מך

$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

$(B \vee C) \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

SK $A_1 = B \vee C$ (3)

משפט הטאוטולוגיה

הפגנו למסקנה שאם נוכח אר התוצאה של משפט הטאוטולוגיה
אז נוכח אר המשפט עצמו.

תוצאה: אם A טאוטולוגיה אז $\vdash A$

דמיון 2 אם $n \geq 2$ טאוטולוגיה $A_1 \vee \dots \vee A_n$ אז

$$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$$

ההוכחה: האינדוקציה של מבנה האופרטים של $A_1, \dots, A_n$

רעיון 1: אם $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_m$ אז $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$

בתנאי של $n \geq 1$

רעיון 2: אם $\vdash A \vee B$ אז $\vdash \neg A \vee B$

רעיון 3: אם $\vdash A \vee C$ אז $\vdash \neg(A \vee B) \vee C$

אם $A_1 \vee \dots \vee A_n$ היא דיסיונקציה של נוסחאות אלמנטריות
או שלבנות של נוסחאות אלמנטריות, אז מתקף היותה טאוטולוגיה

נראה שקיימים $i \neq j$ כך ש- A_i היא $\neg A_j$
לכן $A_j \vee A_i$ היא הקטגוריה $\neg A_i \vee A_i$ כך ש- $\vdash A_j \vee A_i$
ולפי רעיון 1, $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$.

נשתמש בהמקרה ראשון קיים $i \neq j$ כך ש- A_i היא דיסיונקציה

$B \vee C$ או A_i היא שלילת $\neg$ ראשון $\neg$ איננה אלמנטרית,

ז"א א"ש- D היא ביטוי שלילי, ואז A_i היא שלילת $\neg$ כפולה

ב"ר א"ש- D היא דיסיונקציה ואז A_i היא $\neg(B \vee C)$

בואו יל 3 אפשרויות:

(i) A_i היא $B \vee C$

(ii) A_i היא $\neg B$

(iii) A_i היא $\neg(B \vee C)$

במקרה 1 אצל לברניה בפרק 1. $i=1$

(i) $(B \vee C) \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ אקסלוזיה עכ"ל

$B \vee C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ אקסלוזיה

* הערה: סבלא אמת - מת' 3

ב הענין עם האקסלוזיה החדה באמצעות סבלא אמת

אז אם אנחנו נודים רפואה שלמה אקסלוזיה אם של

השתמש בסבלא אמת

אז השתמש בסבלא אמת נשכחים להיות שלוסה

(יורג עסקה)

$$l(B) + l(C) + l(A_2) + \dots + l(A_n) = l(A_1) + \dots + l(A_n) - 1$$

← ניימן השתמש בהנחה האנציקציה, ל"א

ע"פ $B \vee C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ האקסלוזיה

$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$ ל"א $\vdash (B \vee C) \vee (A_2 \vee \dots \vee A_n)$

(ii) A_1 היא B $\vdash B$ אקסלוזיה $\vdash B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

$\Leftarrow$ אקסלוזיה $B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

$\Leftarrow$ ניימן השתמש בהנחה האנציקציה $\vdash B \vee (A_2 \vee \dots \vee A_n)$

ל"א ע"פ 2 $\vdash \neg B \vee (A_2 \vee \dots \vee A_n)$ $\Leftarrow \vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$

(iii) A_1 היא $\neg(B \vee C)$ הנוסחה $\neg(B \vee C) \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

אקסלוזיה ל"א או למטה הנוסחה $A_2, \dots, A_n$ מקבלת

חוק אמת, אז אם B שקר ואם C שקר. עכ"ל

$\vdash B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ואם $\vdash C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ אקסלוזיה

ל"א הנחה האנציקציה $\vdash \neg B \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ואם $\vdash C \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

ל"א ע"פ 3 $\vdash \neg(B \vee C) \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ואם $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$

ע"פ 3

בגלל נכחה אחר סגנון הוכחה:

הוכחה של $\exists$ 1: (נשתמש באינדוקציה ב m)

$$\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee (A_{i_3} \vee \dots \vee A_{i_m}) \quad \text{לניח } 3 \leq m$$

$$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_{i_3} \vee \dots \vee A_{i_m} \rightarrow \text{כאן יש } m-1 \text{ מרכיבים בראשו}$$

$$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_1 \vee \dots \vee A_n \quad \text{לפי אינדוקציה}$$

$$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A \quad \text{באחר } A = A_1 \vee \dots \vee A_n \quad \text{(סמך)}$$

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A_{i_2} \quad \text{לפי חוק 2 } \vdash A \vee (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A_1 \vee \dots \vee A_n \quad \text{לפי הנחת האינדוקציה}$$

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A \quad \text{באחר}$$

$$\vdash A \vee (A \vee A_{i_1}) \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash (A \vee A) \vee A_{i_1} \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash (A \vee A) \vee A_1 \vee \dots \vee A_n \quad \text{לפי הנחת האינדוקציה}$$

$$\vdash (A \vee A) \vee A \quad \text{באחר}$$

$$\vdash A \vee (A \vee A) \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash A \vee (A \vee (A \vee A)) \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash (A \vee A) \vee (A \vee A) \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash A \vee A \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash A \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n \quad \text{באחר}$$

$$\vdash (A_{i_1} \vee \dots \vee A_n) \vee A_{i_1} \quad \text{לפי חוק 1} \quad m=1$$

$$\vdash A_{i_1} \vee A_{i_1+1} \vee \dots \vee A_n \quad \text{וככה באינדוקציה עד}$$

$$\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2} \quad m=2$$

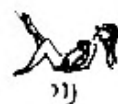
$$\vdash A_{i_1} \quad \text{אם } i_1 = i_2 \quad \vdash A_{i_1} \vee A_{i_1} \quad \text{לפי חוק 1}$$

$$\vdash A_{i_1} \vee \dots \vee A_n \quad \text{לפי חוק 1} \quad \text{אם } i_1 \neq i_2$$

$$\vdash A_{i_2} \vee A_{i_1} \quad \text{לפי חוק 1} \quad \text{אם } i_2 > i_1$$

$$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \quad \text{אם } i < j \quad \vdash A_i \vee A_j$$

$$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \quad \text{לפי חוק 1}$$



בן אדם



סמך

אם $n=2$ אז נניח $\vdash A_1 \vee A_2$ וכן

זה נכון באופן דומה. נניח $n < 2$

$\vdash A_1 \vee A_j$ אם $j \geq 2$ אז לפי הנחת האינדוקציה

$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$ וכל הוכחה $\vdash A_2 \vee A_3 \vee \dots \vee A_n$

לכן נשאר מקרה $j=1$ $\vdash A_1 \vee A_j$ (NG)



$\vdash A_1 \vee A_2 \vee B$ $\vdash A_3 \vee A_4 \vee \dots \vee A_n$ B

אם $j \geq 3$ אז $\vdash A_1 \vee A_j$ נובע $\vdash A_1 \vee A_3 \vee \dots \vee A_n$

$\vdash A_1 \vee B$ לפי הנחה 1 $\vdash B \vee A_1$

$\vdash A_2 \vee (B \vee A_1)$ לפי ההתחברות

$\vdash (A_2 \vee B) \vee A_1$ לפי אס

$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee B)$ לפי הנחה 1

$\vdash A_1 \vee \dots \vee A_n$ נובע

$\vdash A_1 \vee A_2$ לפי ההתחברות $\vdash B$

$\vdash B \vee (A_1 \vee A_2)$

$\vdash (A_1 \vee A_2) \vee B$ לפי הנחה 1

$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee B)$ לפי אס

$\vdash A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ נובע

נ"ל

נשים לב שזה השתמשנו בהכיוון הפוך של אינדוקציה

השתמשנו בנסיבות: אם $\vdash A \vee (B \vee C)$ אז $\vdash (A \vee B) \vee C$

הוכחה: $\vdash (A \vee B) \vee C$ לפי הנחה 1 $\vdash C \vee (A \vee B)$ אז

$\vdash (C \vee A) \vee B$ לפי הנחה 1 $\vdash B \vee (C \vee A)$ ולפי

אס $\vdash (B \vee C) \vee A$ לפי הנחה 1 $\vdash A \vee (B \vee C)$ נ"ל



כלל החתך:
 $\vdash A \vee C \wedge \vdash A \vee B$
 $\Downarrow$
 $\vdash B \vee C$

אנחנו ממשיכים בהוכחה סגורה הערה

סעיף 2: אם $\vdash A \vee B$ אז $\vdash \neg \neg A \vee B$ SIC

הוכחה: לפי האקסיומה $\vdash \neg \neg A \vee \neg A$

לפי חוק 1 $\vdash \neg A \vee \neg \neg A$

לפי כלל החתך וקדם $\vdash B \vee \neg \neg A$

לפי חוק 1 $\vdash \neg \neg A \vee B$ מש"ל (ש)

סעיף 3: אם $\vdash \neg A \vee C$ אז $\vdash \neg B \vee C$ SIC

הוכחה: לפי האקסיומה $\vdash \neg (A \vee B) \vee A \vee B$

לפי חוק 1 $\vdash (A \vee B) \vee \neg (A \vee B)$

לפי גאנצאלטאציה $\vdash A \vee B \vee \neg (A \vee B)$

לפי כלל החתך מהנ"ל $\vdash (B \vee \neg (A \vee B)) \vee C$ וקדם $\vdash \neg A \vee C$

לפי אסוציאטיוויות $\vdash B \vee \neg (A \vee B) \vee C$

לפי כלל החתך מהנ"ל $\vdash (\neg (A \vee B) \vee C) \vee C$ וקדם $\vdash \neg B \vee C$

לפי אסוציאטיוויות $\vdash \neg (A \vee B) \vee (C \vee C)$

לפי חוק 1 $\vdash \neg (A \vee B) \vee C$ מש"ל (ש)

סימנו להוכיח את סגורות העזר וכלא סימנו את הוכחת משפט
הטאטולוזיה

משמעות הפבר ל

אנחנו בידע לא פיתחנו בכל על כמותים. כל מה שלפני הכמותים קרא
בפז תחלים הפסוקים. אנחנו לא עשנו את כל הנפרד אלא הסתכלנו
על זה רחוק מתחלים היחסים.

כל אופן משפט הטאטולוזיה אחרי בעצם של מה שאפשר להסיק
הטבעי אחר ניתן להסיק אותו במה שלנו בשמות האקסיומות
ובלי ההוסק להוציא את כל הכנסת הכמות

אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \neg B \rightarrow \neg A$. עמ' 2

(בדיקת האם $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ טאוטולוגיה)

(עשה את זה בצורה מסודית באמצעות טבלאות אמית)

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

קיבלנו שהפסיק תמיד מקבל ערך אמת, כלומר הוא

טאוטולוגיה. עכ' משפט הטאוטולוגיה, ש' משפט שהיא

טאוטולוגיה הוא ניתן להסקה. לכן $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

חל' מזה אם $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (נוסחה של נוסחה של נוסחה)

להסקה אז אם $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (ניתן להסקה)

לכן אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \neg B \rightarrow \neg A$

למעשה זה אנשי אחד יחיד והרבה פעמים הרבה יותר קל

לדעתם על טבלאות אמית אנשי לעולם את התהליך של

ההסקה הלוגית. המשפט מסביר שיש טבלאות האמת

וההסקה הלוגית יתנו את אותה התוצאה.

כל הנחות $\exists$ - אם B לא מופיע x במשתנה חופשי

אם $\vdash A \rightarrow B$ (נכונות) אז $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow B$

כל הנחות $\forall$ - אם B לא מופיע x במשתנה חופשי

אם $\vdash A \rightarrow B$ (נכונות) אז $\vdash A \rightarrow \forall x B$

($\forall x B$ הוא קיצור ל- $\forall x (B)$)

הוכחה: נראה שכל הנחות $\forall$ (נכונות $\forall$) הנחות $\exists$

(שהוא את מה שקיבלנו)

(28)

אם $\vdash A \rightarrow B$ אז משפט הטאוטולוגיה $\vdash B \rightarrow \neg A$

אם $\vdash \exists x(\neg B) \rightarrow \neg A$ אז $\vdash \neg \exists x(\neg B)$

אז משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg A \rightarrow \neg \exists x \neg B$

ואז נניח אם $\vdash A \rightarrow \neg \exists x \neg B$ אז משפט הטאוטולוגיה $\vdash A \rightarrow \neg \exists x \neg B$

אם $\vdash A \rightarrow \forall x B$ אז $\vdash A \rightarrow \neg \exists x \neg B$

כלל ההכללה אם $\vdash A$ אז $\vdash \forall x A$

הוכחה: אם $\vdash A$ אז $\vdash B \rightarrow A$ (כלל הכנסה)

אז $\vdash A \rightarrow \forall x A$ (כלל הכללה)

אם $\vdash \forall x A \rightarrow A$ אז $\vdash A$

אין פה משנה רשית x כי x לא
היה ב- A . אז $\vdash A \rightarrow \forall x A$ נכון.

אם $\vdash \neg \forall x A \vee \forall x A$ אז $\vdash \neg \neg \forall x A$

$\vdash \forall x A \vee \neg \forall x A$

$\vdash \forall x A$

אם $\vdash \neg \forall x A$

אז $\vdash \neg \forall x A$

משפט

כלל ההצבה: אם $A \vdash A$ אז $A \vdash A_x[b]$ כאשר x משתנה ו- b שם.

הוכחה

לפי כלל ההכללה, $A \vdash A$ נובע $\vdash \forall x A$, כלומר $\vdash \neg \exists x \neg A$.
מזה שכן $\vdash C_x[b] \rightarrow \exists x C$ (זאת אקסיומה ראשו ההצבה מותרת)
(שנמשב אקסיומה זו עבור $\neg A$ במקום C). אז
$$A \vdash \neg A_x[b] \rightarrow \exists x \neg A$$

ספ. משפט האוטומופיה $A \vdash A_x[b]$ כי $A_x[b]$ היא
מירה טאוטולוגית של $A \rightarrow A_x[b] \rightarrow \exists x A$.
למה? אם $A \vdash \neg A_x[b]$ אז
 $A \vdash \exists x \neg A$ שקר
 $\neg A_x[b]$ שקר אז

$A_x[b]$ אמת $\neg$ משל (2)

תכונות: מה זה מירה טאוטולוגית? B היא מירה טאוט
של $A_1, \dots, A_n$ אם ראשו $\{A_i\} \vdash B$ כלומר $\{A_i\} \models B$ אם $\{A_i\} \models B$
מה זה משפט האוטומופיה? אם ניתן להסב את $A_1, \dots, A_n$
אז ניתן להסב את המירה הטאוטולוגיות שלהן.
כנצם להוכיח ש $A_x[b]$ מירה טאוט של $A \rightarrow \neg \exists x \neg A$
1. $A \rightarrow \neg \exists x \neg A \rightarrow \neg A_x[b] \rightarrow \exists x \neg A$ (דיוק להראות ש (1) ו- (2) אמת
אז (3) אמת. לשם יק (נכיר ש- (3) שקר אז המצב היחיד
שבו (2) יתכן להיווצר אמת הוא אם (3) שקר.

את המשפט אפשר להרחיב ל- n משתנים באופן הבא:

סעיף: אם $A \vdash A$ אז $A \vdash A_{x_1 \dots x_n}[b_1 \dots b_n]$

הוכחה: האינדוקציה המיידית (ובל) ההצבה (נתקלים כאן באינו אכן
גוף למק דיוק עזשג את זה בורה קצת שעה.
(קיים n משתנים חדשים $x_1, \dots, x_n$) (באורחם ע"א מופיע
ע"כ A לא בשם b .)

$\vdash A \rightarrow A$ (ס"ק) את $\vdash A \rightarrow [y_1, \dots, y_n] A$
 את $\vdash A \rightarrow [y_1, y_2, \dots, y_n] A$ וכו' עד $\vdash A \rightarrow [y_1, \dots, y_n] A$
 אם נשתמש בפעמים בכלל ההצבה (נקב) בהצבה
 $\vdash (A \rightarrow [y_1, \dots, y_n] A) \rightarrow [y_1, y_2, \dots, y_n] A$
 $\vdash (A \rightarrow [y_1, \dots, y_n] A) \rightarrow [y_1, y_2, \dots, y_n] A$
 $\vdash A \rightarrow [y_1, \dots, y_n] A$
 גמל (י)

אלה עשנו את כל הדיק והכרנו עקומה ברמה 3 ב-הם
 שם טענה בפרט ירמ לזהות שמופעים בהם א"ם
 שם עצה ב-הם שם שם (למה) הופעו של ב-הם וזה עשנו
 בעיתות כי הם שיש לנו (כלל ההצבה) מאפשר לעשות
 יקפצו את אחת בלוח א-הם שם שם את ההצבה
 בקיאה אחת אלא באוסטריות אנוני עקפנו את ה-הם
 ע"י הרמת השמות שלם מופעים במקומות על רצום

כלל ההצבה

$\vdash A \rightarrow [y_1, \dots, y_n] A \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n A$ (א)

$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A \rightarrow A[y_1, \dots, y_n]$ (ב)

הוכחה

$\vdash C \rightarrow \exists x C$ (א) $\vdash C \rightarrow \exists x C \rightarrow C$ (ב)

$\vdash \forall x C \rightarrow C$

$\vdash A \rightarrow \exists x_n A$

$\vdash \exists x_n A \rightarrow \exists x_{n-1} \exists x_n A$

$\vdash \exists x_{n-1} \exists x_n A \rightarrow \exists x_{n-2} \exists x_{n-1} \exists x_n A$

... זה שגמר, התיאבון בא בסמן (האחר)

$\vdash \exists x_2 \dots \exists x_n A \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n A$

ע"ס משפט הוסטאוסיה $\vdash A \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n A$ וזה כלל

ההצבה $\vdash A \rightarrow [y_1, \dots, y_n] A \rightarrow \exists x_1 \dots \exists x_n A$

המשפט הראשון : $\vdash \forall x A \rightarrow A$ (קרי

$$\vdash \forall x A \rightarrow A$$

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A \rightarrow A$$

כלל הכללה : $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A \rightarrow A_{x_1} x_2 \dots x_n [a_1 \dots a_n]$

משפט (1)

כלל הפיסקליטור : $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$ אם $\vdash A \rightarrow B$

$$\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$$

הוכחה : אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$; אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

$$\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$$

$$\vdash \forall x A \rightarrow B$$

משפט (2) : אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$; אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

כלל הפיסקליטור : $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$ אם $\vdash A \rightarrow B$

$$\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$$

משפט (3) : אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$; אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

כלל הפיסקליטור : $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$ אם $\vdash A \rightarrow B$

$$\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$$

משפט (4) : אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$; אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

$$\vdash \forall x \forall y A \rightarrow \forall y \forall x A$$

$$\vdash \exists x \exists y A \rightarrow \exists y \exists x A$$

$$\vdash \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$$

משפט (5) : אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$; אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

הוכחה : אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$; אם $\vdash A \rightarrow B$ אז $\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

כלל הפיסקליטור : $\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$ אם $\vdash A \rightarrow B$

$$\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \rightarrow A_{x_1} \dots x_n [x_1 \dots x_n]$$

$$\vdash A \rightarrow A$$

T מנה פורמלית (יכולה) אקסיומות וקסיומות

דאטומים $A_1, \dots, A_n$ (נוסחאות)

$T[A_1, \dots, A_n]$ היא מנה פורמלית המתקבלת מ- T ע"י הוספת

A_1, A_n בתור אקסיומות חדשות.

משפט הדדוקציה: A, B נוסחאות. A סגורה, B מילה אחרת משתנים

חפשים אם $\vdash_T A \rightarrow B$ $\Leftrightarrow$ $\vdash_{T[A]} B$

הוכחה

(הכיוון הימני) אם $\vdash_T A \rightarrow B$ אז $\vdash_{T[A]} B$:

ובכן, אם $\vdash_T A \rightarrow B$ אז $\vdash_{T[A]} A \rightarrow B$ - מצב שני

$\vdash_{T[A]} A$ ולכן מ- MP $\vdash_{T[A]} B$

(הכיוון הימני) נניח $\vdash_{T[A]} B$ (ראוה ל) $\vdash_T A \rightarrow B$

(שליש האנציקלופדיה) הפסק

(L) אם B נכונה ל- A אז $\vdash_T A \rightarrow B$ לפי אקס $\vdash A \vee \neg A$

(A) אם B אקס ב- T אז $\vdash_T B$ לפי $\vdash_T A \vee B$ (הוכחה)

ואם $\vdash_T A \rightarrow B$

(C) B מילה טאט של $C_1, \dots, C_m$

$\vdash_{T[A]} C_1, \dots, \vdash_{T[A]} C_m$

ראשי הטיק של B אחד מהן יותקנה מפתק של B

לפי הנחת האנציקלופדיה

$\vdash_T A \rightarrow C_1, \dots, \vdash_T A \rightarrow C_m$

לפי ע"ס מ" $\vdash_T A \rightarrow B$

(3) B מתקבל מהט"ת כמת ואת זה נעשה בפעם הבאה



משפט הפדוקציה: A נוסחה סגורה (ללא משתנים חופשיים)

$$\vdash_T A \rightarrow B \quad \text{אם ורק אם} \quad \vdash_{T[A]} B \quad \text{SK}$$

הוכחה:

$$\Rightarrow (\text{הכיוון הקדמי}) \quad \text{אם} \quad \vdash_T A \rightarrow B \quad \text{SK} \quad \vdash_{T[A]} B \quad \text{אכן,}$$

$$\text{ע"פ} \quad \vdash_{T[A]} A \rightarrow B \quad \text{ומי} \quad \vdash_T A \rightarrow B \quad \text{ונגזר} \quad \vdash_{T[A]} A \rightarrow B \quad \text{ע"פ} \quad \vdash_{T[A]} B \quad \text{MP}$$

$$\Leftarrow (\text{הכיוון האחורי}) \quad \text{אם} \quad \vdash_{T[A]} B \quad \text{SK} \quad \vdash_T A \rightarrow B \quad \text{(ללא משתנים חופשיים)}$$

אפשר להסיק את B כאשר אוספים את A לאקסיומות, SK ניתן להסיק את B מ- A . זהו מה שצריך להוכיח.

נניח את כל האינדוקציה על הוסק הנוסחה: סוגר על אורך ההיסקים ב- $T[A]$

בסיס האינדוקציה: אם B אקסיומה ב- $T[A]$ (ללא היסק באורך

1). אם A או B זהה ל- A או $\neg B$ היא אקסיומה ב- T .

אם B זהה ל- A או $\neg A$ אז $\vdash_T A \rightarrow B$ אם B אקסיומה ב- T .

$$\text{אם} \quad \vdash_T B \quad \text{ומאילן} \quad \vdash_T A \rightarrow B \quad \text{(ב) הרוחבה:} \quad \vdash_T A \rightarrow B : (A \rightarrow B) \rightarrow A \vee B$$

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לכל C שההיסק שלה קצר מזה של B .

$$\text{נניח ש-} B \text{ היא מרכיבה סטאטוטורית של } C_1 \dots C_m \text{ ולכן} \quad \text{c)}$$

יש ב- $T[A]$ היסק יתר קצר מאשר ל- B . לפי הנחת

האינדוקציה $\vdash_T A \rightarrow C_1, \vdash_T A \rightarrow C_2, \dots, \vdash_T A \rightarrow C_m$ היות

1- $A \rightarrow B$ היא חריפה סטאטוטורית של $A \rightarrow C_1, \dots, A \rightarrow C_m$

אז משפט הסטאטוטוריה $\vdash_T A \rightarrow B$

$$\text{נניח ש-} B \text{ היא } C \rightarrow \exists x D \text{ ו-} C \text{ לא מופיע ב-} x \text{ כמשתנה} \quad \text{ב)}$$

חפשי והשלב האחרון של היסק ב- B :

$$\text{מכיון ש-} \vdash_{T[A]} D \rightarrow C \quad \text{ונקדם} \quad \vdash_{T[A]} (\exists x D \rightarrow C) \quad \text{(שלב ב-} T[A])$$

$$\text{לפי ע"פ האינדוקציה} \quad \vdash_T A \rightarrow (D \rightarrow C) \quad \text{לפי} \quad \vdash_T D \rightarrow A \rightarrow C$$

$$\text{לפי כל הנסחבות} \quad \vdash_T \exists x D \rightarrow (A \rightarrow C) \quad \text{לפי} \quad \vdash_T A \rightarrow \exists x D \rightarrow C \quad \text{א.ש"ל} \quad \text{c)}$$

משפט הקבוצים

A נוסחה לשתנים חופשיים $x_1, \dots, x_n$ $C_1, \dots, C_n$ קבוצים חדשים (שונים זה מזה) של ערכי מוסים בשפה נסמן ב- T' את המערכת הפורמלית של מתקשרי T - n "הוספת קבוצים" $C_1, \dots, C_n$ לשפה של T .

* ברור שאנחנו מגדילים את מערכת הנוסחאות ומספר האקסיומות הרלוונטיות.

משפט: $\vdash_T A$ אם ורק אם $\vdash_{T'} A_{x_1 \dots x_n}[C_1 \dots C_n]$ (וכתב)

($\Leftarrow$) נניח ש $\vdash_T A$ ונראה ש $\vdash_{T'} A_{x_1 \dots x_n}[C_1 \dots C_n]$ - $\vdash_T A$ (נבד) $\vdash_{T'} A$ (לפי צ"ע של הרציה) $\vdash_{T'} A_{x_1 \dots x_n}[C_1 \dots C_n]$

($\Rightarrow$) נניח ש $\vdash_{T'} A_{x_1 \dots x_n}[C_1 \dots C_n]$ ונראה ש $\vdash_T A$.

(סתם בהסק של $A_{x_1 \dots x_n}[C_1 \dots C_n]$ ב- T' ניקח משתנים $y_1, \dots, y_n$ שאינם מופיעים בכלל בהסק של $A_{x_1 \dots x_n}[C_1 \dots C_n]$ במילים אחרות: $y_1, \dots, y_n$ לא מופיעים ב- $C_1, \dots, C_n$).

האקסיומות שאינן עומות אינן מביאות את $C_1, \dots, C_n$. (למה? $C_1, \dots, C_n$ בכלל לא היו בשפה ומכאן לא שנינו את האקסיומות הלא עומות ולכן הם לא מופיעים בהן אם אחרי ההוספה אולם באקסיומות העומות דווקא נוספו עוד כי מערכת הנוסחאות גדלה: שהרי $A \rightarrow A \vee A$ אקסיומה עומת - נאמר לה נכון ל- A נוסחה אחרי ההוספה יש יותר נוסחאות. הניקודה היא שהאקסיומות הלא עומות הן ספציפיות לתורה. הן לא אקסיומות של נוסחאות.

האקסיומות הלא עומות לא משתנות: עדיין אם הייתה אקסיומה $x < 0$ היא נכונה לכל ההיבטים שירצונו עדיין במקרה אחר של הוספת קבוצים חדשים האקסיומה לא משתנה. אנחנו לא ירוצים להציב אותם במקום x . אלא האקסיומות העומות דווקא כן משתנות!

באמור, כי האקסיומות שליוון למעלה, אינן מכילות את
 ו, ... , $\neg$ ותכן תהליך ההחלפה אינו משפיע עליהן.
 כי אקסיומת למעלה, למטה תהליך ההחלפה, (הפכה למקורית)
 למטה ה-T (כי ה-T-הם משתנים בשפה המקורית)
 כמובן, כי לכלי היסק (שארם אותם לכלי היסק).
 $[y_1, \dots, y_n, x] \vdash_T A$ וגם בל ההלכה $\vdash_T A$. מל"ט

משפט השקילות

אם $\vdash B_1 \leftrightarrow B'_1, \dots, \vdash B_n \leftrightarrow B'_n$ ונוסחה A' מתקבלת
 מ- A ו' A' מתקבלת מ- $B_1, \dots, B_n$ ב- $B'_1, \dots, B'_n$
 אז $\vdash A \leftrightarrow A'$ SK

הוכחה אם A היא B_i אז A' היא B'_i ובאכזה נכון.
 אם A נוסחה אטומית אז A או שתלכדו למקרה הקודם,
 או שאין מקום להחלפה ו SK A' זהה ל- A $\vdash A \leftrightarrow A'$
 בשל משפט הטאוטולוגיה

(א) A היא שלילה $\neg C$ אז או שתלכדו למקרה הראשון
 או ש- A' היא $\neg C'$. לפי הנוחה האנדרקציה

$\vdash C \leftrightarrow C'$ לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg C \leftrightarrow \neg C'$

(ב) אם A היא $C \vee D$ אז או שתלכדו למקרה הראשון
 או ש- A' היא $C' \vee D'$. לפי הנוחה האנדרקציה $\vdash C \leftrightarrow C'$

1- $\vdash D \leftrightarrow D'$ ולפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash C \vee D \leftrightarrow C' \vee D'$

(ג) אם A היא $\exists x C$ אז או שתלכדו למקרה הראשון
 או שתלכדו למקרה $\exists x C'$. לפי הנוחה האנדרקציה $\vdash C \leftrightarrow C'$. ל"ט

$\vdash C \rightarrow C'$ ואם $\vdash C' \rightarrow C$ לפי ההיסקיות

$\vdash \exists x C \rightarrow \exists x C'$ וכן $\vdash \exists x C' \rightarrow \exists x C$. ל"ט לפי משפט

טאוטולוגיה $\vdash \exists x C \leftrightarrow \exists x C'$ מל"ט

$\times$ היסקיות. הוכחנו ש- $\vdash A \rightarrow B$ (אם)

$\vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$

$\vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

B - א פאנאליטי y , $\vdash \exists x B \leftrightarrow \exists y B_x[y]$ משפט

הוכחה: $B' \rightarrow B_x[y]$ (סמ)

$\vdash B_x[y] \rightarrow \exists x B$ משפט ההצבה

$\vdash \exists y B_x[y] \rightarrow \exists x B$ $\exists$ הכללה

$B'_y[x] = (B_x[y])_y [x] = B$ y א פאנאליטי B - א

$\vdash B'_y[x] \rightarrow \exists y B'$

$\vdash \exists x B'_y[x] \rightarrow \exists y B'$, $\vdash \exists x B \rightarrow \exists y B_x[y]$

☺

$\vdash \exists x B \leftrightarrow \exists y B_x[y]$ סמ

$$\sum_{k=1}^3 k = \sum_{m=1}^3 m \quad \text{מה המשפט הזה למדנו?} \\ \int_0^3 x dx = \int_0^3 y dy$$

משפט הסימטריה:

$\vdash b = a$ אם $\vdash a = b$ סמ

הוכחה: x, y יקח משתנים

$\vdash x = y \rightarrow (x = x \rightarrow (x = x \rightarrow y = x))$ באופן כללי

$(x_1 = y_1) \rightarrow (x_2 = y_2) \rightarrow \dots \rightarrow (x_n = y_n) \rightarrow (p_{x_1 \dots x_n} \rightarrow p_{y_1 \dots y_n})$

יקח את p להיות שוויון $x = y$ $p_{xy} \quad x = y$ סמ

$x = y \rightarrow x = x \rightarrow p_{xx} \rightarrow p_{yx}$

$\vdash x = x \rightarrow x = y \rightarrow y = x$ משפט הסימטריה

$\vdash x = y \rightarrow y = x$ MP אם $\vdash x = x$

$\vdash a = b \rightarrow b = a$ משפט ההצבה

☺ $\vdash b = a$ MP אם $\vdash a = b$ (מתן ע)

משפט השלישי

נתונים שמונה עצים $b_1, \dots, b_n$ וכן גם עצם c
 ונוסחה A אם $\vdash b_1 = b'_1, \dots, \vdash b_n = b'_n$ ו- $\vdash c = c'$ מתקבל $c \cdot A$
 ע"מספר החלפות של b ב- b' אם $\vdash c = c'$ וכן אם A'
 מתקבל A ע"מספר החלפות של b ב- b' ואשר המשתנים
 שב- b וב- b' לא קשורים בכמתים הן לפני והן אחרי החלפה,
 אם $\vdash A \leftrightarrow A'$

דוגמה הסברות הן חלק מהמסד הפורמלי שלנו.

$$\begin{array}{lcl}
 b = 4 & & \vdash 4 = 2+2 \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{מבניות מסיקר של פאנו} \\
 b' = 2+2 & & \\
 c = 3+4 & & c' = 3+(2+2) \\
 \Rightarrow & & \vdash c = c'
 \end{array}$$

החלק השני אומר דבר דומה אבל למדי נוסחאות, מתקאי כמובן
 שבמשתנים לא קשורים.

הוכחה:

(א) החלפה בתיק של עצם c באינדוקציה על המבנה של c .
 קודם כל, אם c הוא לבה $\vdash$ ו- b אם $\vdash c = c'$ לבה $\vdash$ - b מכיון שמתן
 ש $\vdash b = b'$ אם $\vdash c = c'$ (כ"ה אותו דבר).
 בהמשך נתייחס למקרה החד הדי שהוא דבר מסובך, כלומר נניח ש- c
 הוא לא אחד מה- b_i .

(ב) נק' ע"י המניה של c
 (א) c הוא משתנה. אם c איננו b אם $\vdash c = c'$ לבה $\vdash$ וידוע דבר
 ש- $\vdash c = c'$

(ב) c מהצורה $f(c_1, \dots, c_m)$ ואשר $c_1, \dots, c_m$ שמונה עצים. ע"י
 הנחת האינדוקציה, $\vdash c_1 = c'_1, \dots, \vdash c_m = c'_m$ ואשר $\vdash c_j = c'_j$ מתקבל c_j -
 ע"מספר החלפות של b ב- b' .

(י) בכך באקטומור השינוי:

$$x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_m = y_m \rightarrow f x_1 \dots x_m = f y_1 \dots y_m$$

סומר, ע"ס לכל ההצבה

$$\vdash c_1 = c_1 \rightarrow c_2 = c_2' \rightarrow \dots \rightarrow c_m = c_m' \rightarrow f c_1 \dots c_m = f c_1' \dots c_m'$$

ע"י MP (הוקט פיקוס, אוב עברית לכל היותוק) מקבלים

$$\vdash c = c' \quad \text{סומר} \quad \vdash f c_1 \dots c_m = f c_1' \dots c_m'$$

זה מוכיח את החלק הראשון של המשפט.

(ב) אם A נוסחה אטומית אפריורה $p c_1 \dots c_m$

אז A' אפריורה $p c_1' \dots c_m'$ ע"ס החלק הראשון

של המשפט $\vdash c_1 = c_1', \dots, \vdash c_m = c_m' \rightarrow$

(י) בכך באקטומור השינוי קטן יחסית:

$$x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_m = y_m \rightarrow p x_1 \dots x_m \rightarrow p y_1 \dots y_m$$

ע"ס לכל ההצבה (קטן)

$$\vdash c_1 = c_1' \rightarrow c_2 = c_2' \rightarrow \dots \rightarrow c_m = c_m' \rightarrow p c_1 \dots c_m \rightarrow p c_1' \dots c_m'$$

$$\vdash c_1 = c_1' \rightarrow \dots \rightarrow c_m = c_m' \rightarrow A \rightarrow A' \quad \text{סומר}$$

וע"י הוקט פיקוס $\vdash A \rightarrow A'$

ע"ס משפט הסמטריה $\vdash c_1' = c_1, \dots, \vdash c_m' = c_m$

ואז באותו אופן מתקבל

$$\vdash c_1' = c_1 \rightarrow c_2' = c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_m' = c_m \rightarrow p c_1' \dots c_m' \rightarrow p c_1 \dots c_m$$

וע"י הוקט פיקוס $\vdash p c_1' \dots c_m' \rightarrow p c_1 \dots c_m$ ואז $\vdash A' \rightarrow A$

$\vdash A \leftrightarrow A'$ משפט הסמטריה $\vdash A \leftrightarrow A'$ זה היה המקרה

הראשון. ערשו באינדוקציה

(א) אם A היא $\neg C$ אז A' היא $\neg C'$ (נשתמש לעזר C'

בהנחה האינדוקציה אז $\vdash C \leftrightarrow C'$ וע"י ג"כ $\vdash A \leftrightarrow A'$

(ב) אם A היא $C \vee D$ אז A' היא $C' \vee D'$ וע"י ג"כ $\vdash B \leftrightarrow B'$

1- $\vdash C \leftrightarrow C'$ וע"י ג"כ $\vdash A \leftrightarrow A'$

(ג) אם A היא $\exists x C$ וע"י ג"כ $\vdash C \leftrightarrow C'$ סומר $\vdash C \rightarrow C'$ ו $\vdash C' \rightarrow C$

וע"י פוסטריוריטי $\vdash \exists x C \rightarrow \exists x C'$ ו $\vdash \exists x C' \rightarrow \exists x C$ סומר

$\vdash \exists x C \leftrightarrow \exists x C'$ סומר $\vdash A \leftrightarrow A'$ מילא ☺

הוכחה 1: $\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow b_2 = b'_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_n = b'_n \rightarrow C[b_1, \dots, b_n] = C[b'_1, \dots, b'_n]$
(הוכחה - C) $\vdash b_1 = b'_1, \vdash b_2 = b'_2, \dots, \vdash b_n = b'_n$
אם $\vdash C[b_1, \dots, b_n] = C[b'_1, \dots, b'_n]$ אז

הוכחה 2: אם $A_1, \dots, A_n$ הן נוסחאות נכונות אז
 $\vdash \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ אז $\vdash A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$

בהוכחה נניח b_i, b'_i הם משתנים, f פונקציה, $d_1, \dots, d_n, d'_1, \dots, d'_n$ הם ערכים.
אם $\vdash b_1 = b'_1, \vdash b_2 = b'_2, \dots, \vdash b_n = b'_n$ אז $\vdash f(b_1, \dots, b_n) = f(b'_1, \dots, b'_n)$

$d_1 = d'_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_n = d'_n \rightarrow h[d_1, \dots, d_n] = h[d'_1, \dots, d'_n]$
אם $\vdash d_1 = d'_1, \vdash d_2 = d'_2, \dots, \vdash d_n = d'_n$ אז $\vdash h[d_1, \dots, d_n] = h[d'_1, \dots, d'_n]$

אם $\vdash b_1 = b'_1, \vdash b_2 = b'_2, \dots, \vdash b_n = b'_n$ אז $\vdash h[b_1, \dots, b_n] = h[b'_1, \dots, b'_n]$
אם $\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow b_2 = b'_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_n = b'_n \rightarrow h[b_1, \dots, b_n] = h[b'_1, \dots, b'_n]$

אם $\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow b_2 = b'_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_n = b'_n \rightarrow h[b_1, \dots, b_n] = h[b'_1, \dots, b'_n]$ אז $\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow b_2 = b'_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_n = b'_n \rightarrow h[b_1, \dots, b_n] = h[b'_1, \dots, b'_n]$

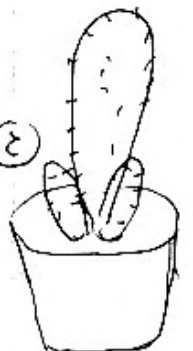
$\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_n = b'_n \rightarrow C[b_1, \dots, b_n] = C[b'_1, \dots, b'_n]$
(*) $\vdash C$

הוכחה 2: $\vdash b_1 = b'_1 \rightarrow b_2 = b'_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_n = b'_n \rightarrow (A[b_1, \dots, b_n] \leftrightarrow A[b'_1, \dots, b'_n])$
הוכחה: כן

הוכחה 3: אם x הוא משתנה, b הוא ערך, A נוסחה אז
 $\vdash A_x[b] \leftrightarrow \exists x (x = b \wedge A)$

הוכחה: $x = b \wedge A$ נכונה.
אם $\vdash A_x[b]$ אז $\vdash \exists x (x = b \wedge A)$
אם $\vdash \exists x (x = b \wedge A)$ אז $\vdash A_x[b]$
אם $\vdash x = b \rightarrow (A \leftrightarrow A_x[b])$ אז $\vdash A_x[b] \leftrightarrow \exists x (x = b \wedge A)$





סוג השני נקרא *עליון* והוא נחשב *הכי קל* להוכיח:

~~$$\begin{aligned} & \vdash (B \vee C) \rightarrow \exists x (B \vee C) \\ & \vdash B \vee (C \vee \neg (\exists x (B \vee C))) \\ & \vdash B \rightarrow \neg (C \vee \neg \exists x (B \vee C)) \\ & \vdash \exists x B \rightarrow \neg (C \vee \neg \exists x (B \vee C)) \\ & \vdash ((\exists x B) \vee C) \rightarrow \exists x (B \vee C) \end{aligned}$$~~

אבל הנה טיפ...

$$\begin{aligned} & \vdash (B \vee C) \rightarrow \exists x (B \vee C) \\ & \vdash B \rightarrow \exists x (B \vee C) \\ & \vdash \exists x B \rightarrow \exists x (B \vee C) \\ & \vdash C \rightarrow \exists x (B \vee C) \\ & \vdash (\exists x B) \vee C \rightarrow \exists x (B \vee C) \end{aligned}$$

אקסיומת ההצבה
זרימה סאטורציה
 $\exists$ הנכנס
זרימה סאטורציה
זרימה סאטורציה

$$\begin{aligned} & \vdash B \rightarrow \exists x B && \text{אקסיומת ההצבה} \\ & \vdash B \vee C \rightarrow (\exists x B) \vee C && \text{זרימה סאטורציה} \\ & \vdash \exists x (B \vee C) \rightarrow (\exists x B) \vee C && \exists \text{ הנכנס} \end{aligned}$$

ומשני הדרך השני:

$$\begin{aligned} & \vdash (\forall x B) \vee C \rightarrow \forall x (B \vee C) \\ & \vdash \forall x (B \vee C) \rightarrow (\forall x B) \vee C \end{aligned}$$

באופן כללי, אם B תלוי על x אז $\exists x B$ הוא C ו- A

$$\exists x (B \vee C) \quad \Leftrightarrow \quad B \vee (\exists x C) \quad \text{התפלגות}$$

$$\forall x (B \vee C) \quad \Leftrightarrow \quad B \vee (\forall x C) \quad \text{התפלגות}$$

בהתאם ל- x שאינה מופיעה ב- B בתור משתנה חופשי

②

ב. C בתור משנה חשבונית

Q) $\vdash C \rightarrow \forall x (B \vee C)$

$$(3) \vdash \forall x(B \vee C) \rightarrow \forall xB \vee C$$

സാധാരണയായ LB ന്റെ $HB \rightarrow BVC$ (1)

על ידי $\vdash A \rightarrow \forall x(A) \rightarrow \forall x(A \vee C)$

$$\vdash C \rightarrow B \vee C \quad (2)$$
$$\vdash \text{univ. cl.} \quad \vdash C \rightarrow \forall x (B \vee C)$$

$\vdash \forall x(B \vee C) \rightarrow (B \vee C)$ ಎನ್ನೋಣ C ಮೇಲಿನ ಪರಿಣಾಮ (3)

$\vdash \forall x (B \vee C) \wedge \neg C \rightarrow B$ यह एक K.G. का ठोस उदाहरण है।

$$\vdash \forall x (B \vee C) \wedge \neg C \rightarrow \forall x B \quad \text{מכיוון ש} C \text{ לא תלוי ב} x$$

$\vdash \forall x (B \vee C) \rightarrow (\forall x B \vee C)$ x is not free in C C does not contain x

$$Q \in \{\exists, \forall\} \quad \vdash B \vee Qx C \leftrightarrow Qx(B \vee C) \quad \text{Q}$$

כח 80/1 נ"ח 200 (א)

⑤ We

משפט: אם נוסחה A קיימת נוסחה A' רק ש $\vdash A \leftrightarrow A'$

1- A' מופיעה $Q_1 x_1, Q_2 x_2 \dots Q_n x_n B$ כאשר B - בלי Q

בעל כוחות.

הורחבה: באמצעותה עלתה כמות הנוסחה.

(ג) ראש A נוסחה כלכלית אין מה כמות קצו.

(ג) A מדצורה C ג. לפי הנחת האנציקלופיה ק"מ C'

2.21 $Q_1' x_1 Q_2' x_2 \dots Q_m' x_m D$ ን B ን C ን $C' \leftarrow C$ ን e_p

$\rightarrow Q_1' x_1 \dots Q_m' x_m$ D zaxid mizan TC' SIC . mizan k'

$\overline{Q}_1'x_1 + Q_2'x_2 + \dots + Q_m'x_m \geq 0$ זהו (א) LB של

L^2 באינפֿיניטֿימאל פֿונקציעס א פֿערשע איבערזעהבארע און רעגולאָרע צוויי
איחורה צו שרייבן די-סטאַנדאַרט $X_m \dots X_n$

(ע) אם A מהצורה $B \vee C$ ופ' הנחת האינדוקציה

קיימים B' , C' מהצורה הנדרשת $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$
 ז"ל שמיש בטא (משפט הנדאג) אפשר לראות שב- B' וב- C'
 אין אותם המשתנים קשורים במתחים.

אם B מהצורה $\exists x \phi$ אז $B \vee C$ הוא מהצורה
 $\exists x \phi \vee C$ ואז $\exists x (\phi \vee C) \leftrightarrow \exists x \phi \vee C$ (לפ' ז)
 אם כה מה שני היינו משתמשים בד'.

ריפוס: בטא סיימנו את ההוכחה.

סודג'ס: אזי, נכון סליחה.

בטא $\forall x \phi$ סיימנו את ההוכחה.

(ג) A מהצורה $\exists x B$ ופ' הנחת האינדוקציה $B \leftrightarrow B'$

ז"ל B צורה הנדרשת ואז גם $\exists x B$ מהצורה הנדרשת.
 ז"ל שמיש בטא קיסטריבוסיות בשני הכיוונים נקבע

$\exists x B \leftrightarrow \exists x B'$ כנדרש. (ט)

16.1.06
לויקה

יש לנו מצ' פונקציה T - תיאורית מסדר ראשון - אלה
שאנחנו תמיד מסתמים עליהם. יש שפה, יש אקסיומות
לויקה, יש רעיון היסק ואקסיומות נוספות שאנחנו יוצרים
לעקבות בצורה שכיחתה.

משפט זו נוסחה שקיים לה היסק ב- T . נשאל
השאלה מהם כל המשפטים ב- T ?

בואו אמן הנוסחה A שעדיין $A \vdash T$?

אין נוכל לאפיין את אותן הנוסחאות שהן משפטים ב- T ?
גם פשוט מהסתכלות בקוטר אפשר לזהות אם היא
יכיתה או לא?

המתמטיקאים הבת אחת (עזשו ריפס מרצה מצאנו).

איפיון כזה לא ידוע. לפי שעה, אם היה ניתן להסיק
סתירה במצ' שלנו אז כל נוסחה היא משפט כי F
כל דבר יוכל לעקוב. (המצ' היא שאם אין סתירה
אז אפשר להוכיח את זה...)

אנחנו הולכים להשוות תיאורית בצורה הבאה:

- נשווה את המשפטים. נאמר ששפה L' היא

הרחבה של L אם כל מה שנמצא ב- L נמצא גם

ב- L' . נניח שיש מצ' T עם שפה L ו- T'

עם שפה L' . (אז T' היא הרחבה של T

כאשר כל משפט ב- T הוא משפט ב- T').

T' ו- T שקולים. ראשון יש להן אותה שפה

ואותם המשפטים. בואו לראות אחת מהן. היא

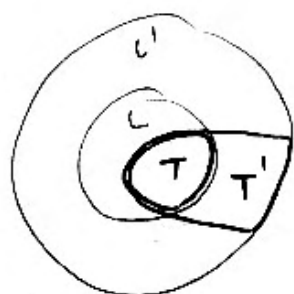
הרחבה של השניה. אלה זה לא אותו שיש

להן אותן אקסיומות (שכדי לראות זאת אנו

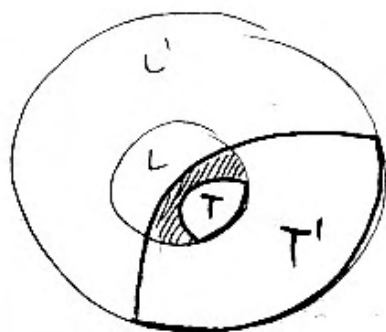
שוכחים באקסיומות דריכה להיות מניחיה).

נוגד מפה לאותה תיאורית ינבאית קבוצה שיוצא
של אקסיומות.

יהיו תיאורים T ו- T' עם שפה L ו- L'
 בהתאמה. T הירחבה של T' . הירחבה T'
 של T (קראת שמרנית) (conservative) ראש
 $\bar{A}$ נוסחה A שהיא משפט ב- T' וש"ית לשפה
 L היא משפט ב- T . הרי לא משפט ב- T
 ח"ב לדור משפט ב- T . אלא אבדטלים בו ש"רים
 לשפה L אבדטל לא משפט האגם ב- T -
 המקרה זה הירחבה היא שמרנית.



שמרנית



לא שמרנית

משפט שרתיכם
 ב- L והם ב- T'
 אלא לא ב- T .

תהי Γ קבוצה של נוסחאות ו- T תיאוריה
 נסתגלת של $T[\Gamma]$ - התיאוריה שיוצאת
 מ- T כאשר מוסיפים לה את Γ הנוסחאות
 בתור אקסיומות לא פוגיות. $T[\Gamma]$ הירחבה של
 T - זה דיבור ש לא שיהיה היסק ב- T
 נחובן נשאר היסק ב- $T[\Gamma]$ - הרי לא זרוענו שים
 דבר. השפה במקרה זה היא אותה השפה.

משפט:

נוסחה A היא משפט ב $T[\Gamma]$, לומר $\vdash_{T[\Gamma]} A$
 אם ורק אם קיימות נוסחאות $B_1, \dots, B_n$ שכן
 $\vdash_{T[\Gamma]} B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$ וקיים Γ כך ש
הצבנות סגור של נוסחה מהקבוצה Γ קשורה להשלכות
 התופשים שלה ברמת A .

הוכחה:

(א) נניח ש $\vdash_{T[\Gamma]} B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$

אז ניתן בנוצאי להטק את אותה הנוסחה גם ב $T[\Gamma]$.
 כמו כן $B_1, \dots, B_n$ אקסיומות ב $T[\Gamma]$ ולכן נכון
 $\vdash_{T[\Gamma]} B_1, \dots, \vdash_{T[\Gamma]} B_n$. למה? היה משפט
 שאם D סגור של D אז $D \vdash D$ אמת D' .
 אז ה B_i יוב הם סגורים של נוסחאות שכן משפטים
 ב $T[\Gamma]$ ולכן אם אותם אפשר להוכיח.
 $\Rightarrow$ לפי כלל ה'יתוק' $\vdash_{T[\Gamma]} A$.

(ב) נניח ש $\vdash_{T[\Gamma]} A$. נעקוב אחרי ההטקה

של A ב $T[\Gamma]$. נסמן ב $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ את
 האקסיומות Γ שנגזרה בהן שימוש במהלך ההטקה
 (נסמן ב $B_1, \dots, B_n$ את הסגורים שלהן). אז

$\vdash_{T[\Gamma_1, \dots, \Gamma_n]} A$. נשים ש $B_1, \dots, B_n$ נוסחאות

סגורות אז לפי משפט הצבוקציה $\vdash_{T[\Gamma]} B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$.
 משל (א)

לתיאוריה אפשר להשיג כ $T[\Gamma]$ - לומר D התיאוריה
 הריקה ונסמן ב Γ את האקסיומות העליונות
 אז יית. אפשר להוכיח משפט Δ ב $T[\Gamma]$ אם אפשר
 להוכיח בתיאוריה הריקה $\vdash_{T[\Gamma]} B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$ ואשר
 B_i הם נ"ל.

משפט: Γ הוא סתירה אם $\vdash \neg \Gamma$ יש

משפט מעבר $\vdash A_1 \vee \vdash A_2 \vee \dots \vee \vdash A_n$

יאושר A_i הוא סגור של (נוסחה $\neg$)

הצורה Γ יש סתירה כאשר $\vdash \neg \Gamma$

זאת ב נוסחה של Γ .

הוכחה:

(א) נניח $\neg$ $\vdash A_1 \vee \dots \vee \vdash A_n$ לפי משפט

הסגור A_i נכחד, $\vdash A_1$ נכחד, לפי משפט

האנטיפונדמנטלי נובע $\vdash \neg A_i$ לכל i . כפי

אפשר להסיק $\vdash \neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_n$ סתירה.

(ב) נניח $\vdash \neg A_1 \wedge \dots \wedge \neg A_n$ לפי המשפט הקודם

ק"מ $A_1, \dots, A_n$ שכן סגור של (נוסחה $\neg$)

כן $\vdash A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ אם הנוסחה

$\vdash A_1 \vee \dots \vee \vdash A_n$ האנטיפונדמנטלי של

$\vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ כי אם לא $\vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$ ח"כ

לא $\vdash A_1$ לכן $\vdash \neg A_1$ לפי המשפט הקודם

הוא $\vdash \neg A_1$ לפי משפט האנטיפונדמנטלי

$\vdash \neg A_1 \vee \dots \vee \vdash \neg A_n$

של (א)

משפט השלמות אם Γ אין סתירה (אם אחרים

Γ זקוק) אז Γ מתפרשת כמתנה M מתאים.

לומר קיים מתנה מתאים M ובוט המשפטים Γ

מתפרשים באמת. אחרים של Γ יש מודל.

הוכחה: אחרון דבר שגבש מודל לפיכך אם אין זה

סתירה. זה מתקבלות. כי אם Γ האקסיומות מתקיימות

והוכחנו של Γ הרי Γ שואבים על (מקור) בלבד אם

אז Γ המשפטים נכונים.

אין אפער אפצווא אה האמנה הלא? הי'שה אלה הי'ש
אפנוג אה מ מתוק ד אצמה אין בונים אהנה מתוק
אח' פורמלי' (י'צבי מה יש באמנה:

- קבוצה - עלם בני"ר הקבוצה נשתתף בשמור וזכר
של ד, עיתר ציין יק באותם שמור זכר שאין בהם
משתתפים. ומה אם אין שמור זכר נאלץ ה' ד? אם
אין בה קבוצים אז עמיהו שמור זכר לאין בהם
משתתפים. אז נעבור לתיאוריה חדשה ע"י קבוצים
חדשים ומשפט הקבוצים אומר עמיו בזכר שמקבלים
הרחבה שמרניה של גתיאליה, ואז להיטעור איתה.

(נניח ש b_1, b_2 וסלולר הצדדים ב- T שאין בהם משותפים.
ונניח ש $b_1 = b_2 + t$. אז עבור פרוטוקול T באבנה
 M חיים סהויול (b_1) = $M(b_1)$. אז אי אפשר להשתמש
באזכרים b_1, b_2 כאיברי שלונה עצומה בנייה גלובלית.
סדרן נעדייר יחס : $b_1 \sim b_2$ כאשר $b_1 = b_2 + t$.
סגור היחס $\sim$ הוא יחס שקילות.

גלגלת: $\odot$ $\vec{r}_T \cdot \vec{b}_1 = b_1$ $\odot$ $\vec{r}_T \cdot \vec{b}_2 = b_2$ $\odot$ $\vec{r}_T \cdot \vec{b}_3 = b_3$

— א' צא' —

SK $t_T b_2 = b_3 - 1$ $t_T b_1 = b_2$ OK 1110110 (3)

(ii) $t_1 b_1 = b_3$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \times 10 = 5$

אם נחלק את $\mathbb{R}^n$ ל- k קבוצות, אז יש לפחות אחת מהקבוצות שבהן יש יותר מ- $\frac{n}{k}$ נקודות. (עקרון של דירכלט)

אנחנו הנחנו שב-D יש קבוצה כי אם אין נוטל אותם וזה
משפט הקבוצה שאקרה שם צמד נוטל

22 האדמת העוֹק ציֹת וְהַיָּסִיד.

מה היא אומרת? $\mu, \dots, \nu$ הם משתנים. $\leq$ גם $\mu, \dots, \nu$ $\in \mathcal{M}$
 שם עבר משתנים וזכר המהלך שלו ש"ת לא הנה
 עבר של $\mu \in \mathcal{M}$ $(\mu, \dots, \nu)^\circ$ במעלה מעט
 השוויון ההתאמה הנ"ל היא טובה, סומך והפוכה מוגדרת

היטב. הרי באותה המחשבה יוכלו להקנות (צ"ל שנים)
 $C_1^0 = C_1^0, \dots, C_n^0 = C_n^0$ וכן $C_1^1 \sim C_1, \dots, C_n^1 \sim C_n$ וכן הלאה

$$t_T C_1 = C_1', \dots, t_T C_n = C_n' \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad f_{\mu}(C_1', \dots, C_n') = (f_{\mu}(C_1, \dots, C_n))^{\circ}$$

কিসে $f: C_1 \dots C_n \rightarrow C'_1 \dots C'_n$ যখন কোন ভেদ পড়ে

$$(f_{C_1, \dots, C_n})^\circ = (f_{C'_1, \dots, C'_n})^\circ \quad \text{p.e.} \quad f_{C_1, \dots, C_n} \sim f_{C'_1, \dots, C'_n}$$

הפיק באנו האופן (ש)באמצעות μ ש
 $\mu \vdash T \Leftrightarrow \vdash_T \mu$ (גזר)

$$\mu(c_1, \dots, c_n) = T \Leftrightarrow \vdash_T \mu(c_1, \dots, c_n)$$

זהו כיוון (של)ההשקפה - האם זה נאמר היטב,
 וההשקפה כן או לא.

$c_1, \dots, c_n$ כך ש- $c_1, \dots, c_n$ ואם נשפוט
 השוואת $\vdash_T \mu(c_1, \dots, c_n) \rightarrow \mu(c'_1, \dots, c'_n)$ בהמשך

הסימנים זה עומד גם בכיוון הפוך $\mu(c_1, \dots, c_n) \rightarrow \vdash_T \mu(c'_1, \dots, c'_n)$
 וזהו המבחן המשפט הטאוטולוגיה יש לקבל

$$\vdash_T \mu(c_1, \dots, c_n) \leftarrow \mu(c'_1, \dots, c'_n)$$

באופן $\vdash_T \mu(c_1, \dots, c_n)$ אלא $\vdash_T \mu(c'_1, \dots, c'_n)$

באופן $\mu(c_1^0, \dots, c_n^0)$ (זהו אלא אלא) $\mu(c_1^0, \dots, c_n^0)$ אלא
 וזה אלא של זה נאמר היטב.

מה קרה? הנינו חברה. כזה נאמר ענין חברה μ .

זהו a של $\mu(a) \in |\mu|$ משתנים

$$\mu(a) = a^0$$

הנחה: זו בדקה פשוטה a^0 זה שישנו מתקשר

זה אנדוקציה μ הנחה של a^0

a הוא ~~הנחה~~ מהנחה $a_1, \dots, a_n$ $\vdash_T a$ לפי הנחה

האנדוקציה $\mu(a_1) = a_1^0, \dots, \mu(a_n) = a_n^0$ ואם

הנחה פשוט של החברה

$$(\text{ii}) \quad \mu(f a_1 \dots a_n) = \mu(f(\mu(a_1), \dots, \mu(a_n))) = \mu(a_1^0, \dots, a_n^0) = a^0$$

הנחה אם A נוסחה אטומית $\mu(A)$ אלא משתנים $\mu(A)$

אם $\vdash_T A$

הנחה A מהנחה $b_1, \dots, b_n$ $\vdash_T A$ לפי הנחה

$$\mu(p b_1 \dots b_n) = \mu(p(\mu(b_1), \dots, \mu(b_n))) = \mu(b_1^0, \dots, b_n^0) = \mu$$

אם $\vdash_T A$ אלא $\vdash_T p b_1 \dots b_n$ אלא $\vdash_T A$

(12)

לחלוקה את זה לפרק הנוסחאות זה לא
אפשרי וזה גם לא ניכין.

למשל, נניח שיש נוסחה $\exists x B$.

הכיוון: אם $\mu(\exists x B) = \text{אמת}$ אז $\vdash \exists x B$

אזכור במקרה זה הכיוון שיש מהלכו?

נבחר $\mu(\exists x B) = \text{אמת}$ קיים $\alpha \in |M|$
כך ש $\mu(B[\alpha/x]) = \text{אמת}$ (*).

בהתאם ונתן לדעת מצב שאפשר להסיק את
 $\vdash \exists x B$ אבל זאת לא עוזר לנו בין שמו
העצם שמה בנינו את M אינו שימושי
אלו התקיימו (*).

אנחנו (תמיד) חסרה בלדעתו הנדבבה של הניקון -
על הרחבת התיאוריה - הוספת קבוצים ידו
למשל את החסר והוספת אקסיומות למבטוח
שהקבוצים מתנהגים כמו שרצונו,
ורצונו להוסיף להם שיתנו הוא הרחבה למחנה!
מזל טוב! (ט)

מבט על הלוגיקה

הגדרה: סמנטיקה T של תכונות הנקראת Henkin אם לכל
נוסחה $\exists x B$ אם משתנים חופשיים יש ב- T קבוצה e
כך $\vdash_T \exists x B \rightarrow B_x[e]$

הגדרה: T נקראת שלמה, כאשר לכל נוסחה סגורה A
או $\vdash A$ או $\vdash \neg A$ (אך לא שניהם)

משפט: אם T שלמה ואם תכונות הנקראן אז לכל נוסחה סגורה
 A , $M(A) = T$ אם $\vdash A$
הוכחה: באינדוקציה על המורכבות של A

(א) עבור A אטומית $M(A) = T$ זה ברור.
(ב) נניח A מהצורה $B \vee C$ אזי $M(B) = T$ או $M(C) = T$
אם $\vdash_T B$ אז

$M(A) = T$ אם $M(B) = F$ $\Leftrightarrow$ לא ניתן ל- B
 $\vdash_T A \Leftrightarrow \vdash_T B \vee C \Leftrightarrow \vdash_T B$ (מש"כ)

(ג) נניח A מהצורה $B \wedge C$
 $M(A) = T$ אם $M(B) = T$ או $M(C) = T$
 $\vdash_T A \Leftrightarrow \vdash_T (B \wedge C) \Leftrightarrow \vdash_T B$ או $\vdash_T C$
הכיוון השני: אם $\vdash_T B \wedge C$ אז
 $\vdash_T B$ או $\vdash_T C$
 $\vdash_T \neg B$ או $\vdash_T \neg C$

אם (א) או (ב) מתקיימים, זה טוב.
אחרת - $B \vee C$, B , C נובע סתירה - $\perp$
ואז אנחנו הולכים להוכיח שזה לא יכול.
סליחה!

(ד) A מהצורה $\exists x B$ ואז
 $M(A) = T$ אם קיים איבר $a \in M$ כך ש- $M(B_x[a]) = T$
 $\Leftrightarrow M(B_x[a]) = T \Leftrightarrow \vdash_T B_x[a]$

אשר a שם עצם בשפה של T ע"פ משתנים,
 הם (שהוא מתקן) השקפות של a הוא איבר ב $|M|$
 ע"פ הנתת הא"צ צ"ה

$$\vdash_T B \times [a] \Leftrightarrow M(B \times [a]) = T$$

ע"פ אקסיומת ההצבה $\vdash B \times [a] \rightarrow \exists x B$

לכן נ- $\vdash_T B \times [a]$ נובע ע"פ MP $\vdash_T \exists x B$

בזמנו $\vdash_T A$. להוכיח שאם $M(A) = T$ אז $\vdash_T A$

לדפוק, נניח ש $\vdash_T A$, ל"א $\vdash_T \exists x B$ ע"פ

תכונת הנק"ן אין כאן מה ע"פ שור. ה"ע"ת תכונת הנק"ן

ק"מ נחזיק e יק ש- $\vdash_T \exists x B \rightarrow B \times [e]$

ע"פ MP $\vdash_T B \times [e]$ ואז ע"פ כל שרשרת

ה השקפות שהוכחנו, אמת $M(A) = T$. נגמר.

מש"ל (ט)

אסטרטגיה אם T שלמה ובע"פ תכונת הנק"ן אז ע"פ

נוסחה A נ- $\vdash_T A$ נובע $M(A) = T$

הוכחה: נסמן ב- A' את השאור של A . ע"פ משפט השאור $\vdash_T A'$

אז $M(A') = T$. A' היא השאור של A ל"א שם

נחזיק את כל המשתנים החופשיים של A בשמות של

אברי $|M|$. $A \times [i_1^0, \dots, i_m^0]$ ונקרא

$$M(A \times [i_1^0, \dots, i_m^0]) = T$$

ואז ע"פ ההגדרה $M(A) = T$ מש"ל (ט)

עזרה ע"פ T אשר למציא היתרה T_c יק ש-

(א) T_c יש תכונת הנק"ן

(ב) T_c היא היתרה של T

הנרחה

לפי $\exists x B$ (גזר) $\exists x B$ ונקיים אקסיומה (קב) $\exists x B \rightarrow B_x [e_{\exists x B}]$

קיימו T_1 .

לפי $\exists x C$ ג. T_1 שאנו ב- T (גזר קב'ם) $\exists x C \rightarrow C_x [e_{\exists x C}]$ ואקסיומה $\exists x C \rightarrow C_x [e_{\exists x C}]$

קיימו T_2 . (משק בקורסה)

נניח שכל בנינו T_n הם נוסח $\exists x D$ ב- T_n

שאנו ב- $T_n + T$ נוסף קבוצ $\exists x E$ ואקסיומה

$$\exists x E \rightarrow D_x [e_{\exists x E}]$$

(קב'ם) T_{n+1} .

T היא איחוד של T_n ($n \geq 1$).

במנייה הראשונה דרשנו הכול נחתקים פכונת הנקין.

מה שמננין הוא שהיא כל זאת הנוחה שלמות.

הוספנו אקסיומות. מדקרה הזקבוקי לא $\exists$ אוק

אנחנו יוצאים שלא הוספנו משפטם השפה המקורית?

נסמן ב- T את הנוחה של שפה T ע"י $\exists$ הקבוצים

של הנקין מכל הנוחה. ע"פ משפט הקבוצים T היא

הנוחה שלמות של T .

נניח ש- A נוסחה ב- T , יק ש- $A \vdash T$: $\exists A \vdash T$.

נניח ש- $B_1, \dots, B_k$ הן האקסיומות של הנקין

שהשתמשו בהן בהסקה של A . אלה הן (נוסחאות)

סגורות (לפי הגדרה). $\leq$ ע"פ משפט הדקדוקי (מסקנה 4)

$$\vdash T B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow A$$

ניתן הסתירה כי כמות הקבוצים ב- B גדולה או שווה לזאת

הקבוצים ב- $B_1, \dots, B_k$ (משפט 30) האקסיומות

לא ממש משנה).

"כדי להוכיח את הדימוקציה
השתמשנו בדימוקציה
מאינדוקציה"

B_1 בנחה $\exists x C \rightarrow C_x [e_{\exists x C}]$
 $e_{\exists x C}$ הוא נמצא ב- $B_2, \dots, B_k, A$ אם כי אפשר
 הקבוצה ניתן להחליף אותה במשתנה y חדש
 למי

$\vdash_T (\exists x C \rightarrow C_x [y]) \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow A$
 אם B הנוטה $\exists$
 $\vdash_T \exists y (\exists x C \rightarrow C_x [y]) \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow A$

מזה שני, אם משפט הדימוקציה
 אם הפסד של בנחה ה- premise
 $\vdash_T \exists y (\exists x C \rightarrow C_x [y])$

אם ככל הנראה הנוחה
 $\vdash_T B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow A$

$\Leftarrow$ אם האינדוקציה A ו- k ,
 $\vdash_T A$, $\vdash_T$ הוכחה שמיני של T ולכן
 $\vdash_T A$ כנדרש.

מל (ט)

משפט השלמות

(א) הוכחנו שאם D שלמה ויש לה תכונת הנק' M (המבנה שבנקודה D) היא מודל של D .

נזכיר את המצבנו:

$$p_M(c_1^0, \dots, c_n^0) = (f(c_1, \dots, c_n))^0$$

$$p_M(c_1^0, \dots, c_n^0) = M(p(c_1, \dots, c_n)) = T \iff T \models p(c_1, \dots, c_n)$$

אם D שלמה אז סימון $\models$ עבור M אפוא עשוי, כלומר, תיאורה היא שלמה.

(ב) קבוצת D אפשר למצוא הוכחה $T \models D$ של D רק של T יש תכונת הנק' T היא הוכחה שמדויק של D .

(ג) נניח של T אין סתירה. אז קיימת הוכחה של T מבלי לסתור את השפה (בזמן שבה T היא אמת השפה כמו של T)! - T שלמה (זה משפט סקולר אומר) [ההוכחה תסתמך על טענה שהיא שקולה לאקסיומת הבחירה אקסיומת הבחירה: יש משפחה של קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ וזל $A_\alpha \neq \emptyset$ אז לכל $\alpha \in I$ נותן $a_\alpha \in A_\alpha$ בזמן קיימת קבוצה נציגים $\{a_\alpha : \alpha \in I\}$.

זו טענה תמימה (לראוה) $(*)$ יש הוכחה: אך סימול שראוה סבס' מאד וכן יאודוה את השליטה של אקסיומת הבחירה. זמן היא תמימה לראוה. יש גם הוכחה אקסיומטית של זמן את אקסיומת הבחירה לזל שלם מרחב וקטורי יש בסיס] [

טענה: תהי I קבוצה תהי $P(I)$ קבוצת החזקה שלה. תהי $Q \in P(I)$.

הגדרה: Q נקרא מאופינת סופית אם ראשי
 $s \in Q$ אם s ת"ק סופית של S ש"ח $Q - f$.



ת"ק סופית.

אם s ה

ש"ח $Q - f$ אם s

אם s ש"ח $Q - f$

אם s מאופינת סופית

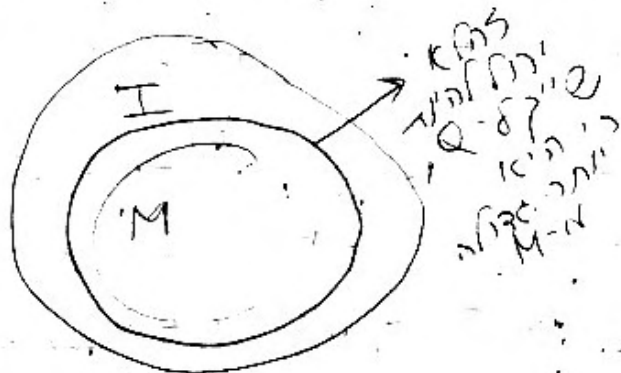
(אצי) (להב) מאוז

למה של ס"ח מולד-ט"ק:

אם $Q \subseteq P(I)$ מאופינת סופית אם יש בה אברים

מקסימליים ($M \in Q$ ו- $M \subseteq M_0 \subseteq I$ ו- $M_0 \in Q$)

אם $M_0 = M$ - לא (המשמעות של מקסימליים)



למה
ש"ח מולד
ה"ק- Q
ה"ח
מ- M
מ- M

למה שלא שקלה

טאקסומה הבחירה

אנחנו לא נוכל לא

למה של ס"ח מולד-ט"ק

הורחא משפט טינגרמאן

T תאורה I קבוצה כל הנוסחאות השמורות בשפה

של T $\{ \varphi \in P(I) : \varphi \text{ ב} [T] \text{ אין סתירה, } S \subseteq I, S \models \varphi \}$

לכור מידע מדויק קבוצה זו מאופינת סופית הרי

הסקר סתירה היא תהליך סופי אם נדעים שבכל קבוצה

סופית אין סתירה, י"א אין סתירה בלל. ע"כ

ס"ח מולד ט"ק יש קבוצה מקסימלית $M \subseteq I$ רק

של $[T \cup M]$ אין סתירה ואם נדע כי A נוסחה אז יש סתירה

$[T \cup M]$ שמה ע"מה? נניח ש A לא ממש $[T \cup M]$ אם

ב $[T \cup M]$ יש סתירה $\Rightarrow$ לא ממש קבוצה $[T \cup M]$ יש להסך A

משפט (ט"ק)

כלל של אינדיקציה - טיפוס

אם $Q \subseteq P(I)$ מוגדרת סדרה של קיימלים בה אברים מקסימליים

כלל קיף $M \in Q$ אם $M_0 \in Q$ ו- $M \in M_0 \subseteq I$ $M = M_0 \Leftrightarrow M \in M_0 \subseteq I$

משפט אינדוקציה (ז)

הנחה

T אומר

I קבוצה של הניסוחים של T

אנחנו קבוצה $Q \subseteq P(I)$

Q קבוצה של חתי קבוצה של I כלל קבוצה

ל (אינדוקציה) מוגדר

$Q = \{S \mid S \in I \text{ או } S = T[S] \text{ או } S = T[S] \}$

I הוא כל הניסוחים במסגרת, (ב) Q אכן כלל קיף

אם $Q \subseteq P(I)$

Q מוגדרת קבוצה של ניסוחים

הקבוצה S היא בעלת I אכן קבוצה של

קבוצה של I אכן $I \neq \emptyset$ אלא $P(I)$

אם S אולימפית סגורה היא של קבוצה של S

אולימפית סגורה וליקן Q וליקן Q מוגדרת

אכן

אכן Q אינדוקציה של כלל קיף בה אברים

מקסימליים $M \in I$ $Q \subseteq M$

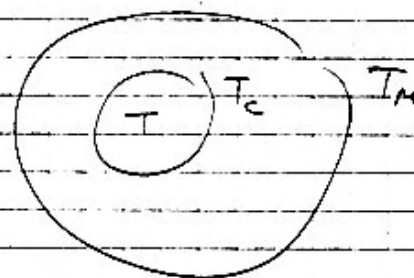
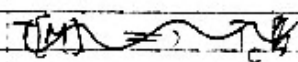
אכן $T[M]$ אולימפית (ב) קבוצה של (Q) אולימפית סגורה

אולימפית $T[M]$ בהכרח אולימפית

כי אם A אולימפית $T[M]$ אולימפית אולימפית

אם $T[M \cup \{A\}]$ בהכרח אולימפית

7A $\frac{1}{2} \text{ mole of } \text{TEM}$ $\rightarrow$ st $\rightarrow$ no e' $\rightarrow$ $n=1$



30.1.06
ט"ו תמוז

המבחן - שאלות תשובות עם בחירה (מלבדים)

- תרגילים עם בחירה

(אולי) - כיון אלא נכון + (ימין)

התרגילים - מה מהצד :

כל מה שהיו בו התנאים צריך להצטרף ולהוסיף טיפוס בחירה
והוא אחר שהוא יתבאר את יורטן (המאולנים)

הוא מקורה למה פרסם מבחן. טיפוסיה :

* פסוק = נוסחה טיפוס

התקבלה בקרב האנשים על אשכול הקבוצות

להבדיל שם מוספים קבוצות לזכרה

T אולי פורמט T מתקבלת מ-T על נוסחה על אשכול קבוצות

הנשים העלה התחבירה וכתוצאה מזה מתקבלת הנוסחה על

האקסיומות הלאיות. מה? הן דבר אנונימיות הם נוסחה אולי

יתר קבוצות של יותר (נוסחה) וזכר יש יותר אקסיומות

אולי האקסיומות הם טופולוגיה (שאריות כמו T. מה? האקסיומות

הם טופולוגיה קבוצה של (נוסחה) שקבוצה אפרוריות אולי ניתנת

טופולוגיה

$$T \vdash A_{x_1, \dots, x_n} [e_1, \dots, e_n] \Leftrightarrow T \vdash A$$

המשפט הזה משתמש. (בשדות) הוכחה אע"פ שיש בו משתנים

חופשיים והם אפרוריים טען להשיגם בלבד זיון משפטם. אחרים

$$T \vdash A_{x_1, \dots, x_n} [e_1, \dots, e_n] \Leftarrow T \vdash A \quad (\Leftarrow)$$

$$T \vdash A \Rightarrow T \vdash A_{x_1, \dots, x_n} [e_1, \dots, e_n] \quad (\Rightarrow)$$

של משתנים. אולי טען יש מאמר בכתב (דעה) שלרוב אולי נקח את...

חופשיים ונשים אותם בהנחה קבוצה C...C. בהנחה זו אין לה משמעות

התנאים יתכן $T \vdash A_{x_1, \dots, x_n} [y_1, \dots, y_n]$ ולי משפט ההצבה $T \vdash A_{x_1, \dots, x_n} [e_1, \dots, e_n]$ כלומר $T \vdash A$



נשים ים שלם ב- A לא מופיעים $x_1, \dots, x_n$ או $[e_1, \dots, e_n]$ Ax .
הנה ים אים A ואי כור שמשפט נכון.

אם, תחת המושגים התדשים של מעני, אם אנוני מרחבים אר-
השפה נ"י תוספת קבוצים בים אר ההרחבה היא שמאניות.

משפט הפלאות: אם D מני פורמלים עם סתירה אז קיים
מבנה M שמכשיר אר D וכל המשפטים של D נכונים ב-
 M .

נשים ים שלם משנה נכון ב- M . זה לא בהכרח אמר שלה
משפט ב- D .

חול אלה לא כל התורות הנשמות בואי עם תמיד שמנוסחה היא
עם משפט אר הליטה שלה משפט.

2.2.06
לויקה

הם ינסו לתקוף בחינה לצומח באתר והיא תהיה אור
המנה של הבחינה.

במבחן יבוי תשואה באקסומות ורעלי יהיוסן.

~~המנהל~~ המנהל של פרופ' ריפס:

rips@cc.huji.ac.il

הוא בודק אתו רמס עכ בסיס יא.